

S. A.
617

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

OPERVM MATHEMATICORVM

TOMVS SECVNDVS,

Complectens

GEOMETRIAM PRACTICAM,
ARITHMETICAM PRACTICAM,
ALGEBRAM.

Omnia in hac editione ab ipſo auctore multis in locis correcta & aucta.



MOGVNTIÆ,

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat REINHARDVS ELTZ.

Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæſar. Maieſt.

ANNO M. DC. XI.

S. R.
617
BIBLIOTHECA NACIONAL DE LISBOA
LIVRARIA D'CARNIDE

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS è SOCIETATE IESV

GEOMETRIA PRACTICA.

PRÆFATIO.

QVANDOQVIDEM Mathematicarum diſciplinarum ſtadium ſcribendo ingreſſi, nonnullam eius partem, fauente Deo, percurrimus: Geometriæ practicæ tractatio omittenda non fuit, vt niſi metam tangere licuerit, ab illa certè quam minime diſtemus. Ætatem ſenectute grauem allicit operis iucunditas, laborem leuat varietas, amicorum preces tantum non cogunt, quò mea ferebar ſponte, ſumma cum feſtinatione properare. Et vero, cum perpetua multorum annorum experientia compererim, admodum paucos eſſe, qui non in Mathematicis exerceantur eo conſilio, vt quæ didicerint, ad aliquem vſum trahant: in hoc quicquid eſt laboris veniebam alacer, vt qui fructus è Mathematicis percipi poſſint ad humanæ vitæ cõmoda, non inani venditatione, ſed re ipſa conſtaret. Etenim dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depreſſiones, locorum omnium inæqualitates inter ſe, & interualla deprehendere metiendo debeamus: cuilibet liquet, vt arbitror, quantum commodi, vtilitatiſque ſubſtructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi ſiderum, aliiſque artibus, & diſciplinis ex horum cognitione manare poſſit. Hæc enim vna Mathematicarum rerum ſcientiæ pars, ſicut ab artificibus ob ſui neceſſitatem auide ſemper eſt arrepta: ita ob inſignes vtilitates, quas in re tota militari ſuppeditat, in maximorum Principum, Regumq; aulis omni tempeſtate verſata eſt. Quamobrem & multos, & eruditos viros habuit, qui partes illius omnes accurata, & diligenti ſcriptione perſecuti ſunt: Inter quos, vt Leonardus Piſanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Orontius, Cardanus, aliique præcipuas obtinuerunt: ita eximia in cæteris laude floruerunt. Primas tamen adiudicarim Jo. Antonio Magino præſtanti Mathematico; qui tametſi tantum linearum dimenſiones docuit, ea tamen copia, doctrina, perſpicacitate cuncta tradidit, vt locum non modo iis,

 qui

qui ante ſcripſerunt, ſed ſpem poſteris, æqualis gloriæ ne dum maioris, ademiſſe videatur. Verum quoniam & hic de vnica tantum parte fuit ſollicitus: & alii, quamuis aggreſſi omnia, multa tamen inter ſcribendum præterierunt: decreui, ſi qua poſſem, perficere: vt, quicquid vtiliter in Geometria practica ab aliis traditum, à me etiam inuentum eſt, vnius operis gyro clauderetur. Quod opus, cum ſpecies tres quantitatis continuæ ſint, in tria membra, parteſq; præcipuas ſecuimus: In prima rectas lineas, in altera ſuperficies, corpora metientes in poſtrema: cui adnectuntur alia, quę non tam ad quantitatis dimenſionem, quam ad alias Geometriæ praxes, ac demonſtrationes pertinent, à noſtro inſtituto non aliena.

VNIVERSAM autem tractationem in octo libros partiti ſumus.

PRIMVS propoſitiones tres omnino neceſſarias, & per quam vtiles ad omnium magnitudinum dimenſionem accurate perficiendam continet.

IN ſecundo dimenſio linearum rectarum per Quadrantem Aſtronomicum tam pendulum, quam ſtabilem abſoluitur.

TERTIVS de earundem rectarum linearum dimenſione per Quadratum Geometricum tum pendulum, tum ſtabile, etiam per vnicam ſtationem agit. Vbi etiam, qua ratione ſine huiuſmodi inſtrumento earundem rectarum linearum Dimenſiones nonnullæ fieri poßint, traditur.

QVARTVS ſuperficierum areas inquirit:

QVINTVS ſolidas magnitudines metitur.

ATQVE hiſce quinque libris omnes tres partes Geometriæ practicæ à nobis propoſitæ explicantur.

IN ſexto deinde libro de Geodæſia, id eſt, de ſuperficierum rectilinearum cuiuſque generis Diuiſione tam per rectas ex certo aliquo puncto ductas, quã per lineas parallelas, diſſeritur. Vbi nonnulla etiam alia problemata ad idem argumentũ ſpectantia ſoluuntur. Item qua ratione figuræ tam planæ, quam ſolidæ, vna cum circulo ac ſphæra in data proportione augendæ ſint, minuendæve. In cuius rei gratiam modi aliquot proponuntur inueniendarum duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas. Deniq; ars facilis, & expedita pro extrahendis radicibus cuiuſq; generis præſcribitur.

SEPTIMVS de figuris Iſoperimetris diſputat.

IN Octauo denique varia problemata ac theoremata Geometrica pertractantur.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER I.

Tria capita ad dimenſionem linearum ſumme neceſſaria complectens,

VT magnitudinum dimenſio omnibus ſuis numeris abſoluta, perfectaque reddatur, tria primo hoc libro diligenter explicanda prius erunt. Primum conſtruenda eſt norma quædam variarum partium, quam non incongrue Inſtrumentum partium vocare poſſumus; quod in eo variæ partes & ad lineas rectas, & ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes ſiue Geometricas, ſiue Aſtronomicas rite perficiendas contineantur. Huius enim vſus credi vix poteſt, quam late pateat tum in dimetiendis magnitudinibus ſine numerorum multiplicatione, tum vero maxime in horologiis Solaribus ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum deſcriptione tradidimus, deſcribendis, & in aliis rebus tam Geometricis, quam Aſtronomicis, vt ex iis, quæ capite primo huius libri, & alibi tradituri ſumus, perſpicuum fiet. Secundo loco conficiendus eſt quadrans, in quo, præter gradus, Minuta quoque ac Secunda (quamuis in eo deſignata non ſint) cognoſci, ac diſcerni queant; docendumque, qua ratione idem præſtari poßit in quolibet quadrante in 90. gradus exquiſite diſtributo: parteſq; centeſimæ, atque milleſimæ in recta quauis linea in paucißimas partes æquales diuiſa dignoſcendæ ſint. Tertio atque poſtremo loco proponenda erunt, ac ſoluenda varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis facile poßint cognoſci. Quamuis enim eadem hæc problemata ad finem Lemmatis 53. lib. 1. noſtri Aſtrolabii expoſita ſint, tamen ne ſtudioſus lector ad illud Lemma ſæpius, & non ſine moleſtia recurrere cogatur, libet ea hic repetere totidem pene verbis, quot in prædicto lemmate perſcripta ſunt. Sed ecce tria hæc, quæ præmittenda eſſe diximus, tribus capitibus explicata ſequuntur.

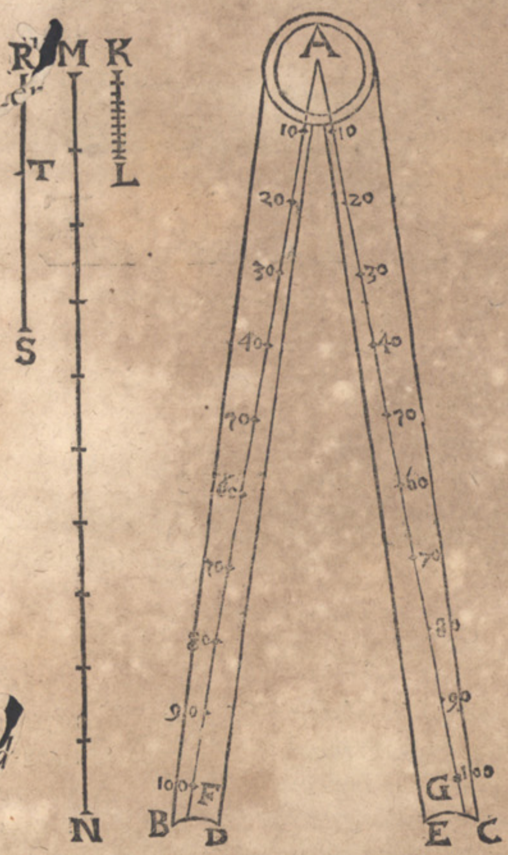
INSTRVMENTI PARTIVM Conſtructio, atque vſus.

CAPVT I.

Inſtrumentum partium quo pacto conſtruatur.

FIANT ex orichalco, vel alia materia ſolida duæ regulæ ABD, AEC, æquales omnino, quæ in A, ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa A, vniformiter poſſint moueri, quemadmodum in Norma vulgari, quæ, prout opus eſt, conſtringi poteſt, & dilatari, fieri ſolet. Deinde ex A, in planis dictarum regularum duæ rectæ ducantur AF, AG, eæq; in 100. particulas æquales diſtribuantur, vel in 1000. ſi longiores ſint. Ita enim ex qualibet recta quotuis partes centeſimæ, aut milleſimæ abſcindi poterunt. Immo ſi ſumatur linea KL, continens 11. particulas ex illis 100. vel 1000. diuidaturque in 10. partes æquales, ſi quidem ſecta ſit vtraque regula in 100. partes æquales, poterunt beneficio rectæ KL, continentis 11. particulas eiuſmodi, & in 10. partes æquales diuiſæ, ex data recta qualibet accipi quotuis milleſimæ partes, perinde ac ſi partes ſingulæ centeſimæ in vtraque regula ſectæ eſſent in denas particulas æquales: ſi vero vtraque regula in 1000. particulas diſtributa ſit, & linea KL, talium 11. partium in 10. particulas diſſecta, poterunt ex quauis linea recta propoſita partes, quot quis voluerit, milleſimarum decimæ auferri, non ſecus ac ſi ſingulæ partes milleſimæ in regula diſtributæ eſſent in 10. particulas æquales, vt in vſu inſtrumenti dicemus.

RVRSVS ſi regula contineat 100. partes, & recta quæpiã MN, conſtans ex 101. eiuſmodi particulis diſtribuatur in 100. partes, poterimus ex data accipere partes decimas milleſimarum. At ſi in regula notatæ ſint 1000. partes & linea quępiam continens eiuſmodi partes 101. ſecetur in 100. partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centenſimæ milleſimarum, ac ſi partes ſingulę milleſimæ in regula complecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1001, diuidatur in 1000. partes, capiemus in quauis recta partes milleſimas milleſimarum, perinde ac ſi partes milleſimæ ſingulæ in regula partes 1000. comprehenderent, vt ex vſu inſtrumenti conſtabit. Atq; hæc eſt, conſtructio inſtrumenti in vna facie pro partibus linearum rectarum inquirendis.



IN altera vero inſtrumenti facie deſignantur chordæ omnium arcuũ quadrantis hoc modo. Ductis ex centro A, rectis AF, AG, vt in priori facie, ſumendus eſt quadrans circuli chordam habens æqualem rectæ AF, & in rectas AF, AG, transferenda chorda gradus 1. illius quadrantis, deinde chorda grad. 2. 3. 4. 5. & ſic deinceps vſq; ad chordam 89. graduum: ita enim ex quolibet quadrante abſcindere licebit arcum quotcunq; graduum, vt Num. 16. dicetur: quamuis nos beneficio particularum æqualium in priori facie poſitarum capiemus ex quadrante propoſito non ſolum gradus integros, ſed etiam minuta, quod Num. 14. docebimus. Atque ita abſoluta eſt conſtructio inſtrumenti in altera facie. Huius inſtrumenti vſus ampliſſimus eſt, vt diximus, & non obſcure ex iis, quæ ſequuntur, intelligi poteſt.

Centeſimæ vel milleſimæ partes in recta linea quo modo accipiantur.

1 QVANDO enim linea recta propoſita rectæ AF, vel AG, in priori facie inſtrumenti æqualis eſt, nullo negotio ex ea abſcindentur quotcunq; partes centeſimæ, prout inſtrumentum in 100. aut 1000. partes fuerit diuiſum; ſi nimirum partes, quæ deſiderantur, ex inſtrumento in datam rectam transferantur.

2 QVANDO vero propoſita linea non eſt æqualis rectæ AF, vel AG, in inſtrumento, dilatandum inſtrumẽtũ eſt, vel conſtringẽdũ, donec interuallũ inter F, G, datæ lineæ ſit ęquale. Nã circinus inter partes rectarũ AF, AG, quæ, deſiderantur, extenſus dabit in recta propoſita partes quæſitas. Vt ſi data recta æqualis ſit ipſi FG, & deſiderentur 50. partes centeſimæ, continebit interuallum inter partes 50. & 50. in lineis AF, AG, partes 50. ex 100. in quas recta FG, cogitatur eſſe diuiſa, quod ſic demonſtratur. [a] Rectæ FG, & 50. (ſi concipiatur ducta recta à parte 50. ad partem 50.) parallelæ ſunt, propterea quod latera AF, AG, proportionaliter ſecta ſunt in 50. & 50. Sunt enim tam AF, AG, quam A 50. A 50. [b] æquales. Igitur erit vt A 50. ad rectum 50. 50. ita AF, ad FG. Et permutando vt A 50. ad AF, ita recta 50. 50. ad FG. Cum ergo A 50. contineat partes 50. ex 100. totius AF, continebit quoque recta 50. 50. partes 50. ex 100. in quas diuiſa eſſe concipitur FG. Eademque ratio eſt de cæteris. Nam verbi gratia interuallum quoq; inter puncta 80. & 80. partes 80. complectetur ex 100. totius FG, &c. quæ demonſtratio locum etiam habet, ſi in AF, contineantur 1000. partes vt conſtat.

a 2. ſexti.

b 4. ſexti.

Diuiſa recta in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia cõtineantur.

NON aliter, propoſitis duabus rectis, quarum altera in quotlibet partes æquales cogitetur eſſe diuiſa, cognoſcemus, quotnam ex illis partibus altera recta contineat; hac ſcilicet ratione. Aperto inſtrumento, ſtatuatur interuallum rectæ diuiſæ inter partes, in quas diuiſa intelligitur. Nam ſi altera per circinum transferatur inter duas alias partes eaſdem, vel inter duo puncta ab eiſdem duabus partibus æqualiter diſtantia, continebit illa recta tot partes, quot in regula AF, includuntur inter centrum A, & circini pedem: [c] propterea quod eandem proportionem habet ſegmentum regulæ AF, vſque ad interuallum rectæ diuiſæ, ad ſegmentum eiuſdem regulæ vſque ad interuallum alterius lineæ, quam interuallum rectæ diuiſæ ad interuallum alterius lineæ habet, &c. Quod ſi linea hęc altera eſſet nimis longa, auferendum ex ea primum eſſet interuallum inter 100. & 100. quoties fieri poteſt. Deinde reliquum ſegmentum transferendum in inſtrumentum, vt dictum eſt. Verbi gratia; ſi altera rectarum diuiſa ſit in 50. partes æquales, ſumemus ei æquale interuallum inter 50. & 50. Si ergo altera habuerit interuallum æquale rectæ FG, inter 100. & 100. continebit ea 100. partes æquales. Et ſi in ea ſupereſſet ſegmentum æquale interuallo 30. 30. contineret eadem recta partes 130. Quod ſi interuallum inter 100. & 100. ter in data recta contineretur, & inſuper ſegmentũ æquale interuallo 40. 40. complecteretur ea recta particulas 340. &c.

c 4. ſexti.

Tangentes quo modo accipiãtur reſpectu ſinus totius 100.

3 ITAQVE ſi in Tangentibus nouæ deſcriptionis horologiorum (vt huius inſtrumenti vtilitatẽ quoq; in deſcribendis horologiis aperiamus) ſinus totus ſtatuatur 100. quantuſcunq; ille ſit, eiq; interuallum FG, ponatur æquale, capiemus commodiſſime quamcunq; Tangentem tabulæ in noua deſcriptione poſitæ, ſi ea, abiecta prima tantum figura ad dexteram, minor fuerit quam 100. Vt ſi quæratur Tangens Gr. 39. min. 57. quoniam ea in tabula eſt 838. ſi abiiciatur prima figura 8. ad dexteram, erit Tangens 83. reſpectu ſinus totius 100. vel potius 84. propterea quod figura 8. abiecta maior eſt, quam 5. ac proinde pro ea vnitas adiicienda eſt, cum conſtituat $\frac{8}{10}$. hoc eſt, pluſquam $\frac{1}{2}$. Itaque accipiantur in inſtrumento partes 84. paulo minus, vt dictum eſt, habebitur Tangens quæſita: ſi vero Tangens in tabula, abiecta prima figura ad dexteram, maior fuerit quam 100. accipienda eſt Tangens per denas, atque vnitates expreſſa, relictis centenis, & illi Tangenti poſtea ſinus totus adiiciendus eſt toties, quoties vnitas in centenis reperitur. Vt ſi quis velit Tangentem Gr. 68. min. 50. Quoniam ea in tabula eſt 2583. & adiecta prima figura, 258. ſumenda eſt Tangans 58. eique ſinus totus FG, bis adiiciendus, & ſic de reliquis.

6 QVOD

4. QVOD ſi rectam KL, partium 11. in 10. æquales partes diuiſam adhibere velimus accipere poterimus ex data recta partes milleſimas. Quoniam enim ita ſe habet linea KL, ad vnam eius partem, vt portio A, 10. rectæ AF, decem partium ad vnam, cum vtrobique proportio ſit decupla; erit permutando quoque KL, ad A, 10. vt vna particula ipſius A 10. Cum ergo KL, contineat ipſam A, 10. ſemel, & inſuper partem ipſius decimam, (ſumpta eſt enim KL, partium 11. qualium 10. eſt A, 10.) continebit quoque vna particula ipſius KL, vnam particulam ipſius A 10. ſemel, & decimam inſuper eius partem: Atque adeo duæ illius includent duas huius cum $\frac{2}{10}$. & tres continebunt tres cum $\frac{3}{10}$. & ſic deinceps. Quare ſi verbi gratia deſiderentur $\frac{87}{1000}$. accipiendæ erunt octo partes ex 100. totius AF, & inſuper $\frac{7}{10}$. ſequentis partis nonæ, cum decima pars vnius centeſimæ ſit $\frac{1}{1000}$. quod ita fiet. Circino aliquo ſumantur 7. partes ex KL, eæque in AF, transferentur ex qualibet parte. Nam pes circini mobilis auferet $\frac{7}{10}$. ex octaua parte poſt pedem circini immobilem, quæ particula in nonam partem eſt transferenda. Ita enim, cum octo partes complectantur $\frac{80}{10}$. vnius centeſimæ, (quod quælibet pars contineat $\frac{10}{10}$. vnius centeſimæ) hoc eſt, $\frac{80}{1000}$. & $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ contineant $\frac{7}{1000}$. comprehendet tota linea abſciſſa $\frac{87}{1000}$. Item ſi quis cupiat $\frac{17}{1000}$. accipienda erit vna pars ipſius AF, & $\frac{7}{10}$. ſequentis partis ſecundæ, vt paulo ante dictum eſt. Vel ſic agemus. Sumptis 7. partibus ex KL, transferemus eas in AF, vbicunque libuerit. Nam abſciſſæ partes erunt 7$\frac{7}{10}$. Vna ergo pars cum $\frac{7}{10}$. continebit $\frac{17}{1000}$. Denique ſi optentur $\frac{457}{1000}$. ſumendæ erunt ex recta AF, partes 45. cum hæ æquiualeant $\frac{450}{1000}$. Deinde $\frac{7}{10}$. ex ſequenti parte quadrageſima ſexta, beneficio ſeptem particularum rectæ KL, &c.

Milleſimæ partes quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento contineantur tantum partes 100.

5 SI ergo ſinus totus ponatur 1000. habebuntur Tangentes, vt in tabula nouæ deſcriptionis horologiorum poſitæ ſunt, nulla figura abiecta. Sed quando Tangens maior eſt quam 1000. relictis millenis, accipiendæ ſunt reliquæ partes milleſimæ pro Tangente, eiq; toties ſinus totus addendus, quoties vnitas in millenis relictis reperitur. Vt ſi quis velit Tangentem Grad. 40. min. 30. quæ in tabula eſt 854. accipiendæ ſunt in regula AF, partes 85. & $\frac{4}{10}$. vnius. Ita enim Tangens continebit partes 854. ex 1000. At ſi quæratur Tangens continebit partes 854. ex 1000. At ſi quæratur Tangens Grad. 80. min. 0. quæ in tabula eſt 5671. relictis millenis, accipiendæ ſunt partes 67. & $\frac{1}{10}$. vnius partis, & Tangenti 671. addendus ſinus totus quinquies.

Tangentes quo modo inueniantur, poſito ſinu toto 100.

6 PARI ratione ſi adhibeatur recta MN, partium 101. diuiſa in 100. depromemus ex recta AF, partes decimas milleſimarum; cum quælibet particula rectæ MN, contineat vnam particulam ipſius AF, ſemel, & inſuper $\frac{1}{100}$. Ita vt quælibet particula rectæ AF, diuiſa eſſe cogitetur in 100. particulas; ac proinde tota AF, 10000. particularum, quod eodem modo demonſtrabitur. Eſt enim eadem proportio MN, ad vnam particulam ſuam centeſimam, quæ rectæ AF, ad vnam ſuam centeſimam, &c.

Decimæ partes milleſimarum quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumetum diuiſum ſit in 1000. partes duntaxat.

7 ATQVE hac ratione haberi poterunt Tangentes, poſito ſinu toto 10000. abiectis nimirum tribus figuris primis ex Tangentibus tabulæ in noſtro Theodoſio deſcriptæ. Vt ſi velimus Tangentem Grad. 78. Min. 30. quæ in tabula (abiectis tribus figuris) eſt 49151. relictis denis millenarum, accipiemus partes 9151. nimirum partes 91. ex 100. regulæ AF, & $\frac{51}{100}$. vnius quod fiet, ſi partes 51. rectæ MN, transferantur in AF. Circinus enim vltra partes 51. abſcindet $\frac{51}{100}$. Nam quia ſingulæ particulæ rectæ AF cõcipiuntur ſectæ in 100. particulas, continebuntur in 91. partibus particulæ 9100. quibus ſi addantur 51. habebitur Tangens 9151. Huic tandem apponendus eſt ſinus totus quater, propter quatuor denas millenarum relictas. Facile autem ad 91. partes adiicies particulam continentem $\frac{51}{100}$. vnius centeſimæ, ſi eam, (quæ nimirum vltra partes 51. regulæ AF, exiſtit) cum vna parte regulæ AF, transferas, vt pes circini inter partes 91. & 92. cadat, hoc eſt, ſi eam cum vna parte transferas ex parte 90. vel cum duabus partibus, ex parte 89. &c.

Tangẽtes, poſito ſinu toto 10000. quo pacto ſumantur.

8 INVENTA porro Tangente in vtraque regula AF, AG, dabit interuallum inter Tangentem regulæ AF, & Tangentem regulæ AG, eandem Tangentem reſpectu ſinus totius FG.

9 QVANDO autem Tangens tam exigua eſt, vt eius interuallum prope punctum A, accipi nequeat, vtemur hoc artificio. Sit verbi gratia ſumenda Tangens 7. partium reſpectu ſinus totius FG. Sumptis duabus Tangentibus maioribus, quarum maior minorem ſeptem vnitatibus ſuperet, nimirum 30. & 37. vel 80. & 87. &c. dabit earum differentia (ſi nimirum vtraq; in aliquam rectam lineam transferatur) Tangentem 7. quæ quæritur: Atque ita ſemper ſumendæ erunt duæ tangentes maiores prope medium inſtrumentis quarum differentia æqualis ſit Tangenti exiguæ propoſitæ.

Qua ratione ex inuenta parte milleſima, vel decies milleſima in AF, eadem reperiatur reſpectu dati ſinus totius.

10. SI vtraque regula AF, AG, contineat 1000. particulas, & ſinus totus propoſitus conſtituatur 1000. eique interuallum FG, æquale ſumatur, commodiſſime accipientur omnes Tangentes, vt in tabula nouæ deſcriptionis horologiorum poſitæ ſunt. Nam verbi gratia Tangens 2430. Grad. 67. min. 38. habebitur, ſi relictis millenis, ſumatur interuallum inter partes 430. vtriuſque regulæ AF, AG, eique ſinus totus FG, bis adijciatur.

11. ET ſi adhibeas lineam KL, partium 11. diuiſam in 10. accipere poteris Tangentes reſpectu ſinus totius 10000. Item ſi rectam partium 101. in 100. particulas diſtributam adhibeas, habebis Tangentes reſpectu ſinus totius 100000. Si denique rectam partium 1001. partiaris in 1000. particulas, obtinebis Tangentes, poſito ſinu toto 1000000. vt ex dictis patet.

12. QVOD dictum eſt de Tangentibus, intelligendum eſt etiam de ſinubus, & ſecantibus. Nã ſi interuallũ FG, æquale ſit ſinui alicui toti, ſiue is partiũ ſit 100. ſiue 1000. ſiue pluriũ, dabunt interualla inter ſinus, vel ſecantes in vtraque regula AF, AG, acceptas, per ea, quæ Num. 4. docuimus, ſinus & ſecantes reſpectu ſinus totius FG, accepti; propterea quod per Lemma 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabii, eandem proportionem habet ſinus totus AF, ad ſinum totum FG, quam ſinus verbi gratia A, 50. ad ſinum arcus circuli, cuius ſemidiameter FG, qui arcus arcui ſinus A, 50. ſimilis eſt.[a] Cum ergo ſit, vt AF, ad FG, ita A 50. ad rectam 50. 50. erit recta 50. 50. ſinus arcus, qui arcui ſinus A, 50. ſimilis eſt. Eademque ratio eſt de ſecantibus.

a 4. ſexti.

13. Viciſſim cognoſcemus, quot particulas ex 1000. quælibet particula vnius partis rectæ AF, complectatur: hoc ſcilicet modo. Circino ſumatur data particula, vna cum vna parte centeſima, vel duabus, vel tribus, quatuorue; circinuſque decies repetatur in recta AF, diligenterque notetur ſegmentum rectæ AF, quod circinus percucurrit. Nam ſi ex partibus centeſimis in eo ſegmento contentis abiiciantur toties 10. quot partes vna cũ particula data ſumptæ fuerunt, reliquus numerus indicabit partes decimas vnius centeſimæ, hoc eſt, milleſimas in data particula cõprehẽſas. Et ſi cũ reliqua particula eius ſegmẽti (ſi qua forte ſuperſit) ſimiliter agem⁹, re-

Quo pacto cognoſcatur, quot decimæ in particula cuiuſuis centeſimæ partis contineantur.

 periemus

periemus partes decimas vnius milleſimæ, hoc eſt, partes $\frac{1}{10000}$. Et ſi iterum operationem repetemus, inueniemus partes $\frac{1}{100000}$. quod quidem ad finem libelli de fabrica, & vſu inſtrumenti horologiorum demonſtrauimus, eãdemque demonſtrationem breuiter capite inſequenti Num. 14. repetemus. Exempli cauſa. Si particula data cum tribus centeſimis decies repetita percurrat partes 37. abiectis 30. continebuntur in data particula $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ. Quare ſi ea particula data fuerit v. g. poſt vigeſimam partem centeſimam, continebit illud ſegmentum rectæ AF, $\frac{207}{1000}$. Nam $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ faciunt $\frac{7}{1000}$. & 20. centeſimæ, ſi ſingulæ in decem particulas cogitentur eſſe ſectæ, efficiunt $\frac{200}{1000}$. quippe cum omnes centum partes æquiualeant 1000. particulis. Quod ſi idem fiat cum reliqua particula (ſi qua forte ſuperfuerit poſt 37. partes percurſas) vna cum tribus centeſimis, & inciderimus verbi gratia in particulam 34. abiectis 30. continebit ea particula $\frac{4}{10}$. vnius milleſimæ, hoc eſt. $\frac{4}{10000}$. Et quia $\frac{207}{1000}$ æquiualent $\frac{2070}{10000}$. ſi addantur $\frac{4}{10000}$. vltimo loco deprehenſæ, habebimus $\frac{2074}{10000}$. Si denique cum reliqua particula (ſi qua forte remanſerit) vna cũ tribus centeſimis idem fiat, percurſæq; verbi gratia ſint 39. partes, abiectis 30. ſupererunt $\frac{9}{10}$. vnius partis $\frac{1}{10000}$. hoc eſt, $\frac{9}{100000}$. Cum ergo $\frac{2074}{10000}$. efficiant $\frac{20740}{100000}$. ſi addantur $\frac{9}{100000}$. habebimus $\frac{20749}{100000}$. Atq; adeo ſi recta AF, ſtatuatur ſinus totus partiũ 100000. erit ſegmentũ 20. partium cum particula data, ſinus partium 20749. Si particula data commode per circinum poſſit cõprehendi, & decies repetatur, dabũt centeſimæ partes percurſæ partes decimas vnius centeſimæ, &c. Si quoq; nonnunquam nulla ſuperſit particula, ita vt verbi gratia inuentæ ſint præciſæ $\frac{207}{1000}$. multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per 100. vt habeatur ſinus 20700 reſpectu ſinus totius 100000. quemadmodum & 40. centeſimæ conſtituunt ſinum 40000. reſpectu ſinu totius 100000. Si namque vterque numerus minutiæ $\frac{40}{100}$. ducatur in 1000. fiet minutia $\frac{40000}{100000}$.

Ex circulo qua ratione abſcindatur arcus datorũ gr. ac min.

14. HOC eodem inſtrumento, & in eadem facie partium æqualium, ex data qualibet circumferentia auferemus arcum quotuis graduum, & minutorum, hac arte. Sit ex quadrante, cuius ſemidiameter interuallo FG, æqualis ſit, abſcindẽdus verbi arcus gr. 53. min. 30. hoc eſt, chorda huius arcus inuenienda. Sumatur ex tabula ſinuum ſinus ſemiſſis propoſiti arcus, graduũ videlicet 26. min. 45. qui ſinus, abiectis quatuor figuris ad dexteram, eſt 450. reſpectu ſinus totius 1000. Si ergo ſinus hic reſpectu ſinus totius AF, accipiatur in recta AF, vſque ad 45. per ea, quæ ſupra Num. 4. & 12. tradita ſunt, dabit interuallum inter 45. & 45. ſinum quoque eundem reſpectu ſinus totius FG, quod interuallum duplicatum dabit chordam dupli arcus grad. 26. min. 45. id eſt, chordam arcus grad. 53. min. 30. qui quæritur. Si ſinus totus ſtatuatur 10000. erit ſinus grad 26. min. 45. in tabula ſinuum 4501 abiectis nimirum tribus, figuris ad dexteram, qui in AF, capietur, vt Num. 6. & 12. dictum eſt.

Quot gradus, ac minuta in dato arcu contineantur, quo pacto cognoſcatur.

QVOD ſi vtraque regula AF, AG, continet 1000. partes, ſtatui poterit ſinus totus 100000. & etiam plurium partium, ſi nimirum adhibeatur recta MN, partium 101. diuiſa in 100. particulas, vel alia recta partium 1001. in 1000. particulas ſecta.

15. E CONTRARIO facile etiam cognoſcemus, quot gradus, & minuta in propoſito arcu cuiuſuis quadrantis contineantur. Sit enim in quadrante, cuius ſemidiameter FG, cui æqualis ſit recta RS, datus aliquis arcus, cuius chordæ ſemiſſis ſit RT. Huic RT, æqualis inueniatur recta 40. 40. inter rectas AF, AG, ita vt puncto 40. 40. vel abſcindant æquales partes, vt in dato exemplo, vel æqualiter diſtent à duabus partibus ęqualibus. Deinde per ea, quæ Num. 13. ſcripſimus, inquiratur, quot partes ex 1000. vel 10000. vel 100000. in ſegmento ab A, vſque ad punctum inuentum 40. comprehendantur. In dato exemplo reperiuntur partes 400. vel 4000. vel 40000. prout ſinus totus conſtituitur 1000. vel 10000. vel 100000. atque tantus eſt ſinus 40. 40. reſpectu ſinus totius FG, cui reſpondent Grad. 23 min. 35. Duplus ergo arcus gr. 47. min. 10. qui chordæ ipſius RT, duplæ debetur, erit is, qui quæritur.

Quo pacto aliter ex circulo abſcindantur arcus datorum gr. & min.

16. IN altera facie inſtrumenti, in quam chordæ arcuum quadrantis ſunt tranſlatæ, facilius arcum quotcunque graduum accipiemus, hoc modo, Chordæ quadrantis propoſiti ſumatur æquale interuallum FG: Vel etiam ſemidiametro Quadrantis, chordæ nimirum grad. 60. capiatur interuallum 60. 60. æquale. Si igitur verbi gratia deſideret quis arcum grad. 56. ſumendum erit per circinum interuallum inter puncta 56. & 56. Huic enim æqualis eſt chorda grad. 56. Si præter gradus accipienda ſint etiam minuta, oportebit per æſtimationem in ſequenti particula accipere talem partem ipſius, qualem minuta propoſita partem vnius gradus conſtituunt, Vt ſi cupiat quis min. 30. ſumenda eſt ſemiſſis, ſi 20. tertia pars, &c. Interuallum enim inter partem regulæ AF, & partem regulæ AG, acceptum dabit chordam quæſiti arcus.

Quo pacto aliter cognoſcatur, quot grad. & min. in dato arcu comprehẽdantur.

VICISSIM ſi cognoſcere velimus, quot gradus, ac minuta in dato arcu exiſtant, inueſtiganda erit eius chorda inter rectas AF, AG, ita vt puncta eius cadant vel in duas partes eaſdem, vel æqualiter à duabus eiſdem diſtent. Nam tot gradus continebuntur in dato arcu, quot gradus continentur in recta AF, à centro A, vſque ad punctum, è quo chorda dati arcus in rectam AG, tranſlata eſt: ita vt ſi dati arcus chorda extiterit inter grad. 70. & 70. propoſitus arcus complectatur grad. 70. &c.

Qua ratione ex data recta pars imperata abſcindatur.

17. IAM vero nemo neſcit, ſi ex linea aliqua abſcindenda ſit $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{17}$. vel denique quæcunque pars, cuius denominator maior non ſit quam 100. quo pacto id fieri debeat. Si namque interuallum FG, in priori facie inſtrumenti æquale fuerit datæ rectæ, dabit interuallum inter 50. & 50. partem $\frac{1}{2}$. Interuallum autem inter 25. & 25. partem $\frac{1}{4}$. Interuallum vero inter 20. & 20. partem $\frac{1}{5}$. Item ſi interuallum inter 90. & 90. vel inter 60. & 60. vel inter 30. & 30. fiat datæ rectæ æquale, dabit interuallum inter 30. & 30. vel inter 20. & 20. vel inter 10. & 10. partem $\frac{1}{3}$. Rurſus ſi interuallum inter 17. & 17. vel inter 34. & 34. datæ rectæ ſumatur æquale, dabit interuallum inter 1. & 1. vel inter 2. & 2. partem $\frac{1}{17}$. At interuallum inter 5. & 5. vel inter 10. & 10. dabit $\frac{5}{17}$. &c. Ex hiſce porro exemplis adductis facile intelliges, quo modo te in aliis partibus imperatis gerere debeas.]

Qua ratione ex dato circulo latus polygoni propoſiti inueniatur.

18. NON aliter in poſteriori facie inſtrumenti latera polygonorum in quouis circulo reperiemus. Nam gradus 120. (qui facile accipientur, ſi quadranti graduum 90. adijciantur gradus 30.) dabunt latus trianguli æquilateri. Gradus 90. latus quadrati. Gradus 72. latus pentagoni. Gradus $51\frac{3}{7}$. hoc eſt, gradus 51. min. 26. paulo minus, latus heptagoni, &c. qui quidem gradus habebuntur, ſi gradus 360. totius circuli per numerum laterum polygoni propoſiti diuidantur.

Quo pacto

19. QVANDO in dato quadrante cognoſcere lubet, (quod non raro vſu venit) in quodnam punctum ſemidiametri perpendicularis ex quouis gradu ab altera ſemidiametro numerato demiſſa cadat, ita agendum

erit

erit.. Sit verbi gratia ſemidiameter alicuius quadrantis FG, quærendumque ſit punctum, in quod cadat perpendicularis ex grad. 26. min. 45. demiſſa. Sinus grad. 26, min, 45. eſt 45. poſito ſinu toto 100. Ergo & recta inter partes 45. & 45. erit ſinus grad. 26. min. 45. reſpectu ſinus totius FG, vt Num. 12. oſtenſum eſt. Quocirca recta 45. 45. in ſemidiametrum dati quadrantis ex centro tranſlata, indicabit punctum quæſitum.

cognoſcatur. in q̃ pũctum ſemidiametri cadat perpendicularis ex quolibet gradu quadrãtis demiſſa.

20. NON aliter reperiemus in diametro Aſtrolabii (quod notatu dignum eſt) punctum cuiuſcunq; declinationis. Poſito enim ſinu toto ſemidiametro Æquatoris, ſi declinatio eſt Borealis, transferenda eſt in diametrum ex centro Tangens ſemiſſis complementi declinationis: ſi vero Auſtralis, Tangens ſemiſſis arcus ex quadrante & declinatione compoſiti. Vt Tangens grad. 33. min. 15. qui ſemiſſem complementi declinationis Cancri conſtituunt, dabit punctum extremum ſemidiametri paralleli Cancri, quod videlicet ab Æquatore in Boream grad. 23. min. 30. declinat. Tangens vero grad. 56. min. 45. qui ſemiſſem conſtituunt arcus ex quadrante & declinatione Capricorni conflati, dabit extremum punctũ ſemidiametri paralleli Capricorni, quod ab Æquatore in Auſtrum grad. 23. min. 30. recedit. Ratio huiuſce rei eſt, quod recta in Aſtrolabio ab extremitate diametri rectum Horizontem referentis vſque ad interſectionem paralleli Borealis, cum altera diametro Meridianum repræſentante ducta conſtituit cum altera diametro angulum ſemiſſis complementi declinationis borealis; ad interſectionẽ vero paralleli auſtralis cũ eadẽ poſteriore diametro educta, efficit angulũ ſemiſſis arcus ex quadrãte & declinatione auſtrali cõflati: atq; vtriuslibet anguli Tãgẽs ſemidiameter eſt paralleli, vt ex Aſtrolabio liquet.

Quo pacto in diametro Aſtrolabij punctum cuiuſuis declinationis reperiatur.

EODEMQVE modo, ſi conſtiterit, quem angulum in extremitate ſemidiametri Æquatoris in Aſtrolabio recta ad quodcunq; punctum diametri, quæ ad illam ſemidiametrum perpendicularis eſt, ducta conſtituat, reperiemus punctum illud per Tangentem illius anguli, ſicut in parallelis Cancri & Capriç. factum eſt.

21 SI etiam quæcunq; linea ex centro inſtrumenti huius egrediens ſecetur quomodocunq;, vt v.g. extrema & media ratione, vel (quod operæ pretium eſſet, vt expeditius horologia deſcribantur) ſicut ęquinoctialis linea in horologio horizontali diuiſa eſt: ſecabitur quæuis alia ſimiliter, ſi nimirum ei æquale interuallum FG, ſumatur, vt ex dictis liquido conſtat. Satis tamen eſt, ſi horæ ex vna parte lineæ meridianæ, nimirum vel horæ antemeridianæ, vel pomeridianæ duntaxat in inſtrumentum transferantur.

Præceptũ generale ad diuidẽdam lineã datam, vt alia quæcũ diuiſa eſt.

22 PRÆTEREA aperto inſtrumento quomodocunq;, cognoſcemus quantitatem anguli FAG, in centro A, conſtituti, hoc modo. Circino ſumatur interuallum inter grad. 60. & 60. in poſteriori inſtrumenti facie, transferaturq; ex centro in alterutram lineam chordarum. Nam quot gradus in eo interuallo includuntur, tot gradus continebit angulus FAG. Ratio eſt, quod arcus ex centro A, per grad. 60. & 60. deſcriptus portio eſt quadrantis, cuius chorda eſt tota linea AF: propterea quod chorda 60. graduum ſemidiameter eſt quadrantis dicti, cuius chorda eſt AF, vt ex inſtrumenti conſtructione manifeſtum eſt. Igitur interuallum inter grad. 60. & 60. eſt chorda anguli FAG, propoſiti, &c.

[...]a ratione quantitas anguli quẽ latera inſtrumenti continẽt cognoſcatur.

23 SED neq; hoc omittendum eſt (quandoquidem de tangentibus, Sinubus & Secantibus in hoc inſtrumento reſpectu dati ſinus totius accipiendis verba fecimus) ſinum totum interdum eſſe tam exiguum, vt ex F, in G, transferri nequeat, etiamſi inſtrumentum prorſus claudatur. Vt ergo reſpectu illius ſinus totius Tangentes, ſinus, ac ſecantes accipere poſſimus ex inſtrumento, ſumendus eſt ille ſinus totus in aliqua recta bis, ter, aut quater, &c. atq; ita ex F, in G, transferendus. Nam ſi Tangentium quæſitarum, vel ſinuum, aut ſecantium reſpectu ſinus totius 100. capiantur ſemiſſes, vel tertiæ partes, aut quartæ, &c. prout videl. ſinus totus bis, ter, quaterue, &c. acceptus fuit, habebuntur Tangentes quæſitæ, vel ſinus aut ſecantes. Vt ſi ſinus totus duplicetur, & poſito ſinu toto 100. Tangens verbi gratia ſit 378. ſumenda eſt tangens 189. &c. Sed commodiſſime res hæc peragetur, ſi ſinus totus, qui perpuſillus eſt, decupletur. Ita enim poſito ſinu toto 100. ſi ex Tangẽte v. g. propoſita (relicta prima fiura ad dexteram) abiiciatur vna figura ad dexteram, quæ eſt ſecunda in tota Tangente habebitur decima eius pars. Habenda tamen ſemper eſt ratio figuræ abiectæ, vt ſcil. pro ea ſumatur 1. ſi maior eſt quam 5. &c. Hac ratione Tangente 2414. gr. 67. min. 30. propoſita (relictis $\frac{4}{1000}$.) transferenda erit Tangens 24. paulo amplius, nimirum pars decima Tangentis 241. reſpectu ſinus totius 100.

Quando ſinus totus tam paruꝰ eſt, vt in inſtrumentũ transferri nequeat, quid agendum.

24 SIC etiam, quando Tangens aliqua ſinum totum ſuperat, ne cogamur primum ſinum totum aliquoties transferre, deinde vero reliquas partes, vel contra; ſed vt ſtatim punctum, quod quæritur, per vnã tranſlationem poſſimus inuenire, diuidenda eſt tota Tangens tabulæ ad finem nouæ deſcriptionis Horologiorum poſitæ per 2. vel 3. vel per talem denique numerum, vt producatur in Quotiente Tangens trium figurarum. Tunc enim abiecta prima figura ad dextram, reliqua Tangens transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. multiplicati per eundem numerũ, per quem Tangens diuiſa fuit. Vt Tangens hor. 4. & 8. reſpectu ſinus totius 1000 eſt 1732. quæ diuiſa per 2. facit 866. Ergo transferenda eſt Tangens $86\frac{1}{2}$. paulo amplius reſpectu ſinus totius 100 duplicati. Item Tangens hor. 5. & 7. eſt 3732. quæ diuiſa per 4 facit 933. Ergo Tangens $93\frac{3}{10}$. transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. quadruplicati. Atq; ita de cæteris.

Quando Tangẽs ſuperat ſinũ totũ, quid agendum, vt per vnicam tranſlationẽ punctum quæſitum inueniatur.

25 IN hoc eodem deniq; inſtrumento facile duabus rectis tertiam proportionalem, & tribus quartã adiungemus. Nam ſi, duab. propoſitis, primæ in recta AF, regulæ AB, æqualis capiatur: & ſecunda à fine huius, aperto inſtrumento. per circinum transferatur in regulam AG, ad numerum ſimilem illi, qui in extremo primę in regula AB, appoſitus eſt (ita vt pedes circini ſtatuantur vel in ſimilibus partibus vtriuſq; regulæ, vel in duobus punctis æqualiter diſtantibus à ſimilibus partibus) eidemq; ſecundæ in regula AB, æqualis ſumatur, dabit interuallum inter finem huius ſecundæ, & numerum in regula AG, ſimilem illi, qui prope finem ſecundæ ſcriptus eſt, tertiam proportionalem, vt ex demonſtratis Num 2. conſtare poteſt.

Quo pacto tertia & quarta proportionalis reperiatur.

EADEM ratione, ſi, tribus rectis propoſitis, prima & ſecunda in inſtrumentum transferantur, vt dictũ eſt, tertiæ autem in regula AB, æqualis quoq; capiatur, dabit interuallum inter finem tertiæ, & numerum regulæ AG, ſimilem illi, qui ad extremum tertiæ in regula AB, notatus eſt, quartam proportionalem.

QVOD ſi lineæ propoſitę tam magnæ ſint, vel aliqua illarum, vt in inſtrumentum transportari nequeãt, ſumendæ erunt omnium ſemiſſes, vel tertiæ partes, vel quartæ, &c. atque cum illis procedendum, vt dictum eſt. Inuenta. n. duplicata, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. offeret tertiam aut quartã proportionalem quæſitã.

26 LOCO prędicti inſtrumenti conſtrui poteſt in lamina aliqua, vel plano quolibet, figura eundẽ vſum habens, facillima hac ratione. Fiat angulus BAC, cuiuſcunq; magnitudinis; quo autẽ maior fuerit, eo maiores

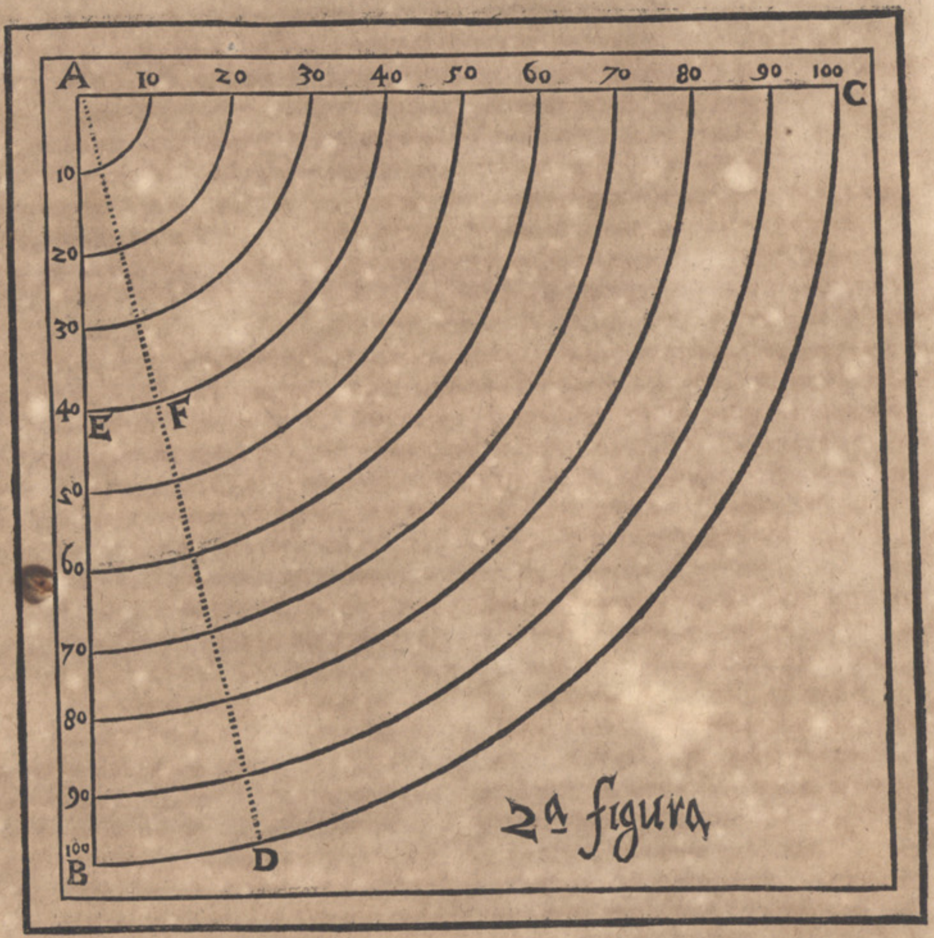
Cõſtructio alterius

ſinus

inſtrumenti pro eodem vſu. ſin[illegible] toti in figura aſſumi poterunt:ita vt non male feceris,ſi rectum conſtituas. Ita namque quad rantem quoque [illegible]ecto angulo oppoſitum obtinebis:Recta autem AB,in 100.particulas æquales ſecta,(poſſet etiam ſecari in 1000.ſi commode fieri poſſet,vt de ſuperiore inſtrumento diximus)deſcribantur ex centro A,per ſingulas partes 100.arcus circulorum,qui rectam quoque AC, in 100. particulas æquales diſtinebunt: parataq; erit figura.

NAM ſi in infimo arcu BC, ſumatur interuallum BD, dato ſinui toti æquale,ducaturque recta occulta AD,(hæc in ænea tabella ducenda erit atramento non admodum nigro,vel alio colore, vt poſtea deleri poſſit) [illegible]ngentur rectæ AB,AD, officio regularum AF,AG, ſuperioris inſtrumenti ad propoſitam magnitudinē BD, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes reſpectu ſinus totius BD,vt ſupra. *a 2. ſexti.* Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum EF, [a] cum ducta recta EF, parallela ſit rectæ ductæ BD, propterea quod latera AB, AD, ſecta ſunt in E, F, proportionaliter. Alij vſus ſupra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur : præſertim ſi in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius,vt ex dato circulo quotcunque gradus poſſint abſcindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculum non eſt,ne clauus in centro atteratur, ſicut in ſuperiore inſtrumento. Deinde in eadem hac figura poſſunt accipi particulæ etiam minimæ, prope centrum, & in extremo quadrante ſinus totus quamuis perpuſillus,quod in ſuperiore inſtrumento non licebat.

QVAMVIS autem ad magnitudinum dimenſiones non omnes huius inſtrumenti partium vſus neceſſarii ſint,ſed ſolum ille,quem Num.1.& 2.explicauimus,potiſſimum requiratur;placuit tamen tam varios eius vſus in vnum hunc locum congerere, tum vt inſtrumenti præſtantia magis eluceat, tum vt ſtudioſus lector habeat,vbi alios vſus,quos deſiderat,inquirere debeat.Non ſum etiam neſcius, quam plurimos alios præclari huius inſtrumenti vſus poſſe excogitari,quos proprio Marte, atque induſtria quiuis facile, quando id res poſtulauerit,cogitando inueniet:nos præcipuos ſolum indicare voluimus hoc loco.

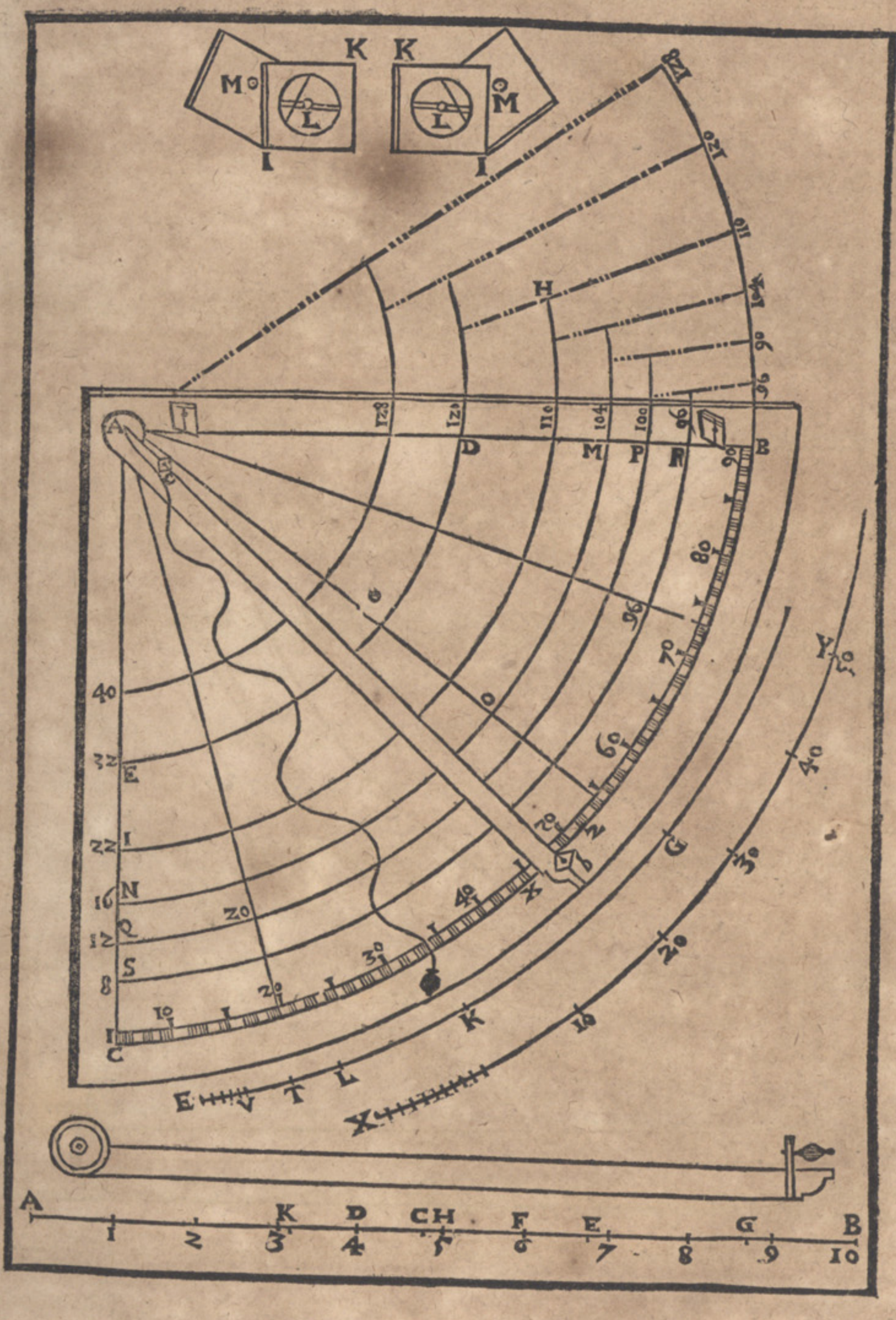


CONSTRVCTIO QVADRANTIS, IN QVO MINVta quoque, ac ſecunda deprehendantur, etiamſi gradus in ea ſecti non ſint. Et quo pacto eadem minuta, & ſec.obtineri poſſint in quadrante in 90.gradus diſtributo. Ac denique qua ratione ex data recta in pauciſſimas partes æquales diuiſa abſcindi poſſint partes milleſimæ, &c.

CAPVT II,

HOC eſt ſecundum, quod præmittendum eſſe diximus, qua videlicet via cognoſcere poſſimus,quot minuta, & ſecunda in propoſita particula cuiuſuis gradus contineantur: Et quot partes milleſimas quælibet particula datæ rectæ comprehendat, licet in pauciſſimas ea partes ſit diſtributa. Qua de re multa quidem extant à nobis alias conſcripta: ſed ea vnum in locum colligere, & hic ſimul omnia, proponere viſum fuit, quod id ad perfectam rei cognitionem multo fore commodius iudicaremus. Itaque Petrus Nonius Luſitanus ſummo ingenio Mathematicus ad hanc rem in libello de crepuſculis propoſ. 3. partis ſecundæ tale excogitauit artifi-

artificium. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem aliis quadraginta quatuor quadrantibus minoribus quomodocunque inter ſe diſtantibus, vt in vniuerſum ſint 45. diuidit eum, qui quadranti BC, proximus eſt, & in 90. gradus diſtributus, in 89. partes æquales, ſequentem in 88. alium in 87. atque ita deinceps, vt partes ſequentis ſemper ſint vna pauciores, quam partes proxime præcedentis quadrantis; adeo vt vltimus, & omnium minimus contineat 46. partes æquales. Plures quadrantes non eſt opus deſcribere, quia eorum partes eſſent duplæ partium quadrantum iam deſcriptorum. Vt pars vna quadrantis in 45. partes diuiſi contineret duos gradus quadrantis maximi in 90. gradus diſtributi: pars vero vna quadrantis in 44. partes diſtincti complecteretur $\frac{2}{88}$. quadrantis in 88. partes diuiſi, & vna pars quadrantis diuiſi in partes 43. includeret $\frac{2}{86}$. quadrantis in 86. partes diſtributi, &c. Hac ratione in primo quadrante in 90. gradus diſtributo aſſignabimus omnes has partes aliquotas, $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. &c. vſque ad $\frac{1}{90}$. Nam vnus gradus primi quadrantis eſt $\frac{1}{90}$. Vna autem pars ſecundi quadrantis eſt $\frac{1}{89}$. Vna tertii, $\frac{1}{88}$. atque ita deinceps vſque ad quadrantem 45. qui in 46. partes

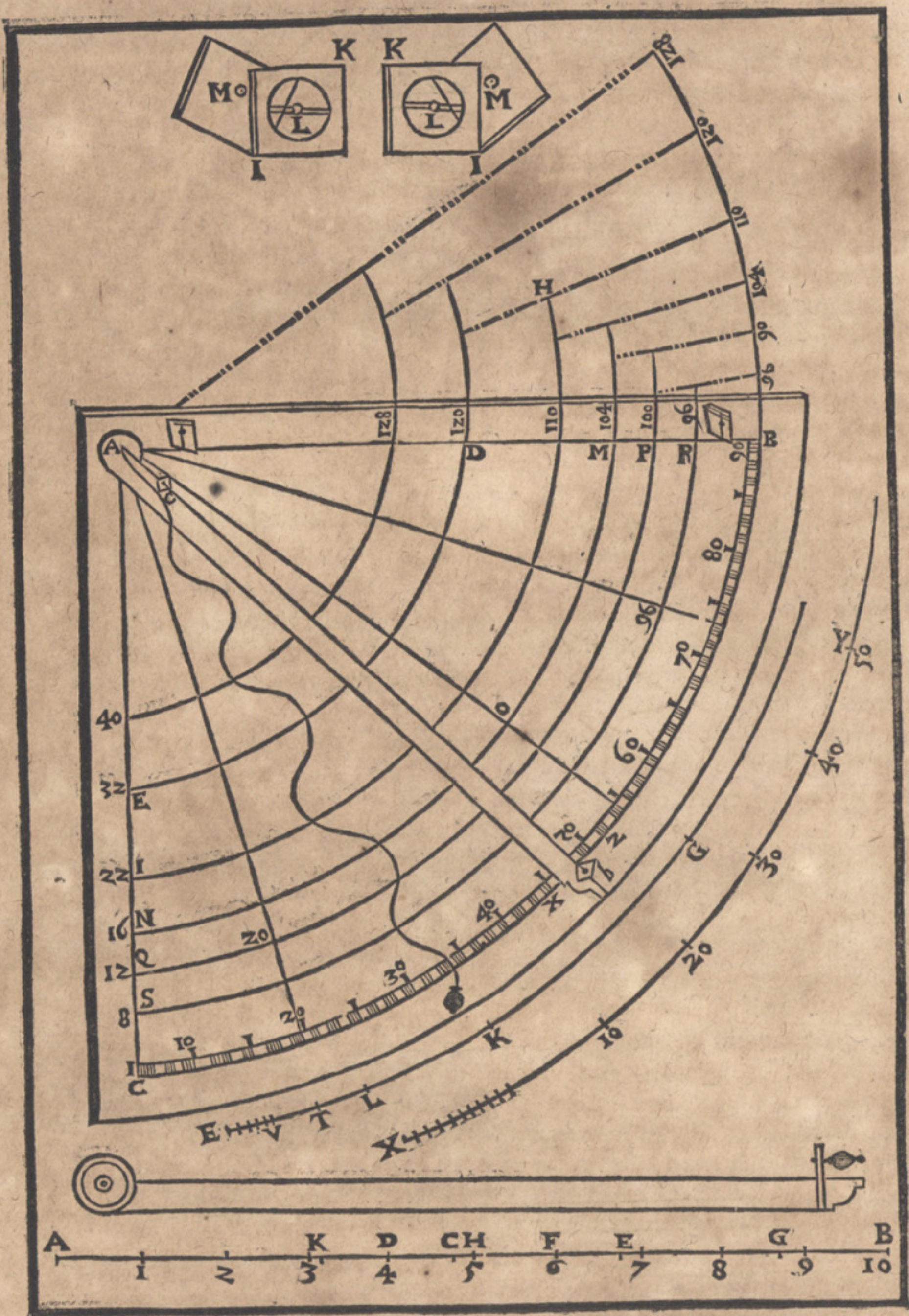


diſtributs eſt, cuius pars vna continet $\frac{1}{46}$. ita vt beneficio 45. quadrantum habeamus omnes partes à $\frac{1}{46}$ vſque ad $\frac{1}{90}$. deinde quoniam quælibet res diuiſa in quotuis partes numero pares diuiſa etiam eſt in partes, quæ illarum medietatem conſtituunt, (nam linea ſecta in 10. partes, v.g. diuiſa eſt etiam in 5. cum $\frac{2}{10}$. efficiant $\frac{1}{5}$. &c.) fit vt $\frac{2}{90}$. primi quadrantis exhibeant nobis $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{88}$. tertii quadrantis in 88. partes diſtributi, $\frac{1}{44}$. & $\frac{2}{86}$. quinti quadrantis diſtributi in 86. partes $\frac{1}{43}$. atque ita deinceps progrediendo per quadrantes partium numero parium vſque ad quadrantem partium 46. cuius $\frac{2}{46}$. offerent nobis $\frac{1}{23}$. Poſt hæc $\frac{2}{44}$. dabunt $\frac{1}{22}$. & $\frac{2}{42}$. præbebunt $\frac{1}{21}$. & ſic deinceps vſque ad $\frac{2}{24}$. quæ exhibebunt $\frac{1}{12}$. Rurſus $\frac{2}{22}$. dabunt $\frac{1}{11}$. & $\frac{2}{20}$. dabunt $\frac{1}{10}$. & ita deinceps vſque ad $\frac{2}{12}$. quæ offerent $\frac{1}{6}$. Præterea $\frac{2}{10}$. dabunt $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{8}$. dabunt $\frac{1}{4}$. & $\frac{2}{6}$. exhibebunt $\frac{1}{3}$. Ac tandem $\frac{2}{4}$. offerent $\frac{1}{2}$.

HÆC eſt conſtructio quadrantis, quam Petrus Nonius nobis reliquit, difficilis illa quidem cum vix quadrans in partes, quarum numerus primus eſt, vt in 89. 87. &c. à quoquam, etiamſi omnem adhibeat diligentiam ſine errrore diuidi poſſit. Vſus autem perfacilis eſt. Nam obſeruaturus interdiu altitudinem ſolis, aut nocte

ſerena

ſeruata altitudinem alicuius ſtellæ, notet diligenter, in cuius quadrantis integram aliquam partem filum perpendiculi, aut linea fiduciæ incidat: (Vix autem, aut perraro continget, vt filum non cadat in partem aliquam integram alicuius quadrantis, propter multitudinem quadrantum, & partium diuerſarum:) Deinde fiat vt numerus omnium partium illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad numerum partium à filo abſciſſarum, ita numerus graduum 90. in quos idem quadrans diuiſus concipiendus eſt, ad aliud; produceturque numerus graduum dictis partibus abſciſſis reſpondentium. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuiſorem, hoc eſt, in numerum omnium partium dicti quadrantis diuiſum, dabit Minuta graduum: Et ſi adhuc quidpiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem diuiſum exhibebit ſecunda. Atque hoc modo progrediendo reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit: ſed ſatis eſt ad ſecunda vſque progredi. Exem-



pli gratia. Ponatur quadrans DE, diuiſus in 70. partes, & filum perpendiculi AD, abſcidiſſe ex eo partes 40. in G. Fiat ergo vt 70. ad 40. ita 90. ad aliud produceturque gradus 51. Sed quia in diuiſione ſuperſunt 30. multiplicabimus ea in 60. & numerum productum 1800. per 70. rurſus partiemur, vt prodeant Min. 25. Quoniam autem adhuc ſuperſunt in diuiſione 50. multiplicabimus ea in 60. & procreatum numerum 3000. per eadem 70. diuidemus vt producantur ſecunda 42. Rurſum quia iterum ſuperſunt 60. quæ multiplicata in 60. faciunt 3600. quo numero per 70. diſtributo, producentur Tertia 51. &c.

DEMONSTRATIO huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim vt angulus DAE, ad angulum GAE,[a] ita arcus DE, ad arcum GE: Et vt idem angulus DAE, vel BAC, ad eundem angulum GAE, vel ZAC, ita arcus BC, ad arcum ZC, erit vt arcus DE, hoc eſt, quadrans in partes 70. diuiſus, ad arcum GE, earundem partium 40.[b] ita arcus BC, id eſt, quadrans in 90. gradus diſtributus, ad arcum ZC, continentem numerum determinatum graduum, Minutorum, &c.

a 33. ſexti.
b 11. quint.

SED

SED quoniam factu perdifficile eſt, vt dicti quadrantes in eiuſmodi partes ſecentur, inuenit Illuſtriſſimus Dominus Iacobus Curtius Cæſareus apud Summum Pontificem Legatus, exquiſitæ doctrinæ & ſingularis induſtriæ vir, eiuſmodi remedium. Deſcriptis ex A, quotlibet quadrantibus, producantur ſinguli vltra ſemidiametrum AB, proximus quidem extremo quadranti vſque ad gradum 91. hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad grad. 91. ductam: ſequens deinde vſque ad grad. 92. & inſequens vſque ad grad. 93. & ſic deinceps vſque ad alios atque alios gradus. In figura exemplum habes in quadrantibus vſque ad grad. 96. 100. 104. 110. 120. & 128. tantum productis, ne multitudo, ſi ad ſingulos gradus eſſent producti, confuſionem pareret. Deinde vnuſquiſque arcus ita productus ſecetur in 90. partes æquales: quæ diuiſio longe facilior eſt illa ſuperiore, cum quilibet horum arcuum non difficilius in 90. partes æquales diſtribui poſſit, quam quadrans in 90. gradus.

VSVS idem eſt qui ſuperioris conſtructionis. Nam cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, ſi fiat, vt 90. nempe vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiſus eſt, ad numerum partium, quas filum abſcidit, ita numerus graduum in illo arcu contentorum, in cuius partem aliquam integram filum cecidit, ad aliud, reperietur numerus graduum dictis partibus abſciſſis reſpondentium, &c. vt prius.

Quadrantis cõſtructio ad min. & ſecund. cognoſcenda.

ET quoniam facile eſt, (vt vulgo dici ſolet) inuentis addere, conabimur eam conſtructionem aliquanto faciliorem facere hoc modo. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem alijs 39. quadrantibus æqualiter, ſi placet, inter ſe diſtantibus, vt venuſtior appareat figura: ita vt in vniuerſum ſint 40. quadrãtes, quorũ extimus in 90. gradus more ſolito ſecetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rurſus in duas, & quælibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuiſiones abſolutæ ſint, atque adeo totus quadrans in 128. partes æquales diſtributus. Poſt hæc producantur alij quadrantes vltra ſemidiametrum AB, vt dictũ eſt, ille quidem, qui tertius eſt ab extremo BC, vſque ad gradũ 91. extremi quadrantis CB, producti, hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: ſequens deinde vſque ad gradum 92. & inſequens ad gradum 93. atque ita deinceps vſque ad alios gradus, ita vt quadrageſimus quadrans vſque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur ſinguli in 128. partes æquales ſicuti quadrans extimo quadranti proximus, qua diuiſione peracta, partes ſupra ſemidiametrum AB, reſecentur, tanquam ſuperuacaneæ.

2 QVOD ſi quadrantes vltra ſemidiametrum AB, produci commode non poſſint, ob ſpatij anguſtias, inſtituenda erit diuiſio hoc modo. In quadrante extremo BC, ſumatur ſemiſſis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam ſemiſſem linea occulta ducatur. Hæc enim ſecabit quadrãtem propoſitum in puncto, vbi arcus productus prima diuiſione bifariam ſecaretur. Quare ſi arcus inter hoc punctum & ſemidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, ſecetur bifariam continue ſex diuiſionibus, partesque illius in arcum inter idem punctum, & ſemidiametrum AB, transferantur, quæ transferri poſſunt, habebuntur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128. in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantẽ cadunt. Vt ſi diuidendus ſit quadrans MN, vſq; ad gr. 104. producendus, ducemus ad gr. 52. nimirum ad ſemiſſem grad. 104. rectam, quæ ſecet quadrantẽ MN, in O. Nam ſi arcus ON, continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, ſecetur continue bifariam ſex diuiſionibus, parteſq; eius in arcũ OM, transferantur habebuntur omnes partes in quadrantem MN, cadentes, non ſecus, ac ſi totus arcus productus in 128. partes diſtributus eſſet. Sic etiam, ſi quadrans ad gradum 125. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 62½. nimirum ad ſemiſſem graduum 125. Item ſi quadrans DE, 120. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

Qui numeri quadrãtibus aſcribendi ſint.

3 HISCE quadrantibus ita diuiſis duplices numeri aſcribendi ſunt, prope ſemidiametrum quidẽ AC, numeri quadrantum, vt 1. prope extremum; 2. iuxta ſequentem, & 3. iuxta tertiũ &c. Ita vides quadranti, qui vſq; ad gradum 96. productus eſt, appoſitũ eſſe numerum 8, cum is octauus ſit. Primus enim eſt quadrãs BC; ſecundus, qui ſequitur, 90. graduum, Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduũ 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95 & Octauus graduum 96. Sic etiam quadranti vſq; ad grad. 100. producto cernis aſcriptum eſſe numerũ 12. &c. At vero iuxta ſemidiametrum AB, numeri illorum graduum ſcribendi ſunt, ad quos vſq; quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim cadente filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, illico iuxta ſemidiametrum AB, apparebit, ad quem gradum vſque quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum, vt minuta, atq; ſecunda inquirantur, vt paulo poſt Num. 7. dicemus.

Pinnacidia quo pacto affigenda.

4 IVXTA ſemidiametrum AB, affigenda ſunt duo pinnacidia ad angulos rectos, ita vt foramina, per quæ radius ſolis, vel viſualis tranſire debet, ad perpendiculum rectæ AB, exiſtant; alioquin non paruus error in dimenſione linearum committeretur.

Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruenda.

5 QVANDO porro per radium viſualem altitudo ſtellæ inueſtiganda eſt, vel punctũ aliquod lineę dimetiendæ inſpiciendum, conſtrui debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata IK, fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis, in cuius medio relinquatur foramen L, quod ſuſtineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata ſubtilis, priori æqualis, in cuius medio ſit etiam perexiguũ foramẽ M, reſpondens foramini L, quando hæc tabella priori ſuperimponitur. Huiuſmodi duo pinnacidia ſi fiant, dici vix poteſt, quã expeditè quamcunq; ſtellã; aut aliã quamlibet rem contueri liceat. Nam pinnacidiũ, quod ab oculo propius abeſt, claudendum eſt tabella illa quadrata circumducta circa punctum, I aliud autem aperiendum. Sic enim fiet, vt radius viſualis per foramen M, prope oculum immiſſus, illico conſpiciat per maius foramen L, in pinnacidio remotiore ſtellam, vel aliam rem propoſitam: quia foramen illud maius apertum facile rem ipſam intueri, & ſine vllo negotio foramen exiguum L, in eodem pinnacidio remotiore in ipſam rem viſum dirigere nos ſinit.

Constructio regulæ, loco fili.

6 POSTREMO ex centro A, egrediatur filum ſubtiliſſimum cum appenſo perpendiculo. Aut certe loco fili conſtruatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiduciæ, in cuius extremitate promineat laminula

ex qua ſuſpendatur perpendiculum hac conditione, vt regula libere pendente, filum aliquod cum perpendiculo demiſſum, ad vnguem lineæ fiduciæ reſpondeat. Atque in hoc ſumma diligentia adhibenda eſt, alioquin gradus non recte à linea fiduciæ indicarentur.

Quadrãs pendulus. ATQVE hoc modo Quadrans in ſuo vſu erit pendulus, ſiue res in ſublimi exiſtens ex B, per A, ſiue res in plano poſita ex A, per B, inſpiciatur.

Quadrãs ſtabilis. QVOD ſi circa centrum A, regula affigatur cum linea fiduciæ A b, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineæ fiduciæ reſpondeant, ipſaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunq; gradum immota permaneat, erit Quadrans in ſuo vſu ſtabilis eundem ſemper ſitum habens, ſiue res in ſublimi exiſtens inſpiciatur ex A, per b, poſito nimirum latere A C, Horizonti parallelo, in plano horizontali, ſiue rem in plano poſitam quis intueatur ex A, per b, latere A C, ad Horizontem exiſtente perpendiculari, & latere A B, eidem Horizonti parallelo, ſuperioremque locum occupante. Verum hæc planius intelligentur, cum de vtroque vſu lib. 2. agemus.

Vſus quadrantis proxime conſtructi in minutis exquirendis. 7. VSVS quadrantis hoc modo conſtructi in minutis, ac ſecundis exquirendis, præclarus eſt. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiduciæ AB, in partem aliquam integrã alicuius Quadrantis (quod fere ſemper accidet propter diuerſitatem partium in tanta quadrantum multitudine) ſi fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abſciſſas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehenſorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus graduum in arcu abſciſſo contentorum. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atque in eundem diuiſorem, hoc eſt, in 128. diuiſum, dabit minuta graduum. Et ſi adhuc quippiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem 128. diuiſum, exhibebit ſecunda. Atque hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit. Tunc enim vlterius progrediendum non eſt; Sed ſatis eſt, ad ſecunda vſque progredi. Exempli gratia. Ponatur ex Quadrante PQ. vſque ad gradum 100. producto, qualis eſt duodecimus, filum perpendiculi abſcidiſſe partes 20. ex illis 128. in quas totus arcus productus diſtributus eſt. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud; inuenienturque gradus 15. ſupereruntque in diuiſione 80. quæ ducta in 60. faciunt 4800. quæ diuiſa per 128. dant minuta 37. & ſuperſunt adhuc 64. quæ ſi ducantur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30. nihilque in diuiſione ſupereſt. Arcus ergo Q, 20. vel arcus Quadrantis B C, inter C, & filum perpendiculi includit grad. 15. Min. 37. Sec. 30. Rurſus ponamus ex octauo quadrante R S, vſque ad gradum 96. producto filum perpendiculi abſcidiſſe partes 96. ex illis 128. quæ in toto arcu producto continentur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. præciſe arcui abſciſſo conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrantis ſextidecimi M N, vſque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64. ita 104. ad aliud, producentur quoque grad. 52. præciſe, atque ita de cæteris; dummodo ſis memor, vt ſi quid in diuiſionibus ſuperfuerit, reſidua diuiſionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt dictum eſt.

DEMONSTRATIO huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim eſt (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vſque ad grad. 104. productus, quatenus in 128. partes ſectus eſt, ad arcum N O, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem arcum NO, reſpectu eorundem graduum; efficitur, vt ſi fiat quemadmodum partes 128. totius arcus NM, vſque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis & ſecundis. 8. IN gratiam autem ſtudioſorum placet hic tabellam inſerere, in qua ex reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & ſecunda illi reſiduo reſpondeant: Ita vt opus ſit ſemel tantum regulam auream adhibere. Conſtruitur autem tabella, ſi ſingula reſidua, quæ plura, quam 127. eſſe nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt ſtructura, & vſus huiuſce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vſque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120. ad aliud; producenturque grad. 27. Quia vero in diuiſione ſuperſunt 24. ſub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11. 15. Prior ergo dat minuta, & poſterior ſecunda; Ita vt arcus à filo abſciſſus complectatur grad. 27. Min. 11. Sec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, ſi reſiduum diuiſionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128. diuidatur, &c. Eadem ratio eſt de reliquis tabellæ numeris. Nam ſemper ſuperior numerus eſt ille, qui in diuiſione remanſit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & poſterior ad ſecunda ſpectat.

SEQVITVR TABELLA.

TABEL-

TABELLA INDICANS, QVOT MINVTA, AC Secunda, reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in ſupra nominatæ tabulæ conſtructione eruuntur, reſpondeant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
0. 28	0. 56	1. 24	1. 52	2. 21	2. 49	3. 17	3. 45	4. 13	4. 41	5. 9	5. 37
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
6. 6	6. 34	7. 2	7. 30	17. 58	8. 26	8. 54	9. 22	9. 51	10. 19	10. 47	11. 15
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
11. 43	12. 12	12. 39	13. 7	13. 36	14. 4	14. 32	15. 0	15. 28	15. 56	16. 24	16. 52
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
17. 21	17. 49	18. 17	18. 45	19. 13	19. 41	20. 9	20. 37	21. 6	21. 34	22. 2	22. 30
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
22. 58	23. 26	23. 54	24. 22	24. 51	25. 19	25. 47	26. 15	26. 43	27. 11	27. 39	28. 7
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
26. 36	29. 4	29. 32	30. 0	30. 28	30. 56	31. 24	31. 52	32. 21	32. 49	33. 17	33. 45
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
34. 13	34. 41	35. 9	35. 37	36. 6	36. 34	37. 2	37. 30	37. 58	38. 26	38. 54	39. 22
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
39. 51	40. 19	40. 47	41. 15	41. 43	42. 11	42. 39	43. 7	43. 36	44. 4	44. 32	45. 0
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
45. 28	45. 56	46. 24	46. 52	47. 21	47. 49	48. 17	48. 45	49. 13	49. 41	50. 9	50. 37
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
51. 6	51. 34	52. 2	52. 30	52. 58	53. 26	53. 54	54. 22	54. 51	55. 19	55. 47	56. 15
121	122	123	124	125	126	127	128				
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.				
56. 43	57. 11	58. 7	57. 39	58. 36	59. 4	59. 32	60 0				

9 PORRO vt ſtudioſos omni labore ſupputandi leuaremus, compoſita à nobis eſt ſequens tabnla, in qua confeſtim apparet, quot gradus, minuta, ac ſecunda cuilibet parti cuiuſuis Quadrantis reſpondeant. Nam ſi in latere tabulæ ſiniſtro ſumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta ſemidiametrum AC. illi quadranti appoſitus, in vertice vero eiuſdem tabulæ accipiatur numerus partium à filo abſciſſarum, reperientur in angulo communi grad. Min. & Sec. arcus abſciſſi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vſque ad grad. 104, productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ ſumatur numerus 30. partium, & in ſiniſtro latere numerus quadrantis 16. deprehenduntur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vſque ad grad. 103. fuit productus; ſi in vertice tabulæ accipiatur numerus 111, partium, & in latere ſiniſtro numerus Quadrantis 15, reperiẽtur in angulo communi gradus 89. min. 19. ſec. 13. Atq; ita de cæteris. Conſtructio tabulæ ex dictis obſcura non eſt. Nam ſi fiat, vt 128, ad 1. ad 2 ad 3. ad 4. & ita deinceps, vſque ad 128. ita numerus gradum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiuſque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi ſatis eſſe videantur: Si quis tamen plures deſcribere velit, facile tabulam extendere poterit ſecundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua ſecunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuiſoris 128. aſſumpſimus vnum ſecundum integrum.

Cõſtructio & vſus tabulæ ſequentis.

IAM vero ſi quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit ſine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac ſecundis quadrageſimi Quadrantis, qui vſque ad grad. 128. productus fuit, adijciantur differentię inter gradus, minuta, ac ſecunda quadrageſimi Quadrantis, & gradus Minuta, ac ſecunda aliorum quadrantum infra Quadrageſimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac ſecunda quadrantum ſupra quadrageſimum. Nam gradus, minuta, ac ſecunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus ſit quadrageſimus, alij vero duo æqualiter ab eo diſtent, obſeruant proportionem Arithmeti-

Quo pacto tabula 40. Quadrantum extendatur ad plures Quadrantes ſine ope aureæ regulæ.

cam continuam, vt hic apparet, Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 28. In ſecunda vero columna ſecundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoque nu-

Partes.	1			2			3			4			5			6		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
24	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

meri Quadrantum 38. 40. 42. in prima columna ſuperant ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53. & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adiiciantur ordine ad gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 40. componētur gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ autem inter Gradus, Minuta, ac Sec. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. conficient gradus Minuta, ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, minutis, ac ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50. &c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS PAVLO ante conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	57	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Partes.	8			9			10			11			12			13			14		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0
2	5	37	30	6	19	41	7	1	52	7	44	4	8	26	15	9	8	26	9	50	37
3	5	41	15	6	23	54	7	6	34	7	49	13	8	31	52	9	14	32	9	57	11
4	5	45	0	6	28	7	7	11	15	7	54	22	8	37	30	9	20	37	10	3	45
5	5	48	45	6	32	21	7	15	56	7	59	32	8	43	7	9	26	43	10	10	19
6	5	52	30	6	36	34	7	20	37	8	4	41	8	48	45	9	32	49	10	16	52
7	5	56	15	6	40	47	7	25	19	8	9	51	8	54	22	9	38	54	10	23	26
8	6	0	0	6	45	0	7	30	0	8	15	0	9	0	0	9	45	0	10	30	0
9	6	3	45	6	49	13	7	34	41	8	20	9	9	5	37	9	51	6	10	36	34
10	6	7	30	6	53	26	7	39	22	8	25	19	9	11	15	9	57	11	10	43	7
11	6	11	15	6	57	39	7	44	4	8	30	28	9	16	52	10	3	17	10	49	41
12	6	15	0	7	1	52	7	48	45	8	35	37	9	22	30	10	9	22	10	56	15
13	6	18	45	7	6	6	7	53	26	8	40	47	9	28	7	10	15	28	11	2	49
14	6	22	30	7	10	19	7	58	7	8	45	57	9	33	45	16	21	34	11	9	22
15	6	26	15	7	14	32	8	2	49	8	51	6	9	39	22	10	27	39	11	15	56
16	6	30	0	7	18	45	8	7	30	8	56	15	9	45	0	10	33	45	11	22	30
17	6	33	45	7	22	58	8	12	11	9	1	24	9	50	37	10	39	51	11	29	4
18	6	37	30	7	27	11	8	16	52	9	6	34	9	56	15	10	45	56	11	35	37
19	6	41	15	7	31	24	8	21	34	9	11	43	10	1	52	10	52	2	11	42	11
20	6	45	0	7	35	37	8	26	15	9	16	52	10	7	30	10	58	7	11	48	45
21	6	48	45	7	39	51	8	30	56	9	22	2	10	13	7	11	4	13	11	55	19
22	6	52	30	7	44	4	8	35	37	9	27	11	10	18	45	11	10	19	12	1	52
23	6	56	15	7	48	17	8	40	19	9	32	21	10	24	22	11	16	24	12	8	26
24	7	0	0	7	52	30	8	45	0	9	37	30	10	30	0	11	22	30	12	15	0
25	7	3	45	7	56	43	8	49	41	9	42	39	10	35	37	11	28	36	12	21	34
26	7	7	30	8	0	56	8	54	22	9	47	49	10	41	15	11	34	41	12	28	7
27	7	11	15	8	5	9	8	59	4	9	52	58	10	46	52	11	40	47	12	34	41
28	7	15	0	8	9	22	9	3	45	9	58	7	10	52	30	11	46	52	12	41	15
29	7	18	45	8	13	36	9	8	26	10	3	17	10	58	7	11	52	58	12	47	49
30	7	22	30	8	17	49	9	13	7	10	8	26	11	3	45	11	59	4	12	54	22
31	7	26	15	8	22	2	9	17	49	10	13	36	11	9	22	12	5	9	13	0	56
32	7	30	0	8	26	15	9	22	30	10	18	45	11	15	0	12	11	15	13	7	30
33	7	33	45	8	30	28	9	27	11	10	23	54	11	20	37	12	17	2	13	14	4
34	7	37	30	8	34	41	9	31	52	10	29	4	11	26	15	12	23	26	13	20	37
35	7	41	15	8	38	54	9	36	34	10	34	13	11	31	52	12	29	32	13	27	11
36	7	45	0	8	43	7	9	41	15	10	39	22	11	37	30	12	35	37	13	33	45
37	7	48	45	8	47	21	9	45	56	10	44	32	11	43	7	12	41	43	13	40	19
38	7	52	30	8	51	34	9	50	37	10	49	41	11	48	45	12	47	49	13	46	52
39	7	56	15	8	55	47	9	55	19	10	54	51	11	54	22	12	53	59	13	53	26
40	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	15			16			17			18			19			20			21		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	0	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	16	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	22			23			24			25			26			27			28		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0
2	15	28	7	16	10	19	16	52	30	17	34	41	18	16	52	18	59	4	19	41	15
3	15	38	26	16	21	6	17	3	45	17	46	24	18	29	4	19	11	43	19	54	22
4	15	48	45	16	31	52	17	15	0	17	58	7	18	41	15	19	24	22	20	7	30
5	15	59	4	16	42	39	17	26	15	18	9	51	18	53	26	19	37	2	20	20	37
6	16	9	22	16	53	26	17	37	30	18	21	34	19	5	37	19	49	41	20	33	45
7	16	19	41	17	4	13	17	48	45	18	33	17	19	17	49	20	2	21	20	46	52
8	16	30	0	17	15	0	18	0	0	18	45	0	19	30	0	20	15	0	21	0	0
9	16	40	19	17	25	47	18	11	15	18	56	43	19	42	11	20	27	39	21	13	7
10	16	50	37	17	36	34	18	22	30	19	8	26	19	54	22	20	40	19	21	26	15
11	17	0	56	17	47	21	18	33	45	19	20	9	20	6	34	20	52	58	21	39	22
12	17	11	15	17	58	7	18	45	0	19	31	52	20	18	45	21	5	37	21	52	30
13	17	21	34	18	8	54	18	56	15	19	43	36	20	30	56	21	18	17	22	5	37
14	17	31	52	18	19	41	19	7	30	19	55	19	20	43	7	21	30	56	22	18	45
15	17	42	11	18	30	28	19	18	35	20	7	2	20	55	19	21	43	36	22	31	52
16	17	52	30	18	41	15	19	30	0	20	18	45	21	7	30	21	56	15	22	45	0
17	18	2	49	18	52	2	19	41	15	20	30	28	21	19	41	22	8	54	22	58	7
18	18	13	7	19	2	49	19	52	30	20	42	11	21	31	52	22	21	34	23	11	15
19	18	23	26	19	13	36	20	3	45	20	53	54	21	44	4	22	34	13	23	24	22
20	18	33	45	19	24	22	20	15	0	21	5	37	21	56	15	22	46	52	23	37	30
21	18	44	4	19	35	9	20	26	15	21	17	21	22	8	26	22	59	32	23	50	37
22	18	54	22	19	45	56	20	37	30	21	29	4	22	20	37	23	12	11	24	3	45
23	19	4	41	19	56	43	20	48	45	21	40	47	22	32	49	23	24	51	24	16	52
24	19	15	0	20	7	30	21	0	0	21	52	30	22	45	0	23	37	30	24	30	0
25	19	25	19	20	18	17	21	11	15	22	4	13	22	57	11	23	50	9	24	43	7
26	19	35	37	20	29	4	21	22	30	22	15	56	23	9	22	24	2	49	24	56	15
27	19	45	56	20	39	51	21	33	45	22	27	39	23	21	34	24	15	28	25	9	22
28	19	56	15	20	50	37	21	45	0	22	39	22	23	33	45	24	28	7	25	22	30
29	20	6	34	21	1	24	21	56	15	22	51	6	23	45	56	24	40	47	25	35	37
30	20	16	52	21	12	11	22	7	30	23	2	49	23	58	7	24	53	26	25	48	45
31	20	27	11	21	22	58	22	18	45	23	14	32	24	10	19	25	6	6	26	1	52
32	20	37	30	21	33	45	22	30	0	23	26	15	24	22	30	25	18	45	26	15	0
33	20	47	49	21	44	32	22	41	15	23	37	58	24	34	41	25	31	24	26	28	7
34	20	58	7	21	55	19	22	52	30	23	49	41	24	46	52	25	44	4	26	41	15
35	21	8	26	22	6	6	23	3	45	24	1	24	24	59	4	25	56	43	26	54	22
36	21	18	45	22	16	52	23	15	0	24	13	7	25	11	15	26	9	22	27	7	30
37	21	29	4	22	27	39	23	26	25	24	24	51	25	23	26	26	22	2	27	20	37
38	21	39	22	22	38	26	23	37	30	24	36	34	25	35	37	26	34	41	27	33	45
39	21	49	41	22	49	13	23	48	45	24	48	17	25	47	49	26	47	21	27	46	52
40	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0

Partes.	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	98	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	27	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	56
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	30	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	0	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	52	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	36			37			38			39			40			41			42		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0
2	25	18	45	26	0	56	26	43	7	27	25	19	28	7	30	28	49	41	29	31	52
3	25	35	37	26	18	17	27	0	56	27	43	36	28	26	15	29	8	54	29	51	34
4	25	52	30	26	35	37	27	18	45	28	1	52	28	45	0	29	28	7	30	11	15
5	26	9	22	26	52	58	27	36	34	28	20	9	26	3	45	29	47	21	30	30	56
6	26	26	15	27	10	19	27	54	22	28	38	26	29	22	30	30	6	34	30	50	37
7	26	43	7	27	27	39	28	12	11	28	56	43	29	41	15	30	25	47	31	10	19
8	27	0	0	27	45	0	28	30	0	29	15	0	30	0	0	30	45	0	31	30	0
9	27	16	52	28	2	21	28	47	49	29	33	17	30	18	45	31	4	13	31	49	41
10	27	33	45	28	19	41	29	5	37	29	51	34	30	37	30	31	23	26	32	9	22
11	27	50	37	28	37	2	29	23	26	30	9	51	30	56	15	31	42	39	32	29	4
12	29	7	30	28	54	22	29	41	15	30	28	7	31	15	0	32	1	52	32	48	45
13	28	24	22	29	11	43	29	54	4	30	46	24	31	33	45	32	21	6	33	8	26
14	28	41	15	29	29	4	30	16	52	31	4	41	31	52	30	32	40	19	33	28	7
15	28	58	7	29	46	24	30	34	41	31	22	58	32	11	15	32	59	32	33	47	49
16	29	15	0	30	3	45	30	32	30	31	41	15	32	30	0	33	18	45	34	7	30
17	29	31	52	30	21	9	31	10	19	31	59	32	32	48	45	33	37	58	34	27	11
18	29	48	45	30	38	26	31	28	7	32	17	47	33	7	30	33	57	11	34	46	52
19	30	5	37	30	55	47	31	45	56	32	36	6	33	26	15	34	16	24	35	6	34
20	30	22	30	31	13	7	32	3	45	32	54	22	33	45	0	34	35	37	35	26	15
21	30	39	22	31	30	28	32	21	34	33	12	39	34	3	45	34	54	51	35	45	56
22	30	56	15	31	47	49	32	39	22	33	30	56	34	22	30	35	14	4	36	5	37
23	31	13	7	32	5	9	32	57	11	33	49	13	34	41	15	35	33	17	36	25	19
24	31	30	0	32	22	30	33	15	0	34	7	30	35	0	0	35	52	30	36	45	0
25	31	46	52	32	39	51	33	32	49	34	25	47	35	18	45	36	11	43	37	4	41
26	32	3	45	32	57	11	33	50	37	34	44	4	35	37	30	36	50	56	37	24	22
27	32	20	37	33	14	32	34	8	26	35	2	21	34	56	15	36	50	9	37	44	4
28	32	37	30	33	31	52	34	26	15	35	20	37	36	15	0	37	9	22	38	3	45
29	32	54	22	33	49	13	34	44	4	35	38	34	36	33	45	37	28	36	38	23	26
30	33	11	15	34	6	34	35	1	52	35	57	11	36	52	30	37	47	49	38	43	7
31	33	28	7	34	23	54	35	19	41	36	15	28	37	11	15	38	7	2	39	2	49
32	33	45	0	34	41	15	35	37	30	36	33	45	37	30	0	38	26	15	39	22	30
33	34	1	52	34	58	36	35	55	19	36	52	2	37	48	45	38	45	28	39	42	11
34	34	18	45	35	15	56	36	13	7	37	10	19	38	7	30	39	4	41	40	1	52
35	34	35	37	35	33	17	36	30	56	37	28	36	38	26	15	39	23	54	40	21	34
36	34	52	30	35	50	37	36	48	45	37	46	52	38	45	0	39	43	7	40	41	15
37	35	9	22	36	7	58	37	6	34	38	5	9	39	3	45	40	2	21	41	0	56
38	35	26	15	36	25	19	37	24	22	38	23	26	39	22	30	40	21	34	41	20	37
39	35	43	7	36	42	39	37	42	11	38	41	43	39	41	15	40	40	47	41	40	19
40	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadratorum.

Partes.	43			44			45			46			47			48			49		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0
2	30	14	4	30	56	15	31	38	26	32	20	37	33	2	49	33	45	0	34	27	11
3	30	34	13	31	16	52	31	59	32	32	42	11	33	24	51	34	7	30	34	50	9
4	30	54	22	31	37	30	32	20	37	33	3	45	33	46	52	34	30	0	35	13	7
5	31	14	32	31	58	7	32	41	43	33	25	19	34	8	54	34	52	30	35	36	6
6	31	34	41	32	18	45	33	2	49	33	46	52	54	30	56	35	15	0	35	59	4
7	31	54	51	32	39	22	33	23	54	34	8	26	34	52	58	33	37	30	36	22	2
8	32	15	0	33	0	0	33	45	0	34	30	0	35	15	0	36	0	0	36	45	0
9	32	35	9	33	20	37	34	6	6	34	51	34	35	37	2	36	22	30	37	7	58
10	32	55	19	33	41	15	34	27	11	35	13	7	35	59	4	36	45	0	37	30	56
11	33	15	28	34	1	52	34	48	17	35	34	41	36	21	6	37	7	30	37	53	54
12	33	35	37	34	22	30	35	9	22	35	56	15	36	43	7	37	30	0	38	16	52
13	33	55	57	34	43	7	35	30	28	36	17	49	37	5	9	37	52	30	38	39	51
14	34	15	56	35	3	45	35	51	34	36	39	22	37	27	11	38	15	0	39	2	49
15	34	36	6	35	24	22	36	12	39	37	0	56	37	49	13	38	37	30	39	25	47
16	34	56	15	35	45	0	36	33	45	37	22	30	38	11	15	39	0	0	39	48	45
17	35	16	24	36	5	37	36	54	51	37	44	4	38	33	17	39	22	30	40	11	43
18	35	36	34	36	26	15	37	15	56	38	5	37	38	55	19	39	45	0	40	34	41
19	35	56	43	36	46	52	37	37	2	38	27	11	39	17	21	40	7	30	40	57	39
20	36	16	52	37	7	30	37	58	7	38	48	45	39	39	22	40	30	0	41	20	37
21	36	37	2	37	28	7	38	19	13	39	10	19	40	1	24	40	52	30	41	43	36
22	36	57	11	37	48	45	38	40	19	39	31	52	40	23	26	41	15	0	42	6	34
23	37	17	21	38	9	22	39	1	24	39	53	26	40	45	28	41	37	30	42	29	32
24	37	37	30	38	30	0	39	22	30	40	15	0	41	7	30	42	0	0	42	52	30
25	37	57	39	38	50	37	39	43	36	40	36	34	41	29	32	42	22	30	43	15	28
26	38	17	49	39	11	15	40	4	41	40	58	7	41	51	34	42	45	0	43	38	26
27	38	37	58	39	31	52	40	25	47	41	19	41	42	13	36	43	7	30	44	1	24
28	38	58	7	39	52	30	40	46	52	41	41	15	42	35	37	43	30	0	44	24	22
29	39	18	17	40	13	7	41	7	58	42	2	49	42	57	39	43	52	30	44	47	21
30	39	38	26	40	33	45	41	29	4	42	24	22	43	19	41	44	15	0	45	10	19
31	39	58	36	40	54	22	41	50	9	42	45	56	43	41	43	44	37	30	45	33	17
32	40	18	45	41	15	0	42	11	15	43	7	30	44	3	45	45	0	0	45	56	15
33	40	38	54	41	35	37	42	32	21	43	29	4	44	25	47	45	22	30	46	19	13
34	40	59	4	41	56	15	42	53	26	43	50	37	44	47	49	45	45	0	46	42	11
35	41	19	13	42	16	52	43	14	32	44	12	11	45	9	51	46	7	30	47	5	9
36	41	39	22	42	37	30	43	35	37	44	33	45	45	31	52	46	30	0	47	28	7
37	41	59	32	42	58	7	43	56	43	44	55	19	45	53	54	46	52	30	47	51	6
38	42	19	41	43	18	45	44	17	49	45	16	52	46	15	56	47	15	0	48	14	4
39	42	39	51	43	39	22	44	38	54	45	38	26	46	37	58	47	37	30	48	37	2
40	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0

Partes.	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	45
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	4	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	56	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	24	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	15	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	33	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	49	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	55	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	2	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	51	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45		46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	49	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	55	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	51	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	58	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	64			65			66			67			68			69			70		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0
2	45	0	0	45	42	11	46	24	22	47	6	34	47	48	45	48	30	56	49	13	7
3	45	30	0	46	12	39	46	55	19	47	37	58	48	20	37	49	3	17	49	45	56
4	46	0	0	46	43	7	47	26	15	48	9	22	48	52	30	49	35	37	50	18	45
5	46	30	0	47	13	36	47	57	11	48	40	47	49	24	22	50	7	58	50	51	34
6	47	0	0	47	44	4	48	28	7	49	12	11	49	56	15	50	40	19	51	24	22
7	47	30	0	48	14	32	48	59	4	49	43	36	50	28	7	51	12	39	51	57	11
8	48	0	0	48	45	0	49	30	0	50	15	0	51	0	0	51	45	0	52	30	0
9	48	30	0	49	15	28	50	0	56	50	46	24	51	31	52	52	17	21	53	2	49
10	49	0	0	49	45	56	50	31	52	51	17	49	52	3	45	52	49	41	53	35	37
11	49	30	0	50	16	24	51	2	49	51	49	13	52	35	37	53	22	2	54	8	26
12	50	0	0	50	46	52	51	33	45	52	20	37	53	7	30	53	54	22	54	41	15
13	50	30	0	51	17	21	52	4	41	52	52	2	53	39	22	54	26	43	55	14	4
14	51	0	0	51	47	49	52	35	37	53	23	26	54	11	15	55	59	4	55	46	52
15	51	30	0	52	18	17	53	6	34	53	54	51	54	43	7	55	31	24	56	19	41
16	52	0	0	52	48	45	53	37	30	54	26	15	55	15	0	56	3	45	56	52	30
17	52	30	0	53	19	13	54	8	26	54	57	39	55	46	52	56	36	6	57	25	19
18	53	0	0	53	49	41	54	39	22	55	29	4	56	18	45	57	8	26	57	58	7
19	53	30	0	54	20	9	55	10	19	56	0	28	56	50	37	57	40	47	58	30	56
20	54	0	0	54	50	37	55	41	15	56	31	52	57	22	30	58	13	7	59	3	45
21	54	30	0	55	21	6	56	12	11	56	3	17	57	54	22	58	45	28	59	36	34
22	55	0	0	55	51	34	56	43	7	57	34	41	58	26	15	59	17	49	60	9	22
23	55	30	0	56	22	2	57	14	4	58	6	6	58	58	7	59	50	9	60	42	11
24	56	0	0	56	52	30	57	45	0	58	37	30	59	30	0	60	22	30	61	15	0
25	56	30	0	57	22	58	58	15	56	59	8	54	60	1	52	60	54	51	61	47	49
26	57	0	0	57	53	26	58	46	52	59	40	19	60	33	45	61	27	11	62	20	37
27	57	30	0	58	23	54	59	17	49	60	11	43	61	5	37	61	59	32	62	53	26
28	58	0	0	58	54	22	59	48	45	60	43	7	61	37	30	62	31	52	63	26	15
29	58	30	0	59	24	51	60	19	41	61	14	32	62	9	22	63	4	13	63	59	4
30	59	0	0	59	55	19	60	50	37	61	45	56	62	41	15	63	36	34	64	31	52
31	59	30	0	60	25	47	61	21	34	62	17	21	63	13	7	64	8	54	65	4	41
32	60	0	0	60	56	15	61	52	30	62	48	45	63	45	0	64	41	15	65	37	30
33	60	30	0	61	26	43	62	23	26	63	20	9	64	16	52	65	13	36	66	10	19
34	61	0	0	61	57	11	62	54	22	63	51	34	64	48	45	65	45	56	66	43	7
35	61	30	0	62	27	39	63	25	19	64	22	58	65	20	37	66	18	17	67	15	56
36	62	0	0	62	58	7	63	56	15	64	54	22	65	52	30	66	50	37	67	48	45
37	62	30	0	63	28	36	64	27	11	65	25	47	66	24	22	67	22	58	68	21	34
38	63	0	0	63	59	4	64	58	7	65	57	11	66	56	15	67	55	19	68	54	22
39	63	30	0	64	29	32	65	29	4	66	28	36	67	28	7	68	27	39	69	27	11
40	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	55	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	15	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	51
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	49
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	57	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	22	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	11	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	30	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	22	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	6	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	56	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	39	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
10	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
11	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
12	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
13	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
14	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
15	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
16	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
17	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
18	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
19	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
20	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
21	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
22	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
23	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
24	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
25	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	27	11	80	20	0
26	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
27	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	7	39	80	51	34	81	45	28
28	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
29	77	41	43	78	36	36	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
30	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
31.	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	6
32	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
33	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
34	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
35	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
36	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
37	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
38	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
39	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
40	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	99	0	0	0	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	0	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	79	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1.	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	49
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	15	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	0			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	33	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	7	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	28	86	51	34	87	42	39	88	33	45	80	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	37	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	20	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	81	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	10	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Partes.	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	6																		

Partes.	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes.	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Quo pacto per circinum deprehendatur Minuta, ac ſecunda in quauis propoſita gradus particula.

10 QVANDO intra Quadrantem non deſcripti ſunt plures quadrantes, ſed vnicus tantum adeſt in 90.gradus exquiſitè diſtributus, cognoſcemus ſolo circini beneficio, quot Minuta, ac ſecunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in Aſtrolabio fecimus, hoc ſcilicet, modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20.ſuperioris Quadrantis BC. Sumatur ea diligentiſſime beneficio circini, & à principio Quadrantis, id eſt, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60.æquales particulæ vſque ad punctum X, ita vt arcus CX, ſexagecuplus ſit arcus t u: Quot enim gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et ſi vltra gradus integros in arcu CX, ſuperſit aliqua particula, accipiatur ea ſexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo continentur, tot ſecunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod ſi adhuc aliquid ſuperſit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui ſexagecuplus eſt particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & inſuper tot ſecunda, quot gradus continentur in arcu, qui ſexagecuplus ſit particulæ vltra 40.gradus in arcu CX, contentæ, &c.

HOC autē ita demonſtro. Quam proportionem habet arcus 60.graduū ad 1.gradum, eam habet arcus CX, ad particulam t u, cum vtrobique proportio ſit ſexagecupla. Igitur permutanda erit, vt arcus 60.graduum ad arcum CX, ita 1.gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes ſexageſimæ arcus 60. graduum, hoc eſt, quot gradus in arcu CX. continentur, tot ſexageſimæ partes vnius gradus, id eſt, tot minuta in particula t u, exiſtent. Item quam proportionem habet arcus 60.Minutorum ad 1.Minutum, eam habet arcus ſexagecuplus particulæ, quæ vltra gradus integros vſq; ad X, ſupereſt ad hanc ipſam particulā. Permutando igitur erit, vt arcꝰ 60. Minutorum ad arcum ſexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes ſexageſimæ arcus 60. Minutorum, hoc eſt, quot minuta in arcu dictæ particulæ ſexagecuplo (ſumendo nunc gradus Quadrantis BC, pro Minutis) continentur, tot partes ſexageſimæ vnius Minuti, id eſt, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & ſic deinceps, ſi opus ſit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed ſatis eſt, meo iudicio, ſi minuta diligēter inquirantur. Et ſi quidem particula remanens maior fuerit ſemiſſe gradus, pro illa vnum Minutum aſſumatur, Minutiſq; inuentis adijciatur, ꝙ tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si vero eadem particula ſemiſſe gradus fuerit minor, nihil Minutis inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secunda includantur, quam 30 Si deniq; dicta particula ſemiſſi gradus fuerit æqualis, liberum ſit addere Minutis inuentis vnum Minutum, vel non addere.

11 QVIA vero facile error cōmitti poteſt, ſi circino particulam dictam gradus, vel minuti ſexagies ordine ſumere velimus, rectius feceris, quando particula data ſemiſſe gradus minor eſt, ſi eam vna cū præcedente gradu acceptam primo loco quintuples: deinde hunc arcum quintuplū duples, tertio hunc arcū duplū triples, ac tandē quarto hunc arcum triplum iterum duples. Vltimus n. hic arcus erit datæ particulæ vna cum gradu accepto ſexagecuplus. Quare ſi ex eo demantur 60.gradus, indicabunt reliqui gradus numerum minutorū in data particula contentorū. Quod ſi per æſtimationem cognoueris, particulam ſemiſſe gradus minorem non ſuperare min.24. (Nam ſi ſuperaret 24. minuta, non poſſemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum, totum Quadrantem excederemus, vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoſcemus hoc modo. Datam particulā cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus: deinde hunc arcū quadruplū duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compoſiti, tertio arcum hunc octuplū iterum duplabimus, vt fiat arcus ſedecuplus arcus ex data particula, & vno gradu compoſiti; quarto hunc arcū rurſus duplabimus; & quinto tandem hunc duplū iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula propoſita, & vno gradu ſexagies & quater, cuius extremum punctum diligenter notetur. Nam ſi ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vna cum vno gradu, ſupererit arcꝰ ſexagecuplus eiuſdē particulæ vnà cum vno gradu; ex quo deniq; ſi demantur 60.gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd ſi data particula ſemiſſe gradus fuerit maior, explorabimꝰ eodē modo minuta in reliqua particula minore comprehenſa. Hæc namq; minuta ex 60.detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehēſa. Bene autem vides, quando data particula minor parū à ſemiſſe gradus differt, tutius eſſe quintuplare illam vnà cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & poſtremo hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum ſunt 60. gradus, & nunquam totus quadrans exhauritur, vt patet.

12 NEQVE vero ſemper opus eſt, vt particula illa gradus, vel particula minor vnà cum vno gradu ſexagies repetatur, ſed ſatis eſt; vt ea aliquoties repetita incidat pręciſe in aliquem gradum; quod non raro accidere ſolet. Nam tunc conſtituetur fractio, cuius numerator eſt numerus graduum percurſorum: Denominator autem numerus tot vnitatū, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, ſi aliqua gradꝰ particula vicies repetita incidat in 6.gradum, complectetur particula illa $\frac{6}{20}$. vnius gradus. Quare ſi numerator 6.per 60. multiplicetur, & productus numerus 360.per denominatorem 20.diuidatur, indicabit Quotiens 18.particulam illam continere 18. minuta. Sic ſi alia particula ſepties repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{7}$.vnius gradus. Si igitur numerator 3.per 60.multiplicetur, & numerꝰ productus 180.per denominatorē 7.diuidatur, reperientur 25.min. Et quia in diuiſione ſuperſunt 5. ſi ea rurſum multiplicentur per 60. productuſque numerus 300.per eundem denominatorem 7.diuidatur, dabit quotiens adhuc $42\frac{6}{7}$.ſecunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc eſt. Quoniam in priori exemplo, ita ſe habent 20.gradus ad 1.gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20.graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc eſt, ad arcum 6.graduum, vt 1.gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. gr.ad 20.gr.vt 1.particula ad 1.grad. Cum ergo 6.grad.ſint $\frac{6}{20}$.graduum 20.continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus, quod eſt propoſitum. In poſteriori vero exemplo; quia ita ſe habent 7.grad.ad 1.graduum, vt particula ſepties repetita, hoc eſt, vt 3.gradus ad 1.particulam; erit permutando arcus 7.graduum ad 3.gra.vt 1.grad. ad 1.particulam: & conuertendo 3.gradus ad 7.gr.vt vna particula ad 1.gra. Cum ergo 3.grad.ſint $\frac{3}{7}$.ſeptem graduum, complectetur quoq; 1.particula $\frac{3}{7}$.vnius gradus; quod eſt propoſitum. eademq; in cæteris ratio eſt.

QVANDO particula minor cū vno gradu repetita incidit in gradū aliquē præciſè, auferendi erūt ex gradibus percurſis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus n. numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui priꝰ. Vt ſi particula illa minor cum 1.gradu repetita ſepties incidit

cidit in 10.gradum;demendi erunt 7.gradus repetiti. Atq; ita habebuntur iterũ $\frac{3}{7}$.vnius gradus in data particula.

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abſcindatur.

13 SI viciſſim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum,ita agendum erit. In quadrante ſuperiore BC,accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta deſiderantur; atq;(vt confuſionẽ vitemus)in arcuum interuallo ſemidiametri quadrantis BC, deſcriptum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes ęquales ſecetur,(primũ, videlicet in duas:deinde vna harũ iterũ in duas:Tertio vna harũ in tres:ac poſtremo vna harũ in quinq;)continebit vna particula ſexageſima numerũ minutorũ propoſitũ. Verbi gratia,ſi particula quæratur continens 50.min. accipiemus in arcu FG,ad interuallũ ſemidiametri AC,deſcripto arcum FG, arcui CZ,graduũ 50.æqualẽ,eumq; in 60.partes æquales ſecabimus,primũ in duas in puncto K: Deinde arcum FK,iterum in duas in puncto L,tertio arcũ FL,in tres in punctis T,V. Ac tandẽ arcum FV,in quinq;. Vna namque harum 5.particularum comprehendet 50.min.ac proinde ſi transferatur circino in quemlibet gradũ Quadrantis BC,abſciſſa erunt 50.Min.ex eo gradu. Hoc ita demonſtro. Quoniam eſt,vt arcus 60.graduũ ad 1.gradũ, ita arcus CZ,ad FG,graduũ 50.ad ſexageſimam partem eiuſdẽ arcus FG;erit permutando,vt arc⁹ 60.graduũ ad arcum FG,graduũ 50;ita 1.gradus ad ſexageſimam particulã arcus FG:& conuertendo,vt arcus FG,graduũ 50. ad arcum graduũ 60,ita particula ſexageſima arcus FG,ad 1.gradum. Cum ergo arcus FG,contineat $\frac{50}{60}$.arc⁹ 60. graduũ,continebit quoq; particula ſexageſima arcus FG,$\frac{50}{60}$. vnius gradus,hoc eſt,50.Min. Quod eſt propoſitũ.

SED hæc res incõmodiſſima eſt in paruis Quadrãtib⁹,præſertim ſi pauca Minuta, vtpote 1.2.vel 3.abſcindenda ſint. Quis n. in Quadrante exiguo arcũ 1.grad⁹,vel 2.vel.3.in 60.particulas diſtribuat? Quam ob rem cũmodius id,ꝙ proponitur,efficiemus hac ratione. Ex eodem quadrante ſuperiore BC,arcus grad.61.transferatur in arcum XY,ad interuallũ ſemidiametri AC.deſcriptum,ab X,vſq; ad Y. Atq; hic arc⁹ XY, in 6.partes æquales ſecetur;Primũ ſcilicet in 2.deinde vtraq; ſemiſſis in 3.Deinde prima pars in 10.particulas ęquales diuidatur,ita vt quælibet harũ particularũ ſit $\frac{1}{61}$.arcus XY. Et quoniã vna harũ particularũ eſt ad arcum XY, vt 1. gradus Quadrantis BC,ad arcum 60.graduũ;cum vtrobiq; proportio ſit ſubſexagecupla; erit permutando vna illarũ particularum ad 1.grad.vt arcus XY,ad arcum 60.graduum. Quocirca quemadmodũ arcus XY,arcum grad.60.cõtinet ſemel,& inſuper vnam eius partem ſexageſimam,id eſt,1.grad.ex cõſtructione;Ita quoq; vna illarum particularũ cõprehendet 1.gradũ ſemel,& inſuper vnam partẽ ſexageſimã vni⁹ grad⁹,hoc eſt.1.Minutũ. Ex quo fit,vt duæ particulæ complectantur 2.grad.Min.2. At vero 3.particulæ contineant 3.grad.& 3. Min.& ſic deinceps.

ITAQVE ſi in Quadrantẽ BC,transferatur vna particula ſexageſima arcus XY.à puncto C,vel à quouis gradu,habebitur 1.Min.in 2.gradu,vel quouis alio. Et ſi duæ particulæ transferantur, habebuntur in tertio gradu duo Minuta:tria autem Min.in 4.gradu,ſi tres particulæ transferantur,& ſic de cæteris.

PARI ratione,ſi quis deſideret quotlibet gradus,ac Minuta,inquirenda prius erit particula Minutorũ, q̃ deſiderãtur, eaq; ad gradus propoſitos adijciẽda. Quod ſi particula minutorũ inuẽtorũ tã exigua fuerit,vt circino vix accipi poſſit,accipienda ea erit vna cum 1.gradu:& hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propoſitum minus vno. Vt ſi velit quis grad.89. Min.59. Inuenienda prius erunt 59. Minuta,quod fiet,ſi 59.particulæ arcus,XY,in Quadrantem BC,transferantur. Nam particula in 60, gradu cõplectetur 59.Min.vt dictum eſt. Si igitur arcus ex illa particula,& 1.gradu conflatus adijciatur ad arcum 88.grad. conficietur arcus grad.89.Min.59. Eademq; ratio eſt de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. ſi vnus pes circini in puncto 50. ſtatuatur. & alter in nona particula primæ partis ſextæ totius arcus XY, verſus X. Ita accipientur quoque particulæ 49.48.39.34.&c.vt perſpicuum eſt.

IAM vero ſi Minuta non in Quadrante BC,ſed in maiori,minoriue accipienda ſint, inquirenda ea erũt in Quadrante BC, beneficio arcus XY,vt docuimus; Deinde arcui inter C,& finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrante propoſito arcus ſimilis,quod fiet,ſi ille Quadrans ex centro A, deſcribatur, rectaque ex A,per finem particulæ in BC,inuentæ educatur,&c.

Quo pacto reperiatur fractio cuiuſque particulæ in parte qualibet lineæ rectæ in partes æquales diuiſæ.

14 QVAE Num.10.11.12.& 13.pręcedentib⁹,dixim⁹, perbelle etiã quadrant in lineas rectas. Nam eadẽ ratione cognoſcem⁹,ſi linea recta in quotuis partes ęquales ſecetur, quantam fractionẽ quælibet particula vnius partis contineat:Et viciſſim quo pacto ex vna parte abſcindenda ſit quæcunq; fractio propoſita. Quę res incredibile eſt,quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis;tum verò maxime Dimenſionibus, quæ per ſcalam altimetrã fieri ſolẽt,afferat,vt lib.3.cum de Quadrato Geometrico,vbi ſcalę altimetræ vſus apparebit,perſpicuũ erit. Sit enim recta linea AB,vt ad pedem Quadrantis ſuperioris vides,ſecta in 10.partes æquales, (In tot n. partes libet tam vmbram rectam,quam verſam ſcalæ altimetræ diſtribuere:quamuis ab alijs vtraq; in 12. diuidatur: quod per illam diuiſionẽ facilius Dimenſiones perficiantur, vt ſuo loco patebit. Magis tamen probarem, ſi vtrumq; vmbræ latus in 100.partes ſecaretur,ſi id magnitudo inſtrumenti cõmode permittit)propoſitumq; ſit, quot partes decimas cõtineat particula DC,partis quintę,beneficio circini ſumpta particula DC,decupletur ab A,vſq; ad E. Et quoniã in AE,cõtinẽtur ſex partes totius lineæ AB,continebit propterea particula DC.$\frac{6}{10}$.vnius partis decimæ,hoc eſt,$\frac{6}{100}$.totius lineæ. Ita vt ſi recta AB,diuiſa cogitetur in 100.partes,tribuendo ſingulis decimis partib⁹ denas particulas,ſegmentũ AC,cõprehendat $\frac{46}{100}$. Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. ſupereſt adhuc particula FE, vnius decimæ,ſi ea rurſum decupletur ab A,vſq; ad G,reperientur in AG,octo partes totius lineæ AB, Continet ergo particula FE,$\frac{8}{10}$.vnius decimæ,hoc eſt,propoſita particula DC,vltra $\frac{6}{10}$.vnius partis rectæ AB, continet inſuper $\frac{8}{10}$.vnius decimæ,(vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$.quas in particula DC, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$.vnius partis,ſi ſingulæ partes decimæ rectæ AB,diuiſæ eſſent in 100. particulas;atq; adeo, ſi recta AB,ſecta intelligatur in 1000.partes,tribuendo ſingulis decimis partibus centenas particulas, ſegmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$.quippe cum in AD,contineantur $\frac{400}{1000}$. Et in DC,$\frac{68}{1000}$.vnius partis rectæ AB, ſiue $\frac{68}{1000}$.totius lineæ AB;cum quælibet centeſima particula vnius partis decimæ ſit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$.quæ in particula DC,continentur,nimirum ad fractionem à 10000. denominatam,&c.ſed ſatis mihi videtur ad partes milleſimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem eſt,quæ in gradibus,ac Minutis. Eandem enim proportionem habet recta 10.partium ad 1.partem,quam recta AE,ad particulã DC,cum vtrobiq; proportio ſit decupla, ideoq; permutando erit vt recta 10.partium ad rectam AE,ita 1.pars ad particulam DC. Quamobrem ſicut in AE,cõtinentur $\frac{6}{10}$.rectæ AB,decem partium,& inſuper particula FE, reſpectu vnius partis lineæ AB,decem partium,

ita quo-

ita quoque in particula data DC, continebuntur $\frac{6}{10}$. vnius partis, & inſuper talis particula reſpectu vnius decimæ qualis eſt FE, reſpectu vnius partis lineæ AB, decem partium, &c.

ITAQVE, vt vides, duab. operationib. ad milleſimas partes peruenitur, ac ſi latus totum AB, in 100. partes ſectum eſſet, quod conſideratione dignum eſt. Et duo quidem Numeratores decimarũ eo ordine poſiti, quo inuẽti ſunt, dant Numeratorẽ centeſimarũ: cui ſi præponatur ad ſiniſtrã numer⁹ integrarũ partiũ ante datam particulã exiſtentiũ, conflabitur Numerator milleſimarũ. Vt in ſuperiori exemplo, quia ante datã particulam DC, reperiuntur 4. partes, inuẽtæq; ſunt $\frac{6}{10}$. & $\frac{8}{10}$. erit tota fractio $\frac{468}{1000}$. Sic ſi inuentæ eſſent pro aliqua particula in octaua parte, $\frac{7}{10}$. $\frac{0}{10}$. conſtitueretur fractio $\frac{870}{1000}$. Item ſi in tertia parte inuentæ eſſent $\frac{0}{10}$. $\frac{7}{10}$. fieret fractio $\frac{307}{1000}$. & ſic de cæteris. Quod ſi recta AB, id eſt, latus vtriuſq; vmbræ diuideretur in 100 partes, reperirentur partes milleſimæ vnica operatione; ſi nimirum particula data in vna centeſima decuplaretur: quia tunc intelligerentur ſingulæ centeſimæ in denas particulas ſubdiuiſæ. Sed quia particula data in centeſima aliqua parte perparua eſt, vt vix circino capi poſſit, accipiemus eam cum vna centeſima, vel duabus, & ex decuplo abijciemus 10. vel 20. centeſimas, vt reliquæ cẽteſimæ exhibeant decimas vni⁹ centeſimæ. Eadẽ ratione, quãdo data particula in linea 10. partium eſt perpuſilla, accipienda erit reliqua particula maior decies. Nam reliqua pars rectæ AB, aB, vſq; ad finẽ illi⁹ particulę decuplę dabit numerũ decimarũ in ꝓpoſita minore particula, &c. Hac ratione, ſi particulã CH, decuples, incides in pũctũ K. Ergo ſegmẽtũ BK, dabit; $\frac{6}{10}$. & in ſuper particulãDK, vt ſupra; cũ DK, particulę FE, ſit ęqualis. Ratio hui⁹ rei eſt, ꝙ ambæ particulę DC, CH, decuplatę cõficere debeãt totã, AB. vt cõſtat.

De nominatio facilis fractionum milleſimarum.

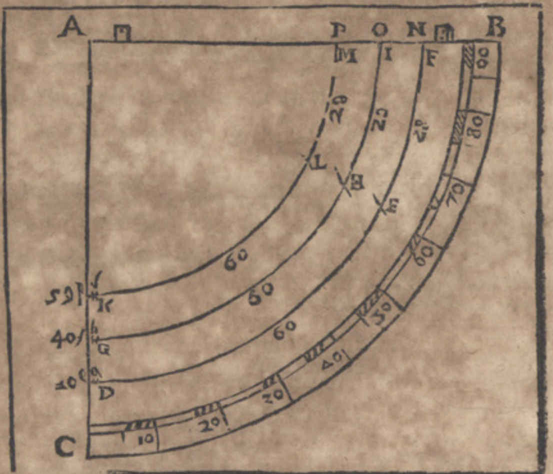
AD Maiorẽ quoq; commoditatem pro inueſtigandis partib⁹ decimis, hoc eſt, pro decuplanda particula propoſita, conſtrui poterit circinus duplicis aperturæ, in quo ſcilicet crura producta ſe mutuo interſecent, atq; vna apertura alterius ſit ſemper decupla, inſtar circini, quo linea duas in partes ęquales diuidi ſolet. Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula abſciſſa, particula maior exhibeat eam particulam decies ſumptã, vt non opus ſit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi poteſt, qui illo circino, ſi recte fabricatus ſit, facilius vitatur. Sed ſine hoc circino idem fieri poteſt per inſtrumentum partiũ, quod capite præcedenti conſtruximus. Nam ſi particula data circino capiatur, & ſumma diligentia ei ſumatur in inſtrumento interuallum inter 10. & 10. æquale, erit interuallum inter 100 & 100. datæ particulæ decuplum.

15 IAM vero ſi viciſſim ex qualibet parte rectæ AB, auferendæ ſint quotcunq; decimæ partes vni⁹, diuidendũ erit ſegmentũ cõtinens numerũ partiũ decimarũ in 10. partes æquales. Nã vna pars decima hui⁹ ſegmẽti continebit decimas partes q̃ſitas. Vt ſi cupiat quis $\frac{7}{10}$. diuidendum erit ſegmentum rectæ AB, includens 7. partes, in 10. particulas: Quęlibet namq; harum comprehendet $\frac{7}{10}$. vnius partis rectæ AB. Eademq; ratio eſt de cæteris. Sed commodius hunc vſum nobis præſtabit inſtrumentum partium ſupra conſtructum. Eius enim beneficio ex quauis recta abſcindemus non ſolum quotcunque decimas, ſed etiam centeſimas, nonageſimas nonas, nonageſimas octauas, & ſic deinceps, vſque ad centeſimam partem. Nam ſi velimus $\frac{3}{100}$. alicuius lineæ, capiem⁹ ei lineæ interuallum inter 100 & 100 æquale. Circinus namq; extenſus inter 3. & 3. dabit $\frac{3}{100}$. quæſitas. Ita quoq; circini pedes inter 50 & 50. dabunt $\frac{50}{100}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. Rurſus pedes circini inter 20. & 20. dabunt $\frac{20}{100}$. hoc eſt, $\frac{1}{5}$. & ſic de cæteris, vt fuſius in vſu prædicti inſtrumenti partium cap. 1. expoſuimus.

Quo modo ex data linea auferendæ ſint quotcunq; partes decimæ vel aliæ partes,

16 QVIA vero alios alijs inſtrumentis delectari ſcio, addam hoc loco duo alia inſtrumenta ab eodem illuſtri D. Iacobo Curtio mecum communicata, quæ ad vſus Geometricos & Aſtronomicos perquam ſunt vtilia. Primum eſt eiuſmodi: ſit quadrans BC, diuiſus in 90. gradus, quorum initium progrediatur à C, verſus B, & pinnacidia, in latere AB, collocentur. Nos eum ob ſpatij anguſtiam in quinos gradus partiti ſumus. Intra hunc ex eodem centro A, deſcribantur alij 59. quadrantes, qui diuidantur in gradus hoc modo. In primo, qui proximus eſt quadranti BC in grad. 90. diuiſo, arcus continẽs grad. 61. ſecetur in partes 60. æquales, vel arc⁹ graduũ 30$\frac{1}{2}$. nimirũ ſemiſſis ipſius, in partes 30. æquales, quarũ quælibet cõtinebit grad. 1. Min. 1, hoc eſt, Minata 60. [c] Nam eadem proportio eſt partium 60. in quas arcus graduum 61. diuiſus eſt, ad gradus, 61. hoc eſt, ad Minuta 3660. quæ partis 1. ad Min. 61. Idem enim numerus producitur ex 60. primo numero, in 61, quartum numerũ, (producitur autem numerus minutorum 3660.) qui ex 1. tertio numero in 3660. ſecũdum numerum producitur. Aut eandem ob cauſam; eadem eſt proportio partium 30. in quas arcus graduum 30$\frac{1}{2}$. diuiſus eſt, ad grad. 30.$\frac{1}{2}$. hoc eſt, ad Minuta 1830. quæ partis 1. ad Min. 61. Hæc autem diuiſio, vt confuſio punctorum in primo illo quadrante vitetur, facienda eſt ſeorſum in quadrante alio, qui illi æqualis eſt. Deinde vna pars continens Min. 61. transferatur beneficio circini in primum quadrantem prædictum, initio facto à ſemidiametro AC. Ex termino huius partis ad interuallũ ſemidiametri proprię abſcindatur arcus grad. 60. quo diuiſo in 60. gradus, continebit reliquus arcus vſq; ad ſemidiametrum AB, grad. 28. Min. 59. ac proinde in eum transferendi ſunt grad. 28. ita vt ſuperſit particula Minutorum 59.

c 19. ſept.



IN ſecundo quadrante arcus graduum 62. in 60. partes, vel arcus graduum 31. in 30. partes ęquales ſecetur, vt quælibet contineat grad. 1. Min. 2.

IN tertio arcus graduũ 63. in 60. partes, vel arc⁹ graduũ 31$\frac{1}{2}$. in partes 30. æquales diuidatur. In quarto idẽ fiat de arcu graduũ 64. vel 32. & ſic deinceps. Reliqua aũt perficiãtur, vt de primo quadrãte dixim⁹. Quod vt plani⁹ fiat, ponam⁹ exẽplũ in quadrãte 20. 40. & 59. ſiue vltimo & intimo. Itaq; in quadrãte vigeſimo eN, ſit arc⁹ eD, pars ſexageſima arcus graduum 80. (nimirum tot graduum vltra 60. quotum locum ipſe quadrans occupat,) ita vt complectatur grad. 1. Min. 20. [d], cum ſit, vt 60. arcus graduum 80. ad grad. 80. hoc eſt, ad min. 4800. ita 1. pars ad grad. 1. Min. 20, hoc eſt, ad Min. 80. Vel certe arcus e D, ſit pars trigeſima arcus graduum 40. Ita enim rurſus

d 19. ſept.

ſus

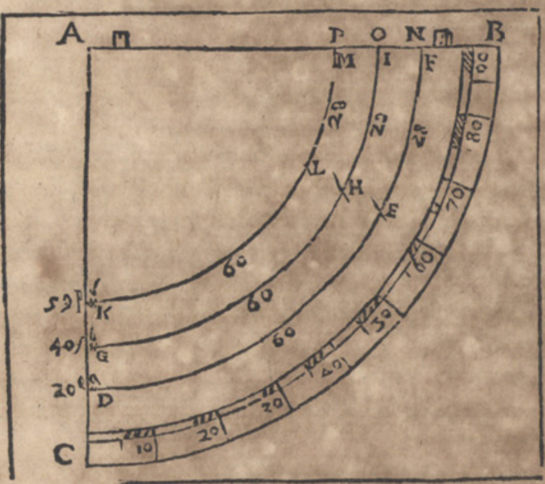
ſus continebit gradus $1\frac{1}{8}$.hoc eſt, Min.80. Deinde ad interuallum ſemidiametri A e,abſcindatur arcus DE,grad. 60.qui propterea in 60.gradus diſtribuatur:arcus autem EF,contineat grad.28. & arcus FN, Min.40. quod arcus e F,complectatur grad.89.Min.20.Ita vt particula FN,ſit complementum Minutorum,quæ in e D,vltra vnum gradum continentur:complementum,inquam,vſque ad 60.

RVRSVS in quadrageſimo quadrante f O,arc⁹ f G, ſit ſexageſima pars arc⁹ graduũ 100.vel pars trigeſima arc⁹ graduũ 50.qui illius ſemiſſis eſt;ita vt cõtineat grad.1.Min.40.Arcus vero GH,cõtineat grad.60.&HI,28.& deniq; IO,Min.20.nimirum complementũ Minutorum 40.quę in f G,vltra vnum gradum comprehẽduntur.

POSTREMO in quadrante p P, quinquageſimo nono ſit arcus p K, ſexageſima pars arcus graduum 119.vel pars trigeſima arcus graduum $59\frac{1}{2}$.qui ſemiſſis illius eſt;ita vt contineat grad.1.Min.56.Arcus autem KL, ſit graduum 60.& LM.grad.28.& deniq; MP,Min.1.Ex his exemplis facile intelliges, quid faciendum ſit in alijs quadrantibus.Semper enim in quolibet quadrante ſecandus eſt in 60,partes æquales arcus,qui tot gradus vltra 60.complectatur,quotum locum quadrans ipſe tenet,excluſo extremo BC.Ita enim continebit particula ipſius prope ſemidiametrum AC,vltra vnum gradum totidem Minuta,quotus ipſe quadrans eſt inter quadrãtes, hoc eſt,quot gradus vltra 60.continentur in arcu diuiſo in 60.partes æquales. Vltima verò particula iuxta ſemidiametrum AB,includet reliqua Minuta ex 60.Idemq; aſſequeris,ſi ſemiſſem illius arcus,quem in 60.partes ſecandum diximus, partieris in 30.æquales partes.

PERACTA diuiſione omniũ quadrantũ,adſcribendi ſunt eorũ numeri iuxta ſemidiametrum AC,ita vt primus quadrans citra quadrantem BC, habeat numerum 1.ſecundus 2.tertius 3.vigeſimus 20. quadrageſimus 40.quinquageſimus nonus 59.&c.

17 VSVS quadrantis hoc modo conſtructi præclarus eſt,cũ eius beneficio in altitudinib. aſtrorum cognoſcamus etiam Minuta. Nã cadẽte filo in aliquẽ gradũ quadrantis BC, altitudo cõtinebit tot gradus ſine Minutis,quot à filo abſcindũtur. Quando aũt filum nõ abſcindit aliquẽ gradum ex quadrante BC,conſidera attente,ex quo quadrante partẽ integrã abſcindat;quod fere ſemper accidet,propter partiũ multitudinẽ. Nam altitudo tunc continebit vltra gradus ex quadrante BC,abſciſſos,tot inſuper Minuta,quot vnitates adſcriptę ſunt illi quadranti, cuius pars integra fuit abſciſſa. Vt cadente filo vltra gradũ 30.in particulam aliquam integram quadrantis quadrageſimi,complectetur altitudo Grad. 30.Min.40.



18 VERVM quia hac ratione cognoſcuntur ſolum Minuta vltra vnum,vel plures gradus;vt diſcernantur etiam Minuta citra vnum gradũ, transferantur ex terminis particularum illarum primarũ ſingulorum quadrantum, de quibus diximus, verſus ſemidiametrum AC, ſinguli gradus. Ita enim cu uſuis quadrantis particula prope eandem ſemidiametrum continebit tot Minuta, quot vnitates Quadranti adſcriptæ ſunt, totidem nimirum , quot prior particula vltra vnum gradum continebat. Verbi gratia, ſi arcus Da, Gb, Kd, contineant ſinguli ſingulos gradus, complectetur arcus e a,Min.20.fb, nebat.Verbi gratia ſi arcus Da, Gb,Kd,contineant ſinguli ſingulos gradus, complectetur arcus e a, Min. 20.fb, Min.40.& pd,Min.59.Cadente ergo filo in aliquam particulam integrã citra puncta D,G,K,cõtinebit altitudo tot Min.quot vnitates quadranti,cuius particulam integram filum abſcindit,adſcriptæ ſunt.Itaq; quando filum nullum gradum integrũ ex quadrãte BC,abſcindit, caditq; in particulam primã integrã quadrãtis, verbi gratia eN,indicabitur arcus Min.20.quando aũt abſcindit vnum, vel plures gradus, & inſuper cadit in aliquam particulam integram eiuſdem quadrantis;offeretur arcus vnius gradus,vel pluriũ,& inſuper Minutorũ 20. Idemq; dicendum eſt de alijs quadrantibus, habita ſemper ratione numerorum adſcriptorũ:hi enim minuta numerant:

MANIFESTVM autem eſt,quo maior fuerit Quadrans ABC,eo magis exquiſite omnes quadrantes in partes,quas diximus poſſe diſtribui.

Ex quadrante arcum quotcunque graduum ac minutorum auferre & quot gradus, minutaq; in dato arcu contineantur, cognoſcere.

19 BENEFICIO hui⁹ quadrãtis cõmodiſsime quoq; accipi poteſt arcus quotcunq; graduũ ac Minutorũ,& viciſſim cognoſci,quot gradus,ac Minuta propoſitus arcus cõtineat.Nam ſi ex cẽtro A,per finẽ grad⁹ propoſiti in extimo quadrante BC,recta ducatur,vltra quam in alio quadrante,cui adſcriptus eſt numerus Minutorum datorum,accipiatur primum punctum occurrens verſus B,continebit arcus illius quadrantis inter dictum punctum & ſemidiametrum AC,interiectus gradus & Minuta, quæ deſiderantur. Huic ergo arcui ſimilis auferendus eſt ex circulo propoſito. Viciſſim, vt cognoſcamus,quot gradus,ac Minuta in oblato quouis arcu contineantur,accipiemus ei ſimilem in aliquo quadrante intra quadrantem BC,deſcripto,vel certe in ipſo quadrante,BC,& per eius finem ex centro A,rectam ducemus, quæ fere ſemper trãſibit per aliquam particulã integram alicuius quadrantis.Ea ergo particula dabit vltra gradus ab illa recta abſciſſos tot Minuta,quot vnitates illi quadranti adſcriptæ ſunt;atq; gradus illi ac Minuta in propoſito arcu continebuntur.Vides ergo,ſi huiuſmodi quadrans tantæ magnitudinis,quantam diuiſiones ſupradictæ exigunt,ſumma cura ac diligentia cõſtruatur, quàm præclare cum ipſa Aſtronomia agatur, cum non minus explorate Minuta beneficio ipſius comprehendamus, quam per ſinuum multiplicationes, diuiſionesq; :quæ res non parui facienda videtur.

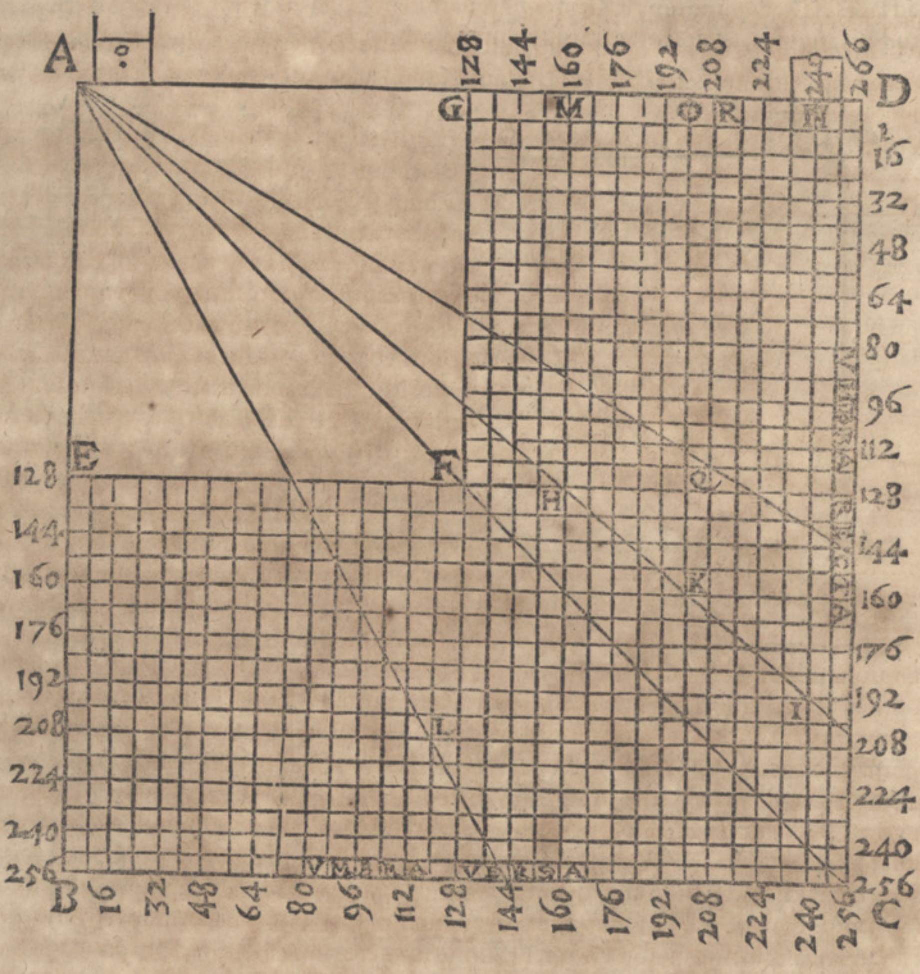
Conſtructio quadrati, quo exquiſitiſſime etiã aſtrorum altitudines obſeruantur.

20 ALTERVM inſtrumentum eſt tale. Sit quadratum ABCD,tãtæ magnitudinis,vt cõmode ſingula latera recipere poſſint 256.partes æquales.Quãuis n. ipſe latus quodlibet in 200.partes ſecet,facilius tamẽ in 256 diuidetur,cũ primùm bifariã ſecetur,deinde vtraq: medietas iterũ bifariã,& quęlibet harũ partiũ rurſus bifariã, atq; ita deinceps vſq; ad octauã diuiſionẽ,qua ſingula latera in 256.partes diuiſa erũt. Accedit ad hãc diuiſionis facilitatẽ hæc etiã vtilitas, ꝙ plures particulæ in toto quadrato cõtineãtur.Certũ aũt eſt,quo plures partes ſunt, eò perfectius eſſe inſtrumẽtũ; adeo vt quadratũ,ꝙ recipere poſſit adhuc alias ſubdiuiſiones,vt nimirũ in ſingulis laterib. reperiãtur partes 512.vel 1024.videatur eſſe omnib.numeris abſolutũ:ſed ſatis nũc ſit,ſingula latera in 256.part. ęquales diſtribuiſſe.In exẽplo,ob ſpatij anguſtias,ſecta ſũt ſingula in 32.part.ita vt q̃libet pars intelligatur

ſubdi-

ſubdiuiſa adhuc in 8. particulas. Ordo ſiue numerus partium progreditur ab A, verſus B, & D, & à B, & D, verſus C, vt in figura apparet. Puncta porro diuiſionum reſpondentia iungantur rectis lineis, quæ omnes quadrati lateribus [a] parallelæ erunt: Hæ tamen non omnes ad oppoſita vſque latera producãtur, ſed relinquant quadratum vacuum AEFG, quod totius quadrati quarta pars ſit. Ita enim fiet, vt quomodocunque filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ex A, egrediens cadat quaſi ſemper in partem aliquam integram dictarum parallelarum, hoc eſt, tranſeat præciſe per aliquem angulorum rectorum, qui ab interſectionibus illarum parallelarum efficiuntur, propter earum partium, angulorumve multitudinem. Relictum eſt autem quadratum AEFG, vacuum, propterea quod omnes partes in eo contentæ, ſi productæ eſſent lineæ, habent alias partes duplas, aut quadruplas, aut octuplas, &c. adeo vt filum perpendiculi in aliquam earum cadens cadat quoque neceſſario in aliquam aliam illius duplam, vel quadruplam, octuplamve, &c. vt neceſſe non ſit particulas illas in quadrato AEFG, exprimere. Verbi gratia. Si accipiatur in latere AD, portio continens 40. partes, & filum perpendiculi AH, abſcindat ex parallela à parte 40. lateris AD, ad partem 40. lateris BC, ducta partes 32. abſcindet idem filum ex parallela à parte 160. lateris AD, ad partem 160. lateris BC, ducta partes 128. in H, quæ quadruplæ ſunt partium 32. quemadmodum & partes 160. quadruplæ ſunt partium 40. Sic quoque idem filum AH, ex parallela à parte 240.

[a] 33. primi.

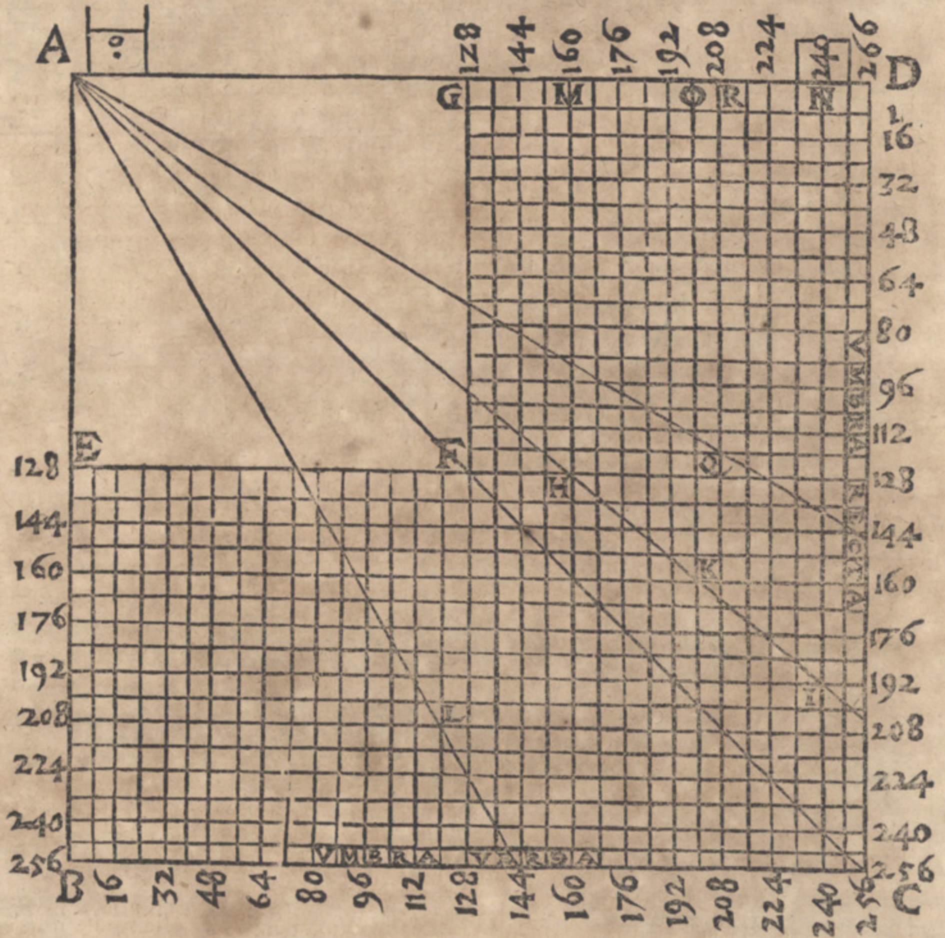


lateris AD, ad partem 240. lateris BC, ducta auferet partes 192. in I, quæ partium 32. ſextuplæ ſunt, quemadmodum & partes 240. in latere AD, partium 40. in eodem latere ſextuplæ ſunt. Denique idem filum ex parallela à parte 200. lateris AD, ad partem 200. lateris BC, ducta abſcindet partes 160. quæ quintuplæ ſunt partium 32. ſicut & partes 200. lateris AD, partium 40. eiuſdem lateris quintuplæ ſunt. Eademque ratio eſt de cæteris. Ratio huius rei eſt, quod parallela à parte 40. lateris AD, ad filum AH, ducta conſtituit cum filo triangulum ſimile triangulo, quod cum eodem filo conſtituit parallela quæ v g. à parte 160. lateris AD, demittitur, &c. Poteſt ergo quadratum AEFG, excindi, vt inſtrumentum minus reddatur ponderoſum.

Vſus quadrati cõſtructi in rebus Aſtronomicis.

HÆC eſt quadrati conſtructio non ſolum, vt vides, facillima, ſed cuius etiam vſus immenſus eſt tam in rebus Aſtronomicis, quam in Geometricis, vt ex ijs, quæ ſequuntur, liquido conſtabit. Exordiemur autem à rebus Aſtronomicis Obſeruaturus ergo quiſpiam altitudinem alicuius ſtellæ notet diligenter, in quam partem linearum parallelarum præciſe filum perpendiculi cadat. Ex hac enim altitudo ſtellæ, hoc eſt, magnitudo anguli quam filum cum latere AB, facit, eruenda eſt, hoc modo. Ceciderit filum in punctum H, parallelæ à parte 160. lateris AD, nempe ex M, ad partem 160. lateris BC, ductæ, & parallelæ à parte 128. lateris AB, ad partem 128. lateris CD, ductę. Quoniam igitur in triangulo rectilineo rectangulo AMH, duo latera circa rectum angulum nota ſunt, nempe AM, partium 160. & MH, partium 128. quos numeros iuxta parallelas per H, traiectas ſcriptos eſſe vides; notus fiet, ex praxi 5. noſtrorum triang. rectil. angulus HAM, complementi altitudinis, hac ratione. Fiat, vt 160. latus AM, circa angulum rectum M, ad 10000000. ſinum totũ. (Accuratior enim calculus in hoc negotio euadet, ſi ex ſinubus, & tangentibus non abijciantur duæ figuræ, vt facere ſolemus, cum ſolis ſinubus vtimur) ita 128. latus MH, angulo quæſito HAM, oppoſitum ad aliud, inuenieturque Tangens 8000000. anguli HAM, quæſiti, cui in tangentium tabula reſpondet arcus grad. 38. Min. 40. pro complemento altitudinis ſtellæ. Eandem Tangentem reperies ex lateribus AO, partium 200. & OK, partium 160. Item ex lateribus AN, partiũ

240. & NI,partium 192.vt patet:ita vt,quando filum in plures partes plurium parallelarum præciſe cadit, vt hic contingit in punctis H,K.I,aſſumi poſſit quæcunque illarum,ſine vllo diſcrimine.Per ſolos ſinus ex eadem praxi 5.noſtrorum triang.rectil.idem prædictus angulus HAM,elici poteſt,ſed non tam facile. Nam ſi quadrata laterum AM,& MH,hoc eſt,quadrata partium 160.& 128.ſimul addantur,& ſummæ 41984.radix quadrata eruatur,dabit hæc radix latus AH,recto angulo M,oppoſitum partium $204\frac{268}{409}$. fere. Quare ſi fiat,vt $204\frac{368}{409}$.latus AH,recto angulo oppoſitum ad 100000.ſinum totum,ita 128. latus MH, quæſito angulo oppoſitum ad aliud, inuenietur ſinus anguli HAM,quæſiti 62470.cui in tabula ſinuum reſpondent iterum grad.38.Min.40. Ponamus rurſus filum perpendiculi cecidiſſe in partem 208. parallelæ à parte 120. lateris AD, ad partem 120. lateris BC, ductæ, nimirum in punctum L: quem numerum 120. in latere BC, ſolum inuenies, cum minor ſit, quam 128.atque adeo in latere AD,non reperiatur.Sic etiam numerus minor,quam 128.in ſolo latere CD,quærendus eſt,vt ex figura patet. Si igitur rurſum fiat,vt 120. latus circa angulum rectum ad 10000000. ſinum totum, ita 208.latus angulo quæſito LAD,oppoſitum ad aliud,producetur tangens quæſiti anguli 17333333. cui reſpondet in tangentium tabula arcus grad 60.Min.1. Vel ſi fiat,vt 208. latus AP, circa angulum rectum P. ad 10000000. ſinum totum,ita 120.latus LP,angulo LAP,oppoſitum ad aliud. (Quando enim filum in latus BC, cadit, aſſumemus triangulum ad latus AB,applicatum: quemadmodum eodem filo cadente in latus CD, aſſumptum fuit triangulum ad latus AD, applicatum, ſed tunc angulus inuentus LAP, detrahendus non erit ex recto, vt reliquus fiat altitudinis angulus, ſed ipſemet altitudinem indicabit) procreabitur tangens 5769231.anguli LAP,cui



tangenti reſpondet in tangentium tabula arcus grad.29.Min.59. Tantus ergo tunc eſt altitudinis angulus quæſitus LAP,complementum ſcilicet gr. 60.Min.1.vt prius.Cadente filo in punctum C, non opus eſt calculo, ſed altitudo ſtellæ comprehendet tunc grad.45. præciſe, propter angulum ſemirectum CAB.

Qua ratione ſit conſtruenda tabula pro quadrato prædicto.

HAC via ſupputari poterit. (Id quod libenter hic præſtitiſſem, ſi per tempus licuiſſet) tabula continens gradus & Minuta ſingulis particulis parallelarum reſpondentia,quemadmodum præcedens tabula à nobis ſupputata eſt pro ſingulis particulis quadrantum intra quadrantem principalem deſcriptorum. Satis autem erit tabulam ſupputare pro particulis parallelarum à latere AB, BC, ductarum in trapezio CBEF, comprehenſis. Iidem namque prorſus arcus reſpondebunt particulis trapezii CDGF, vt perſpicuum eſt, cum eadem omnino triangula fiant ad latus AD, quæ ad latus AB,conſtituuntur. Verum tunc, cum deprehenſum fuerit, filum cecidiſſe in latus CD, ſumendum erit complementum anguli in tabula inuenti pro altitudine quæſita: Id quod patuit in angulo HAM,cuius complementum HAB, angulus fuit altitudinis quæſitæ. Eſſe autem triangula ad latus AD,applicata triangulis ad latus AB,applicatis omnino æqualia,manifeſtum eſt in triangulis AQR,ALP, in quorum primo filum perpendiculi tranſit per partem 120. parallelæ à parte 208. lateris AD, ad partem 208. lateris BC, nempe à puncto R, ductæ; in ſecundo vero filum perpendiculi ducitur per partem 120. parallelæ à parte 208.lateris AB,h.e.à puncto P,ad partem 208.lateris CD,ductæ.Quoniã n.latera AR, RQ partium 208. 120.æqualia ſunt lateribus AP,PL,partium 208.120.anguloſq; continent rectos, [a] erunt triangula ipſa æqualia, & anguli QAR,LAP,æquales.Quare cadente filo in parte 120.parallelæ ex parte 208.lateris AD,ductæ ſi in tabula conſtructa erutus fuerit per partem 120.parallelę 208.angulus gr.29.Mi.59.dabit eius complementũ gr.60. Mi.1.angulũ QAB,altitudinis quæſitæ.Eademq; ratio eſt de cæteris. In tabula porro (vt hoc etiam ſtudioſum moneamus) numerus parallelarum, incipiendo in noſtro exemplo à 128. progrediendoq; vſq; ad 256. ponatur in vertice tabulæ,numerus vero partiũ cuiuſq; parallelæ ab 1 vſq; ad 256.in ſiniſtro latere eiuſdem tabulæ,in angulis deniq; communibus ſcribantur gradus & Minuta.

a 4.primi.

IAM

IAM vero in ſcala altimetra (vt vſum quoque dicti quadrati in rebus Geometricis explicemus) dici non poteſt, quam præſtantem vſum habeat idem quadratum hactenus conſtructum: vbi latus CD, vmbræ rectæ & BC, vmbræ verſæ deputabitur, & omnis operatio vel per ſolam vmbram rectam, (quod periucundum eſt, & huius inſtrumenti proprium) vel per ſolam verſam ſine alterius ad alteram reductione, & ſine vlla fractionum moleſtia fieri commodiſſime poterit. Solum gnomon hic non eſt idem ſemper, ſed alius atque alius. Exempli gratia. Filo perpendiculi AQ, abſcindente in Q. partem 120. vmbræ rectæ RQ, erit gnomon AR, partium 208. Quod ſi idem punctum Q. ponatur pertinere ad partem 208. vmbræ verſæ, erit gnomon partium 120. Et quoniam, vt in quadrato Geometrico demonſtrabimus, eſt vt vmbra recta ad gnomonem, ita diſtantia oculi à re, cuius altitudinem menſuramus, ad ipſam altitudinem: Item vt gnomon ad vmbram verſam, ita eadem diſtātia ad altitudinem; ſi fiat vt vmbra recta 120. ad gnomonem 208. Vel, vt gnomon 120. ad vmbram verſam 208. ita diſtantia dicta ad aliud, reperietur altitudo rei menſurandæ. Sic etiam, cadente filo in punctum L, erit vmbra recta partium 208. & gnomon partium 120. Vmbra autem verſa erit partium 120. & gnomon partium 208. atque ita de reliquis. *Vſus eiuſdem quadrati in rebus Geometricis.*

PROBLEMATA VARIA
Triangulorum rectilineorum.

CAPVT III.

TERTIO loco præmiſſuros nos polliciti ſumus varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis prompte, atque expedite, cum id res poſtulauerit, poſſint erui: quod hoc tertio capite exequemur. Priori autem loco de triangulis rectangulis: poſteriori vero de obliquangulis agemus. In margine porro adſcripſimus propoſitiones noſtri tractatus triangulorum rectilineorum, in Theodoſio noſtro editi, in quibus problemata hæc demonſtrantur, vt ſtudioſi intelligant, vnde eorum demonſtrationes, quando libuerit, petere debeant.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM
Rectangulorum problemata.

I. PROPORTIONES LATERVM

Ex datis omnibus angulis cuiuſuis trianguli patefacere.

Singulis lateribus adſcribantur ſinus angulorum oppoſitorum. Latera enim eaſdem proportiones habent, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum reperiuntur. *1. Triang. rectil.*

II. LATVS

Ex baſe, & alterutro angulorum acutorum, ac proinde & altero, notum efficere.

Vt ſinus totus.	*ad baſem*	*Ita ſinus anguli lateri quæſito oppoſiti*	*ad latus quæſitum in partibus baſis.*	*2. Triang. rectil.*

III. LATVS

Ex baſe, & altero latere cognoſcere.

Vt baſis	*ad ſinum totum.*	*Ita datum latus.*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.*	*3. Triang. rectil.*

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt ſinus totus	*ad baſem*	*Ita ſinus anguli, qui lateri quæſito opponitur,*	*Ad latus quæſitum in partibus baſis, & alterius lateris.*

IV. LATVS

Ex altero latere, & alterutro angulo acuto, ac proinde & altero, eruere.

Vt ſinus totus	*ad latus datum*	*Ita tangens anguli quæſito lateri oppoſiti*	*Ad latus quæſitum in partibus dati lateris.*	*2. Triang. rectil.*

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti.	*ad latus datum,*	*Ita ſinus alterius anguli.*	*ad latus quæſitum in partibus dati lateris.*	*2. Triang. rectil.*

V. BASEM

Ex vno latere, & vno angulo acuto, ac proinde & altero, inueſtigare.

Vt ſinus totus	*ad latus datum.*	*Ita ſecans anguli dato lateri adiacentis*	*Ad baſem in partibus lateris dati.*	*2. Triang. rectil.*

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti.	*ad ſinum totum*	*Ita latus datum*	*Ad baſem in partibus lateris dati.*	*2. Triang. rectil.*

VI. BASEM

Ex vtroque latere perſcrutari, vna cum angulis acutis.

3. *Triang. rectil.*	*Vt latus alterutrum datum*	*ad ſinum totum:*	*Ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti.*

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt ſinus totus	*ad latus alterutrum datum:*	*ita ſecans anguli accepto lateri adiacentis*	*ad baſem in partibus lateris dati.*

VII. ANGVLVM

Ex baſe, & vno latere inquirere.

3. *Triang. rectil.*	*Vt baſis*	*ad ſinum totum*	*ita latus datum*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

VIII. ANGVLVM

Ex vtroque latere reddere cognitum.

3. *Triang. rectil.*	*Vt latus alterutrum*	*ad ſinum totum:*	*ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM obliquangulorum Problemata.

IX. SEGMENTA LATERIS à Perpendiculari facta.

Ex datis tribus lateribus cognoſcere.

9. *Triang. rectil.*	*Vt latus, in quod cadit perpendicularis*	*ad ſummam aliorum duorum laterum:*	*ita differentia eorundem duorum laterum*	*ad quartum quendam numerum.*

ET ſi quidem quartus numerus inuentus minor fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendus is erit ex illo latere. Semiſſis enim reliqui numeri dabit minus ſegmentum, quod ex toto latere ſubductum relinquet ſegmentum maius.

SI vero quartus numerus inuentus maior fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendum erit hoc latus ex illo numero. Semiſſis enim reliqui numeri dabit ſegmentum minus, exterius videlicet inter perpendicularem, & angulum obtuſum: quod additum eidem lateri conflabit aliud ſegmentum maius inter perpendicularem, & angulum acutum.

X. LATERA DVO

EX tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180. inuenire.

10. *Triang. rectil.*	1. *Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus alterutrius reliquorum angulorum*	*ad latus huic angulo oppoſitum.*

Rurſus

2. *Triang. rectil.*	*Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus tertij anguli*	*ad latus huic tertio angulo oppoſitum.*

2 IN Iſoſcele vnius tantum lateris inuentione opus eſt, cum vnum datum ſit cum angulis. In æquilatero vero trangulo, ſi vnum latus datum ſit, erunt & reliqua illi æqualia, data.

XI. LATVS

EX duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, id eſt, ad grad. 180. addiſcere.

10. *Triang. rectil.*	*Vt ſinus anguli alterutri lateri dato oppoſiti*	*ad latus oppoſitum datum:*	*ita ſinus anguli quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*

XII. LATVS

EX duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere.

Problema 17. triang. ſphæric.	1. *Vt ſinus totus*	*ad ſecantem complementi arcus, qui ſemiſſi aggregati datorum laterum ad ſinus reuocatorum, vt ſinus, debetur:*	*Ita differentia inter eam ſemiſſem, & alterutrum datorum laterum ad ſinus reuocatorum*	*ad quartum quendam numerum.*

Latera data ad ſinus reuocabuntur, ſi vtrumque multiplicetur per 10. vel 100. vel 1000. &c. ita vt maioris lateris numerus habeat tot figuras, quot continentur in maioribus ſinubus tabulæ ſinuum, nimirum 5. ſi ſinus totus ſtatuatur 100000. vel 7. ſi ſinus totus ponatur 10000000.

Deinde

Deinde.

Vt ſinus totus.	*ad tangentem ſemiſſis arcus qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita quartus numerus inuentus*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem eiuſdem arcus, & alterutrum angulorum non datorum.*

Hæc autem tangens hoc etiam modo inuenietur, qui priori præferendus videtur.

2 *Vt ſemiſſis aggregati duorum laterum datorum.*	*ad tangentem ſemiſſis arcus, qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita differentia inter ſemiſſem aggregati duorum datorum laterum, & vtrũlibet laterũ*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem arcus prædicti, & alterutrum angulorum non datorum.*	*Alio modo qui priori præferendus videtur*

Arcus huius tangentis inuentæ additus ad ſemiſſem eiuſdem arcus (eſt autem hic arcus ſumma duorum angulorum non datorum, nimirum dati anguli complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180.) dabit maiorem angulum non datum, qui videlicet maiori lateri dato opponitur: ex eadem vero ſemiſſe detractus reliquum faciet minorem angulum non datum, qui nimirum lateri minori dato opponitur.

Poſt hæc.

Vt ſinus vtriuslibet anguli inuenti	*ad latus oppoſitum:*	*ita angulus datus*	*ad latus oppoſitum quod quæritur.*	*2. triang. rectil.*

Itaque antequam tertium latus inueniatur, diſquirendi prius ſunt reliqui duo anguli: qui commodius videntur poſteriori via Num. 2. expoſita indagari, quam priori illa ratione Num 1. explicata.

3. Si duo latera ſint æqualia;[a] erunt reliqui duo anguli æquales. Semiſſis ergo arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, dabit vtrumque, &c. *a 5. primi.*

XIII. LATVS.

EX duobus lateribus; & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere.

1 *Vt latus datum dato angulo oppoſitum*	*ad ſinum anguli dati:*	*ita alterum latus datum,*	*ad ſinum anguli huic alteri lateri oppoſiti.*	*13. triang. rectil.*

Hic ſinus inuentus dabit angulum alteri dato lateri oppoſitum, ſi acutus fuerit: (erit autem ſemper acutus, quando datus angulus eſt obtuſus) ſi vero fuerit obtuſus, arcus ſinus inuenti ex ſemicirculo demptus, reliquum faciet eum angulum. Propterea quando datus angulus eſt acutus, oportet dari huius alterius ſpeciem, vt ſciamus, num acutus ſit, vel obtuſus. Summa autem horum angulorum ex ſemicirculo ſubtracta relinquet tertium angulum quæſito lateri oppoſitum. Ergo

Vt ſinus dati anguli.	*ad datum latus ei oppoſitum;*	*ita ſinus tertij anguli inuenti quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*	*1. triang. rectil.*

2. SI duo latera data ſint æqualia:[b] erit angulus alteri dato lateri oppoſitus, dato angulo æqualis. *b 5. primi.*

XIV. ANGVLOS DVOS.

EX duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reperire.

Inuenientur ex ijs, quæ data ſunt, duo anguli, vt in priori parte problematis 12. dictum eſt: ſi nimirum inquiratur tangens differentiæ inter ſemiſſem arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, & alterutrum angulorum, qui quæruntur, &c. quæ quidem tangens duobus modis inuenta eſt in priori parte problematis 12. in quo latus proponitur inueſtigandum ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. Quod vt fieret, inuenti prius fuerunt alij duo anguli, qui in hoc problemate 14. quæruntur.

XV. ANGVLOS DVOS

EX duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari.

Hic etiam adhibenda eſt prior operatio problematis 13. in quo latus opponitur inquirendum ex ijſdem datis: quod vt fieret, inuenti prius fuere reliqui duo anguli, qui in hoc problemate 15. indagandi proponuntur.

XVI. ANGVLOS OMNES TRES

EX tribus omnibus lateribus perueſtigare.

11. triang. rectil. 1 *Ducta ad maximum latus perpendiculari ex angulo oppoſito 2 (vt nimirum perpendicularis ſemper intra triangulum cadat) inueniantur per problema 9. ſegmenta duo maximi lateris facta à perpendiculari. Deinde.*

1. triangul. rectil.

Vt minimum latus	*ad ſinum totum:*	*ita minus ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli medio lateri oppoſiti.*

Rurſus.

1. triangul. rectil.

Vt medium latus	*ad ſinum totum:*	*ita maius ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli minimo lateri oppoſiti.*

Inuentis duobus angulis ad maximum latus, qui medio lateri, & minimo opponuntur; ſi eorum ſumma ex ſemicirculo dematur, reliquus fiet tertius angulus lateri maximo oppoſitus.

a Schol 26. lib. 1. Eucl. 2 In Iſoſcele, ducta perpendiculari ad baſem [a], quam bifariam ſecabit,

Vt alterum laterum æqualium	*ad ſinum totum:*	*ita ſemiſsis baſis*	*ad ſinum complementi vnius angulorum æqualium ad baſem.*

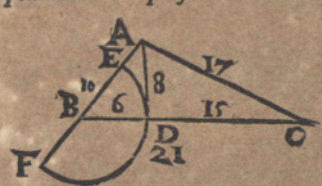
Summa duorum angulorum æqualium inuentorum ex ſemicirculo detracta, reliquum faciet tertium angulum.

3 IN æquilatero triangulo dabuntur anguli, etiamſi latera non dentur, cum quilibet gradus 60. tertiam videl. partem duorum rectorum, vel duas tertias partes vnius recti, complectatur.

XVII. PERPENDICVLAREM IN LATVS QVODCVNQVE ex angulo oppoſito cadentem.

EX tribus omnibus lateribus efficere notam.

Per problema 9. inquirantur ſegmenta lateris facta à perpendiculari. Deinde differentia inter vtrumuis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam eiuſdem ſegmenti, & lateris adiacentis. Radix namque quadrata numeri producti perpendicularem quæſitam indicabit.



In triangulo enim ABC, ſit AB, 10. AC, 17. BC, 21. inueſtigandaq; ſit perpendicularis AD. Per problema 9. reperietur ſegmentum BD, 6. & CD, 15. Differentia inter BD, & AB, eſt 4. quæ ducta in 16. ſummam rectarum BD, & AB, faciet 64. cuius radix quadrata 8. dat perpendicularem AD. Quod quia in noſtro tractatu triangulorum rectilineorum demonſtratum non eſt, demonſtro hoc propoſito theoremate.

Theorema. In triangulo rectangulo rectangulum ſub differentia baſis, & alterutrius lateris circa rectũ angulum & ſub ſumma baſis, & eiuſdem lateris, æquale eſt quadrato alterius lateris circa angulum rectum.

a Coroll. 16 tertij. b 36. tertij. *Nam in triangulo rectangulo ABD, cuius angulus D, rectus, ſi ex B, per D, ſemicirculus deſcribatur EFD, erit AE, differentia inter baſem AB: & latus BD: At AF, ſumma erit baſis AB, & eiuſdem lateris BD, cum BD, BE, BF, rectæ ſint æquales. Dico igitur rectangulum ſub AE, AF, æquale eſſe quadrato lateris AD. Recta enim AD, cum perpendicularis ſit ad ſemidiametrum BD, [a] ſemicirculum tanget in D. [b] Igitur rectangulum ſub AE, AF, quadrato tangentis AD, æquale erit, quod erat demonſtrandum.*

FINIS LIBRI PRIMI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER II.

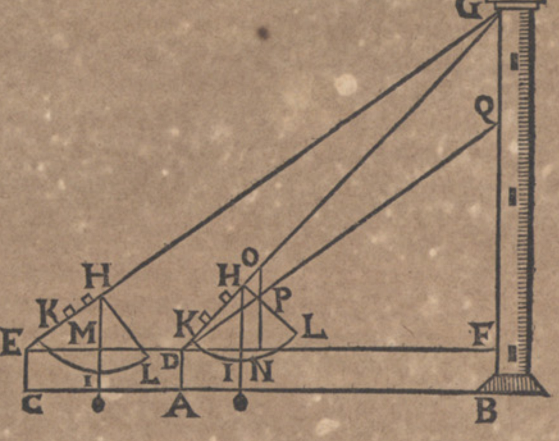
Linearum Rectarum per Quadrantem Aſtronmicum Dimenſionem explicans.

NOMINE linearum rectarum intelligimus diſtantias locorum, ſeu interualla, longitudineſue: altitudines turrium, ædificiorum, arborum, & montium: ac poſtremo profunditates puteorum, vallium, atque foſſarum. Ad harum Dimenſiones varii varia adhibent inſtrumenta, quibuſdam enim placet ſcala altimetra in dorſo Aſtrolabii, ſeu planiſphærii deſcripta. Aliis radius Aſtronomicus Gemmæ Friſii, vel radius dictus Latinus, quod à Domino Latino Vrſino nobili Romano excogitatus ſit; vel baculus Iacob: Aliis annulus Aſtronomicus, vel Holometrum; Aliis denique alia inſtrumenta arrident. Mihi vero præ cæteris probatur Quadrans Aſtronomicus in 90. gradus diſtributus: & Quadratum Geometricum tum ſtabile, tum pendulum, cuius duo latera in certas quaſdam partes æquales ſint diuiſa. Hoc autem 2. lib. qua ratione per Quadrantem Aſtronomicum Dimenſio linearum rectarum perſiciatur, docebimus. Quæ ratio vt intelligatur, in promptu, & ad manum eſſe debent tabulæ ſinuum, Tangentium atque ſecantium in noſtro Theodoſio, & in aliorum auctorum libris deſcriptæ, vnde petendæ erunt. Superuacaneum enim eſſe duximus, eaſdem hic repetere, ne opus in maiorem formam excreſcat.

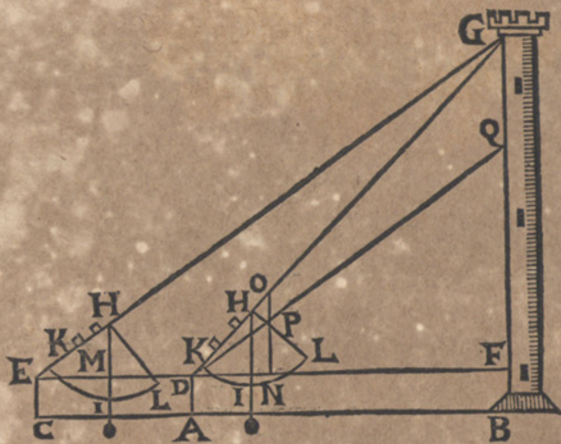
DISTANTIAM in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas per Quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere.

PROBLEMA I.

SIT diſtantia, ſiue longitudo inueſtiganda AB, in plano CB, erectaque ſit in extremo B, altitudo quæpiam perpendicularis BG, licet extemum B, non appareat. Statura menſoris ſit DA, ab oculo ad pedes vſque. Ne autem hæc ſtatura mutetur, ſed eadem ſemper maneat, recte feceris, ſi pro ea ſtatura baculum eidem æqualem accipias, ad cuius extremum oculum applices. Ducta autem cogitatione per D, ipſi CB, parallela EF, fiat prima ſtatio in D, Secunda vero in E, puncto remotiore: ſitque recta DE, quæ differentia ſtationum dicitur, nota ſecundum aliquam menſuram vulgarẽ. *Differẽtia ſtationum* Deinde dirigatur latus quadrantis HK, in quo ſunt pinnacidia, verſus faſtigium G, ita vt oculus in D, poſitus per vtriuſq; pinnacidii foramina, faſtigium G, videat, libere pendente perpendiculo HI: diligenterque per ea, quæ cap.2.lib.1.Num.7. & 10.tradita ſunt, notetur in gradibus, ac minutis angulus GDF, quem arcus IL, in Quadrante manifeſtabit, complementum videlicet arcus IK, Cum enim filum perpendiculi HI, ſit ad DF, rectum, erit angulus GDF, complementum anguli DHI, æqualis nimirũ angulo IHL, qui eiuſdẽ anguli DHI, complemẽtũ etiã eſt. Atq; hũc angulũ GDF, angulũ obſeruationis dicem⁹. Eodẽ modo obſeruet̃ in ſecũda ſtatione angul⁹ GEF, ꝑ radiũ viſualẽ ab oculo, & per pinnacidia Quadrãtis ad faſtigiũ G, directũ. Sumptis autem EM, DN, *Angulus obſeruationis.*



æqualibus,



æqualibus erigantur perpendiculares MH, NO, (in figura coincidit MH, cum filo perpendiculi; quod nihil refert.) Si igitur EM, DN, ſtatuantur ſinus toti, erunt MH, NO, tangentes angulorum obſeruationum E, & D. Ducta quoque DQ, ipſi EG, parallela ſecante NO, in P, [a] erit angulus NDP, angulo E, æqualis. Cum ergo duo anguli N, D, trianguli NDP, duobus angulis M, E, trianguli MEH, ſint æquales, (eſt enim rectus N, recto M, æqualis) lateraque DN, EM, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt latera NP, MH, æqualia: ac proinde OP, differentia erit inter tangentes angulorum obſeruationum. [c] Quia vero eſt, vt OP, ad PN, ita GQ, ad QF: [d] Et vt GQ, ad QF, ita ED, ad DF; erit quoque vt OP, differentia Tangentium angulis obſeruationum reſpondentium ad PN, ſiue ad HM, tangentem remotioris ſtationis, ita ED, differentia ſtationum ad DF, diſtantiam quæſitam. Quocirca ſi fiat,

a 29. prim.
b 26. prim.
c Schol. 4. lib. 6.
d 2. ſexti.

Diſtantiæ inuẽtio per tangentes.

Vt OP, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum,	*ad PN, vel HM, Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia ſtationum nota in menſura aliqua vulgari*	*ad aliud; hoc eſt, ad DF,*

prodibit diſtantia DF, quæſita, ſiue AB, in eadem menſura differentiæ ſtationum: cui ſi adiiciatur differentia ſtationum ED, cognita etiam fiet diſtantia EF; vel CB, à remotiori ſtatione,

ALITER.

2 POSITO ſinu toto GF, erit DF, tangens anguli DGF, complementi anguli obſeruationis GDF, quem angulum DGF, indicat arcus Quadrantis IK, à perpendiculo verſus oculum, [e] cum angulus DHI, æqualis ſit angulo DGF, externus interno. Eodem modo EF, Tangens erit anguli EGF, complementi alterius anguli obſeruationis GEF. At ED, differentia inter eas Tangentes exiſtet. Si igitur fiat

e 29. prim.

Diſtantiæ inuentio alia per tangentes.

vt ED, differentia inter Tangentes angulorum, qui cõplemẽta ſunt angulorũ obſeruationũ,	*ad DF, Tangentem complementi anguli obſeruationis GDF, in propinquiore ſtatione, hoc eſt, ad Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia ſtationum nota in aliqua menſura vulgari*	*ad aliud, hoc eſt, ad DF,*

procreabitur diſtantia minor quæſita DF, vel AB, in eadem menſura differentiæ ſtationum: cui ſi addatur differentia ſtationum ED, nota quoque fiet diſtantia maior EF.

3 Rurſus [f] ſi fiat,

f 4. ſexti.

Vt DN, ſinus totus	*ad NO, Tangentem anguli GDF, in ꝓpinquiore ſtatione:*	*Ita DF, diſtantia inuenta minor*	*ad aliud, hoc eſt, ad FG;*

Altitudinis inuẽtio per tangentes.

Inuenietur altitudo FG, in menſura diſtantiæ inuentæ DF, minoris, cui ſi addatur menſoris ſtatura FB, cognita erit tota altitudo BG. Item [g] ſi fiat

g 4. ſexti.
Altitudinis inuentio alia per tangentes.

Vt EM, ſinus totus	*ad MH, tangentem anguli GEF, in remotiore ſtatione:*	*ita EF, diſtantia inuenta maior*	*ad aliud, hoc eſt, ad FG,*

reperietur eadem altitudo FG, in menſura diſtantiæ inuentæ EF, maioris, cui ſi addatur, ſtatura menſoris FB, nota fiet tota altitudo BG.

ALITER.

4 SI per ſolos ſinus idem expedire lubeat, erit operatio aliquanto longior. Primum enim inuenienda eſt vtraq; hypotenuſa EG, DG, in aliqua menſura nota, hoc modo. [h] Quoniam angulus GDF, æqualis eſt duobus angulis E, EGD: ſi angulus E, in remotiore ſtatione obſeruatus dematur ex angulo GDF, in propinquiore ſtatione deprehenſo, reliquus fiet angulus EGD, differentia nimirum inter duos angulos obſeruationum. [i] Quod ſi fiat,

h 32. prim.
i 10. Triangul. rectil.

Vt ſinus anguli EGD, differentiæ inter angulos duos obſeruationum	*ad ED, differentiam ſtationum notam:*	*Ita ſinus anguli DEG, vel. Ita ſinus anguli EDG, complementi anguli GDF, ad duos rectos,*	*ad DG, vel ad EG,*

produce-

producetur tam DG, quam EG, nota in partibus differentiæ ſtationum. Igitur [a] ſi fiat,

Inuentio Hypotenuſarum. [a] *10. triangul. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti F, | *ad hypotenuſam DG, proxime inuentam* | *Ita ſinus anguli DGF, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione* | ad DF,

nota fiet diſtantia DF, cui ſi adiiciatur differentia ſtationum ED, cognita etiam erit longior diſtantia EF, quam inuenies quoque, [b] ſi fiat,

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus. [b] *10. Trian. rectil.*

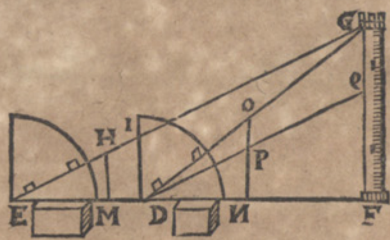
Vt ſinus totus anguli recti F, | *ad hypotenuſam EG, nuper inuentam:* | *Ita ſinus anguli EGF, complementi anguli obſeruationis in remotiore ſtatione* | ad EF.

Altitudo autem FG, per ſolos ſinus inuenietur, [c] ſi fiat,

[c] *10. Trian. rectil.* *Altitudinis inuētio per ſolos ſinus.*

Vt ſinus totus anguli recti F, | *ad hypotenuſam EG, vel ad hypotenuſam DG:* | *Ita ſinus anguli E, obſeruati minoris, vel ita ſinus anguli GDF, obſeruati maioris* | ad FG. ad FG.

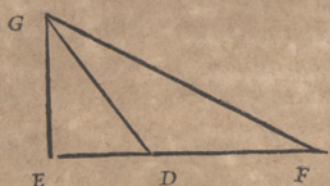
5 PER Quadrantem ſtabilem eodem modo dimenſio fit: ſolum anguli obſeruationum in duabus ſtationibus hac ratione inueſtigãtur. Collocato quadrante ſupra baſem aliquam planam Horizonti æquidiſtantem, ita vt rectus ſit ad Horizontem, quod beneficio alicuius perpendiculi efficies. Collocato, inquam, hoc modo Quadrante, eleua dioptram, donec per foramina pinnacidiorum faſtigium G, videas.



Ita enim in propinquiore ſtatione D, angulus obſeruationis erit GDF; In remotiore vero GEF. Vtrumque autem metietur arcus quadrantis inter rectam EF, & dioptræ lineam fiduciæ. Reliqua omnia fient, ſicut in quadrante pendulo, vt figura demonſtrat. Solum ad alitudinem FG, inuentam adiicienda erit altitudo baſis, cui impoſitus eſt quadrans, non autem ſtatura menſoris, niſi altitudini baſis ſit æqualis.

6 IAM vero ſine numeris, id eſt, ſine multiplicatione ac diuiſione numrorũ omnia hæc explorari poterunt (quod iis, qui parum in numeris & vſu ſinuum, tangentium, ac ſecantium exerçitati ſunt, pergratum fore non dubito) hoc modo. In charta aliqua, vel plano conſtruatur figura, illi omnino ſimilis, quam ab oculo, vſque ad altitudinem ſupra concepimus eſſe conſtructam: quod ita fiet. Ex inſtrumento partium cap. 1. ſuperioris libri fabricato, vel (ſi inſtrumentum non adſit) ex aliqua recta in particulas plurimas æquales diuiſa capiantur circino tot particulæ æquales, quot palmi, vel pedes inter duas ſtationes comprehendũtur;

Problema hoc 1. quo pacto ſine numeris abſoluatur.

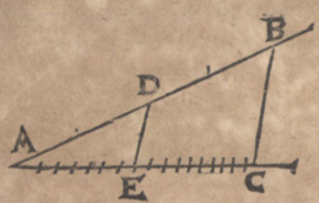


transferaturq; interuallum illud circini in rectam quamcunq; ex E, in D: atq; in D, & E, omni adhibita diligentia, anguli obſeruationũ GDF, GEF, primæ & ſecundæ ſtationis fiant: Punctumq; G, in quo rectæ DG, EG, cõueniunt, diligenter notetur (ne in hoc puncto erretur, propter aliquam ſectionem, docebimus in ſequenti lemmate, quo pacto exquiſitiſſime deprehendi poſſit. Niſi enim hoc fiat, menſuræ non inuenientur accurate) ex quo perpendicularis demittatur GF. Figura ita conſtructa, ſi rectæ DF, EF, FG, DG, EG, per circinum tranſportentur in latus 100. partium prædicti inſtrumenti, vel in dictam rectam in plurimas partes æquales diuiſam, illico apparebit, quot particulæ inter pedes circini includantur. Atque tot palmos aut pedes quælibet illarum rectarum complectetur, quot particulæ in earum interuallis deprehenſæ fuerint.

ALITER.

7 IDEM aſſequemur via quadam generali, quæ in omnes dimenſiones quadrat, videlicet. Fiat angulus quicunque BAC. Deinde ſumpta verbi gratia, in exemplum regula trium Num. 1. huius propoſitionis accipiatur primæ quantitati OP, (hoc eſt, differentiæ Tangentium angulorum obſeruatorum) æqualis; vel ſi nimis parua eſt, multiplex AD. (Nos duplam accepimus) Item ſecundæ PN, (hoc eſt, Tangenti minoris anguli) æqualis, vel æque multiplex cum AD, nimirum DB. Poſt hæc ex inſtrumento partium capiantur tot particulæ AE, quot palmi, aut pedes in ED, differentia ſtationum continentur. Ducta autem recta DE, agatur ei parallela BC. Nam quot partes inſtrumẽti partium includet interuallum EC, tot palmos, aut pedes diſtantia DF, complectetur; [d] cum quatuor quantitates AD, DB, AE, EC, proportionales ſint.

Problema hoc 1. qua ratione aliter ſine numeris abſoluatur



[d] *4. ſexti.*

EODEM modo procedes in alijs exemplis, hoc obſeruato, vt quando ſinus alicuius anguli in regula trium reperitur, accipias ex tabula ſinuũ ſinum, abiectis quinq; figuris, vt ſinus totus ſit 100. v. g. In vltimo exemplo Num. 4. recta AD, ſumenda eſſet æqualis 100. particulis inſtrumenti partiũ, nimirũ ſinui toti. At DB, æqualis hypotenuſæ EG, vel DG, in figura Nũ. 6. Et AE, ſi angulus E, eſt gr. 30. min. 15. æqualis $50\frac{4}{10}$. fere partic. quia tantus

tantus eſt ſinus grad. 30. Min. 15. Vel ſi angulus GDF, eſt grad. 53. Min. 20. accipienda eſſet AE, æqualis particulis $80\frac{2}{10}$. fere. Ita enim interuallum EC, dabit tot palmos, aut pedes rectæ FG, quot particulæ in eo comprehenduntur. Et ſic de cæteris.

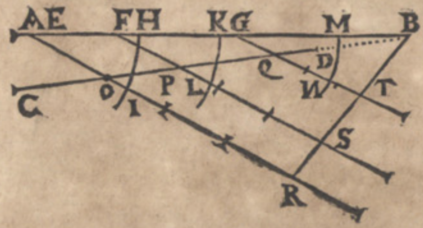
QVANDO autem tota regula 100. partium eſt nimis longa, ſumi poteſt pro ſinu toto quoduis interuallum inter 100. & 100. dummodo reſpectu huius ſinus totius accipiantur poſtea ſinus, vt cap. 1. lib. 1. Num. 12. declarauimus.

POTERIS autem nonnunquam ordinem immutare, ponendo nimirum ſecundam quantitatem DB, in recta AC; & tertiam AE, in recta DB, prout videlicet id expedire cognoueris ad parallelas DE, BC, ducendas.

LEMMA.

DATIS duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire.

QVOD hic proponitur, demonſtratum à nobis fuit lemmate 13. lib. 1. noſtri Aſtrolabii pluribus viis. Sed quia eius inſignis eſt vtilitas in puncto concurſus duarum rectarum exquirendo, demonſtrabimus illud ipſum hoc loco paulo aliter. Sint ergo duæ rectæ AB, CD, oblique ſe in concurſu B, ſecantes. Ex quotlibet punctis E, F, G, vtcunque in altera earum aſſumptis deſcribantur verſus alteram ad quodcunque idem interuallum arcus HI, KL, MN, ex quibus arcus quadrante minores abſcindantur in I, L, N, punctis, per quæ ex centris rectæ egrediantur ſecantes CD, in O, P, Q. Sumptis deinde in EI, producta ipſi EO, tot partibus æqualibus vſque ad R, quot ſatis eſſe videbuntur, vt recta ex R, verſus concurſum ducta non valde oblique ipſas rectas ſecet, accipiantur in FL, GN, productis totidem partes ipſis FP, PQ, æquales vſque ad S, T. Dico tam rectam RS, quã RT, & quã ST, in punctum B, concurſus cadere, ita vt puncta R, S, T, B, in vna recta linea iaceant. [a] *Quoniam enim anguli E, F, G, æquales ſunt,* [b] *erunt rectæ ER, FS, GT, parallelæ.* [c] *Cum ergo ER, FS, GT, eaſdem proportiones habeant, quas EO, FP, GQ, hoc eſt,* [d] *EB, FB, GB, habent,* [e] *cadent rectæ RS, RT, ST, in punctum B, quod eſt propoſitum.*



a 27. tertij.
b 28. prim.
c 15. quint.
d 4. Sexti, & permutando.
e Schol. 4. ſexti.

HOC ergo lemma ſi adhibeatur, ſatis exquiſite in ſuperiore figura Num. 6. punctum concurſus G, deprehendetur, proindeq; menſuræ rectarum, quas ſine numeris inuenire docuimus, non multum à vero aberunt.

Quo pacto in fig. Nu. 6. obliqua ſectio in pũcto concurſus G, vitetur.

8 VERVM commode obliquam illam ſectionem in concurſu G, vitabimus, ſi figuram, hoc alio modo conſtruemus. Fiat in figura Num. 6. angulus rectus EFG, & in quolibet puncto G, vbi concurſum eſſe volumus, conſtituantur anguli FGD, FGE, æquales complementis angulorum obſeruationum. Ita enim DE, reſpondebit differentiæ ſtationum, &c. Quocirca ſi cogitetur DE, ſecta in tot partes æquales, quot palmi, vel pedes in differentia ſtationum fuerunt aſſumpti, cognoſcemus per ea, quæ ad finem num. 1. cap. 1. lib. 1. docuimus, quot ex iis partibus in diſtantiis DF, EF, & in altitudine FG, atque hypotenuſis GD, GE, comprehendantur. Atque hoc modo punctum concurſus G, dubium, aut incertum eſſe non poteſt, cum illud ante omnia elegerimus.

SCHOLIVM.

Vt etiam pro tyronibus ſemel explicemus, quid per noſtrum loquendi modum intelligamus, cum dicimus verbi gratia, Num. 1. huius problematis, Fiat.

Altitudinis inuentio per vnicã ſtationẽ quando diſtantia nota eſt.

Vt OP, differentia inter tangentes angulorũ obſeruationum	*ad PN, vel HM, Tangentem minorem.*	*Ita ED, differentia ſtationum*	*ad DF:*

Sciendum eſt, nos hoc modo redigere opus ad terminos regulæ trium. Quapropter ſi iuxta tenorem regulæ numerus in tertio loco poſitus ducatur in eum, qui ſecundum locum occupat, hoc eſt, differentia ſtationum in propoſito exemplo multiplicetur per Tangentem minorem, productuſque numerus per eum, qui in primo loco collocatur, id eſt, per differentiam Tangentium, diuidatur: (niſi quando primus numerus eſt ſinus totus. Tunc enim diuiſio non fit, ſed ex producto quinque figuræ abiiciuntur, vel ſeptem, prout ſinus totus ſtatuitur 100000. vel 10000000.) procreabitur in quotiente quartus numerus, qui quæritur, nimirum diſtantia DF. Eademque eſt ratio de cæteris.

COROLLARIVM. I.

ITAQVE quando diſtantia à loco menſoris vſque ad altitudinem ignotam cognita eſt, inuenietur altitudo per vnicam ſtationem. [f] Si fiat

f 4. triangul. rectil.

Vt ſinus totus	*ad Tangentem anguli obſeruationis:*	*Ita diſtantia nota*	*ad altitudinem.*

Hoc enim demonſtratum eſt Num. 3. huius problematis 1. tam per angulum obſeruationis GDF, & diſtantiam DF, quam per angulum obſeruationis GEF, & diſtantiam EF. Vtroque enim modo inuenta eſt altitudo GF.

COROL-

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM etiam eſt, ſi G, ſit cacumen alicuius montis, nos per hoc problema 1. eius altitudinem poſſe metiri per duas ſtationes D, E, in plano factas: ſi nimirum prius inueſtigetur recta DF, vel EF, ab oculo menſoris vſque ad perpendicularem GF, quæ à cacumine G, in planum Horizontis cadit, etiamſi eius extremum F, non videamus. *Altitudo montis quo pacto inueſtigetur.*

ALTITVDINEM inacceſſibilem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoque ipſam eruere etiam ſi extremus eius terminus non cernatur.

PROBLEMA II.

1. SIT inquirenda altitudo AB, ſiue ea turris ſit, ſiue mons, ſiue aliquid aliud, licet non cernatur eius perpendiculi infimus terminus B, vt in omni monte contingit: planum autem, cui perpendicularis eſt altitudo, ſit CB. Statura menſoris DE. Ducta autem cogitatione per E, ipſi CB, parallela GF, fiat prima ſtatio in D, propinquior; ſecunda vero in G, remotior, vt differentia ſtationum ſit GE. Deinde per radios viſuales EA, GA, ad verticem A, directos diligenter obſeruentur anguli AEF, AGF, ſiue per quadrantem pendulum, vt Num. 1. problematis præcedentis docuimus, ſiue per ſtabilem, vt Num. 5. eiuſdem problematis præcepimus. Eodem enim ſemper modo dicti anguli obſeruantur, quando è loco inferiori altitudinis faſtigium inſpicitur. Cogitetur quoque ducta HI, ipſi GF, parallela, [a] vt demiſſæ perpendiculares HL, IK, in parallelogrammo LI, ſint æquales, pro ſinubus totis: quorum tangentes ſunt EK, GL, angulis I, H, qui complementa ſunt angulorum obſeruationum E, G, debitæ. Et quoniam angulus GAF, maior eſt angulo EAF, [b] eſtque priori angulus GHL, & poſteriori angulus EIK, æqualis: erit quoque GHL, maior quam EIK, ideoque tangens GL, maior Tangente EK, quod ſinus toti HL, IK, æquales ſint. Abſcindatur LM, ipſi EK, æqualis, vt GM, ſit differentia Tangentium GL, EK, [c] Et quia eſt vt GL, ad LH, ita GF, ad FA, erit permutando, vt GL, ad GF, ita LH, vel IK, ad FA; [d] Vt autem IK, ad FA, ita quoque eſt EK, ad EF. Igitur erit, vt tota GL, ad totam GF, ita EK, vel LM, ex GL, ablata, ad EF, ex GF, ablatam: [e] ac proinde erit etiam vt GM, ex GL, reliqua ad GE, ex GF, reliquam; ita tota GL, ad totam GF, hoc eſt, [f] ita LH, ſinus totus, ad FA. Quamobrem ſi fiat

a 34. primi. *b 29. prim.* *c 4. ſexti.* *d 4 ſexti & permutando.* *e 19. quint.* *f 4. ſexti. & permutando.*



Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obſeruationum	*ad GE, differentiam ſtationum.*	*ita LH, ſinus totus*	*ad FA,*

inuenta erit altitudo FA, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi adijciatur FB, ſtatura menſoris, tota altitudo AB, nota euadet. *Altitudinis inuetio per Tangentes.*

2. ITEM ſi fiat

Vt GM, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*ita GL, Tangens complementi anguli obſeruationis in remotiori ſtatione*	*ad GF,*

efficietur nota GF, diſtantia maior, quandoquidem paulo ante demonſtratum eſt, eſſe GM, ad GE, vt GL, ad GF. Quod ſi ex GF, inuenta detrahatur GE, differentia ſtationum, nota relinquetur EF, diſtantia minor. *Diſtantiæ inuentio.*

ALITER.

3. SI per ſolos ſinus dimenſio inſtituatur, inueſtiganda primum erit alterutra hypotenuſarum GA, EA, vel vtraque, hoc ſcilicet modo. [g] Quoniam angulus AEF, duobus G, GAE, æqualis eſt, ſi angulus G, in remotiore ſtatione tollatur ex angulo AEF, in ſtatione propinquiore, reliquus fiet angulus GAE, differentia inter duos angulos G, AEF, obſeruationum. *g 32. primi.*

[h] Ergo ſi fiat, *h 10. triangul. rectil.*

Vt ſinus anguli GAE, differentia inter duos angulos obſeruationum	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus anguli AGE,*	*ad AE,*
		vel	
		ita ſinus anguli GEA, complementi anguli AEF, ad duos rectos.	*ad GA,*

nota fiet tam AE, quam AG, in partibus differentiæ ſtationum. *Hypotenuſarum inuentio.*

[i] Si igitur fiat *i 10. Trian. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad rectam EA:*	*ita ſinus anguli AEF, in propinquiore ſtatione,*	*ad AF,*
	vel	*vel*	
	ad rectam GA, proxime inuentam.	*ita ſinus anguli AGF, in remotiore ſtatione*	*ad AF,*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

gignetur altitudo AF, & ſi adiungetur FB, ſtatura menſoris, tota altitudo AB, efficietur nota.

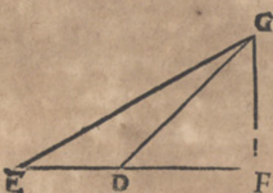
DISTANTIA autem vtraque EF, GF, per ſolos etiam ſinus inuenietur, [a] ſi fiat

a 10. triangul. rectil.

Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus.

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam EA.*	*ita ſinus anguli EAF, complementi anguli in propinquiore ſtatione,*	*ad EF,*
	vel	*vel*	
	ad hypotenuſam GA:	*ita ſinus anguli GAF, complementi anguli in remotiore ſtatione*	

Problema quo pacto ſine numeris ſoluatur.



4 SINE numerorum multiplicatione ac diuiſione eadem inueſtigabuntur, ſi illi figuræ, quam ab oculo menſoris ad altitudinem vſque concepimus eſſe conſtruendam, ſimilem omni diligentia conſtituamus, vt Num. 6. & 8. præcedentis problematis 1. diximus, vt manifeſtum eſt, ſi in ea figura Num. 6. altitudo intelligatur FG, & diſtantiæ FD, FE, &c. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. eiuſdem problematis 1. tradita ſunt.

COROLLARIVM. I.

Diſtantiæ inuentio per vnicã ſtationem, quando altitudo nota eſt.

b 4 triang. rectil.

ITAQVE ſi altitudo fuerit nota, inuenietur diſtantia per vnicam ſtationem, [b] ſi fiat

Vt ſinus totus AF,	*ad Tangentem FE, complementi anguli in propinquiore ſtatione:*	*ita altitudo nota AF,*	*ad diſtantiam FE,*
	vel		*vel*
	ad Tangentem FG, complementi anguli in remotiore ſtatione:		*ad diſtantiam FG.*

ITEM ſi diſtantia nota fuerit, reperietur altitudo per vnicam quoque ſtationem, ſi fiat

Vt ſinus totus GF,	*ad AF, Tangentem anguli G, obſeruati in remotiori ſtatione:*	*ita GF, diſtantia nota*	*ad AF, altitudinem.*
	Vel		
Vt ſinus totus EF,	*ad AF, Tangentem anguli E, obſeruati in ſtatione propinquiore:*	*ita EF, diſtantia nota,*	*ad AF, altitudinẽ.*

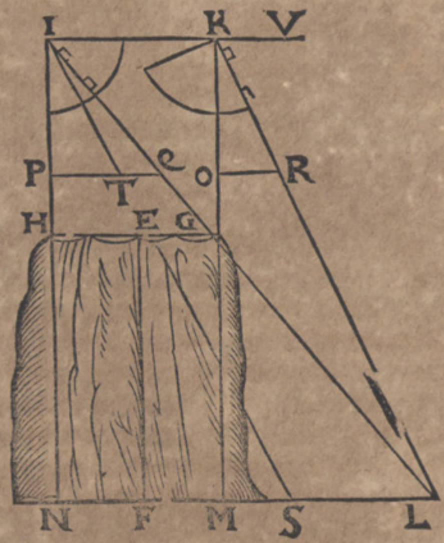
COROLLARIVM. II.

MANIFESTVM etiam eſt, ſi punctum A, ſit cacumen alicuius montis, eodem pacto inueſtigari poſſe lineam perpendicularem AF, quæ ex cacumine in Horizontis planum demittitur: ſi nimirum duæ ſtationes fiant in E, G.

EX vertice montis, aut turris, in cuius ſummitate duæ ſtationes fieri poſſint, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipſius montis, turriſue dimetiri. Atq; hinc ipſam quoq; diſtantiam à turris baſi, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare.

PROBLEMA III.

1 SIT mons, aut turris GHNM, cuius altitudo perpendiculum EF, vel etiam latus turris GM, vel HN. Eligantur duæ ſtationes in G, H; & ab oculo menſoris tam in I, quam in K, poſito cerni poſſit ſignum L, in Horizonte, vel plano, cui turris, aut mons inſiſtit. Dirigatur latus Quadrantis penduli, in quo pinnacidia, verſus L, diligenterque angulus K, notetur, quem arcus Quadrantis inter latus pinnacidiorum, & filum perpendiculi libere pendentis determinat. Eodemque pacto angulus I, obſeruetur. Per Quadrantem ſtabilem vterque obſeruabitur, ſi vnum eius latus ad Horizontem ſit rectum, (quod tum demum fiet, quando filum perpendiculi ex centro pendentis illi lateri adhærebit) & dioptra attollatur, donec per pinnacidiorum foramina ſignũ L, cerni poſſit. Nam arcus inter dictum latus, & lineam fiduciæ in dioptra angulum obſeruationis metietur. Intelligatur quoque filum perpendiculi in vtroque ſitu Quadrantis penduli, vel latus quadrantis ſtabilis ad Horizontem rectum productum vſq; ad baſem montis, aut turris ad M, N. Sumptis deinde rectis æqualibus KO, IP, pro



IP, pro ſinubus totis, ducantur PQ, OR, ad IN, K- a 28.primi.
M, perpendiculares, [a] quæ parallelæ erunt plano
Horizontis, hoc eſt, rectæ NL; & Tangentes angu- b 34.prim.
lorum obſeruationum I, K. [b] Ipſæ autem HN, GM,
altitudini EF, æquales erunt. Et quoniam in trian-
gulis INL, KML, anguli recti N, M, ſunt æquales, &
ILN, minor quam KLM, pars toto; erit reliquus
NIL, reliquo MKL, maior, ideoq; & Tangẽs PQ,
Tangente OR, maior. Abſciſſa ergo PT, ipſi OR,
æquali; [c] quia eſt, vt IP, ſinus totus ad PQ, Tangen- c 4.ſexti.
tem maioris anguli obſeruationis, ita IN, ad NL: e-
rit permutando, vt IP, ad IN, ita PQ, ad NL. Ea-
demq; ratione erit, vt KO, ad KM, hoc eſt, vt IP, ad d 34.prim.
IN, [d] (cum KO, KM, ipſis IP, IN, ſint æquales) ita
OR, hoc eſt, ita PT, ad ML; atque ideo erit, vt PQ,
ad NL, ita PT, ad ML. Quia ergo eſt, vt tota PQ, e 19.quint.
ad totam NL, ita PT, ablata ad ML, ablatam, [e] erit
quoq; reliqua TQ, differentia Tangentium, ad re- f 34.primi.
liquam NM, differentiam ſtationum, [f] (quod NM,
HG, æquales ſint) vt tota PQ, ad totam NL, [g] hoc eſt, vt IP, ad IN. Quamobrem ſi fiat, g 4.ſexti.

Vt TQ, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum	*ad NM, vel HG, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus totus IP,*	*ad IN,*

reperietur recta IN, ex qua ſi dematur IH, ſtatura menſoris, nota relinquetur HN, vel EF, altitudo quæſita. Et ſi rurſus fiat, *Altitudinis inuentio.*

VT TQ, differentia Tangentium	*ad NM, vel GH, differentiam ſtationum:*	*ita PQ, Tangens maior*	*ad NL, diſtantiam.*

nota fiet diſtantia NL, à qua ſi ſubtrahatur NF, vel HE, quam metiri licebit, cognita relinquetur FL, diſtantia à perpendiculo montis. Vel ſi dematur NM, differentia ſtationum, nota relinquetur diſtantia ML, à turri vſq; ad L. Item [h] ſi fiat, *Diſtantia inuentio.* h 4.ſexti.

Vt IP, ſinus totus	*ad PQ, Tangentem maiorem:*	*ita IN, paulo ante inuenta*	*ad NL, diſtantiam,*

inuenietur rurſus diſtantia NL, &c.

2 VERVM ita eſſe TQ, differentiam Tangentium ad NM, vel HG, differentiam ſtationum, vt eſt
PQ, Tangens maior ad diſtantiam NL, vt paulo ante oſtenſum eſt, facilius demonſtrabimus, ſi ducatur recta
IT, quæ producta ſecet NL, in S. Nam in triangulis IPT, KOR, duo latera IP, PT, duobus lateribus KO, i 4 primi.
OR, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, vtpote rectos. [i] Igitur anguli T, R, æquales ſunt, [k] ideoq; KL, k 28.prim.
IS, parallelæ. [l] Et quia ducta IK, æqualis eſt & ipſi SL, & differentiæ ſtationum HG, vel NM, [m] liquido conſtat, ita l 34.primi.
eſſe TQ, differentiam Tangentium ad SL, quæ differentiæ ſtationum IK, vel HG, æqualis eſt, vt eſt PQ, Tan- m ſchol. 4.
gens maior ad diſtantiam NL, ſexti.

ALITER

3 PER ſolos ſinus ita Problema efficiemus. Primum inquiremus hypotenuſas IL, KL, hoc modo. [n] Quo- n 32. prim.
niam angulus LKV, duobus angulis LIK, ILK, æqualis eſt; ſi LIK, angulus complementi maioris anguli obſer-
uationis LIN, auferatur ex LKV, angulo complementi minoris anguli obſeruationis LKM, reliquus fiet angu-
lus ILK. [o] Si ergo fiat, o 10. Triã. rectil.

Vt ſinus anguli ILK, differentiæ inter duos angulos complemẽtorum angulorum obſeruationum	*ad IK, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli IKL, conflati ex recto, & angulo obſeruationis minore,*	*ad IL,*
		vel	
		Ita ſinus anguli LIK, complementi maioris anguli obſeruationis	*ad KL,*

Hypotenuſarum inuentio.

euadet nota tam IL, quàm KL, in menſura differentiæ ſtationum. [p] Igitur ſi fiat, p 10.Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti N,	*ad Hypotenuſam proxime inuentam IL,*	*Ita ſinus anguli ILN, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad IN,*

Vel

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad Hypotenuſam KL, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli KLM, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad KM,*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

cognita fiet altitudo IN, vel KM, ex qua ſi dematur ſtatura menſoris, altitudo quæſita relinquetur HN, vel GM, hoc eſt, EF.

a 10. Triã. rectil.

Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus.

DISTANTIA autem vtraque NL, ML, reperietur, [a] ſi fiat,

Vt ſinus totus anguli recti N, vel M,	*ad hypotenuſam inuentam IL, vel KL,*	*Ita ſinus anguli maioris obſeruati NIL, vel*	*ad NL, diſtantiam.*
		Ita ſinus anguli minoris obſeruati MKL,	*ad ML, diſtantiam.*

Quo pacto problema conficiatur ſine numeris.

4 SINE numeris eædem rectæ IN, NL, IL, KL, &c. reperientur, vt in ſuperioribus: ſi nimirum (vtemur figura huius problematis, ne nouam conſtruere cogamur) ſumpta recta IK, tot partium, quot palmi pedesue in differentia ſtationum exiſtunt, fiant anguli VKL, VIL, complementorum angulorum MKL, NIL, obſeruationum, & concurſus L notetur, ex quo ducatur LN, ipſi IK, parallela, & ad hanc perpẽdicularis in I, excitetur IN, &c. Vel ſi angulus rectus conſtituatur INL, & in aſſumpto puncto L, vbi concurſum eſſe volumus, fiat tam angulus NLI, complementi maioris anguli obſeruationis, quam angulus NLK, complementi minoris anguli obſeruationis, &c. Reliqua autem fiant, vt in problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. in eodem problemate 1. ſcripſimus.

EX vertice montis, vel turris per duas ſtationes in aliqua haſta erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, altitudinem ipſius montis, aut turris metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris vſque ad ſignum viſum cognoſcere.

PROBLEMA IV.



1 NON poſſunt aliquando commode duæ ſtationes in ſummitate montis, vel turris fieri. Quare tunc ita agendum erit. Sit altitudo AB, ſupra planum BC, menſuranda ex ſummitate A. Erigatur haſta aliqua quotlibet palmorum, aut pedum. Et primum inſpiciatur ſignum C, in plano per angulum BDC; Deinde idem inſpiciatur ex loco ſuperiore haſtæ per angulum BEC. Vterque autem angulus obſeruabitur vel per quadrantem pendulum, vt in priori angulo vides, vel per ſtabilem cum dioptra, vt in poſteriori. Sumptis quoque æqualibus DF, EG, pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Ducta autem DL, ipſi EC, parallela ſecante FH, in K: [a] quoniam anguli BDL, & E, æquales ſunt, & F, G, recti, nec non & latera adiacentia DF, EG, æqualia; [b] erunt latera FK, GI, æqualia: atque adeo KH, differentia Tangentium. Quia vero ex ſchol. propoſitionis 4. lib. 6. Euclid. eſt, vt KH, ad FK, ita LC, ad BL: [c] Vt autem LC, ad BL, ita eſt, ED, ad BD; erit quoque vt KH, ad FK, ita ED, ad DB. Si igitur fiat,

a 29. prim.
b 26. prim.
c 2. ſexti.

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum	*ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem:*	*Ita ED, ſpatium inter angulos obſeruationum, quod notum eſſe poteſt per aliquam menſuram,*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio.

inuenietur DB, ex qua ſi dematur portio haſtæ AD, inter altitudinis faſtigium A, & inferiorem angulum obſeruationis D, nota relinquetur altitudo propoſita AB.

EODEMQVE modo in turri eadem altitudo deprehendetur, ſi pro haſta AE, duæ feneſtræ eligantur, è quibus ſignum C, ſub iiſdem angulis videatur, vt patet. Sed tunc altitudini DB, inuentæ (ſi feneſtræ ſint D, E,) adiicienda eſt portio turris inter punctum D, feneſtræ inferioris, & turris faſtigium E, vt tota altitudo turris habeatur EB. [d] Et ſi fiat,

d 4. ſexti.

Diſtantiæ inuentio.

Vt DF, ſinus totus	*ad FH, Tangentem maiorem:*	*Ita DB, altitudo inuenta*	*ad BC,*

inuenta erit diſtantia BC.

ALITER.

2 POSITO ſinu toto CB, erit BE, Tangens anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E, & BD, Tangens anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis D; ideoque DE, differentia illarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat,

Vt DE, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad DB, Tangentem minorem:*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorum*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio alia.

prodibit altitudo DB, cognita ab oculo in prima ſtatione vſque ad baſem altitudinis, &c.

ALI-

ALITER.

3 VT per ſolos ſinus inſtituatur operatio, inueſtiganda prius eſt vtraque hypotenuſa CD, CE, vel alterutra earum, hoc modo:[a] Quoniam angulus BDC, duobus E, & DCE, æqualis eſt, ſi minor angulus obſeruationis E, ex maiori angulo obſeruationis BDC, ſubtrahatur, notus, relinquetur angulus DCE,[b] Itaque ſi fiat. a 29 prim. b 10. Triã. rectil.

Vt ſinus anguli DCE, differentiæ angulorum obſertionum	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*Ita ſinus minoris anguli obſeruationis E,*	*ad CD,*
		Vel	
		Ita ſinus anguli EDC, complementi maioris anguli obſeruationis ad duos rectos,	*ad CE,*

Hypotenuſarum inuentio.

reperietur tam hypotenuſa CD, quam CE, in partibus differentiæ ſtationum DE.[c] Quapropter ſi iam fiat c 10. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis BDC,*	*ad DB,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſam CE, proxime inuentam:	*Ita ſinus anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E:*	*ad EB,*

cognita erit vtraque altitudo DB, EB, &c. Si autem fiat *Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.*

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad Hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli D, maioris obſeruati,*	*ad BC,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſam CE, nuper inuentam	*Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati.*	*ad BC,*

cognoſcetur quoque diſtantia BC, per ſolos ſinus.

4 ABSQVE numeris problema efficiemus, vt in præcedentibus, ſi nimirum in recta EB, ſumatur portio ED, tot partium æqualium, quot palmi pedesue in ED, differentia ſtationum oculorum exiſtunt, & tam angulus E, minor obſeruationis, quam BDC, maior conſtituatur, concurſusque C, notetur, à quo ad EB perpendicularis ducatur CB, &c. vel ſi angulus rectus efficiatur B, & in quouis puncto C, vbi optamus eſſe concurſum, conſtituatur tam angulus BCD, complemẽto maioris anguli obſeruationis, quam angulus BCE, complemento minoris anguli obſeruationis æqualis, &c. Reliqua autem abſoluantur, vt in Problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ ibidem Num. 7. explicata ſunt. *Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus. Problematis ſolutio ſine numeris.*

COROLLARIVM.

IGITVR ſi diſtantia ſigni ex turre viſi vſque ad turrim nota fuerit, nimirum recta CB, reperietur altitudo turris per vnicam ſtationem in faſtigio A, factam:[d] ſi videlicet fiat, d 4. trian. rectil.

Vt ſinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, qui complementum eſt anguli obſeruationis D,*	*Ita diſtantia nota CB,*	*ad BD,*

Et ſi ex inuenta BD, auferatur menſoris ſtatura AD, nota relinquetur altitudo turris BA.

VEL PER SOLOS SINVS.

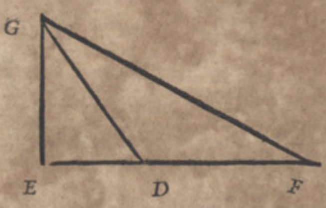
Vt ſinus anguli obſeruationis D,	*ad diſtantiam CB, notam*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi anguli obſeruationis D.*	*ad BD,*

Altitudinis inuentio per vnicã ſtationẽ quando diſtantia nota eſt.

QVOD ſi oculus D, ſtatuatur in aliqua feneſtra turris, adiicienda erit portio turris inter oculum & faſtigium ad altitudinem DB, inuentam. Ita namque conficietur tota altitudo turris EB, ſi faſtigium ſit E, vt perſpicuum eſt.

EX vertice montis aut turris altitudinem ipſius, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpacium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere.

PROBLEMA V.



1 QVANDO ſpatium aliquod DE, è directo menſoris à monte vel turri remotum fuerit notum, metiemur ipſam altitudinem FG, è faſtigio G, hac ratione. Inſpiciantur termini D, E, per angulos FGD, FGE, ſiue per Quadrantem pendulum, ſiue per ſtabilem. Et quoniam, poſito ſinu toto GF, Tangentes angulorum obſeruationum ſunt DF, EF, ipſarumque differentia DE, ſpatium propoſitum: Si fiat,

Vt DE, differentia Tangentium angulis obſeruationum debitarum	*ad ſinum totum GF:*	*Ita DE, ſpatium notum*	*ad GF,*

manifeſta erit altitudo GF, quæſita in partibus ſpatii noti DE,

ALITER.

2 PER ſolos ſinus eandem altitudinem GF, adipiſcemur, ſi prius hypotenuſam GD, venabimur, hoc
a 10. Tria. rectil. modo.[a] Fiat,

Vt ſinus anguli DGE, differentiæ angulorum obſeruationum	*ad DE ſpatium cognitum:*	*Ita ſinus anguli E, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad hypotenuſam GD,*

b 10. Trian. rectil. Numerus enim productus dabit hypotenuſam GD, in partibus ſpatii DE, notam. [b] Si ergo rurſus fiat,

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam GD, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli D, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad GF, altitudinem,*

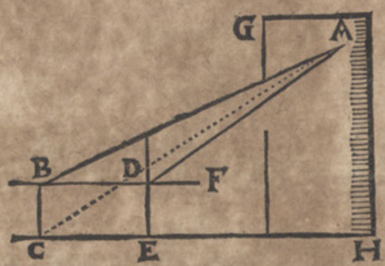
producetur altitudo GF, in partibus hypotenuſæ GD, ſiue ſpatii DE, nota.

Solutio problematis ſine numeris. 3 SINE numeris agendum erit, vt in problemate 1. declaratum eſt.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas metiri.

PROBLEMA VI.

1 SIT inquirenda diſtantia puncti A, in muro GH, ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam; ab oculo B, vel pede C, poſita ſtatura menſoris BC. Concipiatur ducta BD, ipſi plano CE, parallela, ſitque primo punctum A, altius, quam oculus B. Inſpecto puncto A, notetur angulus ABD, quem latus pinnacidiorum in quadrante pendulo, vel linea fiduciæ in dioptra Quadrantis ſtabilis cum recta BD, facit. Deinde accede verſus punctum A, quotlibet palmis aut pedibus vſque ad D, vt BD, differentia ſtationum nota ſit. Rurſumq; ex D, punctum A, inſpiciatur, notato diligenter angulo ADF, exiſtentque rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in eodem plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſo-



a 32. primi. ris BC, DE, & per punctum A, ducitur.[a] Et quia angulus ADF, duobus B, & BAD, eſt æqualis: ſi angulus B, in
b 10. triangul. rectil. remotiore ſtatione auferatur ex angulo D, in propinquiore, notus fiet reliquus angulus A. [b] Si igitur fiat,

Vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori differt,	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui complementum eſt maioris anguli D, ad duos rectos,*	*ad AB, diſtantiam quæſitam*

reperta erit quæſita diſtantia AB, in partibus differentiæ ſtationum.

QVOD ſi oculus exiſtat in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, inuenietur eadem arte diſtantia DA, ſi
c 10. Trian. rectil. loco anguli ADB, ſumatur angulus B, in remotiore ſtatione, vt liquet.[c] Eſt enim vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori ADF, differt ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli B, in remotiori ſtatione ad DA.

2 DISTANTIA vero à puncto A, ad pedem menſoris C, hoc eſt, recta AC, cognoſcetur per Problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1. cum in triangulo obliquangulo ABC, duo latera AB, BC, nota ſint, nimirum diſtantia inuenta, & ſtatura menſoris, comprehendantque angulum ABC, notum, vtpote conflatum ex recto CBD, & angulo obſeruationis ABD.



3 SIT deinde punctum A, in muro HI, infra oculum B. Inſpecto puncto A, obſeruetur angulus CBA, quem latus pinnacidiorum cum perpendiculi filo, vel dioptræ linea fiduciæ cū BC, facit: Deinde accede verſus A, vſq; ad D, & iterum conſidera angulum EDA: exiſtentq; rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE,
d 32. primi. & per punctum A, ducitur. [d] Et quoniam angulus FDA, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione æqualis eſt duobus DBA, DAB; ſi DBA, angulus com-
e 10. Trian. rectil. plementi anguli remotioris ſtationis dematur ex angulo ADF, complementi anguli ſtationis propinquioris, reliquus fiet notus BAD. [e] Si ergo fiat,

Vt

Vt ſinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obſeruationum	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, conſtati ex recto BDE, & ex angulo obſeruationis ADE, in propinquiore ſtatione*	*ad AB, diſtantiã quæſitã.*

cognita erit diſtantia AB, quam quærimus, in partibus differentiæ ſtationum BD.

QVOD ſi oculus ponatur in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, reperietur eodem modo diſtantia DA, ſi pro angulo BDA, aſſumes angulum DBA, complementi anguli ABC, obſeruationis in remotiore ſtatione, vt manifeſtum eſt. [f] Nam eſt, vt ſinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obſeruationum, ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli DBA, complementi anguli ABC, in remotiore ſtatione, ad DA. f 10. triang. rectil.

4 VT autem diſtantia CA, à pede ad punctum A, inueniatur, ita progrediemur. Quoniam in triangulo rectangulo ABG, (ſi ex puncto A, concipiatur ducta ad BC, ſtaturam menſoris perpendicularis AG,) baſis AB, nota eſt per inuentionem, & angulus BAG, notus, quippe cum ſit complementum anguli obſeruationis ABG; [g] Si fiat, g 2. triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli BAG, complementi anguli obſeruationis,*	*ad BG,*

cognoſcetur BG, in partibus baſis AB, hoc eſt in partibus differentiæ ſtationum BD, in quibus AB, inuenta fuit, Ablata autem BG, ex menſoris ſtatura BC, nota fiet reliqua CG. [h] Item ſi fiat, h 2. triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli obſeruationis ABG,*	*ad AG,*

nota etiam fiet AG, in partibus eiuſdem baſis AB, vel differentiæ ſtationum BD. Quia ergo in triangulo rectangulo ACG, duo latera AG, GC, per inuentionem nota facta ſunt, [i] cognoſcetur quoque baſis AC, quod eſt propoſitum. i 3. triang. rectil.

5 MANIFESTVM autem eſt, eodem pacto vtramque diſtantiam AB, AC, reperiri, etiam ſi punctum A, in plano ſit, in quo menſor conſiſtit, nimirum in Horizonte, qui ponatur tranſire per rectam AG, ita vt ſtatura menſoris ſit BG. Immo tunc per vnicam ſtationem vtraque diſtantia AB, AG, reperietur. Nam poſito ſinu toto BG, ſtatura menſoris; AB, ſecans eſt anguli obſeruationis ABG, & AG, Tangens. Quocirca ſi fiat.

Vt BG, ſinus totus	*ad BA, ſecantem anguli obſeruationis ABG,*	*Ita BG, ſtatura menſoris*	*ad BA,*
	Vel		
	ad GA, Tangentem anguli obſeruationis ABG:		*ad GA,*

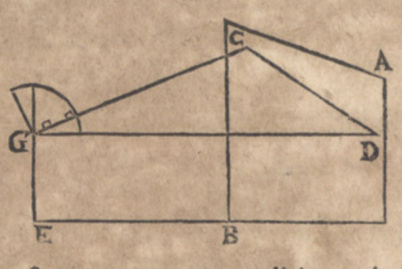
vtraque diſtantia & BA, ab oculo B, & GA, à G. pede menſoris cognita fiet.

6 IAM vero ſine numeris operabimur, vt in præcedentibus, vt manifeſtum eſt, ſi recte figura conſtruatur, quemadmodum Num. 6. & 8. problematis 1. dictum eſt. *Problema quo pacto ſine numeris ſoluendum ſit.*

INTERVALLVM inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem rectum ſit, ſiue inclinatum, metiri.

PROBLEMA VII.

1 IN plano quolibet eleuato AB, propoſitum ſit interuallum CD, quod ex plano EB, inueſtigandum ſit. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit, GE, inueſtigetur per præcedens problema 6. vtraq; diſtantia GC, GD, in partibus ſtaturæ menſoris GE, ſiue differentiæ duarum ſtationum, è quibus ipſæ diſtantiæ inueſtigantur. Deinde applicato Quadrante ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, tranſeat, & vna eius ſemidiameter ad punctum D, vergat, (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptræ ſupra illam ſemidiametrum, punctum D, per foramina pinnacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum C, appareat, arcuſque inter dictam ſemidiametrum, & lineam fiduciæ interceptus notetur, hic enim angulum G. metietur. Quod ſi altera ſemidiameter Quadrantis vltra rectam GC, exiſtat, erit angulus acutus CGD: Si vero altera illa ſemidiameter citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtuſus, qui cognoſcetur, ſi ad rectum adiiciatur reliquus angulus inter alteram illam ſemidiametrum, & rectam GC, quem quidem reliquum inueſtigabimus per Quadrãtem, vt de acuto CGD, diximus, ſi videlicet in recta CD, mente notemus punctum, in quod altera illa ſemidiameter incurreret producta. Si namq; tunc ſemidiameter illa rectæ GC, congruat, & dioptra ad illud punctum mente notatum dirigatur, indicabunt gradus inter illam ſemidiametrum, & dioptram prædictum angulum reliquum. Si deniq; altera illa ſemidiameter preciſe in C, tendat angulus CGD, rectus erit. Quia ergo in triangulo GCD, obliquangulo latera nota GC, GD, continent angulum notum G; cognoſcetur latus CD, per problema 12. triang. rectil. c. 3. lib. 1.

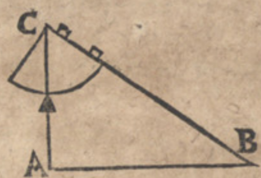


 2 ABS-

Problematis ſolutio ſine numeris. 2. ABSQVE numeris facile problema ſoluetur, ſi fiat angulus G, æqualis ei, qui per Quadrantem obſeruatus fuit, & in rectis GC, GD, ex inſtrumento partium tot particulę ſumantur, quot palmi, aut pedes in diſtantiis GC, GD, inuenti ſunt, &c.

LONGITVDINEM lineæ rectæ, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quæ perpendicularis ſit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, exiſtens alterum extremum videre poteſt, per Quadrantem comprehendere.

PROBLEMA VIII.



1 SIT exquirenda longitudo AB, hoc eſt, diſtantia inter A, & B, etiamſi puncta intermedia ſiue propter tumores interiectos, ſiue propter valles, cerni nequeant, dummodo in extremo A, exiſtens menſor, vel in aliqua altitudine cognita ad planum, in quo linea AB, perpendiculari, ita vt AC, ſit vel ſtatura menſoris, vel haſta aliqua erecta, vel turris. Inſpecto extremo B, obſeruetur angulus C. Et quia poſito ſinu toto AC, diſtantia AB, eſt Tangens anguli obſeruati C, ſi fiat,

Vt ſinus totus AC,	*ad AB, tangentem anguli obſeruati C.*	*Ita AC, ſtatura menſoris, vel altitudo nota,*	*ad AB, longitudinem.*

a 4. Trian. rectil. procreabitur longitudo AB, in partibus altitudinis notæ AC. Quæ per ſolos ſinus etiam producetur, [a] ſi fiat,

Vt ſinus anguli B, complementi anguli C, obſeruati	*Ad AC, ſtaturam menſoris, vel altitudinem notam:*	*Ita ſinus anguli C, obſeruationis*	*ad AB, longitudinem*

Solutio problematis ſine numeris. 2 SINE numeris eadem longitudo AB, cognoſcetur, vt in præcedentibus dictum eſt: ſi videlicet ex inſtrumento partium accipiatur AC, tot particularum, quot palmi, pedeſue in altitudine AC, exiſtunt, conſtituaturq; angulus obſeruationis C, ac tandem ad AC, perpendicularis excitetur AB, &c.

LONGITVDINEM, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota dimetiri.

PROBLEMA IX.

1 SIT longitudo AB, è directo menſoris in C, exiſtentis, ita vt recta BA, producta tranſeat per C. Sit quoque CD, vel ſtatura menſoris, vel altitudo quæpiam nota. Si igitur per precedens problema 8. inquiratur vtraq; longitudo CB, CA, & CA, ex CB, detrahatur, reliqua fiet AB, ac proinde cognita.



ALITER

2 POSITO ſinu toto CD, ſi termini A, B, per angulos CDA, CDB, ſpectentur, erit CA, Tangens minoris anguli, & CB, maioris, at AB, differentia earum Tangentium. Quare ſi fiat,

Vt ſinus totus CD,	*Ad AB, differentiam Tangentium angulorum obſeruationum:*	*Ita CD, altitudo nota*	*Ad AB, longitudinem,*

efficietur longitudo AB, nota in partibus altitudinis notæ CD.

ALITER.

a 5 Triang. rectil. 3. PER ſolos ſinus eandem longitudinem AB, cognoſcemus: ſed prius inuenienda eſt AD, [a] hac ratione fiat,

Vt ſinus anguli CAD, complementi minoris anguli obſeruationis	*ad CD, altitudinem notam:*	*Ita ſinus totus anguli recti C,*	*ad AD,*

b 10. Triã. rectil. Productus enim numerus dabit AD, notam in partibus altitudinis notæ CD. [b] Si ergo rurſus fiat,

Vt ſinus anguli CBD, complementi maioris anguli obſeruationis	*Ad AD, proxime inuentam*	*Ita ſinus anguli ADB, differentiæ inter duos angulos obſeruatos*	*ad AB, longitudinem,*

prodibit nota longitudo AB, in partibus rectæ AD, hoc eſt, altitudinis notæ CD, in quibus recta AD, fuit inuenta.

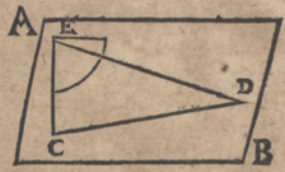
4 SINE numeris rem perficies, quemadmodum in præcedentibus, vt liquet.

LON-

LONGITVDINEM transuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, notam efficere.

PROBLEMA X.

1 SIT planum Horizontis AB, in quo iaceat longitudo CD, in tranſuerſum, pes autem menſoris ſit in E, ita vt recta DC, per pedes menſoris in E, non tranſeat. Quando namque longitudo DC, è directo menſoris ſita eſt, inueſtigabitur ea per problema 9. præcedens. Vt ergo tranſuerſa longitudo CD, nota efficiatur, inueſtiganda primum erit vtriuſque puncti extremi CD, diſtantia à pede menſoris E, & quidem per vnicam ſtationem in E, factam, vt problemate 6. Numer. 5. dictum eſt. Deinde per quadrantem cum dioptra angulus CED, exquirendus in plano Horizontis, quod fiet, ſi Quadrantis planum erectum tranſeat ſemel per puncta E, C, & iterum per puncta E, D, vt deſignari poſſint partes rectarum EC, ED. Quadrantis enim vno latere incumbente rectæ EC, dioptra vero rectæ ED, ſi angulus eſt acutus, indicabit arcus inter illud latus, ac dioptram angulum CED. Quod ſi alterum Quadrantis latus rectæ ED, congruet, erit angulus CED, rectus: Si vero recta ED, vltra alterum latus Quadrantis extiterit, dictus angulus obtuſus erit: qui cognitus erit, ſi recto angulo addatur reliquus inter alterum latus & rectam ED: Qui quidem reliquus angulus per Quadrantem explorabitur, vt de acuto diximus in problemate 7. Atque ita habebimus triangulum ECD, cuius duo latera nota ſunt EC, ED, angulumque notum comprehendunt CED. [a] Igitur & tertium latus CD, cognitum erit. a 12. triam. rectil.



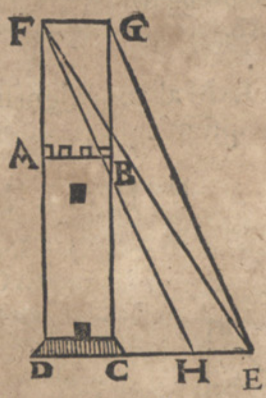
2 QVO pacto autem ſine ope numerorum problema perficiendum ſit, traditum eſt in problemate 7. Numero 2.

LONGITVDINEM in horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas: vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ſub altera ad perpendiculum, quando ſpacium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.

PROBLEMA XI.

1 QVAMVIS problema hoc ſolutum iam ſit in problemate 3. & 4. occaſione altitudinis inquirendæ, libet tamen idem hic per ſe, & paulo aliter expedire. Sit ergo turris ABCD, & longitudo propoſita CE: ſtatura autem menſoris BG, vel AF. Inſpecto extremo E, in prima ſtatione per angulum CGE, & in ſecunda per angulum DFE, ducatur FH, ipſi GE, parallela. Et quia in triangulis FDH, GCE, anguli D. C, recti ſunt, [b] & H, E, æquales, [c] latusque FD, lateri GC, æquale: [d] erunt quoque & anguli G, DFH, æquales, & latera DH, CE. Poſito autem ſinu toto FD, erit DE, Tangens maioris anguli obſeruationis DFE, & DH, Tangens anguli DFH, hoc eſt, anguli æqualis G, in prima ſtatione obſeruati: ac proinde HE, differentia erit earum Tangentium, [e] quæ quidem æqualis eſt differentiæ ſtationum FG, vel AB, vel DC. Si igitur fiat,

b 29. prim.
c 34. primi.
d 26. primi.
e 34. primi.



Vt HE, differentia Tangentium angulorum obſeruationum	*Ad CE, Tangentem minoris anguli obſeruationis CGE,*	*Ita HE, vel FG, differentia ſtationum*	*ad CE, longitudinem,*

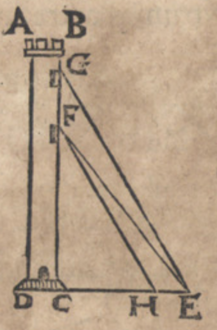
gignetur longitudo optata CE, in partibus differentiæ ſtationum HE, vel FG, &c. Quod ſi rurſus fiat,

Vt HE, differentia Tangentiũ angulorũ obſeruationũ	*Ad FD, ſinum totũ*	*Ita HE, vel FG, differẽtia ſtationum*	*ad FD,*

inuenietur recta FD, à qua ſi tollatur ſtatura menſoris AF, reliqua fiet altitudo turris AD.

2 SEDiam ex duabus feneſtris F, G, inſpiciatur extremum E, per angulos CFE, CGE, ducaturq; FH, ipſi GE, parallela. [f] Quoniam igitur angulus CFH, angulo CGE, æqualis eſt: ſi ponatur ſinus totus CE, erit CG, Tangens anguli CEG, complementi minoris anguli obſeruationis G, & CF, Tangens anguli CEF, complementi maioris anguli obſeruationis CFE: at FG, differentia ſtationum, hoc eſt, interuallum inter feneſtras, differentia erit dictarum Tangentium. f 29. primi.

Quam ob rem ſi fiat,



Vt FG, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum,	*Ad CE, ſinum totum*	*Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras,*	*ad CE, longitudinem propoſitam,*

cognita erit longitudo CE,deſiderata.Et ſi rurſum fiat,

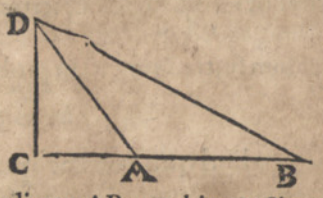
Vt FG, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum	*ad GC, Tangentem complemẽmenti minoris anguli obſeruati*	*Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras*	*ad GC,*

inuenta erit altitudo GC,à ſuperiori feneſtra ad baſem,in partibus differentiæ ſtationum,cui ſi addatur portio GB,à ſuperiori feneſtra ad faſtigium vſque, tota turris altitudo BC, non ignorabitur.

3. SINE auxilio numerorum procedendum eſt,vt in ſuperioribus.

LONGITVDINEM rectæ è directo menſoris poſitæ,cuius extremum vtrumque, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere.

PROBLEMA XII.



1 SIT longitudo AB,& menſor in extremo A, conſtitutus videre non poſſit alterum extremum, niſi ad dextram ſiniſtramue recedat vſque ad D, punctum, è quo vtrumque extremum cerni poſſit. Erit igitur longitudo AB, menſori in D,exiſtenti poſita in tranſuerſum. Quare ea per problema 10. inueſtigabitur.

2. EODEM modo, ſi menſor exiſtat in C, è directo longitudinis, ſed vel neutrum extremum, vel alterum duntaxat intueri poſſit, longitudinem AB, venabimur. Si namque ex C, ad ſiniſtram, vel dextram procedemus donec in D, vtrumque extremum videamus, inuenietur tranſuerſa longitudo AB, per problema 10. vt prius. Neque vero refert, ſiue per angulum rectum BCD, recedatur in latus, ſiue per angulum obtuſum BAD,&c.

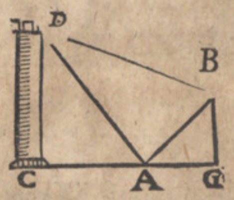
3. OPERATIO ſine numeris inſtituenda eſt, vt in ſuperioribus.

4. QVANDO menſor in A, exiſtens videre poteſt extremum B, inueſtigabitur longitudo AB, per problema 8.

SI autem è directo longitudinis exiſtat in C, & vtrumque extremum cernat, explorabitur per problema 9. eadem longitudo AB.

DISTANTIAM alicuius ſigni in Horizonte poſiti, à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere.

PROBLEMA XIII.



1. IN Horizontis plano punctum A, diſtet à ſummitate D, alicuius altitudinis CD, per rectam AD, quam metiri iubemur. Vbicunque oculus menſoris exiſtat, nimirũ in B, vt ſit ſtatura menſoris BG, inueſtigentur per problema 6. diſtantiæ punctorum A, D, ab oculo menſoris B.

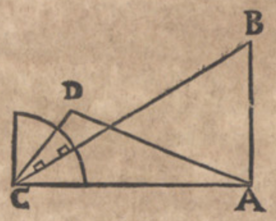
Deinde angulus exploretur ABD, quem nobis præbebit Quadrans cum dioptra, ſi ad oculum ita applicetur, vt eius planum per tria puncta B, A, D, tranſeat, poſito centro in B; atque vnum eius latus rectæ BA, incumbat, dioptra vero ad punctum D, dirigatur

a 10. Trian. rectil. &c. Itaque cum in triangulo BAD, duo latera nota BA, BD, angulum notum contineant B; [a] cognoſcetur quoque latus AD.

2. QVA ratione eadem diſtantia AD, exquirenda ſit abſque numeris, docuimus Num. 5. problematis 7.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum è quo eius baſis appareat, per Quadrantem explorare.

PROBLEMA XIV.



1 SIT altitudo AB, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectã, ſed ſolum in latus, verbi gratia vſque ad D, vnde baſem videre poſſimus. Inquiratur per problema 10. longitudo tranſuerſa AC, ex loco D: inſpiciaturque vertex B, ex C, per angulum ACB. Et quia poſito ſinu toto AC, altitudo AB, Tangens eſt anguli obſeruationis ACB, [a] ſi fiat

a 4. Trian. rectil.

Vt ſinus totus AC,	*ad AB, Tangentem anguli obſeruati ACB:*	*Ita longitudo AC, per problema 10. inuenta*	*Ad AB, altitudinem.*

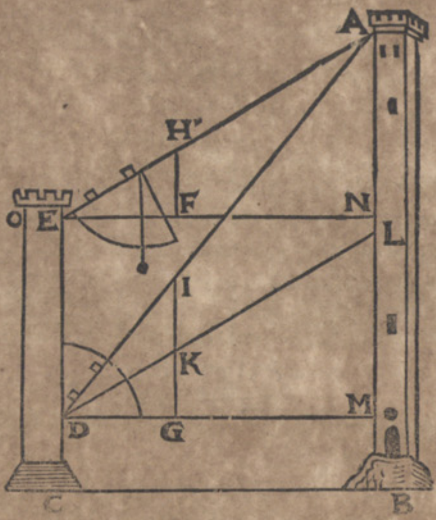
prodi-

prodibit nota altitudo AB,in partibus,in quibus AC,inuenta fuit.

2 NON erit autem difficile problema hoc ſine numerorum auxilio exequi, ſi ſuperiora præcepta conſulantur.

ALTITVDINEM inacceſſibilem,quando neque diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt,neque è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis appareat,per Quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere.

PROBLEMA XV.



1 SIT altitudo AB,locus menſoris C, diſtantia CB,incognita:baſis B,non appareat,& à loco C,non liceat accedere ad AB, neq; recedere, vt duæ ſtationes fiant in plano. Erigatur haſta CE, ſi non præſto ſit turris aliqua CO,& ſtatura menſoris ſit CD. Sumpta deinde portione haſtæ DE, notarum partium, concipiantur ductæ DM,EN,ipſi CB,parallelæ,obſeruenturq; per Quadrantem anguli ADM,AEN. Sumptis quoq; rectis æqualibus EF, DG, pro ſinubus totis, erigantur perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Sumpta item AL, æquali ipſi DE, ducatur recta DL, [a] quæ parallela erit ipſi EA, ſecabitque GI,in K. [b] Quoniam vero angulus DKG,angulo DLB, & hic angulo EAB, & hic angulo EHF, æqualis eſt; erit angulus DKG,angulo EHF,æqualis: Eſt autem & rectus G, recto F, æqualis,& latus DG, lateri EF, æquale; [c] erunt quoq; latera GK, FH, æqualia, & anguli D ,E, æquales:ideoque IK,differentia erit inter Tangentes,GI,GK,angulorum GDI,GDK, ſiue FEH. [d] Et quia eſt, vt IK,ad KG,ita AL,ad LM;erit per contrariam compoſitionem à nobis in ſcholio propoſ.18.lib.5.demonſtratam,ita quoque IK,ad IG,vt AL,hoc eſt,vt ED,differentia ſtationum,ad altitudinem AM. Igitur ſi fiat,

a 33.primi.
b 29.prim.
c 26.primi.
d ſchol. 4. ſexti.

Vt IK,differentia Tangentium	*ad IG,Tangente maiorem:*	*Ita AL,vel ED,differentia ſtationum*	*ad AM,altitudinem,*

gignetur altitudo AM,cui ſi apponatur ſtatura menſoris MB,tota altitudo AB, nota efficietur. [e] Iam ſi fiat,

e 4.ſexti.

Vt GI,ſinus totus	*ad GD,Tangentem complementi maioris anguli obſeruationis:*	*Ita altitudo inuenta AM,*	*ad MD, diſtantiam,*

;inuenta erit diſtantia DM,vel CB.

2. PER ſolos ſinus idem problema conficiemus, ſi prius inueſtigetur hypotenuſa AD, hoc modo. [f] Fiat,

f 10.Trian. rectil.

Vt ſinus anguli ADL, differentiæ inter angulos obſeruationum ADM,LDM,	*ad AL, hoc eſt, ad DE,differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ALD, qui relinquitur,ſi DLM,complementum minoris anguli LDM, obſeruati ex duobus rectis ſubtrahatur.*	*ad AD,*

Nam productus numerus offeret hypotenuſam AD. [g] Si ergo rurſus fiat,

g 10. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad hypotenuſam AD, inuentam:*	*Ita ſinus maioris anguli obſeruationis ADM,*	*ad AM,*

procreabitur altitudo AM,&c. [h] Si autem fiat,

h 10. Trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad hypotenuſam AD, proxime inuentam,*	*Ita ſinus anguli DAM, complementi maioris anguli obſeruationis,*	*ad DM,*

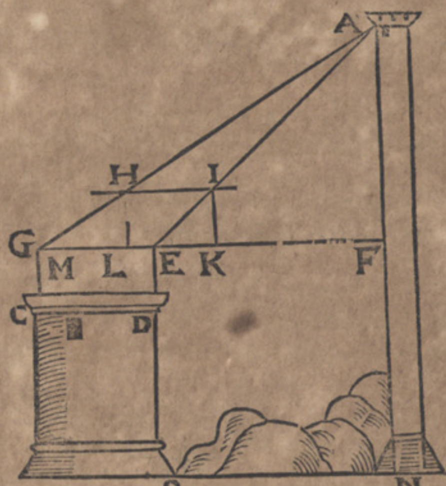
efficietur diſtantia DN,cognita.

3 SI ſine numeris problema ſoluendum eſt,recurrendum erit ad ſuperiora,præſertim ad Num.6,8.&7. problematis 1.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas,etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per Quadrantem adinuenire. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines colligere.

PRO-

PROBLEMA XVI.



1 MAIOR altitudo ſit AN, minor turris CO, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C, D, menſoriſque ſtatura ſit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Atque inſpecto cacumine A, obſeruentur anguli AEF, AGF. Reliqua fiant, vt in 2. problemate. Si ergo fiat, ſicut in eo problemate demonſtrauimus,

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, angulorum H, I, qui complementa ſunt angulorum obſeruationum, poſitis ſinubus totis HL, IK.	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*Ita LH, ſinus totus*	*ad FA,*

Inuenietur altitudo AF, cui ſi adiiciatur FN, conflata ex altitudine turris CO, & ſtatura menſoris, tota maior altitudo AN, nota euadet. Item ſi fiat,

Vt GM, differentiæ Tangentium earundem	*ad GE, differentiam ſtationum:*	*Ita GL, Tangens complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad GF,*

procreabitur diſtantia GF, à qua ſi dematur latitudo turris CO, reliqua erit diſtantia inter duas turres.

HÆC omnia in 2. problemate demonſtrauimus: & ob hanc cauſam eiſdem prorſus literis hic vſi ſumus, quas ibi vſurpauimus, vt demonſtratio ex illo loco in hunc transferri poſſit.

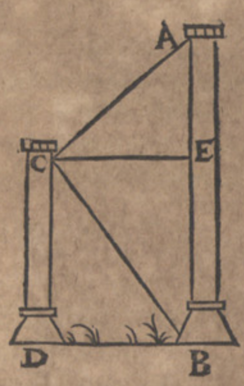
2. QVANDO in ſummitate turris minoris fieri duæ ſtationes nequeunt, eligantur duæ feneſtræ, in quibus duæ ſtationes fiant. Vt in figura præcedentis problematis 15. in minori turri CE, deligantur duæ feneſtræ D, E, & reliqua fiant, vt in haſta CE. Solum pro ſtatura menſoris ad altitudinem inuentam AM, adiicienda eſt portio turris inter inferiorem feneſtram D, & baſem C, vt tota maior altitudo AB, nota efficiatur.

3 SINE numeris nihil noui præcipimus, ſed ad ſuperiora lectorem amandamus.

4 QVO etiam pacto problema hoc per ſolos ſinus poſſit effici, docuimus probl. 2. & 15.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit, per Quadrantem perſcrutari.

PROBLEMA XVII.



1 SIT maior altitudo AB, & minor CD, incognita poſſitq; baſis maioris B, videri ex minori altitudine. Primum per duas ſtationes in ſummitate turris minoris, vel in duabus feneſtris, inquiratur tam altitudo turris minoris CD, quam diſtantia DB, vt problemate 11. vel etiam 3. & 4. traditum eſt. Nam tunc ex minori altitudine nota CD, maior AB, explorabitur per ea, quæ in antecedente problemate 16. ſcripſimus.

2 AT ex altitudine CD, & diſtantia DB, cognitis diſcemus altitudinem maiorem AB, per ſolos ſinus, hoc modo. Ex aliqua feneſtra C, minoris altitudinis inſpiciantur extrema A, B, maioris altitudinis per angulos ACE, BCD, (ducta prius CE, ipſi DB, parallela, vel ad vtramq; altitudinem perpendiculari.)[a] Deinde fiat,

a 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli CBD, complementi illius, quo baſis inſpicitur	*ad inuentam altitudinem CD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

Vel

Vt ſinus anguli BCD, quo baſis inſpicitur,	*ad inuentam diſtantiam BD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

b 10. trian. rectil.

vtroque enim modo cognita erit hypotenuſa BC.[b] Si ergo rurſus fiat,

Vt ſi-

Vt ſinus anguli A, complementi illius quo cacumen inſpicitur, *ad inuentam hypotenuſam BC:* *Ita ſinus anguli ACB, conflati ex complemento anguli, quo baſem intuemur, & ex angulo, quo faſtigium cernitur.* *ad AB;*

manifeſtabitur altitudo maior AB.

3 DE ſolutione problematis ſine numeris nihil noui hic præcipimus, ſed ea ex ſuperioribus petenda eſt.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope Quadrantis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines duas eruere.

PROBLEMA XVIII.



1 MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur addiſcenda, etiamſi baſis B, non cernatur. Concipiatur ducta recta AE, ipſi BD, parallela, vt ED, minori altitudini AB, ſit æqualis. Si igitur ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis CD, factis, per problema 3. vel ex duabus feneſtris, per problema 4. inueſtigetur tam altitudo CE, quam diſtantia AF, inſpecto cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, viſum, & CE, ex toto altitudine CD, auferatur, reliqua ED, hoc eſt, minor altitudo fiet nota. Diſtantia autem AE, inuenta quæſitæ BD, eſt æqualis: ac proinde DB, cognita erit.

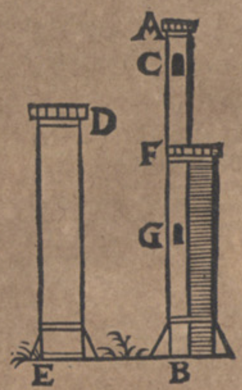
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per Quadrantem explorare. Atque hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines conücere.

PROBLEMA XIX.

1 REPETATVR figura præcedentis problematis. Et quia baſis B, minoris altitudinis ex maiore apparet; ſi punctum B, ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis CD, factis inſpiciatur, reperietur per problema 3. tam altitudo maior CD, quam diſtantia BD. Quod etiam efficies per problema 4. ſi punctum B, ex duabus feneſtris maioris altitudinis CD, inſpiciatur. Cognita ergo altitudine maiori CD, inuenietur minor altitudo AB, vt in præcedenti problemate traditum eſt. Cum igitur & diſtantia BD, ſit explorata, patet ſolutio problematis propoſiti.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiori cognoſcere per Quadrantem.

PROBLEMA XX.



1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE: Item portio FG, minoris altitudinis FB, ex altitudine maiore DE. Si DE, altitudo minor eſt proportione CB, inueſtigetur tam altitudo maior AB, quam CB, ex minore altitudine DE, per problema 16. vel 17. prout videlicet DE, cognita fuerit aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet portionem AC, quæſitam.

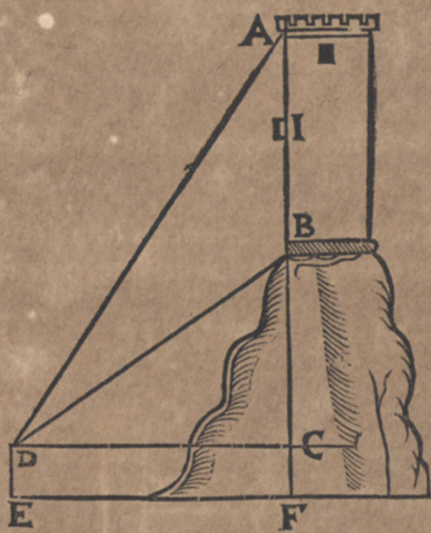
2 SI vero DE, maior eſt portione FB, explorandaque ſit portio AF; inquirenda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 16 vel 17. At vero alitudo minor FB, ex maiore DE, per problema 18. vel 19. exploranda erit. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem AF.

3 NON ſecus per problema 18. vel 19. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, vt illarum differentia FG, quæ quæritur, colligatur nota.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infima diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per Quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PRO-

PROBLEMA XXI.



1 HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificii inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque extremum A, B, videatur, obſeruentur per Quadrantem anguli ADC, BDC, quos radij DA, DB, cum recta DC, quæ ex D, ad AB, productam intra montem eſt perpendicularis: ita vt ſtatura menſoris ſit DE. Deinde per problema 6. inueſtigetur longitudo vtriuſque radij DA, DB.[a] Nam ſi fiat in triangulo ABD,

a 10. Trian. rectil.

Vt ſinus anguli BAD, qui complementum eſt maioris anguli ADC, obſeruati,	*ad radium DB, proxime inuentum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui differẽtia eſt angulorum obſeruationum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem*

b 10. trian. rectil.

inuenta erit altitudo AB, quæſita in partibus, in quibus cognitus eſt radius DB.[b] Sic etiam, ſi fiat,

Vt ſinus anguli ABD, vel (quod idem eſt) anguli DBC, qui cõplementum eſt minoris anguli obſeruati BDC,	*ad radium DA, proxime inuentum:*	*Ita ſinus anguli ADB, differentiæ angulorum obſeruatorum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem.*

prodibit rurſus altitudo quæſita AB, in partibus radii inuenti DA.

ALITER.

2 PER problema 2. vel 15. inueſtigetur tam altitudo inacceſſibilis AC, quam BC, ſecluſa menſoris ſtatura CF. Altitudo namque BC, ex altitudine AC, detracta notam relinquet altitudinem AB, quæ quæritur.

ALITER

c 4. Trian. rectil.

3 INVENTA diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. tradidimus, [c] ſi fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam cognitam DC,*	*Ita AC. Tangens maioris anguli obſeruati ADC,*	*ad AC,*

d 4. trian. rectil.

reperietur altitudo maior AC, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.[d] Et ſi rurſus fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*Ita BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,*	*ad BC,*

cognita fiet altitudo minor BC, in partibus eiuſdem diſtantiæ inuentæ DC, quæ dempta ex maiore altitudine AC, notam relinquet altitudinem turris BA, quæſitam.

ATQVE hæc ratio commodiſſima eſt, quando in turri aliqua, vel ædificio, cuius diſtantia à menſore cognita ſit, metiendum eſt interuallum perpendiculare inter duas feneſtras.

ALITER

4 INVENTA rurſum diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. ſcripſimus; detrahatur Tangens BC, (poſito ſinu toto DC,) minoris anguli obſeruati ADC, vt nota remaneat AB, differentia dictarum Tangentium. Nam ſi fiat.

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*ita AB, differentia Tangentium AC, BC,*	*ad AB, altitudinem,*

procreabitur altitudo quæſita AB, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.

ALITER

5 INVENTA per problema 2. vel 15. altitudine montis BC, obſeruentur anguli BDC, ADC, per radios DB, DA. Poſito namque ſinu toto DC, ſi fiat,

Vt BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,	*ad BC, altitudinem inuentam;*	*Ita AB, differentia Tangentium AC, CB, angulorum obſeruatorum ADC, BDC.*	*ad AB,*

prodi-

prodibit rurſus altitudo nota AB, quam quærimus.

SCHOLIVM.

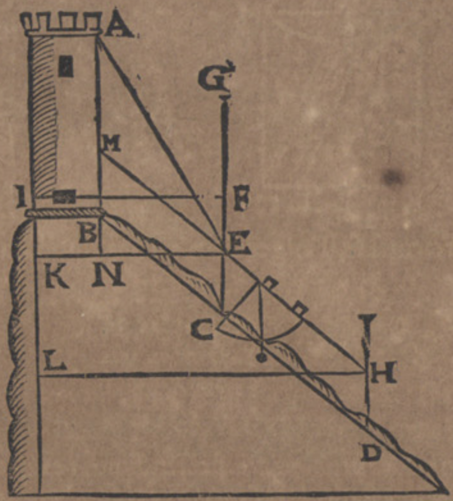
ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AC, deſideretur, inueſtiganda erit per Probl. 2. vel 5. tam tota altitudo AC, quam eius inferior portio BC. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB.

SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda eſt, coniicienda rurſus erit vtraque altitudo IC, BC, vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique inferior pars BC, proponitur inquirenda, fiet id per probl. 2. vel 15.

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio Quadrantis.

PROBLEMA XXII.



1 SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre non poſſit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis: Et inſpecto cacumine A, per angulum AEK, fiat alia ſtatio ſuperior in F, ductaq; FI, ad altitudinem perpendiculari, inſpiciatur idem cacumen A, per angulum AFI. [a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, eſt æqualis: ſi dematur AEF, complementum maioris anguli AEK, in prima ſtatione obſeruati, reliquus fiet angulus EAF. [b] Igitur ſi fiat, a 32. primi. b 10. trian. rectil.

Vt ſinus anguli EAF, differentiæ complementorum angulorũ obſeruationum	*ad EF, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli AFE, conflati ex recto EFI, & minore angulo AFI, in ſecunda ſtatione obſeruati,*	*ad AE, hypotenuſam.*

efficietur nota hypotenuſa AE. Poſt hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura DH, ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpẽdiculari, inſpiciatur punctum E, per angulum EHL, & per radium HEM, [c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda enim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris perueniret. [d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, æqualis eſt: ſi hic ex maiori angulo obſeruato AEN, in prima ſtatione dematur, reliquus fiet angulus AEM. Eſt autem & angulus EAN, cognitus, quippe cum ſit complementorum maioris anguli obſeruati AEN. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, ſi complementum anguli MHL, in ſtatione D, obſeruati ex duobus rectis detrahatur. [e] Igitur ſi fiat, c 33. prim. d 29. prim. e 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli AME, qui relinquitur, ſi complementum poſtremi anguli obſeruati MHL, ex duobus rectis dematur	*ad hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli EAN, complementi maioris anguli obſeruati AEN,*	*ad ME,*

inuenta erit recta EM, hoc eſt, diſtantia quæſita CB, [f] Et ſi rurſum fiat, f 10. trian. rectil.

Vt ſinus eiuſdem anguli AME,	*ad eandem hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli AEM, qui relinquitur, ſi angulus poſtremo loco obſeruatus MHL, vel MEK, ex angulo maiori obſeruato AEK, detrahatur,*	*ad AM,*

producetur AM, cui ſi addatur menſoris ſtatura MB, tota altitudo AB, cognita erit.

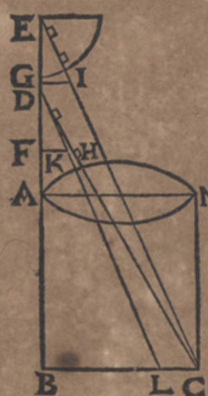
DANDA autem erit opera diligenter, vt tria puncta B, C, D, in vna recta iaceant, hoc eſt, vt recta ab vltima ſtatione D, per primam C, ducta per baſem B, tranſeat, quod plus minus iudicio ſenſuum aſſequemur. Nam per ea, quæ dicta ſunt hoc loco ſolum reperitur diſtantia à loco C, vſque ad punctum altitudinis, in quod recta

DC, protracta incidit, & altitudo ab A, vſque ad idem punctum, quod non multum à puncto B, diſtabit, ſi diligentia adhibeatur in ſtationibus C, D, captandis. Propter hanc cauſam in propoſitione diximus (prope verum efficere cognitam) quia neque diſtantia CB, neque altitudo AB, præciſe cognoſcitur, niſi quando tria puncta B, C, D, in recta linea iacent.

2 VT ſine numerorum auxilio problema efficias, recurrendum erit ad ſuperiora.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuſcunque ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per Quadrantem reperire.

PROBLEMA XXIII.



1 HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt prob. 4. factum eſt. Operationem ergo eius problematis hic repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignũ C, in fundo poſitũ conſpici poſſit. Erecta haſta AE, in orificio putei, vel ſummitate ædificii, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, inſpiciaturq; punctum C, per radios DC, EC, facientes angulos BDC, BEC: Sumptis deinde DF, EG, æqualibus pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum BDC, BEC, obſeruatorum. Ducta quoq; DL, ipſi EC, parallela ſecante FH, in K, vt KH, differentia ſit Tangentium, quemadmodum problemate 4. demonſtrauimus. Si igitur, vt ibi, fiat hic,

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruatorum	*ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem:*	*ita DE, differentia ſtationum, hoc eſt, ſpatium inter oculos, vel angulos obſeruationum,*	*ad DB,*

prodibit recta DB, nota, vt problemate 4. oſtendimus: ex qua ſi ſubtrahatur ſegmentum haſtæ AD, inter orificium, & oculum in prima ſtatione, reliqua fiet profunditas, ſiue altitudo putei, vel ædificij AB.

ALITER

2 POSITO ſinu toto BC, fiat.

Vt DE, differentia Tangentium BD, BE, quæ complementis angulorum obſeruationũ debetur,	*ad DB, Tangentem minorem*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorum*	*ad DB,*

Nam numerus procreatus notam exhibebit eandem rectam DB, &c.

ALITER

3 SI per ſolos ſinus operari lubeat, ita agendum erit. [a] Quoniam angulus maior obſeruatus BDC, duobus angulis E, DCE, æqualis eſt; ſi angulus E, minor obſeruatus tollatur ex maiore BDC, notus remanebit angulus DCE, differentia angulorum obſeruatorum.

a 32. primi.

[b] Igitur ſi fiat,

b 10. trian. rectil.

Vt ſinus anguli DCE, differentiæ angulorum obſeruatorum	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum.*	*Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati*	*ad DC.*

proſiliet nota hypotenuſa DC. [c] Quapropter ſi rurſum fiat,

c 10. trian. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam DC, proxime inuentam:*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruati*	*ad DB,*

euadet iterum cognita recta DC, &c.

4 IAM vero ſi latitudo orificii AM, vel fundi BC, cognita fuerit. (Non erit autem difficile eam aliqua menſura nota metiri) facilius in cognitionem altitudinis, profunditatiſue AB, veniemus, per vnicam videlicet ſtationem in D, factam, hoc modo. Fiat,

Vt ſi-

Vt ſinus totus CB, *ad BD, Tangentem anguli BCD, complementi anguli obſeruationis.* *ita latitudo cognita CB,* *ad DB,*

Numerus enim procreatus offeret DB, notam, vt ſupra, &c.

VEL per ſolos ſinus,[a] ſi fiat,

Vt ſinus anguli BDC, obſeruationis *ad latitudinem cognitam BC:* *Ita ſinus anguli BCD, complementi anguli obſeruationis.* *ad DB,* a 10. trian. rectil.

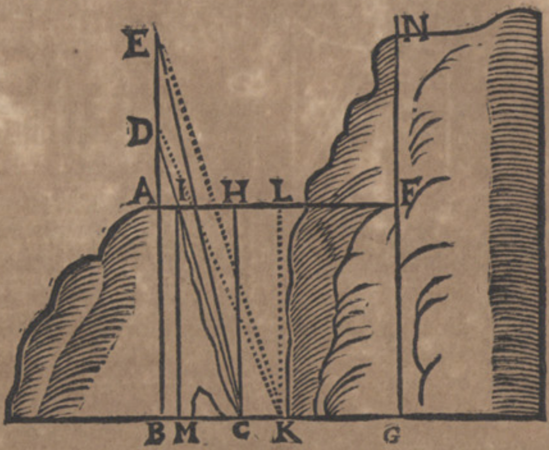
inuenietur rurſus DB, &c.

5 VT idem aſſequaris ſine auxilio numerorum, conſule ea, quæ problemate 4. Num. 4. ſcripſimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiuſque terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſis, per Quadrantem ſcrutari.

PROBLEMA XXIV.

1 HOC etiam nihil aliud eſt, niſi altitudinem quampiam ex eius ſummo faſtigio per duas ſtationes dimetiri, vt problemate 4. oſtenſum eſt. Sit enim vallis inter duos montes AB, FG, poſita, & terminus ipſius C, ex monte AB, poſſit conſpici. Erecta haſta aliqua AE, fiant in D, & E, duæ ſtationes, obſeruenturque anguli D, & E, inſpecto termino C, per radios DC, EC. Intelligatur autem recta EA, vſque ad baſem montis extenſa in B: & recta excurrens AF, ipſi BG, parallela, vel ad EB, perpendicularis: & deniq; CH, ipſi AB, parallela,[a] quæ altitudini AB, æqualis erit, ita vt AB, vel HC, ſit profunditas vallis ab A, vſque ad baſem montis, & IC, eius deſcenſus obliquus. Liquido autem conſtat, profunditatem AB, vel CH, exquiri poſſe, vt problemate 4. altitudo turris AB, ex duabus ſtationibus in haſta AE, factis, vel in duabus feneſtris, vel certe, vt in præcedenti problemate profunditas putei AB, inuenta fuit. a 34. prim.



DESCENSVS autem obliquus IC, ita notus euadet. Quoniam, vt in antecedente problemate monſtratum eſt, angulus DCE, differentia eſt angulorum BDC, BEC, obſeruatorum:[b] ſi fiat, b 10. trian. rectil.

Vt ſinus anguli DCE, differentiæ inter angulos obſeruatos *ad DE, differentiam ſtationum oculorum:* *Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati* *ad DC,*

cognita fiet recta DC, ex qua ſi detrahatur DI, (quam facile ab oculo vſque ad rectam AI, menſurare poteris, cum ſit exigua) notus remanebit deſcenſus obliquus IC.

2 QVOD ſi terminus C, in fundo cerni nequeat, inſpiciendum erit ex D, & E, aliquod aliud ſignum K, in valle, & obſeruandi anguli BDK, BEK, per radios DK, EK. Ex his enim rurſus profunditas AB, vel KL, deprehendetur, vt in problemate 4. docuimus.

QVIN etiam, ſi in plano vallis commode duæ ſtationes fieri poſſint: cognoſci ex illis poterit altitudo montis AB, vel IM, per ea, quæ in problem. 2. ſcripſimus: deſcenſus vero obliquus IC, hoc eſt, interuallum inter I, & C, ex iis, quæ in probl. 7. tradita ſunt.

3 EANDEM denique profunditatem CH, perſcrutari licebit ex altiore monte NG, dummodo infimus terminus C, minoris montis ex cacumine N, appareat, vel aliquod aliud ſignum in valle; non aliter, quam in problemate 18. vel 19. altudinem minorem ex maiori incognita indagare docuimus. Nam hic maior altitudo eſt NG, & minor CH, cuius terminum C, ex N, cerni poſſe ſtatuimus.

4 ABSQVE numerorum multiplicatione, ac diuiſione res peragetur, vt in antecedentibus dictum eſt.

FINIS LIBRI SECVNDI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER III.

Earundem linearum rectarum dimenſionem per Quadratum Geometricum exequens.

QVONIAM dimenſio rectarum linearum per Quadrantem Aſtronomicum ſuperiori lib. expoſita requirit tabulas Sinuum, Tangentium, & ſecantium, non ſemper autem eiuſmodi tabulas ad manum habere poſſumus, immo neque omnes in illis verſati ſunt, atque exercitati: propoſitum nobis tertio hoc libro eſt, lineas rectas, longitudines videlicet, latitudines, altitudines, & profunditates dimetiri per Quadratum Geometricum, vbi prædictis tabulis non indigemus, ſed omnia per vmbram rectam, & verſam; vt vocant, expediuntur. Qua tamen in re non nihil ab aliis ſcriptoribus diſſidebimus, quippe cum aliter tam vmbram rectam, quam verſam in partes diuiſuri ſimus, quam ab illis fieri ſolet, vt nimirum per noſtram partitionem expeditius dimenſiones perficiantur, quod prudens Lector facile iudicabit, ſi noſtram hanc diniſionis rationem cum aliorum partitione contulerit. Sed principio Quadratum Geometricum conſtruendum eſt, explicandumq́; quo pacto tam in Quadrato ſtabili, quam in pendulo vtraq́; vmbra, recta videlicet, ac verſa conſiderari debeat. Neq́; enim ſemper eundem ſitum prædictæ vmbræ in inſtrumento ſeruant, ſed pro varietate vſuum non raro eum permutare ſolent, vt ex iis, quæ ſequuntur, liquido conſtabit.

QVADRATI Geometrici conſtructio.

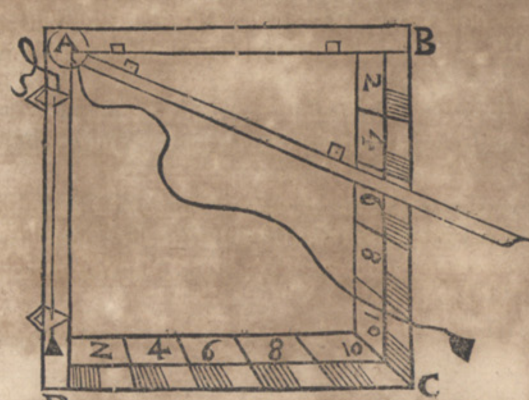
Compoſitio Quadrati Geometrici.

Vmbra recta, & verſa in quadrato quæ, & in quot partes à Geometris vtraque ſecetur.

In quot partes vtraq́; vmbra in noſtro quadrato diuidatur.

Scala altimetra quid.

1 EX quauis materia ſolida & dura conficiatur quadratum ABCD, ſiue ſolidum totum, ſiue excauatum: vel potius ex quatuor regulis æqualibus AB, BC, CD, DA, ita compactum, vt omnes in vno eodemque plano exiſtant. Deinde in duabus regulis BC, CD, ducātur tres parallelæ extremitatibus quadrati pro partibus & numeris vtriuſque vmbrę deſignandis, vt in figura apparet. Latus BC, vmbræ rectæ, & CD, vmbræ verſæ deſtinatur à Geometris: Vtrumq; autem in 12. partes æquales partiri ſolent omnes, qui de vſu Quadrati Geometrici ſcripſerunt: Et ſi capacitas inſtrumenti permittit, ſingulas partes in 60. ſubdiuidunt, vt tota vmbra partes 720. complectatur, vel in 100. vt partes 1200. in vtraque vmbra exiſtant. Ego vtramque vmbram in 10. partes duntaxat æquales diuido, niſi inſtrumentum ſit tantæ magnitudinis, vt commode vtraque recta BC, CD, in 100. aut 1000. partes ſecari poſſit, ſubdiuiſis videlicet ſingulis decimis partibus in 10. vel 100. particulas. Figura porro ex vtraq; vmbra conſtans dici ſolet à Geometris Scala altimetra.



Quare noſtra diuiſio vmbræ præferatur aliorum diuiſioni.

2 ANTEPONO autem diuiſioni conſuetæ in 12. vel 720 vel 1200. partes diuiſionẽ noſtram in partes 10. vel 100. vel 1000. ęquales, propterea quod, ſi inſtrumentum propter paruitatem ſectum ſit tantummodo in 10. partes, facili admodum negotio cognoſcere poſſumus, quot centeſimæ, vel etiam milleſimæ partes in qualibet particula cuiuſcunque partis decimæ rectarum BC, CD, aſſignata comprehendantur: non ſecus ac ſi vtraque recta in 100. vel 1000. partes ſecta foret, vt Num. 14. ca. 2. lib. 1. copioſe expoſuimus. Huc accedit, quod in dimetiendis lineis per Quadratum Geometricum fieri ſemper debeat multiplicatio, aut diuiſio per omnes partes lateris BC, vel

BC, vel CD: Manifeſtum autem eſt, faciliorem eſſe multiplicationem, diuiſionemue per 10. aut 100. vel 1000. quam per 12. aut 720. vel 1200. cum illa fiat per ſolam appoſitionem, vel detractionem 0. vel 00. vel 000. vt in noſtra Arithmetica practica declarauimus.

INVENIO quidem latus quadrati à doctiſſimo Io. Antonio Magino diuiſum quoq; eſſe, & quidem optimo conſilio, in 100. partes æquales; quamuis ab eo regula non tradatur, qua cognoſcendum ſit, quot partes milleſimæ in quauis particula vnius centeſimæ comprehendantur, quod tamen omnino neceſſarium eſt, vt dimenſiones, ac ſtellarum altitudines exquiſitè obſeruentur: præſertim ſi propter inſtrumenti paruitatem latus in 10. partes duntaxat commode poſſit diuidi. Id quod per noſtram doctrinam, vt diximus, ſine magno labore effici poteſt.

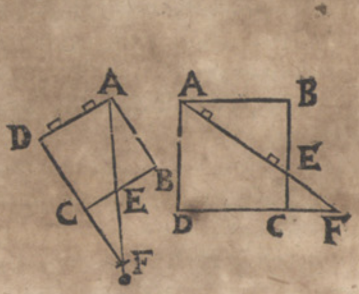
3 POST hæc è centro A, procedat filum cum perpendiculo, aut certe regula tenuis, cum linea fiduciæ, quæ pendens libere moueatur, vt lib. 1. cap. 2. Num. 6. tradidimus: & in latere AB, duo pinnacidia affigantur, de quibus lib. 1. cap. 2. Num. 5. dictum eſt, ſi quadratum in ſuo vſu debeat eſſe pendulum. Nam ſi illud ſtabile eſſe velis, affigenda eſt circa centrum A, dioptra, hoc eſt, regula cum linea fiduciæ, ac duobus pinnacidiis, eodem artificio conſtructis, vt libere poſſit circumduci, & in omni ſitu firmari, vt loco ſupra citato in Quadrante ſtabili faciendum eſſe præcepimus. *Quadratũ pendulum, ac ſtabile.*

POSTREMO iuxta latus AD, in plano quadrati (Nam ſi hoc fieret extra, prope craſſitiem inſtrumenti, non poſſet quadratum in plano Horizontis locari erectum ſupra latus AD, quod tamen vt fiat, non raro vſus quadrati poſtulat:) apponantur duæ tabellæ perforatæ cum filo, & perpendiculo, vt eius beneficio dignoſcere poſſis, num inſtrumentum rectum ſit ad Horizontem, nec ne, quod omnino neceſſarium eſt.

4 SED doceamus, quem ſitum vtraque vmbra in vſu quadrati habeat. Res enim hæc non parui momenti eſt, vt in dimenſionibus nulla confuſio inter vmbras oriatur. In quadrato ergo pendulo vmbra verſa opponitur ſemper lateri pinnacidiorum: recta autem cum eodem latere concurrit in puncto à centro A, remotiori, vt in figura latus vmbræ rectæ eſt BC, verſæ autem CD. At in quadrato ſtabili, ſi metienda ſit altitudo, & centrum A, inferiorem obtineat locum, in eoque oculus ponatur, latus vmbræ rectæ ſupremam occupabit ſedem; latus vero vmbræ verſæ vergere debebit verſus ipſam altitudinē; ita vt tunc baſis inſtrumẽti ſit AD, quo pacto iterũ vmbra recta eſt BC, & verſa CD. Si autẽ centrũ A, ſuperiorē locũ poſſideat, & oculus in extremitate dioptræ exiſtat, (q̃ etiã fieri poteſt) latus vmbræ rectæ erit baſis CD, & latus vmbræ verſæ BC, prope oculum, & ab altitudine metiẽda remotius. Si autē longitudo metienda proponatur, centrumq; A, in ſuperiori loco ſitũ ſit, & in eo oculus collocetur, erit quoq; baſis CD, latus vmbræ rectæ, latus autē BC, vmbræ verſæ deputabitur, quod quidem verſus longitudinem metiendam vergere debebit, & longius ab oculo abeſſe. At vero ſi centrum A, ponatur in loco inferiori, ita vt baſis ſit AD, oculus autem in extremitate dioptræ conſiſtat, (quod etiam fieri poteſt, præſertim ſi quadratum in ſublimi fuerit poſitum, vt in monte, vel turri aliqua) latus vmbræ rectæ erit BC, baſi AD, oppoſitum, vmbræ vero verſæ latus erit CD, quod ſcilicet longius à longitudine metienda recedit. In vtroque porro quadrato centrum A, per diametrum opponitur puncto, in quo vmbra recta cum verſa concurrit: & in ſtabili vmbra recta perpetuo vel ſupremum locum occupat, quando videlicet centrum A, infimam ſedem tenet; vel infimum locum, qnando ſcilicet centrum A, in ſuperiori loco exiſtit, vt ex dictis liquet. Hæc non negligenter conſideranda ſunt, ne in vario inſtrumenti vſu vmbram rectam pro verſa accipias, aut contra; quandoquidem pro diuerſo ſitu quadrati ſtabilis tam latus BC, quam CD, modo vmbræ rectæ, modo verſæ munus obire poteſt, vt diximus. *Vmbra recta, & verſa, quo pacto in vtroq; quadrato cognoſcenda ſit.*

5 QVAMVIS autem vel ſola vmbra recta, vel verſa ſatis ſit ad altitudines, longitudines, profunditateſque perueſtigandas, vt ex ſequentibus fiet manifeſtum: vtraque tamen aſſumitur à Geometris, eo quod interdum vmbra recta excedit latus BC, nimirum quando filum perpendiculi, aut linea fiduciæ ſecat latus CD: Tunc enim neceſſario latus BC, produci debet, vt ſecari poſſit. Item ſæpe numero vmbra verſa ſuperat latus CD, quãdo videlicet filum perpendiculi, aut linea fiduciæ interſecat latus BC: Tunc enim neceſſario latus DC, productum verſus C, ſecabitur, vt perſpicuum eſt. Ne ergo cogamur vel latus BC, vel CD, producere, aſſumenda eſt vmbra quidem verſa, quando recta latus BC, excedit: recta autem, quando verſa ſuo latere CD, maior eſt.

6 EST autem perpetuo latus quadrati, quod Gnomonem appellant, medio loco proportionale inter vmbram rectam ac verſam. Secet namque in quadrato pendulo filum perpendiculi, vel in ſtabili linea fiduciæ, latus vmbræ BC, in E, & latus vmbræ DC, productum in F. Erunt igitur triangula ABE, ADF, æquiangula, cum anguli B, D, recti ſint, [a] & tam alterni BAE, DFA, quam BEA, DAF, æquales. [b] Quamobrē erit vt BE, vmbra abſciſſa ad gnomonem BA, ita gnomon AD, ad vmbram abſciſſam DF: hoc eſt, gnomon BA, vel AD, medio loco eſt proportionalis inter duas vmbras BE, DF, quarum vna recta eſt, & altera verſa. *Gnomon medio loco proportionalis eſt inter vmbrã rectam, & verſam.* *a 29. prim.* *b 4. ſexti*



7 HINC facilis eſt reductio vnius vmbræ ad aliam, quod non raro vſu venit. Nam ſi gnomon complectens partes 1000. (in tot namque partes latus quadrati diuiſum concipere lubet) in ſe multiplicetur, & productus numerus quadratus 1000000. lateris AB, per alterutram vmbram diuidatur, indicabit Quotiens partes alterius vmbræ: hoc eſt, ſi fiat, *Reductio vmbræ rectæ ad verſam, & contra.*

Vt alterutra vmbra   ad gnomonem   ita gnomon   ad alteram   vmbram

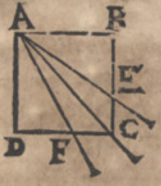
hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris quadrati, vel gnomonis, videlicet 1000000. per alterutrã vmbram diuidatur. Verbi gratia ſi ponatur BE, vmbra recta partium 700. diuidaturq; numerus quadratus 1000000. lateris AB, per 700. producetur vmbra verſa DF, partium $1428\frac{4}{7}$. Sic etiam, ſi BE, ſtatuatur vmbra verſa partium 700. reperietur vmbra recta DF, partium $1428\frac{4}{7}$. Quod ſi vna vmbra ſit 400. erit altera 2500. & ſic de cæteris. Sed iam ad vſum vtriuſque quadrati accedamus.

ALTITVDINEM Solis, vt ſtellæ cuiuſuis per quadratum Geometricum obſeruare.

PROBLEMA I.

Altitudo ſolis, vel ſtellæ, quo pacto per quadratũ cognoſcatur.

1. PRÆPARETVR baſis plano Horizonti æquidiſtans, vt ſupra illam Quadratum ſtabile erectum, ſit ad Horizontem perpendiculare. Eleuetur deinde pendulum quadratum, centro A, ad Solem, vel ſtellam verſo, ita vt eius planum per centrum Solis, aut ſtellæ tranſeat, donec radius Solis per duo foramina pinnacidiorum tranſire deprehendatur: vel radius viſualis per eadem foramina pinnacidiorum ſtellam videat. Idemque fiat cum quadrato ſtabili, collocando nimirum eius latus AD, vel CD, ſupra baſem præparatam, ipſumque circumducendo, ita vt eius planum per centrum Solis aut ſtellæ incedat; ac denique eleuando dioptram, donec radius Solis per foramina pinnacidiorum tranſeat, vel radius viſualis per eadem foramina ſtellam conſpiciat. Quo peracto, conſideretur ſumma diligentia angulus, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in dioptra cum proximo latere quadrati conſtituit, inueſtigando magna cum cura, & diligentia per ea quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. tradidimus, quot partes milleſimæ ex vmbra ſiue recta, ſiue verſa abſciſſæ ſint à filo perpendiculi, vel linea fiduciæ. Ille enim angulus, ſi quidem vmbra recta interſecetur, (quæ in quadrato ſtabili vel ſupremum, vel infimum occupat: In pendulo vero cum latere pinnacidiorum coniungitur, vt ſupra diximus) dabit, vt Numero 2. demonſtrabimus, complementum altitudinis Solis aut ſtellæ: Si vero vmbram verſam filum, aut dioptra interſecet, ipſemet angulus altitudinem exhibebit. Quantitatem porro huius anguli ita cognoſcemus. Sit quadratum ſiue pendulum ſiue ſtabile (eadem enim eſt in vtroque ratio) ABCD, abſciſſaque ſit vmbra recta BE, quæ in partibus milleſimis lateris BC, reperietur, vt cap. 2. Num. 14. lib. 1. docuimus, etiamſi latus ipſum ſit ſolum in 10. vel 100. partes diuiſum: quæ quidem vmbra BE, ſtatuatur, verbi gratia, eſſe partium 850. Quia ergo duo latera AB, BE, trianguli rectanguli ABE, nota ſunt, cum AB, ſit 1000. & BE, 850. [a] ſi fiat,



Quando angulus, quem filum cum proximo quadrati latere facit, offerat altitudinẽ ſolis, & quando complemẽtum altitudinis.

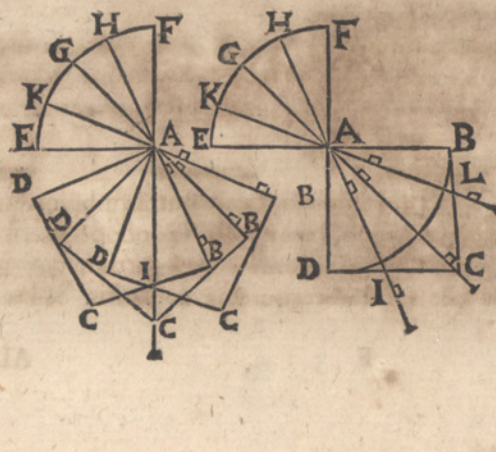
a 8. triang. rectil.

Vt latus quadrati AB, 1000.	*ad ſinum totum 100000.*	*Ita latus, vel vmbra BE, 850.*	*ad Tangentem anguli BAE,*

(quod quidem factum erit, ſi ad latus BE, hoc eſt, ad 850. duæ cifræ apponatur) reperietur Tangẽs anguli BAE, 85000. quæ in tabula Tangentium non reperietur; ſed proxime minor eſt 84956. cui reſpondent gradus 40. min. 21. Et quia differentia inter Tangentem inuentam 85000. & 84956 in tabula ſumptam, eſt 44. Differentia autem inter duas Tangentes proximas 84956. & 85006. eſt 50. cui debetur 1. minutum, ſiue Sec. 60. propterea quod poſteriori Tangenti 85006. reſpondet vnum minutum amplius, quam Tangenti priori 84956. reperiemus per regulam trium, quot ſecunda differentiæ 44. congruant; ſi dicamus. Si differẽtia 50. poſcit, ſec. 60. quot ſecunda poſcit differentia 44? inueniemuſque ſec. $52\frac{4}{5}$. hoc eſt, ſec. 53. fere. Angulus ergo BAE, continet grad. 40. Min. 21. ſec. 53. paulo minus. Complementum igitur, nimirum grad. 49. Min. 38. ſec. 7. fere, oſtendet altitudinem Solis, & ſtellæ. Et ſi vmbra DF, eſt verſa partium quoq; 850. erit ipſemet angulus DAF, inuentus grad. 40. Min. 21. ſec. 53. altitudo Solis, & ſtellæ. Atque hoc modo, ſi diligenter partes vmbræ explorabimus reſpectu lateris BC, vel CD, 1000. quemadmodum lib. 1. cap. 2. Num. 14. traditum eſt, inuenietur ſemper altitudo Solis, aut ſtellæ in grad. Min. & ſec. Sed quia moleſtum eſt, ac laborioſum, per differentias Tangentium Secunda inquirere, ſatis erit Tangentem anguli inuentam in tabula quærere, & ſi quidem reperta fuerit, accipere gradus, & minuta reſpondentia; ſi vero non fuerit inuenta, ſumere Tangentem, vel minorem, vel maiorem, quæ nimirum minus ab inuenta, differat, &c. Hac ratione ſumenda erit in noſtro exemplo Tangens 85006. cui reſpondent grad. 40. Min. 22. complementum autem erit grad. 49. Min. 38. veluti prius, ſolum deſunt ſec. 7. quæ nullius ſunt momenti. Vt autem ſtudioſos moleſtia hac ſupputandi liberem, conſtruxi ſequentem tabulam pro ſingulis partibus milleſimis vtriuſque vmbræ: In qua ſi centenæ in vertice, & reliquæ vnitates in latere ſumantur, illico in angulo communi reperientur gradus, ac Min. pro angulo quæſito: qui videlicet altitudinem Solis aut ſtellæ indicabit, ſi partes milleſimæ ad vmbram verſam ſpectent: ſi autem partes ad vmbram rectam pertinent, Complementum eius anguli altitudinem Solis ſtellæue oſtendet, vt paulo infra demonſtrabimus. Componetur autem tabula hæc ſi ſingulis partibus milleſimis vmbræ apponantur ad dextram quinque cifræ, & ex toto illo numero abijciantur tres cifræ: quod idem eſt, ac ſi apponantur tantum duæ cifræ, vt Tangentes angulorum habeantur. Ita factum eſſe vides ſupra. Nam ad partes vmbræ 850. adiectæ ſunt duæ cifræ, vt Tangens fieret 85000. Hac enim ratione fit multiplicatio vmbræ abſciſſæ per ſinum totum 100000, & diuiſio per 1000. vt in Arithmetica noſtra practica ſcripſimus. Quod ſi quatuor cifræ partibus milleſimis apponantur, habentur eadem ratione Tangentes poſito ſinu toto 10000000.

Vſus tabulæ gnomonicæ ſequentis.

Compoſitio tabulæ gnomonicæ facillima.



2 VERVM demonſtremus prius, angulum, quem filum perpendiculi, vel linea fiducię ſecans vmbram rectam cum proximo latere facit, in vtroque Quadrato eſſe complementum altitudinis Solis, ſeu ſtellæ; illum vero, quem filum aut fiduciæ linea vmbram verſam ſecans efficit, exhibere ipſam altitudinem. Sit ergo primum quadratum pendulum ABCD, & Quadrans circuli verticalis per ſtellam ducti AEF, ita vt AE, Horizonti æquidiſtet: ſintque tres altitudines ſtellæ EG, gr. 45. EH, maior & EK, minor. Quando ergo latus pinnacidiorum AB, cum radio GA, coincidit, erit angulus altitudinis ſemirectus GAE, [a] qui æqualis eſt ſuo compleměto FAG, propter æquales arcus EG, FG,

b 27. tertij.

EG,FG,[c] hoc eſt,angulo quem filum cum latere AB,facit.Cum ergo diameter quadrati [d] ſecet angulos eius rectos bifariam,in ſemirectos nimirum,tranſibit filum per angulum C:Ac proinde tam CAB,quam CAD,æqualis tunc erit angulo altitudinis EAG. Quando autem pinnacidiorũ latus cum radio HA, coincidit, erit angulus altitudinis EAH,ſemirecto maior,& angulus cõplemẽti FAH, ſemirecto minor,[e] cui æqualis eſt angulus IAB: ac propterea filũ vmbrã rectã interſecabit,facietque angulũ complementi altitudinis IAB,ſemirecto minorem. Quando deniq; latus AB,idem efficitur cũ radio KA,erit angulus altitudinis EAK,ſemirecto minor,& angulus cõplementi FAK,ſemirecto maior,[f] cui æqualis eſt angulus IAB:ac proinde filũ vmbram verſam abrumpet,cõſtituetque angulũ altitudinis IAD,ſemirecto minorẽ. Idem prorſus cernitur in quadrato ſtabili ABCD, in quo vmbræ rectæ latus eſt infimũ CD, cum centrum A, ſupremũ occupet locũ, vt ſupra in conſtructione Quadrati Num.4.dictũ eſt. Vbi rurſus perſpicitur, quando altitudo EG,eſt gr.45.radium GA,cadere in angulũ oppoſitũ C,ac proinde tam angulum CAB, quam CAD, æqualem eſſe angulo altitudinis, nimirum ſemirectum. Quando autem altitudo EH, maior eſt, quam grad.45. angulum IAD, quem linea fiduciæ AI, vmbram rectam auferens DI, cum latere AD, facit, [g] æqualem eſſe angulo FAH, qui complementum eſt anguli altitudinis EAH. Quando denique altitudo EK,minor eſt,quam grad.45.angulum IAB,quem linea fiduciæ AI, vmbram verſam BI,aſcindens cum latere AB,conſtituit,[h] æqualem eſſe angulo ipſi altitudinis EAK: quæ omnia demonſtranda erant. Sed ecce tibi tabulam, de qua dixi, continentem gradus ac minuta angulorum, quos filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in omnibus partibus milleſimis vtriuſque vmbræ cum proximo latere quadrati efficit. In qua vides,angulum ſub parte 800. in vertice ſumpta, & è regione partis 50. continere gradus 40. Min.22.fere, vt ſupra diximus:ac tantus erit angulus altitudinis,ſi partes 850.ſpectent ad vmbram verſam:eius vero complementum grad. 49. Min. 38. fere altitudinem exhibebit, ſi dictæ partes ex vmbra recta abſciſſæ fuerint.

Filum perpendiculi ſecans vmbram rectã facit angulum cõplementi altitudinis ſecans vero vmbram verſam angulum conſtituit ipſius altitudinis.

[c] *15. primi.*
[d] *ſchol. 34. primi.*
[e] *15. primi.*
[f] *15. primi.*
[g] *15. primi.*
[h] *15. primi.*

Tabula porro hæc dici poteſt Gnomonica, quod in quadrato ſtabili dicti anguli in tabula comprehenſi efficiantur à gnomone AD, vel AB, cum linea fiduciæ, vt patet.

Tabula gnomonica cur ſic dicatur.

SEQVITVR TABVLA Gnomonica.

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700		800		900	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
0	0	0	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0	38	40	41	59
1	0	3	5	46	11	22	16	45	21	51	26	37	31	0	35	2	38	42	42	1
2	0	7	5	49	11	25	16	48	21	54	26	39	31	3	35	4	38	44	42	3
3	0	10	5	53	11	29	16	51	21	57	26	42	31	5	35	6	38	46	42	5
4	0	14	5	56	11	32	16	55	22	0	26	45	31	8	35	9	39	48	24	7
5	0	17	6	0	11	35	16	58	22	3	26	48	31	10	35	11	38	50	24	9
6	0	21	6	3	11	38	17	1	22	6	26	50	31	13	35	13	38	52	24	11
7	0	24	6	6	11	42	17	4	22	9	26	53	31	15	35	16	38	54	24	12
8	0	28	6	10	11	45	17	7	22	12	26	56	31	18	35	18	38	56	24	14
9	0	31	6	13	11	48	17	10	22	15	26	59	31	20	35	20	38	58	24	16
10	0	34	6	17	11	52	17	13	22	18	27	1	31	23	35	22	39	0	42	18
11	0	38	6	20	11	55	17	17	22	21	27	4	31	26	35	25	39	3	41	20
12	0	41	6	23	11	58	17	20	22	24	27	7	31	29	35	27	39	5	42	22
13	0	45	6	27	12	1	17	23	22	26	27	9	31	31	35	29	39	7	42	24
14	0	48	6	30	12	5	17	26	22	29	27	12	31	34	55	32	39	9	42	26
15	0	52	6	34	12	8	17	29	22	32	27	15	31	36	35	34	39	11	42	28
16	0	55	6	37	12	11	17	32	22	35	27	18	31	38	35	36	39	13	42	29
17	0	58	6	40	12	15	17	35	22	38	27	20	31	40	35	38	39	15	42	31
18	1	2	6	44	12	18	17	38	22	41	27	23	31	43	35	41	39	17	42	33
19	1	5	6	57	12	21	17	42	22	44	27	26	31	45	35	43	39	19	42	35
20	1	9	6	51	12	24	17	45	22	47	27	28	31	48	35	45	39	21	42	37
21	1	12	6	54	12	28	17	48	22	50	27	31	31	50	35	48	39	23	42	39
22	1	16	6	57	12	31	17	51	22	53	27	34	31	53	35	50	39	25	42	41
23	1	19	7	1	12	34	17	54	22	56	27	37	31	55	35	52	39	27	42	42
24	1	22	7	4	12	38	17	57	22	59	27	39	31	58	35	54	39	29	42	44
25	1	26	7	8	12	41	18	0	23	2	27	42	32	0	35	57	39	31	42	46
26	1	29	7	11	12	44	18	3	23	4	27	45	32	3	35	59	39	33	42	48
27	1	33	7	14	12	47	18	6	23	7	27	47	32	5	36	1	39	35	42	50
28	1	36	7	18	12	51	18	10	23	10	27	50	32	8	36	3	39	37	42	52
29	1	40	7	21	12	54	18	13	23	13	27	53	32	10	36	6	39	40	42	54
30	1	43	7	24	12	57	18	16	23	16	27	55	32	13	36	8	39	42	42	55
31	1	47	7	28	13	0	18	19	23	19	27	58	32	15	36	10	39	44	42	57
32	1	50	7	31	13	4	18	22	23	22	28	1	32	18	36	12	38	46	42	59
33	1	53	7	35	13	7	18	25	23	25	28	3	32	20	36	14	39	48	43	1
34	1	57	7	38	13	10	18	28	23	28	28	6	32	22	36	17	39	50	43	3
35	2	0	7	41	13	13	18	31	23	31	28	9	32	25	36	19	39	52	43	5
36	2	4	7	45	13	17	18	34	23	33	28	11	32	27	36	21	39	54	43	6
37	2	7	7	48	13	20	18	37	23	36	28	14	32	30	36	23	39	56	43	8
38	2	11	7	51	23	23	18	41	23	39	28	17	32	32	36	26	39	58	43	10
39	2	14	7	55	13	27	18	44	23	42	28	19	32	35	36	28	40	0	43	12
40	2	17	7	58	13	30	18	47	23	45	28	22	32	37	36	30	40	2	43	14
41	2	21	8	2	13	33	18	50	23	48	28	25	32	40	36	32	40	4	43	16
42	2	24	8	5	13	36	18	53	23	51	28	27	32	42	36	35	40	6	43	17
43	2	28	8	8	13	40	18	56	23	54	20	30	32	44	36	37	40	8	43	19
44	2	31	8	12	13	43	18	59	23	56	28	33	32	47	36	39	40	10	43	21
45	2	35	8	15	13	46	19	2	23	59	28	35	32	49	36	41	40	12	43	23
46	2	38	8	18	13	49	19	5	24	2	28	38	32	52	36	43	40	14	43	25
47	2	41	8	22	13	52	19	8	24	5	28	41	32	54	36	46	40	16	43	26
48	2	45	8	25	13	56	19	11	24	8	28	43	32	57	36	48	40	18	43	28
49	2	48	8	28	13	59	19	14	24	11	28	46	32	59	36	50	40	20	43	30
50	2	52	8	32	14	2	19	17	24	14	28	49	33	1	36	52	40	22	43	32

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700		800		900	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
51	2	55	8	35	14	5	19	20	24	17	28	51	33	4	36	54	40	24	43	34
52	2	59	8	39	14	9	19	24	24	19	28	54	33	6	36	57	40	26	43	35
53	3	2	8	42	14	12	19	27	24	22	28	57	33	9	36	59	40	28	43	37
54	3	5	8	45	14	15	19	30	24	25	28	59	33	11	37	1	40	30	43	39
55	3	9	8	49	14	18	19	33	24	28	29	2	33	13	37	3	40	32	43	41
56	3	12	8	52	14	22	19	36	24	31	29	4	33	16	37	5	40	34	43	43
57	3	16	8	55	14	25	19	39	24	34	29	7	33	18	37	8	40	36	43	44
58	3	19	8	59	14	28	19	42	24	36	29	10	33	21	37	10	40	38	43	46
59	3	23	9	2	14	31	19	45	24	39	29	12	33	23	37	12	40	40	43	48
60	3	26	9	5	14	34	19	48	24	42	29	15	33	25	37	14	40	42	43	50
61	3	29	9	9	14	38	19	51	24	45	29	18	33	28	37	16	40	44	43	52
62	3	33	9	12	14	41	19	54	24	48	29	20	33	30	37	18	40	46	43	53
63	3	36	9	15	14	44	19	57	24	51	29	23	33	33	37	21	40	48	43	55
64	3	40	6	19	14	47	20	0	24	53	29	25	33	35	37	23	40	50	43	57
65	3	43	6	22	14	51	20	3	24	56	29	28	33	37	37	25	40	52	43	59
66	3	47	9	26	14	54	20	6	24	59	29	31	33	40	37	27	40	54	44	1
67	3	50	9	29	14	57	20	9	25	2	29	33	33	42	37	29	40	56	44	2
68	3	53	9	32	15	0	20	12	25	5	29	36	33	45	37	31	40	57	44	4
69	3	57	9	36	15	3	20	15	25	8	29	38	33	47	37	34	40	59	44	6
70	4	0	9	39	15	7	20	18	25	10	29	41	33	49	37	36	41	1	44	8
71	4	4	9	42	15	10	20	21	25	13	29	44	33	52	37	38	41	3	44	9
72	4	7	9	46	15	13	20	24	25	16	29	46	33	54	37	40	41	5	44	11
73	4	11	9	49	15	16	20	27	25	19	29	49	33	56	37	42	41	7	44	13
74	4	14	9	52	15	19	20	30	25	22	29	51	33	59	37	44	41	9	44	15
75	4	17	9	56	15	23	20	33	25	24	29	54	34	1	37	47	41	11	44	16
76	4	21	9	59	15	26	20	36	25	27	29	57	34	4	37	49	41	13	44	18
77	4	24	10	2	15	29	20	39	25	30	29	59	34	6	37	51	41	15	44	20
78	4	28	10	6	15	32	20	42	25	33	30	2	34	8	37	53	41	17	44	22
79	4	31	10	9	15	35	20	45	25	36	30	4	34	11	37	55	41	19	44	24
80	4	34	10	12	15	39	20	48	25	38	30	7	34	13	37	57	41	21	44	25
81	4	38	10	16	15	42	20	51	25	41	30	9	34	15	37	59	41	23	44	27
82	4	41	10	19	15	45	20	54	25	44	30	12	34	18	38	2	41	25	44	29
83	4	45	10	22	15	48	20	57	25	47	30	15	34	20	38	4	41	27	44	31
84	4	48	10	26	15	51	20	0	25	50	30	17	34	22	38	6	41	29	44	32
85	4	52	10	29	15	54	21	3	25	57	30	20	34	25	38	8	41	31	44	34
86	4	55	10	32	15	58	21	6	25	55	30	22	34	27	38	10	41	32	44	36
87	4	58	10	36	16	1	21	9	25	58	30	25	34	29	38	12	41	34	44	37
88	4	2	10	39	16	4	21	12	26	1	30	27	34	32	38	14	41	36	44	39
89	5	5	10	42	16	7	21	15	26	4	30	30	34	34	38	16	41	38	44	41
90	5	9	10	45	16	10	21	18	26	6	30	32	34	36	38	19	41	40	44	43
91	5	12	10	49	16	14	21	21	26	9	30	35	34	39	38	21	41	42	44	44
92	5	15	10	52	16	17	21	24	26	12	30	38	34	41	38	23	41	44	44	46
93	5	19	10	55	16	20	21	27	26	15	30	40	34	43	38	25	41	46	44	48
94	5	22	10	59	16	23	21	30	26	17	30	43	34	46	38	27	41	48	44	50
95	5	26	11	2	16	26	21	33	26	20	30	45	34	48	38	29	41	50	44	51
96	5	29	11	5	16	29	21	36	26	23	30	48	34	50	38	31	41	52	44	53
97	5	32	11	9	16	32	21	39	26	26	30	50	34	53	38	33	41	54	44	55
98	5	36	11	12	16	36	21	42	26	28	30	53	34	55	38	35	41	55	44	57
99	5	39	11	15	16	39	21	45	26	31	30	55	34	57	38	37	41	57	44	58
100	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0	38	40	41	59	45	0

3 SIMILEM tabulam gnomonicam compoſuit quoque Georgius Purbachius in ſuo quadrato Geometrico, poſito latere partium 1200. eamque ad ſecunda extendit: quod etiam fecit Io. Antonius Maginus, conſtituto quadrati latere partium 1000. quod quidem ſerius animaduerti. Incidi enim caſu quodam in eam cum hanc meam pene abſolueram, alioquin hoc ſupputandi labore ſuperſediſſem, tabulamque Magini huc transtuliſſem. Itaque ſi quis in altitudinibus aſtrorum deſideret etiam ſecunda, petere ea debebit ex Magini tabula: quæ ſane fideliter, & accurate ab eo ſupputata eſt, vel certe per calculum eadē elicere, vt ſupra Nu. 1. docuimus in hoc problem. Sed meo iudicio contenti eſſe poſſumus hac noſtra, quæ ad Minuta ſolum vltra gradus progreditur. In qua, ſi eam cum illa Magini conferre quis volet, deprehendet, in noſtra Minutis graduum additum eſſe ſemper vnum minutum, quando in ea reperiuntur plura ſecunda, quam 30. Sed, vt verum fatear, neque noſtra, neque illa Magini omnino neceſſaria eſt, cum ipſemet partes milleſimæ lateris quadrati, ſi apponantur duæ cifræ, ſint tāgentes altitudinum reſpectu ſinus totius 100000. & eædem, ſi addantur quatuor cifræ, Tangentes eaſdem, poſito ſinu toto 10000000. exhibeant: ac proinde ex tabula Tangentium altitudines excerpi poſſint cuicunq; parti milleſimæ congruentes, ſi ei prius adiungantur duæ, aut quatuor cifræ, vt ſupra ad finem Numer. 1. oſtendimus. Quia tamen moleſtia non caret, per Tangentes hac ratione formatas ex tabula Tangentium angulos altitudinum eruere, quod raro admodum Tangentes illæ in tabula præciſe reperiantur, ac propterea pro illis accipiendæ ſint vel proxime minores, vel maiores, illæ videlicet, quæ paucioribus vnitatibus ab inuentis differunt: non abs re fuerit, vel tabulam hanc noſtram gnomonicam, vel illam Magini, ſi ſecunda etiam deſiderentur, adſciſcere.

Tabulam gnomonicā non eſſe abſolute neceſſariam. Quo pacto partes milleſimæ lateris Quadrati offerant tangentes, poſito ſinu toto 100000. vel 10000000.

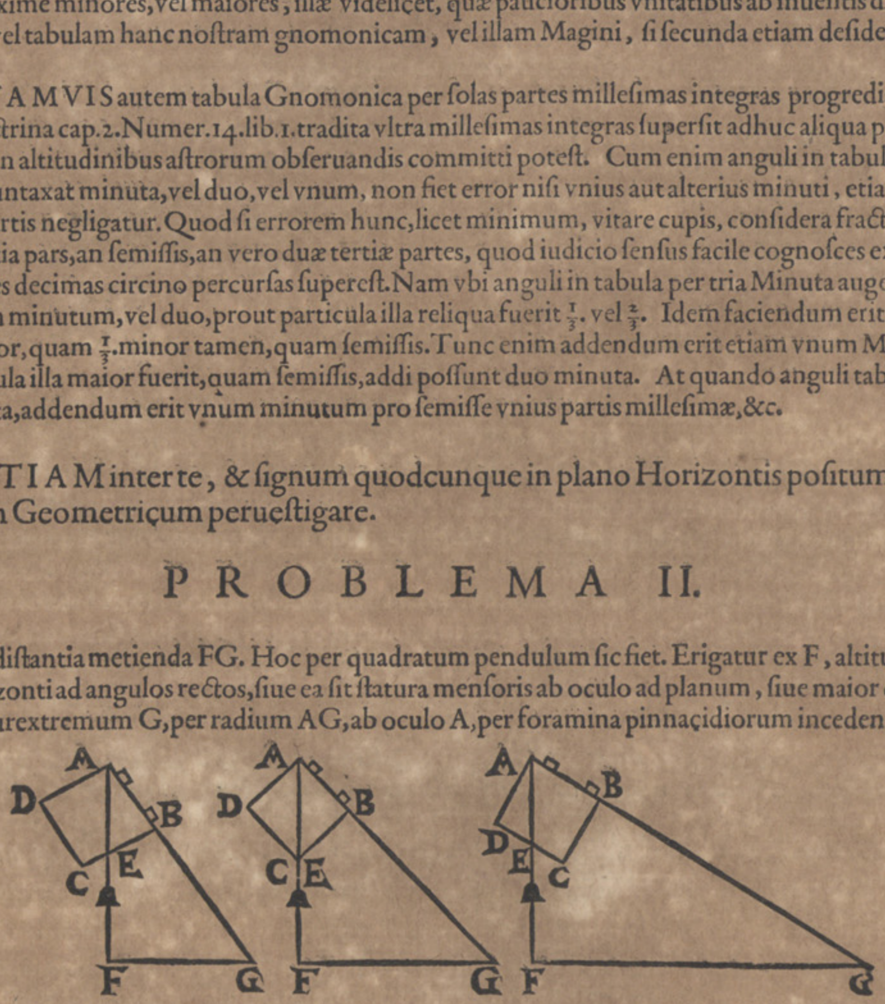
4 QVAMVIS autem tabula Gnomonica per ſolas partes milleſimas integras progrediatur; tamen ſi quando ex doctrina cap. 2. Numer. 14. lib. 1. tradita vltra milleſimas integras ſuperſit adhuc aliqua particula, non magnus error in altitudinibus aſtrorum obſeruandis committi poteſt. Cum enim anguli in tabula creſcant ordine per tria duntaxat minuta, vel duo, vel vnum, non fiet error niſi vnius aut alterius minuti, etiamſi fractio illa milleſimæ partis negligatur. Quod ſi errorem hunc, licet minimum, vitare cupis, conſidera fractionem milleſimæ, an ſit tertia pars, an ſemiſſis, an vero duæ tertiæ partes, quod iudicio ſenſus facile cognoſces ex particula illa quæ vltra partes decimas circino percurſas ſupereſt. Nam vbi anguli in tabula per tria Minuta augentur, addendum erit vnum minutum, vel duo, prout particula illa reliqua fuerit $\frac{1}{3}$. vel $\frac{2}{3}$. Idem faciendum erit ſi dicta particula fuerit maior, quam $\frac{1}{3}$. minor tamen, quam ſemiſſis. Tunc enim addendum erit etiam vnum Minutum. Item quando particula illa maior fuerit, quam ſemiſſis, addi poſſunt duo minuta. At quando anguli tabulæ augentur per duo Minuta, addendum erit vnum minutum pro ſemiſſe vnius partis milleſimæ, &c.

Non magnus error in altitudinib committitur, etiamſi per integras milleſimas tabula progrediatur, & quo pacto error hic corrigendus ſit.

DISTANTIAM inter te, & ſignum quodcunque in plano Horizontis poſitum, per Quadratum Geometricum peruestigare.

PROBLEMA II.

1 SIT diſtantia metienda FG. Hoc per quadratum pendulum ſic fiet. Erigatur ex F, altitudo quæpiam nota FA, Horizonti ad angulos rectos, ſiue ea ſit ſtatura menſoris ab oculo ad planum, ſiue maior quædam altitudo. Inſpiciatur extremum G, per radium AG, ab oculo A, per foramina pinnacidiorum incedentem, filo per-



pendiculi libere pendente, & inſtrumentum radente, punctumque E, notetur, vbi filum latus quadrati interſecat, quod fiet vel in latere BC, vmbræ rectæ, vel in angulo C, vel in latere DC, vmbræ verſæ. Cadente namque filo in vmbram rectam, vel in punctum C, vt in 1. & 2. figura, fiet triangulum ABE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli B, F, ſint recti, & angulus A communis.[a] Si igitur fiat,

a 4. ſexti.

Vt latus AB, partium 1000.	*ad vmbram rectam abſciſſam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, diſtantiam,*

euadet nota diſtantia quæſita FG, in partibus altitudinis AF. Cadente autem puncto E, in vmbram verſam, vt in 3 figura, abſcindetur rurſus triangulum ADE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli D, F, recti ſint,[b] & alterni AED, FAG, æquales.[c] Ergo ſi fiat,

b 29. prim. c 4. ſexti.

Vt vmbra verſa abſciſſa DE,	*ad latus DA, partium 1000.*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, diſtantiam,*

nota quoque efficietur diſtantia quæſita FG, in partibus altitudinis AF. Ex quo illud intelligere poteris, quando punctum E, interſectionis fili cum latere quadrati cadit in vmbram rectam, altitudinem AF, maiorem eſſe diſtantia FG, quando in punctum C, æqualem; quando denique in vmbram verſam, minorem.

Quando altitudo maior eſt, quam diſtantia, & quando æqualis, & quando minor.

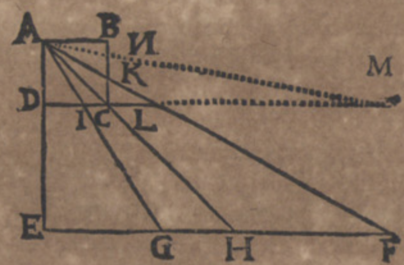
2 QVADRATO ſtabili ita eandem diſtantiam explorabimus. Erigatur in extremo diſtantiæ E, altitudo quædam perpendicularis notarum partium, & quadratum ita accommodetur, vt centrum A, ſuperiorem locum occupet, & vmbra recta DC, Horizonti æquidiſtet. Directa igitur dioptra ad ſignum propoſitum, notetur diligenter vmbra abſciſſa: quæ ſi recta fuerit, nimirum DI, erit altitudo AE, maior, quam diſtantia EG,[d] triangulumque ADI, triangulo AEG, ſimile erit.[e] Si igitur fiat,

d coroll. 4. ſexti. e 4. ſexti

Vt la-

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI:*	*Ita altitudo AE, cognita*	*ad EG, diſtantiam,*

reperietur diſtantia quæſita EG, in partibus altitudinis aſſumptæ AE.



SI autem dioptra per C, tranſierit, erit altitudo AE, diſtantiæ quæſitæ EH, æqualis: [c] cum ſit vt AD, ad DC, æqualem, ita AE, ad EH. c 4. ſexti.

SI denique vmbra abſciſſa fuerit verſa, vt BK, erit altitudo AE, minor, quam diſtantia EF, quod plerunque in diſtantiis metiendis accidere ſolet; eritq; triangulum ABK, triangulo AEF, æquiangulum, cum anguli B, E, recti ſint, [d] & alterni BAK, AFE, æquales. [e] Quare ſi fiat, d 29. primi. e 4. ſexti.

Vt partes vmbræ verſæ BK,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF, diſtantiam,*

producetur quæſita diſtantia EF, in partibus altitudinis erectæ AE.

3 QVANDO diſtantia non valde magna eſt, vel extremum eius punctum facile videri poteſt ſatis erit, ſi quadratum ſupra planum Horizontis conſtituatur, ita vt vmbræ verſæ latus BC, ad punctum illud recta vergat. Vt ſi diſtantia horizontalis DM, metienda ſit, eique imponatur Quadratum erectum, mouenda eſt dioptra, donec linea fiduciæ in extremum M, dirigatur. Qua ratione ſemper vmbra verſa BC, abſcindetur. Nam ſi linea fiduciæ per C, tranſiret, aut vmbram rectam CD, interſecaret, eſſet diſtantia vel æqualis lateri CD, vel minor: ac proinde dimenſione non indigeret. Quoniam igitur rurſus triangulum NBA, triangulo ADM, æquiangulum eſt, propter rectos angulos B, D, [f] & alternos æquales BAN, AMD; [g] Si fiat, f 29. primi. g 4. ſexti.

Vt partes vmbræ verſæ BN,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita latus quadrati AD, 1000.*	*ad DM, diſtantiam,*

cognita erit diſtantia DM, in partibus milleſimis lateris quadrati AD.

4 SOLENT nonnulli ſcriptores non inquirere diſtantiam propoſitam in partibus altitudinis aſſumptæ AE, vel in partibus milleſimis lateris quadrati AD; ſed ſolum inueſtigant, quoties altitudo electa AE, vel latus quadrati AD, in diſtantia propoſita contineatur: quod idem eſt, ac ſi altitudo, aut latus vmbræ ſtatuatur 1. Atque ita diuidunt vel partes vmbræ rectæ abſciſſas per totum latus partium 1000. vel totum latus vmbræ verſæ per partes vmbræ verſæ abſciſſas. Nam Quotiens numerus indicat, quoties altitudo AC, vel latus Quadrati in propoſita diſtantia comprehendatur: cum ſit,

Vt totum latus AD, partium 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI,*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad diſtantiam EG, vel DI.*

Item.

Vt partes vmbræ verſæ BN,	*ad totum latus AB, 1000.*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad diſtantiam EF, vel DM,*

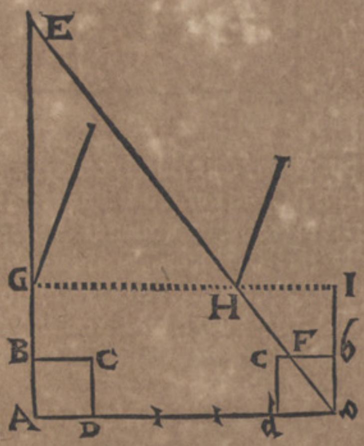
Hinc enim fit, vt cum ſecundum præceptum regulæ trium tertius numerus in ſecundum ſit ducendus, productuſque numerus per primũ diuidendus, ſatis ſit, ſi ſecundus per primum diuidatur: quandoquidem vnitas in tertio loco poſita, ſi multiplicet ſecundum numerum, eundem ſecundum numerum procreat, &c.

HAC ratione, ſi duæ partes milleſimæ abſcindantur ex vmbra verſa, continebitur altitudo AE, vel latus AD, in diſtantia ſecundum hunc numerum 500. quod 1000. diuiſa per 2. dent Quotientem 500. At vmbra verſa trium milleſimarum dabunt Quotientem $333\frac{1}{3}$. qui à priori differt hoc numero, $166\frac{2}{3}$. Ex quo intelligi licet, quando vmbra verſa abſciſſa valde parua eſt, magnum poſſe errorem committi in diſtantia inueſtiganda. Cum enim partes milleſimæ ſint perexiguæ, facile decipi poſſumus, vt nimirum putemus, abſciſſas eſſe tres milleſimas cum fortaſſis ſolum duæ abſciſſæ ſint: ac proinde error committi poterit $166\frac{2}{3}$. altitudinum AE, vel laterum AD, qui error conetmnendus non eſt. At quando partes vmbræ verſæ plures milleſimas continent, non tantus error committitur, etiamſi vnam milleſimam pro altera accipiamus. Nam ſi verbi gratia putemus, abſciſſas eſſe partes $\frac{30}{1000}$. ex vmbra verſa, cum vere abſciſſæ ſint $\frac{31}{1000}$. error fieri poterit ſolum in 1. altitudine AE, vel latere AD, & $\frac{7}{93}$. cum $\frac{30}{1000}$. dent Quotientem $33\frac{1}{3}$. at $\frac{31}{1000}$. Quotientem offerant $32\frac{8}{31}$. Itaque magis probo, vt Quadratum in altiori loco ſtatuatur, quam in plano Horizontis, quia ibi plures partes vmbræ verſæ abſcindũtur, quam hic, vt conſtat in diſtantiis æqualibus EF, DM. Vides ergo magnam eſſe adhibendam diligentiam, vt accurate partes milleſimæ reperiantur per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus.

IAM vero, ſi quadratum conſtructum ſit, ad certam aliquam menſuram, hoc eſt, vt latus contineat vel 1. paſſum, vel 1. cubitũ, vel 2. pedes, aut palmos, aut 3. aut 4. &c. res erit expeditiſſima, ſi ſemel tantũ latus particularũ 1000, ducatur in menſuras, quib. latus æquiualet. Ita n. in longitudinib. exquirendis, ſi quadratum ſupra planum, in quo eſt longitudo, ſtatuatur, (vt fit in omnibus hypotenuſis, ſiue diſtantiis à loco menſoris vſque ad aliquod punctũ mẽſore ſublimius, depreſſiuſue, quemadmodum patuit in proxima figura, quando longitudo DM, inquiſita eſt, patebitq; in ſcholio problem. 7. & in ſcholio problem 9. Item in problem. 15. Num. 5. & in problem. 26. Num. 3. & in problem. 27. Num. 3. nec non in problem. 37. & 38. Num. 3. & denique in proble. 43. & 44. & in

& in aliis locis) diuidendus ſolum eſt numerus productus per partes vmbræ verſæ (quæ ſemper abſcinditur) notatas. Quotiens enim dabit longitudinem quæſitam in data menſura. Verbi gratia, ſi in vno latere comprehendantur 3. pedes, multiplicabimus latus 1000. per 3. efficiemuſque 3000. Itaq; ſi in inueſtiganda longitudine quæpiam abſciſſæ ſint partes 200. ex vmbra verſa, partiemur 3000. per 200. Nam quotiẽs 15. dabit 15. pedes pro quæ-
a 4.ſexti. ſita longitudine.[a] Nam cum in proxima figura ſit, vt vmbra verſa NB. 200. ad latus BA, 1000. Ita latus AD, 3. pedum ad DM, multiplicandum eſt latus 1000. per 3. pedes, & productus numerus 3000. per 200. diuidendus. Eademque de cæteris ratio eſt. Sic ſi latus contineret ½. cubiti, diuidendus eſſet numerus 500. ex ½. in 1000. procreatus per vmbram verſam. Pari ratione ſi latus complecteretur 10. palmos, diuidendus eſſet numerus 10000. genitus ex 10. in 1000. per vmbram verſam: vt in Quotiente prodeant palmi in longitudine contenti, &c. quod non indiligenter notandum eſt.

ALITER.



5 QVANDO diſtantia metienda magna eſt, & adeſt bona planities campi, vti poterimus Quadrato ſtabili commodiſſime hoc modo. Sit diſtantia oblata AE. Erigatur quadratum ad Horizontem ad rectos angulos, circumducaturque, donec per eius planum oculus in A. conſtitutus ſignum E, perſpiciat, atque linea notetur AG. Demiſſo deinde Quadrato vſq; ad Horizontis planum, ita vt latus AB, recta tendat ad ſignũ E, hoc eſt, à recta notata AG, non recedat, protendatur linea recta per latus AD, in qua accipiantur quotcunque partes lateri AD, æquales: vel quotcunq; aliæ menſuræ æquales, vt paſſus, vel cubiti, vſque ad punctum a, in quo rurſus erigatur quadratum. (In hoc ſecundo quadrato aſcripſimus literas minuſculas, ne literæ vnius quadrati cum literis alterius cõfundantur, quod in ſequentibus etiam obſeruabimus) vertaturq; donec per eius planum idem ſignum E, appareat per rectam aH. Poſt hæc quadratum Horizonti incumbat, latuſque a d, rectæ Aa, congruat, & dioptra circumducatur, donec eius linea fiduciæ rectæ aH, præciſæ ſit ſuppoſita, notenturque partes milleſimæ in portione vmbræ verſæ bF, quam diligentiſſime. Abſcindetur autem ſemper vmbra verſa, propterea quod diſtantia AE, proponitur magna, ſaltem maior, quam Aa: alioquin menſurari poſſet ſine quadrato, quemadmodum & Aa. Quibus peractis, erũt triangula a b F, a AE,
b 29. prim. æquiangula, cum angulos habeant rectos[b] b, A, & alternos æquales baF, AEa.[c] Si ergo fiat,
c 4.ſexti. *Vt vmbra bF, ad latus b a, 1000. Ita a A, nota ad AE, diſtantiam,*
inuenietur diſtantia AE, in partibus rectæ Aa. Vel ſi diuidatur latus b a, 1000. per partes milleſimas vmbræ BF, procreabitur numerus, ſecundum quem recta Aa, in diſtantia eadem AE, continetur: poſita nimirum recta Aa, vt 1. vt Num. 4. oſtendimus.

6 QVOD ſi ad manum non habeamus Quadratum, obtinebimus eandem diſtantiam beneficio baculi, vel arundinis hoc artificio. Figatur baculus, vel arũdo in G, ad rectos angulos plano Horizontis, quod per filum aliquod cum perpendiculo facile fiet. Deinde recede per quotlibet paſſus vſque ad A, ita vt viſus per baculum incedens feratur in ſignum E. Poſt hæc ducatur linea Aa, ad AE, perpendicularis, in qua numera quotlibet etiam paſſus vſque ad a. Ducta tandem GI, ad AE, quoque perpendiculari, & ipſi Aa, æquali, figatur rurſum baculus ad angulos rectos in tali puncto rectæ GI, nimirum in H, vt oculus iterum ex a, per baculum incedens feratur in ſignum E, inquiranturque exquiſitiſſime paſſus vna cum fragmentis vnius paſſus in HI, contenti. His enim peractis, quoniam rurſus triangula HIa, a AE, æquiangula ſunt, ob angulos rectos I, A, & alternos æquales IaH, AEa,
d 4.ſexti [d] ſi fiat,
Vt HI, nota ad Ia, notam: Ita a A, nota ad AE, diſtantiam,
efficietur nota diſtantia AE, in partibus rectarum GA, Aa, aI. Vel ſi diuidatur aI, nota per IH, notam, reperiemus, quoties Aa, in diſtantia AE, contineatur, ſi nimirum recta Aa, ponatur vt 1.

7 IAM vero abſque numerorum auxilio problema abſoluemus, ſi attente ea conſiderentur, quæ lib. 2. problem. 1. Num. 7. ſcripſimus. Nam ſi fiat angulus quicunque BAC, & pro primo exemplo Num. 1. huius prob. ſumatur AD, æqualis lateri quadrati AB, vel ſi eſſet nimis magnum, æqualis ſemiſſi, vel tertiæ parti, aut quartæ, &c. eiuſdem lateris. Deinde DB, æqualis vmbræ abſciſſæ BE, (quæ ſumma cura per circinum in quadrato accipienda eſt) vel eius ſemiſſi, vel tertiæ parti, aut quartæ &c. vt nimirum AD, DB, ſint æque ſubmultiplices lateris AB, & vmbræ BE, ſi eis æquales non ſunt. Poſt hæc ex inſtrumento partium ſumatur AE, tot particularum, quot palmi, aut pedes in altitudine AF, continentur. Si enim iunctæ rectæ DE, parallela agatur BC, continebit diſtantia FG, tot palmos, aut pedes, quot particulæ inſtrumenti partium in interuallo EC, comprehenduntur. Vt ſi altitudo AF, ſit pedum 5. erit diſtantia FG, pedum 3. & ſic de cæteris. Atque hoc modo procedendum erit in aliis exemplis omnibus, conſiderando videlicet attente primas tres magnitudines Regulæ trium, &c. quod ſemel monuiſſe ſatis eſt.

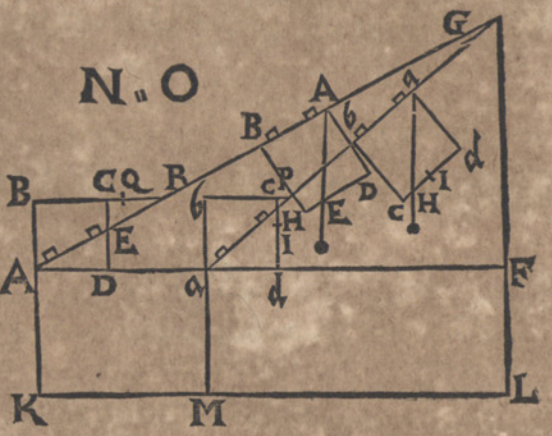


DISTANTIAM in plano per duas ſtationes in eodem plano factas per quadratum Geometricum metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur.

PRO-

PROBLEMA III.

1 DISTANTIA inueſtiganda ſit AF. Intelligatur planum Horizontis KL; erecta altitudo GL: ſtatura menſoris AK, vel alia quædam menſura cognita. Supra aliquam baſem Horizonti æquidiſtantem collocetur quadratum ſtabile, ita vt eius latus AD, cogitatione productum occurrat altitudini erectæ in F, ad angulos rectos. Inſpiciatur ſummitas G, per dioptram, ſecetq; eius linea fiduciæ vmbram verſam CD, in E, quod ſemper continget, quando diſtantia AF, maior eſt altitudine FG, [a] quod tunc angulus A, minor fiat angulo G, ac proinde ſemirecto minor, quem cum AD, in A, faceret radius per C, emiſſus. Deinde accede magis, vel recede per longitudinem notam Aa, & collocato quadrato ſupra eandem baſem, ſecet iterum dioptra ad punctum G, directa vmbrã verſam c d, in H: eritq; vmbra verſa dH, in propinquiore ſtatione maior, quam vmbra verſa DE, in ſtatione remotiore, [b] quod angulus a, ſit maior angulo A. Auferatur d I, ipſi DE, æqualis, vt HI, differentia ſit vmbrarum verſarum. [c] Et quia eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: [d] erit rectangulo ſub AD, FG, æquale rectangulum ſub DE, AF. Eadem ratione erit rectangulo ſub a d, FG, rectangulum ſub dH, aF, æquale: propterea quod etiam eſt [e] vt a d, ad dH, ita aF, ad FG. Cum ergo rectangulum ſub AD, FG, æquale ſit rectangulo ſub a d, FG, quod rectæ AD, a d, æquales ſint: erit quoq; rectangulũ ſub dH, aF, rectangulo ſub DE, AF, hoc eſt, ſub dI, AF, æquale, [f] ideoq; erit, vt dH, prima ad dI, ſecundam, ita AF, tertia ad aF, quartam: Et permutando, vt tota dH, ad totam AF, ita ablata dI, ad ablatam aF. [g] Igitur erit quoque reliqua HI, ad reliquam Aa, vt tota dH, ad totam AF. Quocirca ſi fiat,



a 18.primi. b 16.prim. c 4.ſexti. d 16.ſexti. e 4.ſexti. f 16.ſexti. g 19.quin.

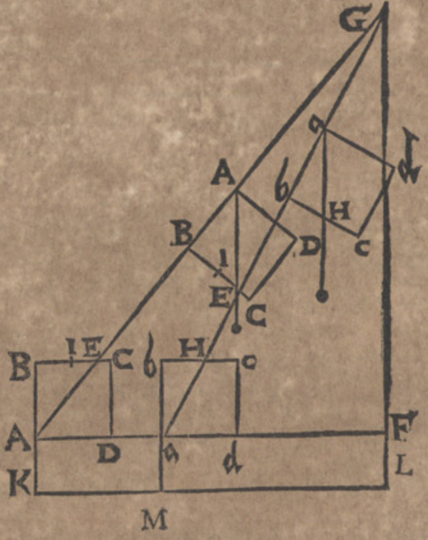
Vt HI, diffeentia vmbrarum verſarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita dH, vmbra verſa propinquioris ſtationis, ſiue maior,*	*ad AF, diſtantiam,*

producetur AF, diſtantia nota in partibus diffentiæ ſtationum Aa, notæ.

2 EADEM prorſus ratio eſt in quadrato pendulo. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ADE, ad H, triangulis AFG, aFG, æquiangula: propterea, quod tam anguli D, F, recti ſunt, [h] & angulus F, hoc eſt, alternus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli d, F, recti & angulus H, id eſt, alternus baH, angulo aGF, externus interno æqualis. Reliqua demonſtrabuntur, vt prius: ſunt enim vmbræ verſæ in pendulo quadrato vmbris in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli D, E, in triangulo ADE, quadrati penduli æquales ſint duobus angulis D, E, in triangulo ADE, quadrati ſtabilis, quod ea triangula ſint, vt oſtendimus, æquiangula: ſint autem & latera AD, AD, æqualia; [i] erunt & rectæ DE, DE, hoc eſt vmbræ verſæ, æquales. Eademque ratione verſæ vmbræ dH, dH, æquales erunt, &c.

h 29.primi. i 26.primi.

3 SI in vtraque ſtatione vmbra recta abſcindatur à linea fiduciæ, vel à filo perpendiculi, vt in E, & H, quod quidem ſemper continget, quando diſtantia AF, minor eſt altitudine FG, [k] quod tunc angulus A, maior fiat angulo G, ac proinde ſemirecto maior, quem cum AD, conſtitueret radius per C, emiſſus. Eritque vmbra recta BE, in remotiore ſtatione maior, quam vmbra recta bH in ſtatione propinquiore, [l] quod angulus FaG, maior ſit angulo FAG; ac proinde baH, minor angulo BAE. Auferatur BI, ipſi bH, æqualis, vt IE, differentia ſit vmbrarum rectarum. Et quia triangula ABE, AFG, æquiangula ſunt, propter angulos rectos B, F, [m] & alternos æquales BAE, AGF, [n] erit vt AB, ad BE, ita FG, ad AF, & permutando, vt AB, ad FG, ita BE, ad AF. Eadem ratione, quia triãgula abH, aFG, æquiãgula ſunt, propter rectos angulos b, F, [o] & alternos æquales baH, aGF, [p] erit vt a b, ad bH, ita FG, ad aF: Et pmutando vt ab, ad FG ita bH, ad aF. Cum ergo ſit, vt AB, ad FG, ita a b, ad FG, propter rectas æquales AB, a b, [q] erit quoque vt BE, tota ad AF, totam, ita BI, ablata ipſi bH, ęqualis, ad ablatam aF, [r] Igitur erit & reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF. Quapropter ſi fiat,



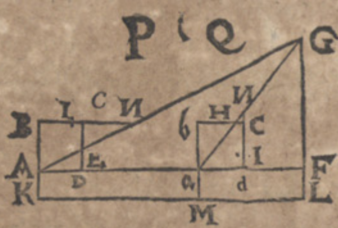
k 18.primi. l 16.primi. m 29.prim. n 4.ſexti. o 29.prim. p 4.ſexti. q 11.quint. r 19.quint.

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationũ:*	*Ita BE, vmbra recta remotioris ſtationis, ſiue maior*	*ad AF, diſtantiam,*

procreabitur AF, diſtantia nota in partibus differentiæ ſtationum Aa, notæ.

4 EADEM omnino in quadrato pendulo eſt ratio. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ABE, abH, triangulis AFG, aFG, æquiangula; quod tam anguli B, F, recti ſint, [s] & angulus BAE, angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli b, F, recti & angulus baH, angulo aGF, æqualis, externus interno. Reliqua demonſtrabuntur, vt in ſtabili quadrato. Sunt enim vmbræ rectæ in quadrato pendulo vmbris rectis in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli B, E, in triangulo ABE, quadrati penduli, æquales ſint duobus angulis B, E, in triangulo ABE, quadrati ſtabilis; quod hæc triangula ſint, vt oſtenſum eſt, æquiangula, vtpote æquiangula triangulo AGF, [t] erunt & rectæ BE, BE, hoc eſt, vmbræ rectæ æquales. Eademque ratione vmbræ rectæ bH, bH, æquales erunt, &c.

s 29.primi. t 26.primi.



5 Si deniq; in remotiore ſtatione ſecetur vmbra verſa CD, in E, & recta b c, in H, in ſtatione propinquiore, reducenda erit alterutra earum ad alteram, vt habeantur ſimiles vmbræ, per ea, quæ in quadrati conſtructione Num. 7. ad initium huius lib. tradidimus, diuidendo nimirum quadratum lateris AB, per vmbram, quæ reduci debet, &c. Nam ſi fiat vt IN, differentia vmbrarum ſiue rectarum, ſiue verſarum, ad Aa, differentiam ſtationum: Ita BN, maior vmbra recta vel dN, vmbra verſa maior ad aliud, gignetur diſtantia AF, vt demonſtratum eſt Num. 3. & 1.

6 QVOD ſi quando in vna ſtatione linea fiduciæ tranſierit per C, aſſumi poterit vel latus vmbræ rectæ BC, vel verſæ CD, prout in altera ſtatione abſciſſa erit vmbra recta, vel verſa; vt nimirum vmbræ ſint ſimiles.

COROLLARIVM. I.

Eundem eſſe modum operandi in vtroque quadrato.

COLLIGITVR ex demonſtratis, eundem eſſe operandi modum in vtroque quadrato: quandoquidem eædem vmbræ in quadrato pendulo, quæ in ſtabili, abſcinduntur, vt oſtendimus: Itaque præcepta, quæ in vno præſcribuntur, in altero quoque obſeruanda ſunt.

COROLLARIVM II.

Eundem eſſe operandi modum per vmbras verſas, & per rectas.

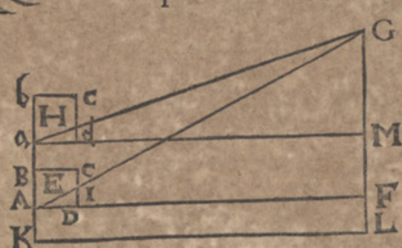
PATET etiam ex dictis, operationem non variari, ſiue per vmbras verſas, ſiue per rectas inſtituatur: quandoquidem ſemper eſt, vt differentia vmbrarum ad differentiam ſtationum, ita vmbra maior, ad diſtantiam, quæ inueſtiganda proponitur, vt demonſtratum eſt.

CÆTERVM in ſcholio problematis 7. præſcribemus rationem, qua eandem diſtantiam AF, metiri licebit per vnicam ſtationem.

DISTANTIAM eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perſcrutari.

PROBLEMA IV.

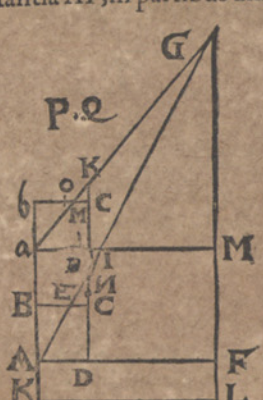
1. QVANDO in plano commode fieri nequeunt duæ ſtationes, erigatur haſta aliqua Kb, in qua fiant duæ ſtationes oculi menſoris in A, a: Vel in duabus feneſtris alicuius turris, quarum vna ſuperſtet alteri ad perpendiculum: abſcindaturque primum latus vmbræ verſæ in vtraque ſtatione in E, H, Eritq; inferioris ſtationis vmbra verſa DE, maior, quam vmbra verſa dH, ſtationis ſuperioris, quod angulus A, maior ſit angulo a; quippe cum AGF, minor ſit, quam aGM; & anguli F, M, recti. Sumatur DI, ipſi dH, æqualis; [a] Et quoniam eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: erit permutando, vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione, erit vt ad, ad aM, ita dH, ad MG. Cum ergo eadem ſit proportio AD, ad AF, quæ ad, ad aM, propter æqualitatem linearum AD, a d, & AF, a M; [b] Erit vt DE, tota ad totam FG, ita d H, hoc eſt, DI, ablata ad ablatam MG. [c] Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad reliquam Aa, vt tota DE, ad totam FG, hoc eſt, vt AD, ad AF; cum oſtenſum ſit eſſe AD, ad AF, vt DE, ad FG. Quocirca ſi fiat,



a 4. ſexti.
b 11. quint.
c 19. quint.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad A a, differentiam ſtationum,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtantiam,*

manifeſta colligetur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a.



2 SI in vtraque ſtatione latus vmbræ rectæ interſecetur in E H, reducenda eſt vtraque vmbra recta BE, bH, ad verſam, per ea, quæ tradita ſunt ad initium huius lib. in conſtructione quadrati Num. 7. diuidendo videlicet quadratum numerum lateris quadrati per vtramque vmbram rectam abſciſſam ſigillatim. Nam ſi producantur latera DC, d c, vmbræ verſæ vſque ad radios AG, aG, ad puncta I, K, erit iterum, vt demonſtrauimus Numer. 1. vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita AD, latus quadrati ad AF, diſtantiam. Ergo vt Num. 1. oſtenſum eſt, inuenietur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a.

ALITER

SINE reductione vmbrarum rectarum ad verſas hoc alio modo eandē diſtantiam AF, eliciemus. Ex OH, differentia vmbrarum rectarum in latus a b, fiat P: & ex bH, vmbra recta maiore in minorem BE, fiat [d] Q. Et quia

d 4. ſexti.

quia eſt, vt ID, ad DA, ita AB, ad BE; [b] erit rectangulum ſub ID, BE, æquale quadrato ex AD, vel AB. Eodemq; modo rectangulum ſub Kd, bH, quadrato ex a d, vel a b, hoc eſt, eidem quadrato ex AD, vel AB, æquale erit: ac proinde rectangula ſub ID, BE, & ſub Kd, bH, æqualia inter ſe erunt. [c] Igitur erit, vt ID, ad Kd, ita bH, ad BE: & permutando vt ID, ad bH, ita Kd, ad BE, hoc eſt, vt ID, tota ad totam bH, ita Kd, hoc eſt, ita DN, ablata ad BE, hoc eſt, ad bO, ablatam: [d] Ideoque erit & reliqua IN, ad reliquam OH, vt tota ID, ad totam bH; & permutando IN, ad ID, vt OH, ad bH. Quia vero proportio IN, ad DA, (poſita media ID,) componitur ex proportionibus IN, ad ID, & ID, ad DA: Eſt autem, vt proxime monſtratum eſt, vt IN, ad ID, ita OH, ad bH; [e] & vt ID, ad DA, ita AB, ad BE: componetur quoque proportio IN, ad DA, ex proportionibus OH, ad bH, & AB, ad BE: [f] Sed proportio etiam producti P, ad productum Q, componitur ex eiſdem proportionibus, nimirum ex lateribus. Igitur eadem eſt proportio P, ad Q, quæ IN, ad DA. Cum ergo, vt in 1. modo huius Num. 2. oſtendimus, ſit IN, ad Aa, vt AD, ad AF, hoc eſt, permutando vt IN, ad DA, ita Aa, ad AF: Erit quoque P, ad Q, vt Aa, ad AF. Quapropter ſi fiat,

b 17. ſexti.
c 16. ſexti.
d 19. quin.
e 4. ſexti.
f 23. ſexti.

Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarum rectarum in a b, latus quadrati,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra recta bH, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF, diſtantiam,*

producetur eadem diſtantia quæſita AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER.

[g] QVONIAM eſt, vt bH, ad a b, ita aM, ad MG, ſi fiat,

g 4. ſexti.

Vt bH, vmbra recta,	*ad a b, latus quadrati 1000.*	*Ita aM, quatenus 1.*	*ad MG,*

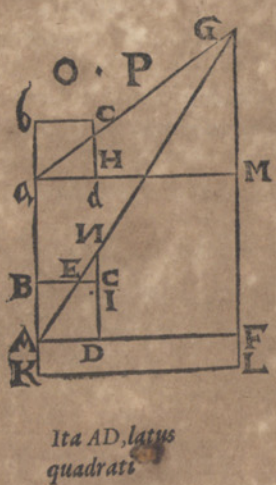
hoc eſt, (quia 1. multiplicans latus quadrati 1000. producit idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1000. a b, diuidatur per vmbram rectam bH, exibit Quotiens MG, indicans, quoties aM, quatenus 1. in MG, comprehendatur. Eodem pacto, ſi fiat,

Vt BE, vmbra recta	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita AF, quatenus 1.*	*ad FG,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1000. AB, diuidatur per vmbram rectam BE, fiet Quotiens FG, ſignificans, quoties AF, quatenus 1. contineatur in FG. Si igitur ex poſteriore hoc Quotiente FG, prior ille Quotiens MG, detrahatur, reliqua fiet FM, vel Aa, differentia ſtationum cognita in partibus, quarum AF, eſt 1. Quocirca ſi fiat,

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram rectam diuideatur,	*ad Aa, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF, diſtantiam,*

hoc eſt, ſi differentia ſtationum diuidatur per differentiam Quotientum, efficietur nota diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.



3 SI denique in ſtatione inferiori latus vmbræ rectæ ſecetur in E, & in ſuperiori ſtatione latus vmbræ verſæ in H, reducenda quoque erit vmbra recta ad verſam, vt diximus, & producendum latus DC, vmbræ verſæ vſque ad punctum N, ſumendaque DI, ipſi dH, æqualis. Nam vt Numer. 1. oſtendimus, ſi fiat,

Vt NI, differentia vmbrarum verſarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF, diſtantiam,*

cognita rurſus erit diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER.

SINE reductione vmbræ rectæ ad verſam ita quoque agemus. Numerus qui fit ex recta vmbra BE, in vmbram verſam dH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit, O. Item ex vmbra recta BE, in latus quadrati 1000. fiat P. Et quoniam, vt initio huius lib. in conſtructione quadrati Num. 6. oſtendimus, latus quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbras BE, DN. [h] Erit rectangulum ſub BE, DN, quadrato lateris æquale. [i] Cum ergo rectangulum ſub BE, DN, æquale ſit rectangulis ſub BE, DI, & ſub BE, NI: Si rectangulum ſub BE, DI, auferatur ex rectangulo ſub BE, DN, id eſt, ex 1000000. quadrato lateris AD, reliquum fiet rectangulum ſub BE, NI; ac proinde cum DI, ipſi dH, ſit æqualis, fiet rectangulum ſub BE, DI, ex vmbra BE, in vmbram dH; atque idcirco reliquum rectangulum ſub BE, NI, (quod videlicet relinquitur, ſi rectangulum ſub

h 16. ſexti.
i 1. ſecund.

G 2 BE, DI,

BE,DI,ex quadrato lateris detrahatur, vt dictum eſt,) numero O, æquale erit: Eſt autem ex conſtructione rectangulum quoque ſub BE, vmbra recta, & latere AD, numero P, æquale. Igitur cum numerus BE, multiplicans NI,AD, producat O,P,[c] erit O,ad P, vt NI, ad AD. Sed vt Num.1.huius problematis demonſtrauimus, vt NI, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita eſt AD, latus quadrati ad AF, & permutando vt NI, ad AD, ita Aa, ad AF. Igitur erit quoque O, ad P, vt Aa, ad AF. Quamobrem ſi fiat,

c 17. ſepti.

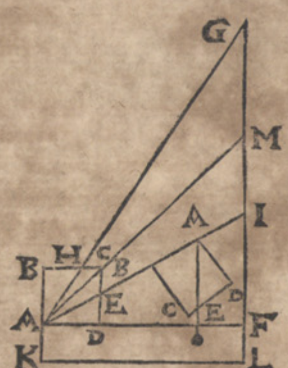
Vt O, numerus, qui relinquitur ſi numerus genitus ex vmbra recta in verſam ex quadrato lateris detrahatur,	*ad numerum P, qui ex vmbra recta BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF, diſtantiam,*

procreatur diſtantia quæſita AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

4 HIC etiam ſi forte in vna ſtatione linea fiduciæ, aut filum perpendiculi, tranſierit per punctum C, aſſumendum erit vel latus vmbræ rectæ, vel verſæ, vt Num. 6. præcedentis problematis dictum eſt.

ALTITVDINEM cuiuslibet rei erectæ per eius diſtantiam ab oculo menſoris, beneficio quadrati coniicere.

PROBLEMA V.



1 SIT altitudo coniicienda GL, vel ML, vel IL, ad Horizontem perpendicularis. Statura menſoris, vel aliqua alia menſura nota ſit FL, vel AK, pareturque planum Horizonti parallelum AF, in quo quadratum erigatur, cuius latus AD, intelligatur productum occurrens altitudini in F. Inſpecto cacumine I, ſecet primum dioptra vel filum perpendiculi latus CD, vmbræ verſæ in E, quod accidet, quando diſtantia AF, maior eſt, altitudine FI, vt problemate 1. Num. 1. oſtendimus. Quoniam igitur triangulum ADE, triangulo AFI, æquiangulum eſt, vt ibidem monſtratum eſt; [a] erit vt AD, ad DE, ita AF, ad FI. Quamobrem ſi fiat,

a 4. ſexti.

Vt latus quadrati 1000.	*ad vmbram verſam DE:*	*Ita diſtantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*ad FI,*

patefacta erit altitudo FI, in partibus diſtantiæ AF, quæ ſi data non eſt, exquirenda erit vel per problema 3. vel 4. Et ſi ad FI, adiicietur menſura, vel ſtatura menſoris FL, tota altitudo propoſita IL, nota fiet.

2 DEINDE linea fiduciæ tranſeat per punctum C, quod fiet, quando diſtantia AF, altitudini FM æqualis eſt;[b] quod tunc angulus CAD, ſemirectus ſit, ac proinde & reliquus M, in triangulo FAM.[c] Ideoque latera AF, FM, æqualia ſint. Quanta ergo eſt diſtantia AF, quæ vel data eſt, vel inuenienda per problema 3. vel 4. tanta erit altitudo FM, cui addita FL, nota patefaciet totam altitudinem ML.

b ſchol. 34. primi.
c 6. primi.

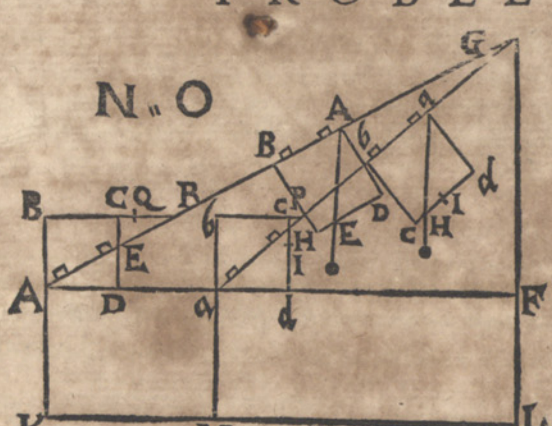
3 POSTREMO interſecetur vmbræ rectæ latus in H, quod eueniet, quando diſtantia AF, minor eſt altitudine FG: eritque triangulum ABH, triangulo AFG, æquiangulum, vt problemate 3. Num. 3. demonſtrauimus. Igitur erit, vt BH, ad AB, ita AF, ad FG: ac proinde ſi fiat,

Vt vmbra recta BH,	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita diſtantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*ad FG,*

nota euadet FG, cui ſi addetur menſura vel ſtatura menſoris FL, efficietur nota tota altitudo GL, propoſita.

ALTITVDINEM eandem, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data ſit, neque inuenta, per duas ſtationes in plano factas patefacere auxilio quadrati.

PROBLEMA VI.



1 PROPOSITA ſit altitudo metienda FG, ſecluſa menſoris ſtatura FL. Fiant duæ ſtationes, vt in problemate 3. cuius figura 1. hic repetatur, ſeceturque primum vmbra verſa in vtraque ſtatione in punctis E, H. Et quia propter ſimilitudinem triangulorum ADE, AFG, eſt vt DE, ad AD, ita FG, ad AF, ſi fiat,

Vt DE,

Vt DE, vmbra verſa abſciſſa	*ad AD, latus quadrati 1000.*	*Ita FG, quatenus 1.*	*ad AF.*

hoc eſt, (cum 1. multiplicans latus quadrati 1000. producat idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram verſam DE, prodibit Quotiens AF, indicans, quoties FG, in AF, contineatur. Eodem pacto ſi fiat,

Vt vmbra verſa dH,	*ad a d, latus quadrati 1000.*	*Ita FG, quatenus 1.*	*ad aF,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram verſam dH, gignetur Quotiens aF, monſtrans, quoties FG, in aF, contineatur. Si igitur poſterior hic Quotiens aF, ex priori Quotiente AF, detrahatur, relinquetur differentia Aa, cognita in partibus, quarum FG, eſt 1. Si ergo fiat,

Vt Aa, differentia Quotientum, diuiſo latere Quadrati per vtramque vmbram verſam,	*ad Aa, differentiam ſtationum.*	*Ita FG, vt 1.*	*ad FG,*

producetur altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Aa, nota, & adiecta menſoris ſtatura FL, nota altitudo GK, nota fiet.

ALITER

EX differentia HI, vmbrarum verſarum in latus quadrati gignatur numerus N, & ex vmbra verſa DE, in
verſam dH, fiat O. Productis autem lateribus BC, bc, vſque ad R, P, in radiis, abſcindatur BQ, ipſi bP, æqualis.
Et quia, vt problemate 3. Numer. 3. demonſtratum eſt, ita eſt QR, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, diffe-
rentiam ſtationum, vt vmbra recta maior BR, ad AF, diſtantiam: [a] Vt autem BR, ad BA, ita eſt AF, ad FG: & *a 4. ſexti*
permutando vt BR, ad AF, ita BA, ad FG; erit quoque QR, ad Aa, vt BA, ad FG. & permutando QR, ad BA. ad
Aa, ad FG. Dico iam, vt eſt QR, ad AB, ita eſſe numerum N, ad numerum O. [b] Cum enim ſit, vt DE, ad DA, ita *b 4. ſexti.*
AB, ad BR; [c] erit rectangulum ſub DE, BR, rectangulo ſub DA, AB, hoc eſt, quadrato lateris æquale. Eademq; *c 16 ſexti*
ratione erit rectangulum ſub dH, bP, eidem quadrato lateris æquale; ideoq; rectangulum ſub DE, BR, rectan-
gulo ſub dH, bP, æquale erit. [d] Igitur erit, vt DE, ad dH, ita bP, ad BR: & conuertendo, vt dH, ad DE, ita BR, ad *d 16 ſexti.*
bP, vel ad BQ: & permutãdo vt tota dH, ad totam BR, ita DE, vel dI, ablata ad bP, vel ad BQ. ablatam. [e] Igitur & *e 19. quint.*
reliqua HI, ad reliquam QR, erit, vt tota dH, ad totam BR, vel vt ablata dI, ad ablatam BQ; & permutando, vt
HI, ad dI, ita QR, ad BQ, vel ad bP. [f] Proportio autem numeri N, ad numerum O, componitur ex proportio- *f 23. ſexti.*
nibus HI, ad dI, vel ad DE, & lateris a d, ad dH, propterea quod N, factus eſt, ex HI, differentia vmbrarum ver-
ſarum in latus quadrati a d; At vero O, ex vmbra verſa DE, in verſam dH, ex conſtructione. Cum ergo ſit, vt
paulo ante oſtendimus, quemadmodum HI, ad dI, ita QR, ad bP, [g] Item vt latus a d, ad dH, ita bP, ad b a, com- *g 4. ſexti.*
ponetur quoque proportio N, ad O, ex proportionibus QR. ad bP, & bP, ad ba. Sed ex his eiſdem componitur
proportio QR, ad b a. Igitur eadem eſt proportio N, ad O, quæ QR, ad b a, vel BA, quod oſtendere volebamus.
Eſt autem vt QR, ad BA, ita Aa, differentia ſtationum ad altitudinem FG, vt ſupra oſtendimus prope initium
huius demonſtrationis. Igitur ſi fiat,

Vt N, numerus, qui fit ex HI, differentia vmbrarum verſarum in latus quadrati 1000.	*ad numerum O, factum ex vmbra verſa DE, in verſam dH.*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad FG, altitudinem,*

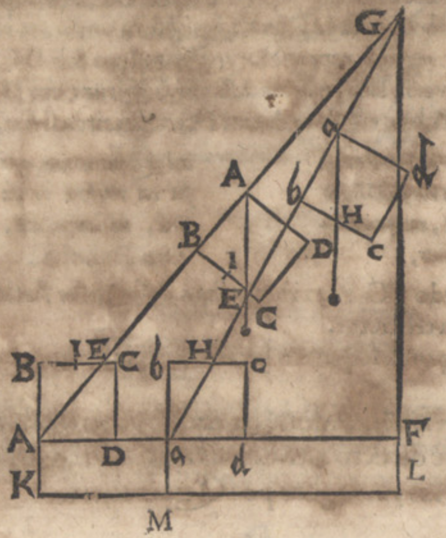
deprehenſa erit altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.

ALITER

REDVCATVR vtraque vmbra verſa ad rectam, vt ad initium huius lib. in quadrati conſtructione Nu. 7. docuimus. Nam per has vmbras rectas altitudi nem FG, nanciſcemur, vti Num. 2. ſequenti tradetur,

2 SECETVR deinde vtraque vmbra recta in E, H, vt in 2. figura problematis 3. quæ hic repetatur. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, AFG, [h] eſt, vt BE, ad AB, ita AF, ad FG; erit permutando, vt BE, ad AF, ita AB, ad FG. Eademque ratione erit vt bH, ad aF, ita a b, ad FG; ac proinde erit, vt tota BE, ad totam AF, ita ablata bH, vel BI, ad ablatam aF, cum vtraque proportio ſit, quæ AB, vel a b, ad FG. *h 4. ſexti.*

Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam Aa, vt tota BE, ad totam AF, hoc eſt, vt AB, ad FG, cum duæ hæ proportiones eædem inter ſe ſint, vt paulo ante demonſtrauimus. Quocirca ſi fiat,



Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*Ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AB, quadrati latus 1000.*	*ad FG,*

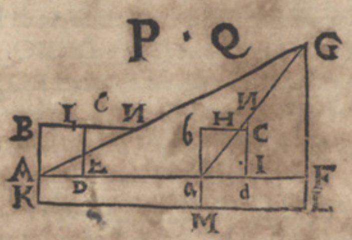
proſiliet nota altitudo FG, & adiuncta menſoris ſtatura FL, tota altitudo GL, quæſita nota efficietur.

ALITER

DIVIDE quadrati latus 1000. per vtramque vmbram rectam, & minorem Quotientem duc in differentiam ſtationum, numerumque productum partire per differentiam Quotientum. Si namque hic vltimus Quotiens ducatur in Quotientem maiorem ex prioribus duobus Quotientibus, producetur altitudo quæſita in partibus differentiæ ſtationum. Quod ita perſpicuum fiet.

SIT vmbra recta minor bH, 50. verbi gratia, & maior BE, 125. at differentia ſtationum Aa, ſit 16. paſſuum.
a 4. ſexti. [a] Et quia eſt, vt bH ad a b, ita aF, quatenus 1. ad FG; ſi a b, 1000. diuidatur per bH, 50 indicabit Quotiens 20. rectam aF, in FG, contineri vicies.

b 4. ſexti SIC etiam,[b] quia eſt, vt BE, ad AB, ita AF, quatenus 1, ad FG; ſi AB, 1000. diuidatur per BE, 125. monſtrabit Quotiens 8. rectam AF, in FG, contineri octies. Quia itaque Aa, 16. paſſuum vna cum aF, continetur in FG, octies, fit vt Aa, 16. paſſuum octies ſumpta, vna cum aF, octies quoque ſumpta, faciat 128. paſſus, & aF, octies ſumptam; nimirum numerum ipſi FG, æqualem. Eſt autem AF, vicies ſumpta eidem FG, æqualis. Igitur 128. paſſus, vna cum aF, octies ſumpta æquiualent ipſi aF, vicies ſumptæ. Si ergo vtrobiq; auferatur aF, octies ſumpta, reliqui erunt 128. paſſus æquales ipſi aF, duodecies ſumptæ. Quare ſi 128. diuidantur per 12. prodibunt $10\frac{2}{3}$. paſſus pro recta, aF, cum hic Quotiens in 12. ductus producat 128. Cum igitur AF, contineatur vicies in FG: ſi aF, $10\frac{2}{3}$. paſſuum ducatur in 20. procreabitur altitudo FG, $213\frac{1}{3}$. paſſuum. Vides ergo minorem Quotientem 8. in differentiam ſtationum paſſuum 16. ductam eſſe, vt gignerentur 128. & hunc numerum diuiſum eſſe per 12. differentiam Quotientum, vt prodirent paſſus $10\frac{2}{3}$. pro recta aF: ac tandem hunc Quotientem $10\frac{2}{3}$. ductum eſſe in 20. Quotientem maiorem, vt produceretur altitudo FG, paſſuum $213\frac{1}{3}$. vt in regula præcepimus. Quam altitudinem etiam reperies per præcedentem viam, ſi nimirum fiat, vt 75. differentia vmbrarum rectarum, ad differentiam ſtationum, nimirum ad 16. paſſus, ita quadrati latus 1000. ad aliud. Nam 16. ducta in 1000, & productus numerus 16000. diuiſus per 75. facit Quotientem $213\frac{1}{3}$. veluti prius.



3 DENIQVE in remotiore ſtatione interſecetur vmbra verſa in E, & in propinquiore vmbra recta in H, vt in 3. figura probl. 3. Reducta vmbra verſa ad rectam, vt in Quadrati conſtructione Num. 7. principio huius lib. ſcripſimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita AB, latus Quadrati 1000. ad aliud, procreabitur altitudo FG, quemadmodum Num. 2. oſtendimus.

4 SI forte in vna ſtatione tranſiret linea fiduciæ, aut filum perpendiculi per punctum C, aſſumendum eſſet in primo caſu latus CD, vmbræ verſæ: In duobus autem alijs caſibus latus BC, vmbræ rectæ.

ALITER

SINE reductione vmbræ verſæ ad rectam ita agendum erit. Numerus, qui fit ex vmbra verſa DE, in vmbram rectam bH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit P. Item ex vmbra verſa DE, in
c 4. ſexti. latus 1000. fiat Q.[c] Et quoniam ob triangulorum ſimilitudinem eſt, vt BN, ad BA, ita AF, ad FG: Et permutando, vt BN, ad AF, ita BA, ad FG. Sed vt BN, vmbra recta maior ad AF, diſtantiam, ita eſt IN, differentia vmbrarum rectarum ad Aa, differentiam ſtationum, vt Num. 5. in probl. 3. dictum eſt. Igitur erit quoque IN, ad Aa, ſi-
d 4. ſexti. cuti AB, ad FG: Et permutando IN, ad AB, vt Aa, ad FG. Dico iam ita eſſe P, ad Q, vt IN, ad AB.[d] Quoniam e-
e 17. ſexti. nim eſt, vt DE, ad AD, ita AB, vel AD, ad BN:[e] erit rectangulũ ſub DE, BN, æquale quadrato num. 1000000.
f 1. ſecund. lateris AB, 1000.[f] Eſt autem rectangulum ſub DE, BN, æquale rectangulis ſub DE, BI, & ſub DE, IN. Igitur ſi productum ex vmbra verſa DE, in BI, hoc eſt, in vmbram rectam bH, dematur ex rectangulo ſub DE, BN, hoc eſt, ex quadrato 1000000. remanebit rectangulum ſub DE, IN. Ac propterea P, fiet ex DE, in IN. Fit autem Q,
g 17. ſepti. ex eadem vmbra verſa DE, in latus AB, 1000. Igitur cum DE, multiplicans IN, & AB, producat P, Q,[g] erit P, ad Q, ſicut IN, ad AB; hoc eſt, ſicut Aa, ad FG. Quocirca ſi fiat,

Vt P, numerus, qui relinquitur, ſi productus ex vmbra verſa DE, in vmbram rectam bH, ex quadrato 1000000. detrahatur,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra verſa DE, in latus AB, 1000.*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad FG, altitudinem,*

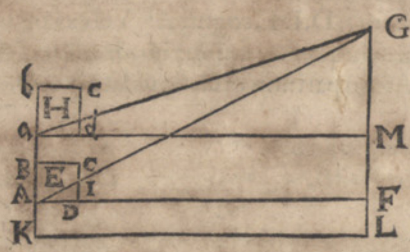
producetur altitudo FG, nota in partibus differentiæ ſtationum Aa: cui ſi adiicietur ſtatura menſoris FL, tota altitudo GL, nota efficietur.

IN ſcholio porro ſequentis problematis idem hoc problema per vnicam ſtationem abſoluemus.

ALTITVDINEM eandem, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſunt, per duas ſtationes in aliqua haſta erecta factas, indagare per Quadratum.

PRO-

PROBLEMA VII.



1 CVM in plano duæ ſtationes fieri commode nequeunt, erigatur haſta aliqua Kb, ad Horizontem recta, niſi forte adſit aliquod ædificiũ erectum, ibiq; fiant duæ ſtationes in A, & a, vt in problemate 4. Cadat autem primum dioptra, vel filum perpendiculi in vtraque ſtatione in vmbram verſam, vt in 1. figura problematis 4. quæ hic repetita eſt. [a] Et quoniã propter triangulorum ſimilitudinem eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG; erit permutando vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione erit vt, a d, ad aM, ita dH, ad MG. Cum ergo eadem ſit proportio AD, ad AF, quæ a d, ad aM, propter æqualitatem rectarum AD, a d, & AF, aM; [b] erit vt tota DE, ad totam FG, ita dH, hoc eſt, ita DI, ablata ad ablatam MG. [c] Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc eſt, ad Dd, vt tota DE, ad totam FG. Quocirca ſi fiat,

a 4. ſexti. b 11. quint. c 19. quint.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad Dd. differentiam ſtationum:*	*Ita DE, maior vmbra verſa*	*ad FG, altitudinem,*

euadet cognita altitudo FG, in partibus differentiæ ſtationum Dd. Appoſita autem ſtatura menſoris FL, tota altitudo GL, quæſita cognita erit.

2 ABSCINDAT deinde dioptra in vtraque ſtatione vmbram rectam, vt in 2. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 92. [d] Et quia propter triangulorum ſimilitudinem eſt vt bH, ad a b, ita aM, ad MG: [e] erit rectangulum ſub bH, MG, æquale rectangulo ſub a b, aM. Eadem ratione erit rectangulum ſub BE, FG, æquale rectangulo ſub AB, AF, [f] quod eadem quoque ſit proportio BE, ad AB, quæ AF, ad FG. Cum ergo rectangulum ſub a b, aM, rectangulo ſub AB, AF, æquale ſit, ob æqualitatem rectarum a b, AB, & aM, AF, erit etiam rectangulum ſub bH, MG; rectangulo ſub BE, FG, æquale. [g] Quare erit vt tota bH, ad totam FG, ita BE, vel bO, ablata ad ablatam MG; [h] Ac propterea erit quoq; reliqua OH, ad reliquam FM, ſiue ad Aa, vt tota bH, ad totam FG. Quamobrem ſi fiat,

d 4. ſexti. e 16. ſexti. f 4. ſexti. g 16 ſexti h 19. ſexti

Vt OH, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita bH, maior vmbra recta*	*ad FG, altitudinem,*

altitudo FG, prodibit cognita, quæ cum ſtatura menſoris FL, totam altitudinem LG, efficiet notam. Vbi vides eundem prorſus eſſe operandi modum in vmbris rectis, & in verſis.

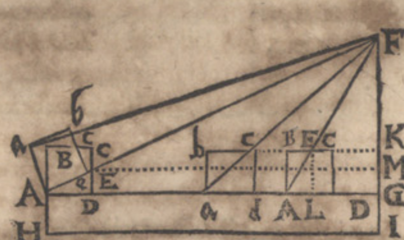
3 POSTREMO in ſtatione inferiori reſecetur vmbra recta BE, & verſa dH: in ſuperiori ſtatione, vt in 3. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 94. Reducta ergo vmbra recta ad verſam, vt ad initium huius libri in conſtructione Quadrati Numer. 7. declarauimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum, ita DN, vmbra verſa maior ad aliud, procreabitur FG, altitudo in partibus differentiæ ſtationum Aa, quemadmodum Num. 1. demonſtrauimus. Quod ſi malueris reducere vmbram verſam ad rectam, eandem altitudinem reperies per duas vmbras rectas, ceu Num. 2 monſtrauimus.

4 QVANDO fortaſſe in altera ſtationum linea fiduciæ tranſiret per punctum C, in arbitrio tuo erit, vel totum latus vmbræ verſæ, vel rectæ aſſumere.

SCHOLIVM.

1 EANDEM altitudinem, eiuſque diſtantiam ab oculo menſoris, vna cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, venari licebit ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiamſi ſolum faſtigium rei erectæ cernatur: adeo vt ſcholium hoc omnia præſtet, quæ in problemate 3.4.5.6.& 7. per plures ſtationes inueſtigauimus, ac proinde diligenter perdiſcendum.

Quo pacto præcedẽtia 5. problemata, ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem abſoluantur.



SIT enim altitudo metienda IF; ſtatura menſoris IG, vel HA. Paretur planum Horizonti æquidiſtans per A, tranſiens, in quo Quadratum firmari poſſit, aut collocari. Primum ergo inueſtiganda eſt hypotenuſa AF, hoc modo. Inclinetur quadratum, ita vt centrum dioptræ occupet ſuperiorem locum lateris aA, cuius inferius punctum ſtatuatur in A, oculo menſoris. Et totum quadratum tamdiu eleuetur, aut deprimatur, donec latus Ac, recta in cacumen F, vergat. Manente ſic Quadrato, menſor oculum transferat ad a, & per dioptram inſpiciat cacumen F, notenturque partes vmbræ verſæ abſciſſæ b c. Deinde fiat,

Vt b c, vmbra verſa	*ad latus a b, 1000.*	*Ita latus aA, notum in data menſura, quod nunc ponamus continere 3: pedes,*	*ad AF'*

Nam inuentus numerus dabit hypotenuſam AF, cognitam in partibus lateris aA. Verbi gratia. ſi c b, contineat 50. partes vmbræ verſæ, & aA, tribus pedibus ſit æqualis: ſi fiat vt 50. ad 1000. ita 3. ad aliud, reperietur AF, complecti 60. pedes. Si vero aA, ponatur 1000. comperietur eadem AF, particularum 200000. qualium 1000. in aA, comprehenduntur.

a 6.Trian. rectil.
b 5. triang. rectil.
c 47.prim.
d 2.ſexti & componendo.

2 POST hæc deprimatur quadratum, ita vt latus AD, Horizonti æquidiſtet, centrumque dioptræ ſit in A, quo poſito, videbitur cacumen F, per inuentam hypotenuſam AF, quæ primum ſecet vmbram verſam CD, in E, vt in primo quadrato, inquiraturque portio dioptræ AE, in partibus laterum AD, DE, [a] quod fiet vel ex vtroque latere AD, DE, cognito: [b] Vel ex cognito per problema 1. ex vmbra DE, angulo DAE, ex latere DE, noto: [c] Vel deniqur ſi ex ſumma quadratorum ex AD, DE, deſcriptorum radix quadrata extrahatur. Inuenta portione AE, in partibus milleſimis lateris AD, ductaque EM, ipſi AG, parallela, [d] ſi fiat,

Vt AE, inuenta in partibus milleſimis lateris AD,	*ad AF, in iiſdem partibus inuentam:*	*Ita GM, in iiſdem partibus cognita, cum æqualis ſit ipſi DE,*	*ad GF,*

nota efficietur GF, in partibus milleſimis lateris AD. Quod ſi rurſus fiat,

Vt latus AD, 1000.	*ad 3. pedes, quos ponimus in AD, contineri:*	*Ita GF. in milleſimis partibus lateris AD, inuenta,*	*ad GF,*

reperietur eadem GF, in menſura pedum. Et ſi adijciatur, ſtatura menſoris GI, nota in eadem menſura, cognita fiet tota altitudo IF, in menſura pedum.

Vbi vides, nos eadem opera inueniſſe quoque diſtantiam AF, ab oculo A, ad cacumen vſque F.

e 2.ſexti & componendo.

3 SECET deinde hypotenuſa aF, inuenta (inuenietur autem vt Num. 1. dictum eſt) vtrumq; latus vmbræ in C, vt in 2. quadrato. [e] Si igitur fiat,

Vt portio dioptræ ac, inuenta in partibus a d, lateris, 1000. vt Num. 2. diximus	*ad aF hypotenuſam in iiſdem partibus inuentam:*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

prodibit GF, nota in partibus milleſimis lateris dc: Et ſi rurſus fiat,

Vt latus dc, 1000.	*ad 3. pedes, quibus æquale ponimus latus dc,*	*Ita GF, in milleſimis partibus lateris dc, inuenta,*	*ad GF,*

inuenta erit eadem GF, in menſura pedum. Et ſi addatur ſtatura menſoris GI, nota in eadem menſura, cognoſcetur tota altitudo IF, in menſura pedum.

f 2.ſexti & componendo.

4 TERTIO ſecet hypotenuſa inuenta AF (quæ inuenietur vt Num. 1. docuimus) vmbram rectam in E, vt in tertio quadrato. [f] Si ergo fiat.

Vt portio dioptræ AE, inuenta, vt Num. 2. docuimus	*ad AF, hypotenuſam inuentam*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

exibit GF, nota in partibus milleſimis lateris DC. Et ſi iterum fiat,

Vt latus DC, 1000.	*ad 3. pedes in DC, contentos:*	*Ita GF, in partibus milleſimis lateris DC, inuenta,*	*ad GF,*

cognita erit eadem GF, in menſura pedum, &c.

ATQVE hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in partibus milleſimis lateris Quadrati reuocabuntur ad quamcunque aliam menſuram, vt ad pedes, vel cubitos, &c.

g 2.ſexti & componendo.

5 DISTANTIA autem AG, vel HI, cognita euadet, [g] ſi fiat,

Vt portio dioptræ AE, in primo Quadrato, vel a c, in 2. Quadrato,	*ad hypotenuſam AF, vel aF,*	*Ita latus AD, in 1. Quadrato vel a d, in 2. Quadrato*	*ad A G, in 1. quadrato vel ad aG, in ſecundo.*

VEL

Ducta EL, lateri AB, parallela in tertio quadrato,

Vt AE, portio dioptræ	*ad hypotenuſam AF,*	*Ita vmbra recta BE, ipſi AL, æqualis,*	*ad AG.*

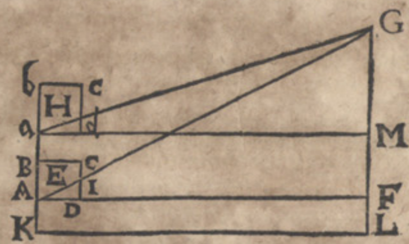
VIDES igitur, in hac ratione dimetiendæ altitudinis, ac diſtantiæ, etiam inacceſſibilis, opus non eſſe duabus ſtationibus ſiue in plano, ſiue in haſta aliqua erecta faciendis; Quod non parum moleſtiæ plerunque afferre ſolet: ſed ſolum inueſtigandam eſſe prius hypotenuſam per quadratum ſtabile inclinatum, Deinde portionem dioptræ inter eius centrum, & latus Quadrati, quod interſecat: quæ inuentio difficilis non eſt, vt patuit, cum menſor nunquam locum mutare cogatur.

ALTI-

ALTITVDINEM turris aut montis, ex eius ſummitate per Quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante, duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in Horizonte cernitur.

PROBLEMA VIII.

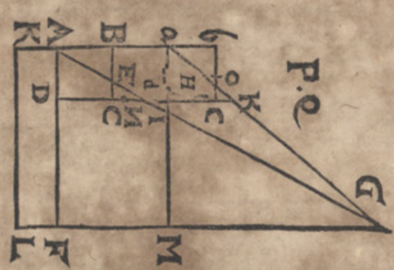
1 SIT altitudo DFMd, in cuius ſummitate, nimirum in plano Dd, duæ ſtationes fieri poſſint, ex quibus ſignum aliquod in Horizonte, videlicet G, videri poſſit. (Nos ne nouam cogeremus deſcribere figuram, repetiuimus primam problematis 4. in uerſo tamen ordine poſitam, ita vt literæ rectum ſitum non habeant. Et quamuis ſignum G, non cernatur ex A, propter planum Dd, eadem tamen erit ratio, ſi aliud ſignum longius diſtans eligatur, quod ex A, inſpici poſſit.) Collocetur inſtrumentum in vtraque ſtatione, vt latus vmbræ rectæ DC, vergat deorſum. Et primum vtraque vmbra recta ſecetur in E, H. (In hac enim innerſione latus DC, vmbræ rectæ, & BC, verſæ deputatur, vt in conſtructione Quadrati Num. 4. initio huius libri declaratum eſt) atque vmbræ dH, in propinquiore ſtatione, quæ ſemper minor eſt, æqualis abſcindatur DI. Itaq; ſi fiat,



Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum.*	*Ita AD, latus quadrati 1000.*	*ad AF,*

cognita erit recta AF, ex qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in partibus differentiæ ſtationum, nota relinquetur altitudo DF, vel dM, quæſita. Inueniri autem hac ratione rectam AF, demonſtratum eſt in problemate 4. Num. 1.

2 QVOD ſi in vtraque ſtatione latus vmbræ verſæ ſecetur in F, H, vt in 2. figura problematis 4. hic repetita, inuerſa tamen, habebimus tres vias inueſtigandi altitudinem AF, ex qua ſi tollatur latus Quadrati AD, manifeſta relinquetur quæſita altitudo DF, vel dM. Nam reducta vtraque vmbra verſa ad rectam, ſi fiat,



Vt IN, differentia vmbrarum rectarum,	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati 1000.*	*ad AF,*

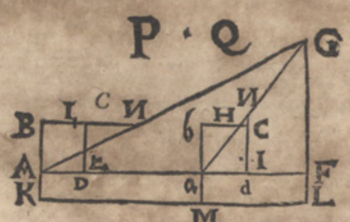
Vel ſine reductione.

Vt P, numerus, qui fit ex OH, differentia vmbrarum verſarum in ab, latus, quadrati,	*ad numerum, Q, qui fit ex vmbra verſa bH, maiore in minorem BE,*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF,*

VEL

Vt Aa, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram verſam diuidatur,	*ad Aa, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua:*	*Ita AF, vt 1.*	*ad AF,*

procreabitur ſemper altitudo AF, ab oculo inſpectoris A, numerata: quemadmodum in problemate 4. Numer. 2. demonſtratum eſt.



3 SI denique in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ verſæ in E, & in altera latus vmbræ rectæ in H, vt in 3. figura problematis 4, hic inuerſo ordine repetita: ſi vt in eodem problemate 4. Num. 3. demonſtrauimus, reducatur vmbra verſa ad rectam, & fiat,

Vt NI, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF,*

Vel ſine reductione.

Vt O, numerus, qui relinquitur, ſi numerus genitus ex vmbra verſa in rectam ex quadrato lateris dematur,	*ad numerum P, qui ex vmbra verſa BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differentia ſtationum*	*ad AF,*

producetur AF, altitudo in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.

4 IAM vero ſi diſtantia FG, à turri ad ſignum G, in Horizonte viſum nota fuerit, facilius per vnicam ſtationem in A, factam altitudinem conijciemus. Nã ſi vmbra recta DC, ſecetur in E, vt in 1. figura: [a] Fiat autem. a 4. ſexti.

Vt vmbra recta DE,	*ad latus AD:*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF,*

Vel quando vmbra verſa BC, ſecetur in E, vt in 2. figura; [b] ſi fiat. b 4. ſexti.

Vt latus AB,	*ad vmbram verſam BE,*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF,*

efficie-

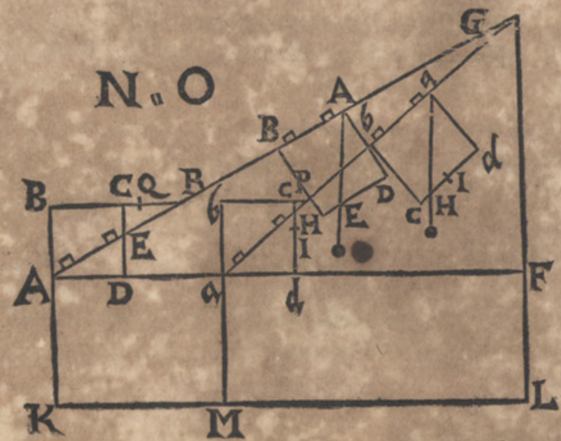
efficietur nota recta AF, in partibus diſtantiæ FG, à qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in eiſdem partibus diſtantiæ FG, nota relinquetur altitudo DF.

a 6. primi. QVOD ſi dioptra per C, tranſeat,[a] erit diſtantia FG, altitudini AF, æqualis. Dempto ergo latere quadrati AD, altitudo turris DF, cognita fiet.

HOC idem problema in ſcholio ſequentis problematis abſoluemus per vnicam ſtationem.

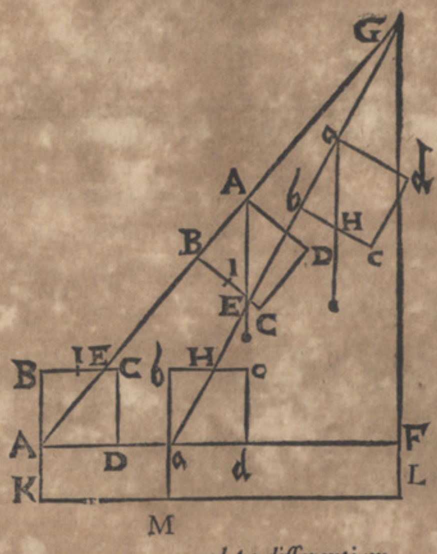
ALTITVDINEM turris vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt.

PROBLEMA IX.



1 QVANDO in ſummitate non eſt planities tanta, vt in ea duæ ſtationes poſſint fieri, erigatur haſta aliqua in qua duæ ſtationes fiant. Vt ſi altitudo inueſtiganda ſit dF, erigatur haſta d A, & centro dioptræ applicato ad haſtam primum in a, deinde in A, inſpiciatur ſignum aliquod G, in Horizonte per radios aG, AG. ſeceturque primum vtraque vmbra recta in H, E, vt in prima figura problematis 3. quam hic inuerſo ordine repetiuimus. Nam vt in præcedenti problemate diximus, in hac inuerſione DC, fit latus vmbræ rectæ, & BC, verſæ. Si ergo, vt in problemate 1. demonſtrauimus Num. 1. fiat,

Vt HI, differentia vmbrarum rectarum *ad Aa, differentiam ſtationum:* *Ita dH, vmbra recta maior* *ad AF,*

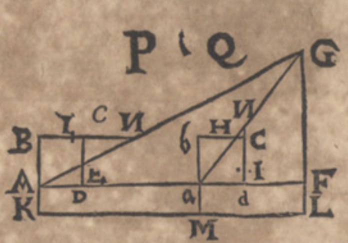


nota fiet tota recta AF, ex qua ſi dematur portio haſtæ Ad, quod duo quadrata occupant, cognita fiet reliqua altitudo dF.

2 SI vero in vtraque ſtatione vmbra verſa à radiis interſecetur, vt in 2. figura problematis 3. hic repetita ordine inuerſo, & fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum, *ad Aa, differentiam ſtationum:* *Ita BE, vmbra verſa maior* *ad AF,*

prodibit recta AF, ex qua ſi detrahatur portio haſtæ A d, à principio primi quadrati ad finem ſecundi, reliqua dF, altitudo fiet quoque nota: veluti in problemate 3. Num. 3. oſtendimus,



3 AT ſi in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ rectæ, & in altera latus vmbræ verſæ, vt in 3. figura problematis 3. quæ inuerſa huc translata eſt, reducenda erit vel recta vmbra ad verſam, vel verſa ad rectã. Nam vt in problemate 3. nu. 5. oſtendimus ſi fiat,

Vt IN, differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarum, *ad Aa, differentiam ſtationum:* *Ita BN, maior vmbra verſa, vel dN, maior vmbra recta,* *ad AF,*

efficietur nota recta AF, ex qua ſi dematur portio haſtæ Ad, nota relinquetur altitudo dF.

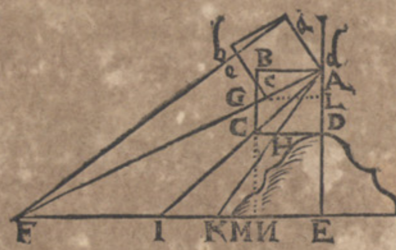
4 QVOD ſi turris eſſet AF, & ex duabus feneſtris d, D, obſeruatiõ fieret, deprehenderetur eodem modo altitudo turris AF, vt patet.

SCHOLIVM.

1 QVOD præcedentia duo problemata per duas ſtationes ſiue in plano ſummitatis turris, vel montis, ſiue in haſta aliqua erecta factas docuerunt, poſſumus per vnicam ſtationem quoque efficere, & ſimul diſtantiam à perpendiculo montis, vel à turre vſque ad ſignum in Horizonte propoſitum inuenire.

SIT

SIT enim montis alicuius, aut turris alititudo DE, & ſignum in Horizonte viſum F. Erigatur ex D, haſta aliqua DA, & ſumpta DA, æquali lateri quadrati ſtabilis, accommodetur quadratum ab c d, in A, ita vt centrum dioptræ a, ſit ſuperius, & latus inferius recta ad ſignum F, vergat. Poſito deinde oculo in a, dirigatur dioptra verſus F, notenturque partes in vmbra verſa b C. Nam ſi fiat,



Altitudinē montis, vel turris ex eius vertice per vnicam ſtationem, vna cum diſtātia à turre, vel perpendiculo montis ad ſignum in Horizonte propoſitum metiri.

Vt be, vmbra verſa	*ad latus ba, 1000.*	*Ita latus a d, 1000.*	*ad AF,*

reperietur hypotenuſa AF, in partibus lateris a d. Accommodetur rurſus quadratum ABCD, vt centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus CD, Horizonti æquidiſtet, hoc eſt, latus AD, haſtæ rectæ congruat. Quo poſito, videbitur ſignum F, per inuentam hypotenuſam AF, quæ primum ſecet latus vmbræ verſæ BC, in G, inquiraturque portio dioptræ AG, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus.[a] Nam ſi fiat,

a 4. *ſexti & componendo.*

Vt portio dioptræ AG, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AF,*	*Ita AL, vmbræ verſæ BG, æqualis (ducta GL, parallela ipſi EF,)*	*ad AE,*

comperta erit AE, in partibus hypotenuſæ AF. Et ſi dematur latus quadrati AD, in iiſdem partibus notum, reliqua fiet DE, altitudo montis, aut turris. Quod ſi rurſus fiat,

Vt portio dioptræ AG, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AF,*	*Ita EM, (producta BC, vſque ad M,) lateri CD, æqualis,*	*ad EF,*

exibit nota diſtantia EF, in iiſdem partibus hypotenuſæ AF.

VBI vides eadem opera inueniri diſtantiam ab oculo A, vſque ad ſignum F, in Horizonte.

NON erit autem difficile ipſam DE, vel EF, ſi inuenta fuerit in partibus milleſimis lateris AD, vel CD, in alia menſura, vt in pedibus, efficere notam; ſi fiat,

Vt AD, latus 1000.	*ad AD, notam in pedibus, verbi gratia in 3. vel in ſemiſſe vnius cubiti:*	*Ita DE, vel EF, inuenta in milleſimis partibus,*	*ad aliud*

Atque hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in milleſimis partibus lateris quadrati, reducentur ad aliam menſuram vel pedum, vel cubitorum &c. Quod etiam in ſcholio problem. 7. monuimus.

2. SECET deinde hypotenuſa AI, (quæ reperietur vt AF, inuenta eſt) quadratum in C: inueſtigeturq; portio dioptræ AC, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. tradidimus.[b] Deinde fiat,

b 2. *ſexti & componendo.*

Vt portio dioptræ AC, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AI,*	*Ita AD, latus 1000.*	*ad AE,*

Nam numerus productus dabit AE, in partibus hypotenuſæ AI. Atque totidem partes complectetur diſtantia EI;[c] quod AE, EI, æquales ſint ob angulos ſemirectos EAI, EIA, æquales.

c 6. *primi.*

3 POSTREMO hypotenuſa AK, inuenta eo modo, quo AF, cognita eſt, ſecet latus CD, vmbræ rectæ in H, reperiaturque portio dioptræ AH, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus.[d] Nam ſi fiat,

d 2. *ſexti & componendo.*

Vt portio dioptræ AH, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AK,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AE,*

cognoſcetur AE, in partibus hypotenuſæ AK, &c. Et ſi rurſus fiat, ducta prius HN, ipſi AE, parallela,

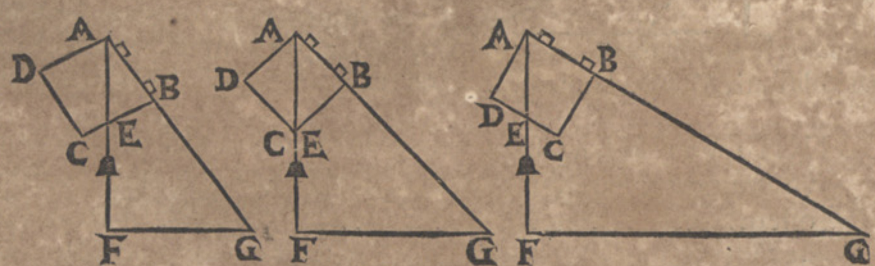
Vt portio dioptræ AH, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AK,*	*Ita EN, vmbræ rectæ DH, æqualis*	*ad EK,*

nota quoque reddetur diſtantia EK, in iiſdem partibus hypotenuſæ AK, &c. Quod ſi ex vertice D, appareret radix montis, inueniretur eodem modo diſtantia à radice vſque ad E, quæ ablata ex diſtantia FE, inuenta notam quoque relinquet diſtantiam ab F, vſque ad radicem montis, quæ nonnumquam poſſet deſiderari.

EX ſummitate turris, vel aliqua eius feneſtra, diſtantiam à baſe turris ad ſignum propoſitam in Horizonte per quadratum cognoſcere.

PROBLEMA X.

1 SIT turris aliqua AF, & diſtantia metiēda FG. Si igitur altitudo turris cognita eſt, aut eius portio inter feneſtrā A, & baſem F; inſpiciatur ſignum G, per pinnacidia quadrati pēduli Et ſi quidem filum perpēdiculi interſecet latus vmbræ rectæ in E, vel per punctum C, tranſeat, Fiat autem,



Vt latus

Vt latus AB, partium 1000.	*ad vmbram rectam BE,*	*Ita AF, altitudo turris nota*	*ad FG,*

cognita erit diſtantia FG, quæſita in partibus turris notæ.

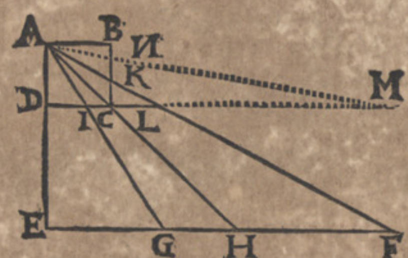
SI autem vmbra verſa ſecetur in E, & fiat,

Vt vmbra verſa DE,	*ad latus DA, partium 1000.*	*Ita AF, altitudo turris cognita*	*ad FG,*

efficietur quoque nota eadem diſtantia FG, in partibus turris cognitæ.

2 Per quadratum ſtabile eandem quoque diſtantiam adipiſceris. Sit enim rurſus turris quæpiam DE, & diſtantia metienda EG, vel EH, vel EF. Si igitur dioptra ſecet latus vmbræ rectæ in I. Et fiat,

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad vmbram rectam DI:*	*Ita altitudo AE, ex turre & latere quadrati AD, conſlata.*	*ad EG,*



prodibit diſtantia quæſita EG.

SI autem dioptra per C, tranſeat, erit diſtantia EH, altitudini AE, notæ æqualis.

SI denique vmbra verſa interſecetur in K; fiat autem,

Vt vmbra verſa BK,	*ad latus quadrati 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF,*

inuenietur diſtantia EF, in partibus altitudinis AE.

HÆC enim omnia in 2. problem. Num. 1. & 2. demonſtrata ſunt.

3 QVOD ſi altitudo turris cognita non ſit, inueſtiganda ea primum erit per problema 8. vel 9. vel potius per ſcholium problem. 9. aut certe, ſi commode fieri poſſit, per chordam aliquam cum appenſo perpendiculo demiſſam exploranda. Deinde procedendum erit, vt Num. 1. & 2. dictum eſt.

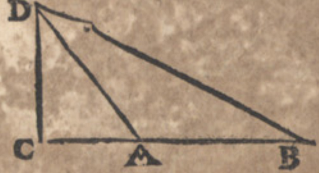
VERVM ſine cognitione turris idem aſſequemur ea ratione, qua in problem. 6. vel 7. altitudinem propoſitam indagauimus, etiamſi diſtantia vſque ad altitudinem ſit ignota. Nam ſi in 6. problemate turris ſit D, F, diſtantia autem metienda FG, efficiemus illud, ſi in haſta aliqua erecta DA, fiant duæ ſtationes oculi in a, A. Solum quod ibi dictum eſt de vmbra verſa, hic de recta intelligatur, & contra.

PARI ratione, ſi in 7. problemate turris ſit DF, & diſtantia metienda FG, inueniemus eam, ſi in plano ſummitatis turris fiant duæ ſtationes oculi in A, a. Solum quod ibi dicitur de vmbra verſa, hic etiam de recta intelligatur. Nam ſi figuræ problem. 6. & 7. hoc eſt, figuræ proble. 3. & 4. inuertantur, vt altitudines fiant AF, AF, latus quadrati DC, ad vmbram rectam, & BC, ad verſam pertinebit, vt initio huius libri in conſtructione quadrati Num. 4. explicauimus.

SED hanc diſtantiam longe facilius in ſcholio præcedentis problematis inuenimus per vnicam ſtationem, vt patuit in diſtantia EF, &c.

EX altitudinis alicuius faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, per quadratum comprehendere.

PROBLEMA XI.



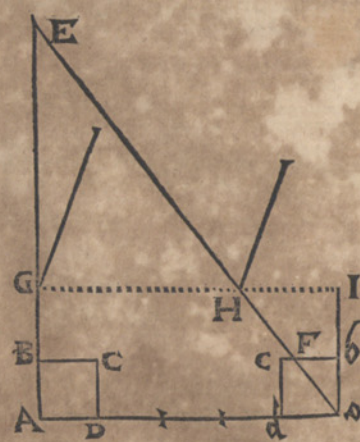
1 SIT diſtantia metienda AB, è directo altitudinis CD, in qua oculus menſoris exiſtat in D, faſtigio. Per problema antecedens inueſtigetur ex vertice D, tam diſtantia CB, quam CA. Minor enim hæc ex illa maiore detracta notam relinquet diſtantiam AB, inter ſigna A, & B, in partibus altitudinis CD, in quibus videlicet diſtantiæ etiam CB, CA, inuentæ ſunt.

2 SI altitudo CD, ſit ſtatura menſoris, reperietur eodem modo diſtantia AB, ſi oculus menſoris in D, vtrumque extremum A, B, cernere poſſit, vt liquet.

LONGITVDINEM in Horizonte extenſam metiri per Quadratum, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtrã per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat.

PROBLEMA XII.

1 SIT longitudo metienda AE,cuius extremum E,ex A,menſor videre non poſſit,neq; adſit altitudo, ſed tamen ſi ad dextram,vel ſiniſtram recedat per lineam perpendicularem Aa,vſque ad a,illud videre poſſit. Quadratum ſtabile ita erigatur,vt eius planum longitudini AE,congruat. Debet namque conſtare, quænam recta ad extrema A,E, pertineat, hoc eſt, rectam conſtituat, cum data longitudine. Deinde collocato quadrato in Horizontis plano, ita vt latus AB, a longitudine non recedat,extendatur recta per latus AD, vſque ad a, vnde extremum, E,appareat, ſitq; ſpatium Aa,per aliquam menſuram notum. Erectum autem in a,quadratum circumducatur,donec per eius planum extremum E, cernatur. Poſt hæc idem quadratum in Horizonte collocetur,latuſque a d.perpendiculari Aa,congruat: Et dioptra circumuoluatur, donec eius linea fiduciæ rectæ aH, per quam extremum E, inſpectum fuit, reſpondeat, noteturque vmbra verſa bF, abſciſſa. Eruntque triangula abF,aAE,æquiangula,propter rectos angulos b, A, & alternos baF,AEa,æquales. [a] Quamobrem ſi fiat,



a 4.ſexti.

Vt vmbra verſa bF,	*ad quadrati latus a b, 1000.*	*Ita ſpatium Aa, notum*	*ad AE,*

cognita erit longitudo AE, in partibus ſpatii Aa.

SI forte dioptra latus d c,vmbræ rectæ interſecet, (quod raro continget, cum plerunque AE, maior ſit, quam Aa,) [b] erit tunc b 4.ſexti.

Vt latus a d, 1000.	*ad vmbram rectam abſciſſam:*	*Ita ſpatium Aa,*	*ad longitudinem,*

vt perſpicuum eſt,ſi ducatur ex a,recta ſecans latus dc, &c.

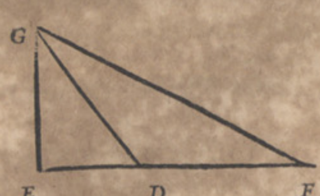
SI denique dioptra fortaſſis per c,tranſiret, [c] eſſet ſpatium Aa,longitudini quæſitę æquale;propterea quod tunc fieret angulus ſemirectus d a c,ideoque & recta a c,ſi duceretur,faceret cum AE,angulum ſemirectum,atque adeo angulo d a c,æqualem. c 6. primi.

2 EADEM diſtantia longitudine AE,cognoſcetur, ſi tam in G, quam in H,baculus,ſeu arundo ad angulos rectos figatur,ita vt ex A,a,radii per arundinem incedentes ad E, ferantur, ſpatiumque Aa,cognitum ſit: vt in 2.probl.Num.6.traditum eſt.

LONGITVDINEM in Horizonte è directo menſoris iacentem cognoſcere,ad cuius extrema neque accedere liceat,neque è loco menſoris eam dimetiri,neque vlla adſit altitudo,dummodo ad dextram vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor,ex quo vtrumque extremum appareat.

PROBLEMA XIII.

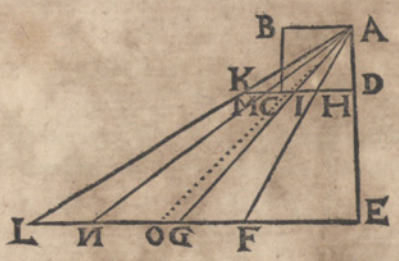
1 LONGITVDO metienda ſit ED, è directo menſoris in F, exiſtentis, ita vt neque ad eam accedere liceat, neque eam è loco F, metiri, neque vlla adſit altitudo: Sed ſolum per lineam perpendicularem FG, ad locum G, vnde vtrumque extremum D, E, videatur, poſſit accedere. Per problema præcedens inquiratur ex G, tam longitudo FE, quam FD. Hæc enim ex illa detracta notam relinquet propoſitam longitudinem DE.



ALTITVDINEM montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna, vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere.

H PRO-

PROBLEMA XIV.



1. SIT mons, aut turris DE, ſitque primum è directo menſoris in faſtigio D, exiſtentis interuallum FG, notum. Accommodetur quadratum ſtabile in ſummitate D, ita vt latus AD, perpẽdiculare ſit ad Horizontem, & CD, Horizonti parallelum. Inſpecto igitur per dioptram vtroque termino F, G, ſecetur vmbra recta in H, I. [a] Quoniam igitur eſt, vt IH, ad HD, ita GF, ad FE: [b] Item ob triangulorum ſimilitudinem, vt HD, ad DA, ita FE, ad EA; erit ex æquo, vt IH, ad DA, ita GF, ad EA. Igitur ſi fiat,

a ſchol. 4. ſexti.
b 4. ſexti.

Vt IH, differentia vmbrarum rectarum — *ad DA, latus quadrati* — *Ita interuallum GF, cognitum* — *ad EA,*

exibit nota recta EA. Et ſi dematur latus quadrati DA, (quod fieri debet notum in partibus interualli GF,) reliqua fiet nota altitudo DE, in partibus interualli GF.

c 4. ſexti.

2 SIT tota deinde diſtantia EG, nota. Inſpiciendum ergo ſolum eſt extremum G. [c] Nam ſi fiat,

Vt ID, vmbra recta — *ad DA, latus quadrati:* — *Ita diſtantia nota GE,* — *ad EA,*

efficietur rurſus nota recta EA, &c.

3 QVANDO vmbra verſa BC, interſecatur, vt ſi ſpatium notum ſit LN, reducenda eſt vtraque vmbra verſa ad rectas DK, DM. Nam rurſus erit, vt KM, differentia vmbrarum rectarum ad latus DA, ita ſpatium notum LN, ad EA.

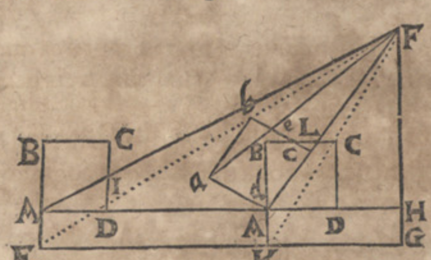
SIC etiam quando vnus radius vmbram rectam, & alter verſam interſecat, vt in ſpatio LG, contingit, reuocanda erit vmbra verſa ad rectam DK, vt iterum ſit KI. differentia vmbrarum rectarum ad DA, latus, vt ſpatium notum LG, ad EA.

4 SI denique radius per C, tranſiret, ſumendum eſſet totum latus CD, pro vmbra recta, at vmbra verſa, ſi qua eſſet, ad rectam reducenda.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris (vbicunque exiſtat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum per quadratum exquirere.

PROBLEMA XV.

1 EXPLORANDA ſit diſtantia puncti F, in muro aliquo ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam ab oculo A, vel à pede E, poſita ſtatura menſoris AE. Et ſit primum altius



punctum F, quam oculus A. Concipiatur ex F, demiſſa perpendicularis FG, & ad hanc ducta ab oculo A, alia perpendicularis AH. Collocato ergo ita quadrato, vt latus AD, Horizonti æquidiſtet, inſpiciatur punctum F, radiuſque AF, vel dioptra auferat vmbram verſam DI. Per problema 3. vel 4. vel potius per ſcholium problem. 7. inueſtigetur diſtantia AH, etiamſi punctum H, non appareat: diligenterque inquiratur, quot partes milleſimæ lateris AD, in ſegmento dioptræ AI, comprehendantur, quod multis modis, vt in ſchol. probl. 7. Num. 2. docuimus, exequemur hoc modo. Primum quoniam duo latera AD, DI, in rectangulo triangulo ADI, data ſunt, [a] ignorari non poterit baſis in partibus laterum. Deinde quia per probl. 1. ex vmbra DI, notus fit angulus DAI, [b] cognoſcetur rurſus baſis AI. Tertio [c] quia quadrata AD, DI, quadrato AI, æqualia ſunt; ſi ex aggregato eorum radix quadrata eruatur, exhibebit ea radix baſem AI, notam. His peractis, [d] ſi fiat,

a 6. triang. rectil.
b 5. triang. rectil.
c 47. prim.
d 4. ſexti.

Vt latus AD, 1000. — *ad portionem dioptræ AI, nuper inuentam:* — *ita diſtantia AH, nuper etiam inuenta* — *ad AF,*

cognita erit diſtantia AF, quæſita in partibus inuentæ diſtantiæ AH.

DISTANTIA autem EF, à pede ad datum punctum F, ita reperiemus. Quoniam in triangulo AEF, duo latera AF, AE, cognita ſunt, cum illud proxime ſit inuentum, & hoc ſtaturæ menſoris æquale ſit; comprehenduntque angulum notum EAF, vtpote conflatum ex recto EAH, & DAI, qui per problema 1. inuentus eſt ex vmbra verſa DI: [e] notum efficietur latus quoque EF, quod quæritur.

e 12. trian. rectil.

2 QVOD ſi vmbra recta ſecetur in L, vt in altero quadrato, vbi iterum menſoris ſtatura eſt AK: Inuenta portione dioptræ AL, in partibus milleſimis lateris quadrati ex angulo BAL, &c. necnon diſtantia AH, ex problem. 3. vel 4. vel ex ſcholio probl. 7. [f] Si fiat,

f 4. ſexti.

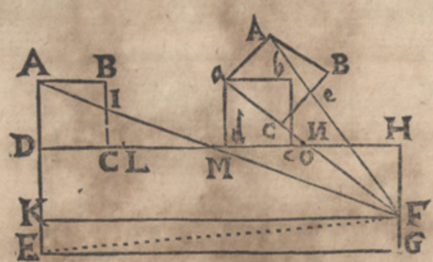
Vt BL, vmbra recta	*ad LA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita diſtantia AH, inuenta*	*ad AF,*

prodibit rurſus nota diſtantia AF, in partibus diſtantiæ inuentæ AH.

NON aliter procedes, ſi dioptra per C, tranſeat: [g] Cum tunc etiam ſit, vt AD, latus ad partem dioptræ AC, inuentam, vt prius, ita diſtantia inuenta AH, ad diſtantiam quæſitam AF. *g 4. ſexti.*

DISTANTIA autem KF, à pede K, vſque ad F, [h] inuenietur, vt prius, ex duobus lateribus notis AF, AK, & angulo ab ipſis comprehenſo FAK; qui nimirum conflatur ex recto A, & DAL, complemento anguli BAL, quem per problema 1. cognitum efficit vmbra recta BL. *h 12. trian. rectil.*

3 SED ſit iam punctum F, oculo A, depreſſius, & ſtatura menſoris ſit AE. Concipiatur ex F, duci FK, Horizonti parallela, vel ad AE, perpendicularis. Item per F, recta GH, ipſi AE, parallela. Accommodato autem quadrato, vt latus AD, rectum ſit ad Horizontem, & DC, Horizonti æquidiſtans, cogitetur DC, latus productum vſque ad H, punctum perpendicularis GH. Primum itaque reperiatur altitudo AK, per problema 8. vel 9. duabus ſtationibus factis in recta DH, vel in haſta DA, protracta, vel certe per ſcholium problematis 9. Quamuis enim ſtatura menſoris AE, cognita ſit, ignoratur tamen, quanta ſit eius pars AK, quam parallela FK, per imaginationem ducta abſcindit: ita vt omnino neceſſarium ſit altitudinem AK, inquirere, quod per 8. problema facile exequemur, ſi in vtraque ſtatione vmbra verſa ſecetur in I, N, (quod plerunque hic continget) & vtraque abſciſſa BI, bN, ad rectas DM, dO, reuocetur: Nam ſi fiat,



Vt LM, differentia vmbrarum rectarum	*ad Dd, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus*	*ad AK,*

inuenta erit altitudo AK, oculo poſito in eius ſummitate A, vt in dicto problem. 8. Numer. 2. diximus, &c. Quæ tamen altitudo AK, facilius per ſcholium problem. 9. reperiri poteſt.

ITAQVE quia vmbra BI, per 1. problema patefacit angulum BAI, hoc eſt, alternum AFK, ſibi æqualem, nec non & eius complementum FAK; erunt in triangulo rectangulo AKF, duo anguli acuti cogniti, vna cum latere AK, proxime inuento; [i] Itaque ſi fiat, *i 5. triang. rectil.*

Vt ſinus totus	*ad latus AK, inuentum:*	*Ita AF, ſecans anguli FAK,*	*ad AF,*

cognita fiet AF, in partibus lateris inuenti AK. Vel inuenta parte dioptræ AI, in partibus milleſimis lateris quadrati, vt ſupra dictum eſt prope initium huius problematis, [k] ſi fiat, *k 4. ſexti.*

Vt BI, vmbra verſa	*ad IA, partem dioptræ inuentæ:*	*Ita KA, altitudo inuenta*	*ad AF,*

nota rurſus efficietur diſtantia AF, in partibus rectæ AK, inuentæ.

PORRO diſtantiam EF, à pede menſoris ad punctum F, [l] inueniemus, vt ſupra: propterea quod in triangulo AEF, duo latera AE, AF, nota ſunt, cum illud ſit ſtatura menſoris, hoc autem ſit proxime inuentum, angulumque continent notum FAK, vt paulo ante diximus. *l 12. triang. rectil.*

4 NON aliter vtraque diſtantia cognoſcetur, ſi punctum F, in Horizonte ſit poſitum, qui Horizon per FK, intelligatur tranſire, ita vt ſtatura menſoris, vel aliqua alia altitudo nota, ſit AK. Nam cognita portione dioptræ AI, vt ſupra traditum eſt; [m] ſi fiat, *m 4. ſexti.*

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad IA, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita AK, altitudo, vel ſtatura menſoris*	*ad AF,*

nota euadet diſtantia AF, in partibus ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK,

[n] Rurſus ſi fiat, *n 4. ſexti*

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita AK, altitudo vel ſtatura menſoris*	*ad KF,*

cognita etiam fiet diſtantia KF, à pede menſoris vſque ad punctum F, in partibus eiuſdem ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK. Vbi vides, vtramque diſtantiam cognoſci per vnicam ſtationem, quando punctum datum eſt in Horizonte.

5 SED vbicunque punctum F, exiſtat, ſiue in Horizonte, ſiue in ſublimi, vel infra oculum, inueniemus nihilominus vtramque diſtantiam per vnicam ſtationem, hoc modo. Quando punctum F, eſt in ſublimi, vt in prima figura, accommodetur quadratum ita, vt dioptræ centrum a, ſit ſuperius, & latus dc, verſus punctũ F, dirigatur. Inſpecto enim per dioptram puncto F, notetur vmbra verſa eb. [o] Et fiat, *o 4. ſexti*

Vt vmbra verſa eb,	*ad latus ba:*	*Ita latus ad,*	*ad AF,*

Nam numerus productus notam faciet diſtantiam AF, in partibus lateris quadrati. Non aliter diſtantiam KF, à pede menſoris elicies, ſi eodem pacto quadratum ad punctum K, applicabis, vt conſtat.

 QVANDO

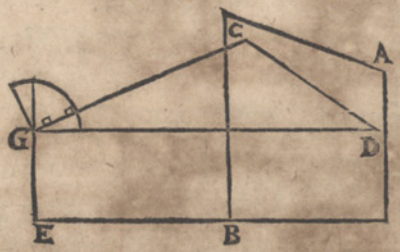
QVANDO autem punctum F, depreſſius eſt oculo, vt in ſecunda figura, erigendus eſt baculus a d, minor, quam ſtatura menſoris, & in a, applicandum quadratum, vt rurſus centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus a c, ad punctum F, vergat. Nam viſo puncto F, ex A, per dioptram, notataque vmbra verſa e B, ſi fiat,

Vt vmbra verſa e B, ad latus BA, Ita latus A a, ad a F,

exibit diſtantia a F, nota in partibus lateris Aa. Diſtantia porro EF, à pede menſoris conijcietur, ſi quadratum in E, applicetur, vt in prima figura dictum eſt. Quando denique punctum F, eſt in Horizonte, inuenietur vtraque diſtantia, vt Num. 4. tradidimus.

INTERVALLVM inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad Horizontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVI.



1 IN quolibet plano eleuato AB, inquirendum ſit interuallum CD, ex plano EB. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit G E, inueſtigetur per præcedens problema, vtraque diſtantia GC, GD, in partibus ſtaturæ menſoris G E. Deinde applicato quadrato ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, tranſeat, atque vnum eius latus ad punctum D, recta vergat (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptræ ſupra illud latus, punctum D, per foramina pinnacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum quoque C, appareat, & vmbra abſciſſa notetur, per quam ex problemate 1. anguli CGD, magnitudo addiſcatur. Quod ſi alterum latus quadrati vltra rectam GC, exiſtat, erit angulus CGD, acutus: ſi vero citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtuſus: quem cognoſcemus, ſi ad rectum adijciemus reliquum angulum, inter alterum illud latus, & rectam GC, quem quidem inueſtigabimus, vt de acuto CGD, diximus, ſi nimirum in recta CD, mente notemus punctum, in quod alterum illud latus productum incideret. Nam ſi tunc latus illud rectæ GC, congruat, & dioptra ad punctum notatum vergat, indicabit vmbra inter latus illud, & lineam fiduciæ angulum prædictum reliquum, vt in problemate 1. dictum eſt. Si denique alterũ illud latus præciſe rectæ GC, congruat, angulus CGD, rectus erit. His peractis, quia in triangulo CGD, latera GC, GD, nota continent angulum G, etiã cognitum;[a] cognoſcetur quoq; tertiũ latus CD quod quæritur.

a 12. Tria. rectil.

2 VERVM inuentis diſtantiis GC, GD, in aliqua menſura, vna cum angulo G, facilius, licet non tam certo, interuallum CD, cognoſcemus hoc pacto. Deſcripto angulo G, ſeorſum, ſumatur in GC, portio quotlibet partium lateris quadrati, verbi gratia 500. id eſt, ſemiſſis lateris. Et fiat, vt diſtantia inuenta GC, ad diſtantiam inuentam GD, ita partes acceptæ 500. ad aliud. Nam Quotiens dabit numerum quartum proportionalem earundem partium lateris quadrati; quibus ſi capiatur in GD, portio æqualis, [b] erit interuallum inter extrema puncta dictarum portionum, æquidiſtans interuallo CD; vt conſtat, ſi illæ portiones in rectas GC, GD, in figura transferrentur; propterea quod in illis extremis punctis rectæ GC, GD, ſectæ eſſent proportionaliter. Quare ſi illud interuallum circino menſuretur in eiſdem partibus lateris quadrati, continebit interuallum CD, totidem particulas rectæ GC, in 500. partes æquales diuiſæ, quot in illo interuallo comprehenduntur ex particulis lateris quadrati: cum ſit vt portio particularum 500. ad interuallum illud, ita GC, diuiſa in partes æquales 500. ad CD. Quæ particulæ reducentur ad menſuram, in qua inuentæ ſunt GC, GD: ſi fiat, vt GC, quatenus 500. ad menſuras in GC, inuentas, ita CD, inuenta in particulis rectæ GC, in 500. partes diuiſæ, ad aliud.

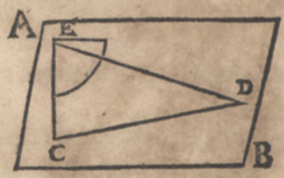
b 2 ſexti

QVIA vero vix per circinum accurate reperiri poteſt interuallum illud inter extremitates proportionalium, magis exquiſite, licet laborioſius, interuallum propoſitum cognoſcetur per 12. triang. rectilineorum.

INTERVALLVM tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri poteſt, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVII.

1 IN Plano Horizontis AB, iaceat interuallum CD, in tranſuerſum, pes autem menſoris in E, ita vt longitudo CD, in vtramque partem producta per E, non tranſeat. Nam quando recta CD, è directo menſoris iacet, inueſtigabitur ea per problema 11. Itaque vt tranſuerſum interuallum CD, cognoſcatur, inquirenda erit primum vtriuſque extremi puncti C, D, diſtantia à pede menſoris E, vt Num. 4. problematis 15. traditum eſt, per vnicam ſtationem. Deinde angulus CED, explorandus, quod fiet, ſi vnum latus quadrati rectæ EC, cõgruat, & dioptra rectæ ED. Nam vmbra abſciſſa inter latus illud, ac dioptram oſtendet quantitatem anguli CED, vt in problemate 1. dictum eſt: qui quidem acutus erit, ſi alterum latus vltra rectam ED, exiſtet: rectus vero ſi præciſe rectæ ED, congruet: obtuſus denique, ſi citra rectam ED cadet; quem cognoſcemus, ſi recto angulo adiiciemus reliquum acutum, qui deprehendetur, vt in præcedenti problemate docuimus. Quoniam ergo triangulum habemus CED, cuius duo latera EC, ED, cognita ſunt, vna cum angulo comprehenſo E: [a] cognitũ quoq; erit tertiũ latus CD, in partibus rectarũ EC, ED.



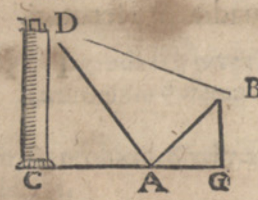
a 12. Tria. rectil.

EADEM recta CD, cognita erit, ſi in rectis EC, ED, ſeorſum deſcriptis cum angulo E, inuento ſumantur partes ipſis EC, ED, proportionales, &c. vt Num. 2. præcedentis problematis factum eſt.

DISTANTIAM alicuius ſigni in Horizonte poſiti à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus nõ pateat, per quadratum eruere, vbicunq; menſor exiſtat.

PRO-

PROBLEMA XVIII.

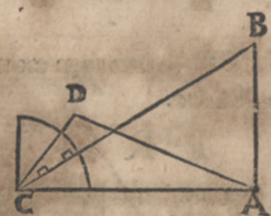


1 IN Horizontis plano punctum A, diſtet à ſummitate D, alicuius altitudinis per rectam AD, quam ſic venabimur. Vbicunque oculus menſoris exiſtat, nimirum in B, indagentur per problema 15 diſtantiæ punctorum A, D, ab oculo menſoris B. Deinde angulus exploretur ABD, vt in problemate 16. docuimus. Nam ſic habebimus triangulum ABD, cuius duo latera nota ſunt BA, BD, vna cum angulo B. [a] Igitur tertium quoque latus AD, cognitum erit.

QVOD etiam inuenietur, vt Num. 2. problem. 16. docuimus, ſi in rectis BA, BD, cum angulo B, ſeorſum ductis ſumentur partes ipſis BA, BD, proportionales, &c. a 12. Tria. rectil.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare.

PROBLEMA XIX.

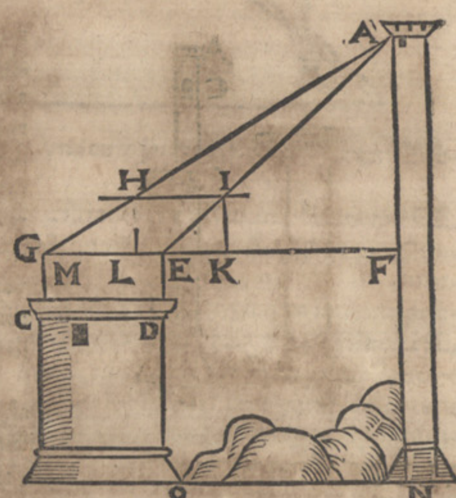


1 ALTITVDO metienda ſit AB, inacceſſibilis, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectam, ſed ſolum in tranſuerſum vſque ad D, vnde baſem A, videre poſſimus. Per problema 17. inueſtigetur ex D, interuallū tranſuerſum AC. Nam per 5. problema, quando iam diſtantia CA, manifeſta eſt, altitudo AB, reddetur nota, quam quærimus in partibus diſtantiæ inuentæ CA.

CÆTERVM ex ſcholio problematis 7. facilius per vnicam ſtationem in C, factam inueſtigabitur & altitudo AB, & diſtantia AC, vna cum hypotenuſa BC.

LONGITVDINEM maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.

PROBLEMA XX.



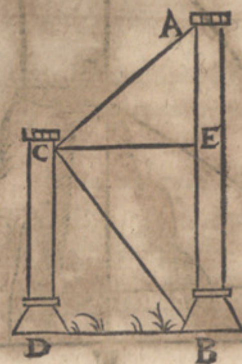
1 MAIOR altitudo AN, metienda proponatur ex minori aliqua turri CO, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C, & D, ſi planum ſummitatis id permittat, ſtaturaq; menſoris ſit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Per 6. problema reperietur altitudo AF, ad quam ſi adiicietur altitudo minor DO, vna cum menſoris ſtatura CG, hoc eſt, recta FN, cognita fiet tota altitudo maior AN.

2 QVOD ſi in ſummitate tanta planities non ſit, vt duæ ſtationes fieri poſſint, erigenda eſt haſta aliqua ad Horizontem recta, niſi forte adſit ædificium quodpiam erectum, ibique faciendæ duæ ſtationes. Nam tunc per problema 7. inuenietur altitudo inter cacumen maioris altitudinis, & rectam, quę ab inferiori ſtatione Horizonti dicitur parallela. Cui ſi apponetur altitudo minor ab inferiore ſtatione vſque ad eius baſem, conſlabitur tota altitudo maior. Vt in figuris problematis 4. ſi maior altitudo ſit GL, & minor AK, fiantq; duæ ſtationes in A, a. inferior vna, & altera ſuperior, reperietur per 7. problema altitudo GF, cui ſi addetur minor altitudo AK, ab inferiore ſtatione vſque ad baſem, componetur tota altitudo maior GL.

PORRO facilius ex ſcholio problem. 7. altitudinem AF, eruemus, ſi in G, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio diximus. Vt ſi in figura eius ſcholii maior altitudo foret IF, & minor cognita AH, inueniretur GF, vt ibi oſtenſum eſt, &c.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari.

PROBLEMA XXI.



1 IN figura problematis 17. lib. 2. addiſcatur altitudo AE, vel per problema 6. vel 7. aut potius per ſcholium problema. 7. ſi G, ſit ſummitas minoris altitudinis CD. Deinde quia baſis B, maioris altitudinis ponitur poſſe videri ex C, inquiratur etiam altitudo minor CD, per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium problem. 9. ſi C, fuerit ſummitas minoris altitudinis CD. Hæc enim adiecta ad inuentam altitudinem AE, conficiet totam maiorem altitudinem AB, notam, quæ deſideratur.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari.

PROBLEMA XXII.



1 MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur dimetienda. Intelligatur ducta recta AE, Horizonti BD, æquidiſtans, vt ED, fiat minori altitudini AB, æqualis. Si igitur ex ſummitate C, per problema 8. vel 9. aut potius per ſcholium probl. 9. exploretur altitudo CE, inſpecto nimirum cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, ex C, viſum: atq; hæc altitudo inuenta CE, ex maiore altitudine CD, quæ cognita ponitur, detrahatur, reliqua fiet minor altitudo AB, quam inquirimus.

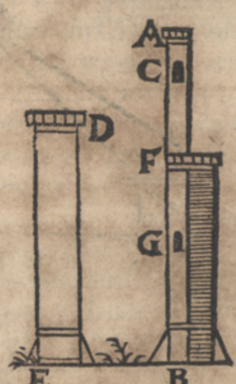
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere.

PROBLEMA XXIII.

1 FIGVRA præcedentis problematis repetatur. Et quia baſis B, minoris altitudinis, tanquam ſignum quodpiam in Horizonte poſitum, videri poteſt, ex hypotenuſi, nota efficietur per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium problemat. 9. maior altitudo CD. Quare, vt in præcedenti problemate dictum eſt, minor altitudo AB, ex maiore CD, proxime inuenta cognoſcetur. Quod eſt propoſitum.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.

PROBLEMA XXIV.

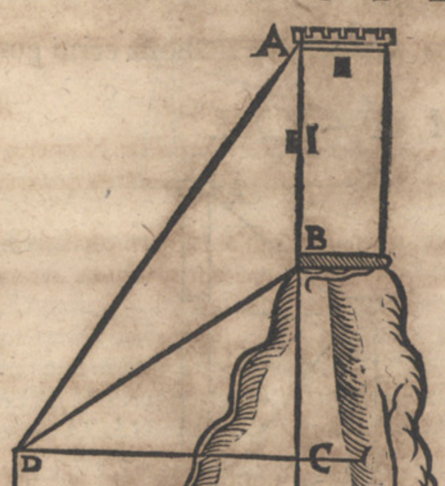


1 SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE; Item portio GF, altitudinis minoris FB, ex maiore altitudine DE. Si altitudo DE, minor eſt reliqua portione CB, maioris altitudinis, inueſtiganda erit per problema 20. vel 21. vtraque altitudo maior AB, CB, ex minori DE, prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet propoſitam portionem AC. Si vero DE, maior eſt reliqua portione FB, ſi nimirum maioris altitudinis portio AF, metienda proponatur: inueſtiganda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 20. vel 21. At vero minor altitudo FB, ex maiore DE, per problema 22. vel 23. exploranda erit, prout videlicet DE, nota fuerit, aut ignota. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem propoſitam AF.

2 NON ſecus per problema 22. vel 23. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, ſi forte illarum differentia FG, inuenienda ſit.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXV.



1 HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificii inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem BF, altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumq; turris extremum conſpiciatur, inueſtigetur per probl. 6. vel 7. tam altitudo AF, quã BF, prout ſcilicet duę ſtationes fiunt aut in plano, aut in aliqua haſta erecta. Vtraq; tamen altitudo AF, BF, facilius inuenietur per ſcholium proble. 7. ſi in E, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio factum eſt. Vtraque altitudine inuenta, altitudo montis BF, dempta ex tota altitudine AF, notam relinquet optatam altitudinem AB.

SCHOLIVM.

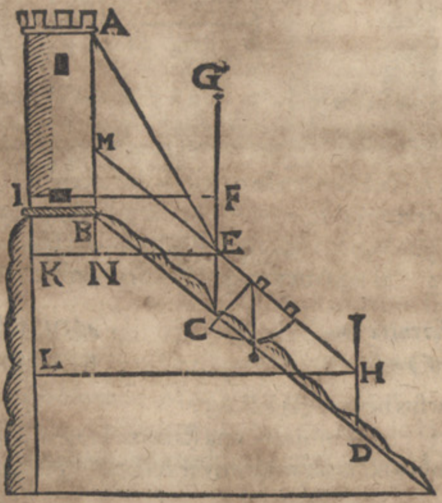
ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AF, deſideretur, indaganda erit per probl. 6. vel 7. aut potius per ſcholium probl. 7. tam tota altitudo AF, quam eius portio BF. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB, deſideratam. *Suprema, media atque infima pars altitudinis, quo pacto metienda ſit.*

SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda ſit, coniicienda rurſum erit per problem. 6. vel 7. aut potius per ſcholium probl. 7. vtraque altitudo IF, BF; vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique infima pars BF, proponatur inquirenda, exploranda ea erit per problema quoque 6. vel 7. aut potius pct ſcholium probl. 7.

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam.

PROBLEMA XXVI.



1 SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu, ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre non poſſit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis, aut Horizonti æquidiſtans. Applicato autem quadrato ſtabili ad haſtam in puncto E, (ſi pendulum adhibeatur, conſtituendus etiam erit oculus in E,) dirigatur dioptra verſus cacumen A; & per vmbram abſciſſam inueniatur angulus AEK, vt in problemate 1. tradidimus. Deinde fiat alia ſtatio ſuperior in F, in haſta, ductaque per cogitationem recta FI, ad altitudinem perpendiculari, dirigatur rurſus dioptra verſus A, atq; eodem modo angulus eruatur AFI.[a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, æqualis eſt, ſi auferatur AEF, complementum prioris anguli AEK, in ſtatione inferiori E, inuenti, ex AFG, complemento poſterioris anguli in ſuperiori ſtatione F, deprehenſi, reliquus fiet angulus EAF, cognitus. Quonim igitur in triangulo AEF, duo anguli A, E, cogniti ſunt, vna cum latere EF, hoc eſt, cum differentia ſtationum,[b] nota fient reliqua latera AE, AF. *a 32. prim.* *b 10. Tria. rectil.*

2 POST hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, applicetur ad H, quadratum, ac dioptra in punctum E, dirigatur, rurſumque per problema 1. ex vmbra abſciſſa angulus eliciatur EHL, ac radius viſualis HE, altitudini occurrere concipiatur in M,[c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda etenim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta linea iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris pertineret. [d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK internus externo æqualis eſt, ſi EHL, cognitus, hoc eſt, MEK, ex angulo AEN, in priori ſtatione E obſeruato, detrahatur, notus relinquetur angulus AEM: Eſt autem & angulus EAM, cum complementum ſit anguli AEN, in priori ſtatione E, obſeruati, cognitus. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, ſi NMH, complementum anguli MHL, in ſtatione poſtrema H, inuenti ex duobus rectis detrahatur. Quapropter cum in triãgulo AEM, omnes anguli noti ſint, vna cum latere AE, quod paulo ante inueniemus,[e] cognoſcentur quoque reliqua duo latera ME, AM, ac propterea diſtantia EM, vel CB, inuenta erit. Et ſi rectæ AM, inuentæ addatur menſoris ſtatura MB, tota turris altitudo AB, cognita erit. *c 33. primi.* *d 29. pri.* *e 10. Tria. rectil.*

CVRANDVM autem eſt magnopere, vt tria puncta B, C, D, in vna linea recta iaceant, id quod in problemate 22. lib. 2. faciendum eſſe monuimus.

3 QVOD ſi baſis altitudinis ex latere montis videri poſſit, nullo ferme labore problema per vnicam ſtationem efficiemus. Nam ſi in D, ſtatuatur quadratum, ita vt centrum dioptræ ſit ſuperius, & latus infimum recta in B, feratur, dirigenda erit dioptra verſus idem punctum B.[f] Nam ſi fiat *f 4. ſexti.*

Vt vmbra verſa abſciſſa	*ad latus quadrati:*	*Ita latus quadrati*	*ad aliud.*

inuenietur diſtantia DB, in partibus lateris quadrati, vt liquido conſtat ex iis, quæ in probl. 15. Numer. 5. ſcripſimus, patetque in 1. figura eiuſdem problematis; ſi in ea cogitetur aſcenſus montis AF, in ſecundo quadrato, & F, baſis altitudinis monti impoſitæ.

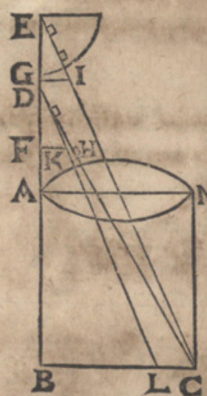
DEINDE ſi idem quadratum in D, ita ſtatuatur, vt rurſus centrũ dioptræ ſit in ſublimi, & latus infimum ad faſtigium altitudinis A, recta tendat, idemque punctum A, per dioptram inſpiciatur, reperietur eodem pacto diſtantia à D, vſque ad A; ſi fiat,

Vt vmbra verſa abſciſſa	*ad latus quadrati:*	*Ita latus quadrati*	*ad aliud,*

POSTREMO, accommodato quadrato, ita vt vnum latus rectæ DB, congruat, & dioptra in A, dirigatur, inuenietur angulus, quem rectæ DB, DA, efficiunt, vt in problem. 16. Num. 1. docuimus. Si ergo hic angulus ſeorſum deſcribatur, & in rectis DB, DA, capiantur duæ portiones proportionales, vt in eodem problem. 16. Numer. 2. tradidimus, reperietur altitudo AB, per interuallum inter duas illas portiones, vt ibi interuallum CD, indagauimus.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam.

PROBLEMA XXVII.



1 HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt in problem. 9. factum eſt. Quare eius problematis praxim hic breuiter repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignum quodpiam C, in fundo poſitum conſpici poſſit. Erecta haſta AE, in orificio putei, vel ſummitate ædificii, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, & applicato latere quadrati ad haſtam bis, vt modo centrum dioptræ in D, & modo in E, ſtatuatur, dirigatur dioptra verſus C. Si igitur in vtraque ſtatione dioptra vmbram rectam interſecet, quod plerunque in puteorum dimenſione fieri ſolet: Fiat autem,

Vt differentia vmbrarum rectarum	*ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra recta maior*	*ad EB,*

exibit recta EB, nota in partibus differentiæ ſtationum DE. Si ergo auferatur recta EA, compoſita ex differentia ſtationum DE, & portione haſtæ DA, quæ plerunq; ſtaturæ menſoris eſſe ſolet æqualis, vel certe facile menſurari poteſt, nota relinquetur altitudo AB, quæſita.

2 SI vero in vtraque ſtatione vmbra verſa interſecetur, & fiat,

Vt differentia vmbrarum verſarum	*ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra verſa maior*	*ad EB,*

fiet rurſus nota recta EB, &c.

3 SI denique in vna ſtatione latus vmbræ rectæ ſecetur, & in altera latus vmbræ verſæ, reducenda erit vel vmbra recta ad verſam, vel verſa ad rectam. Nam ſi rurſus fiat

Vt differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarum,	*ad DE, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra verſa vel recta maior*	*ad EB,*

iterum producetur recta EB, in partibus differentiæ ſtationum DE, &c.



PER vnicam quoque ſtationem aſſequemur altitudiem putei, quemadmodum in ſcholio probl. 9. ex montis vertice eius altitudinem menſi ſumus: ſi videlicet in A, quadratum ita ſtatuatur, vt centrum a, dioptræ ſuperius ſit, & latus infimum AC, ex A, ad punctum C, vergat, ad inueniendam diſtantiam, vel hypotenuſam AC, &c. vt in eo ſcholio factum eſt, atq; hæc figura appoſita declarat. Secundo enim quadratum ita locandum eſt, vt A, centrum dioptræ ſit in A, & latus AD, lateri pntei AB, adhæreat; adeo vt per dioptram puncto C, inſpecto, radius viſualis ab hypotenuſa AC, non differat. Itaque ſi fiat.

Vt e b, vmbra verſa	*ad latus b a,*	*ita latus a A,*	*ad aliud,*

inuenietur hypotenuſa AC. Inuenta deinde portione dioptræ AE, in ſecundo quadrato, vt in ſcholio proble. 7. docuimus:[a] Si rurſus fiat,

a 2. ſexti & componendo.

Vt portio dioptræ AE, inuenta	*ad hypotenuſam inuentam AC:*	*ita latus AD,*	*ad aliud*

prodibit altitudo, ſiue profunditas AB.

4 QVOD ſi latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, quæ facile per aliquam menſuram cognoſci poterit, facilius per vnam duntaxat ſtationem in D, factam, & per vnicam applicationem quadrati, profunditatem AB, coniiciemus. Nam ſi fiat,

Vt vmbra recta, ſi ea abſciſſa fuerit,	*ad latus quadrati:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

Vel

Vt latus quadrati	*ad vmbram verſam, ſi ea fuerit abſciſſa:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

producetur AB, profunditas nota in partibus latitudinis.

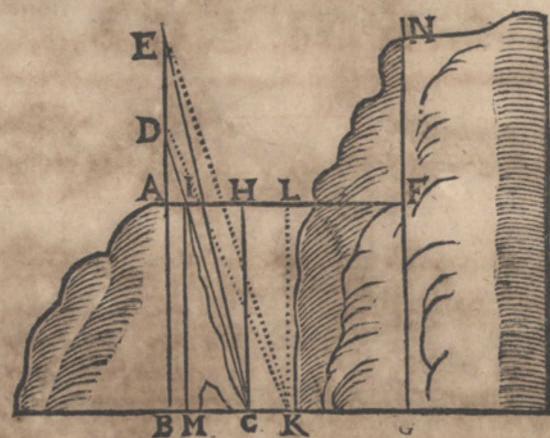
Et ſi

ET ſi forte dioptra per punctum C, in quadrato tranſeat, erit latitudo BC, rectæ AB, æqualis.

HÆ porro praxes demonſtratæ ſunt omnes in prædicto probl. 9. hac vltima Numer. 4. excepta, quam in problem. 8. Num. 4. demonſtrauimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere.

PROBLEMA XXVIII.



1 * HOC etiam aliud nihil eſt, niſi altitudinem quampiam ex eius ſummo faſtigio per duas ſtationes in haſta aliqua erecta dimetiri, vt in problem. 9. factum eſt, & in præcedenti problemate repetitum. Sit enim vallis inter duos montes AB, NG, poſita, & terminus ipſius C, ex monte AB, conſpici poſſit. Erecta haſta AE, in qua duæ ſtationes oculi menſoris fieri poſſint in D, E, ſi reliqua conſtruantur, vt in problemate 24. lib. 2. cuius hic figuram iterauimus; inueſtigabitur recta EB, vt in 1. figura præcedentis probl. recta EB, fuit inuenta. Et ſi dematur portio haſtæ AE, altitudo montis AB, vel profunditas vallis HC, reliqua fiet nota.

2 DESCENSVS autem obliquus IC, ita colligetur. Per vmbram à dioptra ad C, directa abſciſſam eliciatur angulus BDC, ex 1. problemate, hoc eſt, angulus CIM,[a] qui ei æqualis eſt, externus interno; eritque proinde reliquus angulus ICM, notus, vt pote illius complementum. Quocirca cum in triangulo CIM, anguli acuti cogniti ſint, vna cum latere IM, nuper inuento;[b] baſis IC, ignorari non poterit.

a 29. prim.
b 5. Triang. rectil.

SED hæc omnia facilius per vnicam ſtationem inueſtigabuntur, ſi in D, puncto haſtæ quadratum bis applicetur, vt in præcedenti problemate Num. 2. & in ſcholio problem. 9. factum eſt in puncto A, &c.

3 QVOD ſi terminus C, non cernatur, eligatur aliquod ſignum K, in valle, quod ex ſtationibus D, & E, appareat. Ita enim per problema 9. vel potius per eius ſcholium, eadem altitudo IM, vel HC, inuenietur.

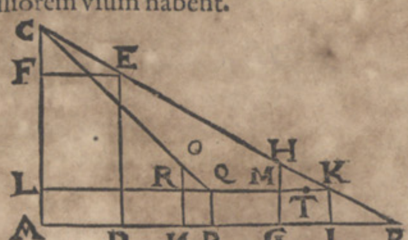
IMMO ſi in plano vallis duæ ſtationes commode fieri poſſint, percipietur ex illis eadem altitudo IM, per problem. 6. vel per ſcholium probl. 7. Deſcenſus vero obliquus IC, tanquam interuallum inter duo ſigna I, & C, per problema 16. indagandus erit.

4 EANDEM denique profunditatem CH, venari licebit ex altiore monte NG, ſi modo terminus C, minoris montis, vel aliquod ſignum in valle appareat ex cacumine N, non aliter, quam in problemate 22. vel 23. minorem altitudinem ex maiore deprehendimus. Nam hic minor altitudo inquirenda eſt CH, & maior NG, ex cuius vertice N, terminum C, videri poſſe ſtatuimus.

DISTANTIAM inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt.

PROBLEMA XXIX.

1 ABSOLVTIS dimenſionibus, quæ per quadrantem, & quadratum fieri ſolent, libet nonnullas alias rationes dimetiendi adiungere, vt illis, quando neque quadrans, neque quadratum adeſt, vti poſſimus. Ex pluribus autem modis illas ſolum ſeligemus, quæ faciliorem vſum habent.



SIT ergo diſtantia metienda DB. In D, erigatur baculus DE, minor altitudine AC, ab oculo menſoris ad pedes, rectus ad Horizontem, quod fiet, ſi filum cum perpendiculo baculo adhærebit, vel lapillus ex E, demiſſus in punctum D, cadet. Deinde retrocedat menſor vſq; ad A, donec radius viſualis ex C, prodiens, & per extremum E, baculi tranſiens occurrat puncto B; intelligaturque duci recta EF, ipſi AB, parallela. Quoniam igitur triangula CFE, EDB, æquiangula ſunt; quod anguli F, D, ſint recti,[a] & ECF, BED, æquales, internus & externus, &c.[b] Si igitur fiat.

a 29. prim.
b 4. ſexti.

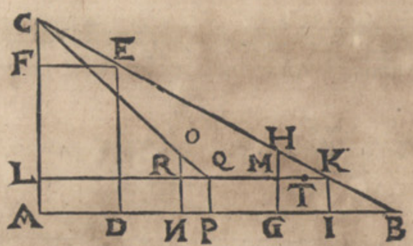
Vt CF, differentia inter baculum DE, & menſoris ſtaturam AC,	*ad FE, ſpatium inter menſorem & baculum:*	*Ita ED, longitudo baculi noti*	*ad DE,*

nota prodibit diſtantia quæſita DB, in partibus baculi DE, vel ſtaturæ menſoris AC. Debent enim baculus, & ſtatura menſoris per vnam eandemque menſuram eſſe cognita.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per baculum indagare.

PRO-

PROBLEMA XXX.



1 SIT in figura præcedentis problematis metienda altitudo AC. Figatur in terra baculus GH, rectus ad Horizontem, & aliquantulum maior ſtatura menſoris ab oculo ad pedes quæ ſit IK. Deinde retrocedat menſor vſque ad I, ita vt eius oculus in K, conſtitutus faſtigium C, inſpiciat: intelligaturque ducta recta KL, Horizonti AB, parallela, ſecans baculum in M.[a] Quoniã igitur triangula KMH, KLC, ſimilia ſunt, propter parallelas MH, LC: ſi fiat,

a coroll. 4. ſexti.

Vt KM, ſpatium inter menſorem, & baculum	*ad MH, differentiam inter baculum & ſtaturam menſoris:*	*Ita diſtantia KL, quæ nota fiat per aliquam menſuram,*	*ad LC,*

producetur recta LC, cui ſi adiicietur ſtatura menſoris AL, tota altitudo propoſita AC, cognita erit in partibus ſtaturæ menſoris, vel diſtantiæ KL.

2 QVOD ſi acceſſus non pateat ad altitudinem AC, vt diſtantiam IA, metiri poſſimus, figatur idem baculus, vel alius illi æqualis NO, accedendo videlicet propius ad altitudinem. Deinde menſor retrocedat ad P, vt eius oculus in Q, exiſtens per ſummitatem baculi O, iterum faſtigium C, videat: ſeceturque baculus NO, à
b 4. ſexti. recta KL, in R.[b] Et quia eſt, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC: Item vt QR, ad RO, ita QL, ad LC:[c] Eſt autem ma-
c 8. quinti. ior proportio KL, ad LC, quam QL, ad eandem LC; erit quoque maior proportio KM, ad MH, quam QR, ad RO, ipſi MH, æqualem. (Cum enim & totæ GH, NO, & ablatæ GM, NR, æquales ſint, erunt quoque reliquæ
d 10. quint. MH, RO, æquales)[d] Igitur KM, maior erit, quam QR. Abſciſſa ergo KT, æquali ipſi QR,[e] quoniam eſt, vt KM,
e 4. ſexti. ad MH, ita KL, ad LC, erit permutando, vt KM, tota ad totam KL, ita MH, ad LC. Eadem ratione erit QR, hoc eſt, KT, ablata ex KM, ad QL, ablatam ex KL, vt RO, ad LC, hoc eſt, vt MH, ad LC. Igitur & reliqua TM, ad reliquam KQ, erit vt tota KM, ad totam KL : Vt autem KM, ad KL, ita paulo ante oſtendimus eſſe MH, ad LC. Quapropter ſi fiat.

Vt TM, differentia inter ſpatia KM, & QR, vel KT, à menſore vſque ad baculos,	*ad KQ, differentiam ſtationum:*	*Ita MH, differentia inter baculum, & menſoris ſtaturam,*	*ad LC,*

efficietur nota LC, cui ſi addetur ſtatura menſoris AL, nota quoque euadet propoſita altitudo AC.

3 IAM ſi prima ſtatio fiat in Q, & ſecunda in K, recedendo magis ab altitudine, non variabitur praxis & demonſtratio, vt liquet.

DISTANTIAM in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis beneficio normæ adinuenire.

PROBLEMA XXXI.



1 PROPOSITA ſit diſtantia AB. In A, loco menſoris figatur ad angulos rectos baculus AC, paulo minor ſtatura menſoris, & per menſuram, per quam menſoris ſtatura cognita eſt, notus. Angulus deinde rectus normæ C, ſummitati baculi applicetur, & eius latus CE, circa C, paulatim attollatur, deprimaturue, donec radius viſualis per latus interius normæ CE, incedens feratur in punctum extremum B, diligenterque notetur punctum F, in quod radius viſualis per alterum latus interius CD, tranſiens incidit.[a] Et quoniam AC, media eſt proportiona-
a coroll. 8. ſexti. lis inter AF, quæ in partibus baculi nota efficiatur, & diſtantiam AB: ſi fiat,

Vt AF, inter baculum, & punctum F, cognita	*ad baculum AC:*	*Ita baculus AC,*	*ad AB,*

Hoc eſt, ſi quadratus numerus baculi per AF, diuidatur, prodibit in Quotiente diſtantia AB, nota in partibus baculi.

2 NON abs re foret, ſi duo clauiculi in vtroque latere normæ interiori affigerentur, vt radius viſualis per illos incedens rectius in B, & F, feratur.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per normam inueſtigare.

PROBLEMA XXXII.

1 IN figura præcedẽtis problematis ſit metiẽda altitudo GH. Figatur rurſus in A, loco menſoris baculus AC, cuius ſummitati C, angulus rectus normæ applicetur, eiuſque latus CE, paulatim eleuetur, deprimaturue, donec.

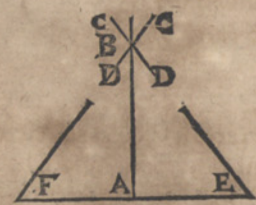
donec per latus interius CE, vertex altitudinis H, conſpiciatur, punctumq; F, in quo alterum latus CD, incurrit, notetur. Et quoniam ducta recta CI, Horizonti parallela, triangula ACF, HCI, æquiangula ſunt; quod anguli A, I, recti ſint, & ACF, HCI, reliqui ex rectis ACI, HCD, (ſi nimirum communis auferatur DCI,) æquales: [a] ſi fiat, a 4. ſexti.

Vt baculus AC, *ad AF, inter baculum, & punctum F, cognitam:* *Ita diſtantia CI, vel AG, quæ nota fiat per aliquam menſuram* *ad IH,*

procreabitur IH, nota, ad quam ſi adiicietur longitudo baculi AC, vel GI, propoſita altitudo GH, cognita erit.

DISTANTIAM in plano Horizontis, quæ non ſit valde magna, alio modo facillimo dimetiri.

PROBLEMA XXXIII.

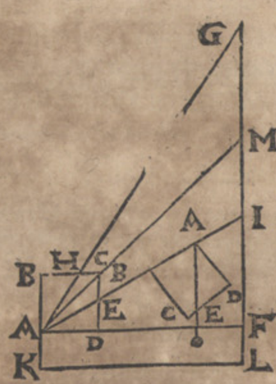


1 QVANDO planum aliquod exiguam habet longitudinem, ſed tamen menſurari non poteſt, ob aliquod impedimentum, cuiuſmodi ſunt latitudines fluminum, & ſtagnorum, quorum latitudines, quas nunc pro longitudinibus accipimus, menſurari nequeunt, ob interiectam aquam, vtemur inter alia hoc etiam artificio. Prope ripam fluminis, aut ſtagni, vel alterius cuiuſcunque rei metiendæ, figatur baculus AB, ad Horizontem rectus, cui in puncto B, accommodetur virgula CD, ita vt circa B, deprimi aut eleuari poſſit, donec radius viſualis per CD, tranſiens occurrat extremo E, diſtantiæ AE, metiendæ. Deinde virgula CD, manente immobili, ne angulus DBA, mutetur, vertatur baculus AC, ad rectos ſemper angulos Hoxizonti inſiſtens, donec radius viſualis per eandem virgulam CD, incedens occurrat plano alicui prope flumen, aut ſtagnum, in quo nimirum menſor exiſtit, & quod menſurari poſſit, in puncto F. Quoniam ergo duo anguli A, B, trianguli ABE, duobus angulis A, B, trianguli ABF, æquales ſunt, & latus AB, commune: [a] erunt latera AE, AF, æqualia: atque idcirco, ſi FA, in plano per aliquam menſuram efficiatur nota; diſtantia quoque AE, cognita erit. a 26. primi.

2 ALII hoc ipſum efficiunt ſine baculo, hac ratione. Erigunt ſe ad angulos rectos cum Horizonte: Deinde deprimunt pileum, qui ſit aliquantulum latus, donec radius viſualis per extremitatem pilei excurrens incidat in terminum E, diſtantiæ AE, metiendæ: Pileo vero immobili manente, vertunt ſe verſus planum aliquod menſurabile, notantque in eo punctum F, in quo radius viſualis ipſi plano occurrit. Nam rurſus longitudo AF, quæ per menſuram aliquam cognoſcenda eſt, diſtantiæ AE, propoſitæ æqualis eſt: propterea quod ſtatura menſoris fungitur tunc munere baculi AB, & pileus depreſſus vices gerit virgulæ CD, vt conſtat.

ALTITVDINEM cuiuſque rei erectæ ex eius vmbra, quam Sole lucente proiicit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere.

PROBLEMA XXXIV.



1 HOC problema à quinto non differt, niſi quod hic vtimur radio Solis pro radio viſuali, & longitudine vmbræ, quam altitudo, Sole lucente, proiicit, pro diſtantia à menſore ad altitudinem vſque. Sit ergo altitudo FG, vel FI, vel FM, eiuſque vmbra proiecta FA. Dirigatur quadratum verſus Solem (licet hoc non fiat è directo altitudinis) & tranſeunte radio Solis per foramina pinnacidiorũ, notetur quanta vmbra ſiue recta, ſiue verſa à dioptra, vel filo perpendiculi in quadrato abſcindatur. Nam ita ſeſe habebit vmbra recta HB, in quadrato ad latus AB, vt vmbra proiecta AF, ad altitudinem FG. Item ea eſt proportio lateris AD, ad vmbram verſam DE, in quadrato, quæ vmbræ proiectæ AF, ad altitudinem FI. Denique dioptra, vel filo perpendiculi per punctum C, incedente, tanta erit vmbra proiecta AF, quanta eſt altitudo FM, quæ omnia in problemate 5. demonſtrata ſunt. Igitur ſi fiat

Vt vmbra recta, HB, in quadrato abſciſſa *ad latus AB,* *Ita longitudo vmbræ proiectæ AF,* *ad FG,*

Vel

Vt latus AD, *ad vmbram verſam, DE, abſciſſam in quadrato:* *Ita longitudo vmbræ proiectæ AF,* *ad FI,*

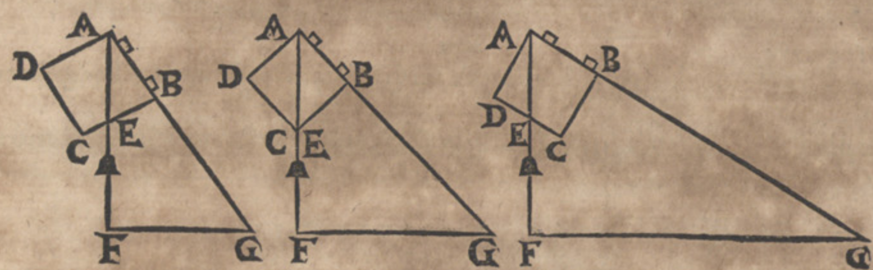
altitudo propoſita FG, vel FI, proueniet nota, &c.

LONGITVDINEM vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando altitudo eſt cognita, ope quadrati apertam, & manifeſtam facere.

PRO-

PROBLEMA XXXV.

1 HOC etiam problema à ſecundo diuerſum non eſt: ſolum hic pro diſtantia accipimus longitudinem vmbræ, quam altitudo nota, Sole lucente, proiicit. Sit ergo altitudo AF, eiuſque vmbra proiecta FG. Dirigatur quadratum verſus Solem, vbicunque menſor extra vmbram cōſtiterit, & tranſeunte radio Solari per pinnacidiorum foramina obſeruetur vmbra ſiue recta, ſiue verſa, quam filum perpendiculi, vel dioptra abſcindet.



Ita namque ſe habebit latus quadrati BA, ad vmbram eius rectam BE, abſciſſam, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Item ſic erit vmbra verſa DE, in quadrato ad latus AD, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Dioptra denique, vel filo perpendiculi per punctum C, tranſeunte, altitudo AF, longitudini vmbræ proiectæ FG, æqualis eſt, quæ omnia in problemate 2. demonſtrauimus. Quamobrem ſi fiat,

Vt latus AB, *ad vmbram rectam abſciſſam BE,* *Ita altitudo nota AF,* *ad FG,*

Vel

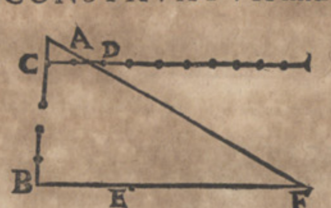
Vt vmbra verſa DE, abſciſſa in quadrato *ad latus AD,* *Ita altitudo nota AF,* *ad FG,*

exibit nota longitudo vmbræ proiectæ FG, &c.

DISTANTIAM in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, beneficio ſimpliciſſimi cuiuſdam inſtrumenti comperire.

PROBLEMA XXXVI.

1 CONSTRVATVR inſtrumentum hoc modo. Accipiatur baculus rectus AB, paulo minor, quam menſoris ſtatura, diuidaturque in 5. partes, vel etiam plures, paucioresue æquales, & in prima eius parte C, vel in alia quacunque, infigatur alius baculus CD, ad rectos angulos, in quo ſumantur ordine quotcunq; palmi, aut pedes. In extremitate quoq; baculi AB, infigatur alius baculus BE, ad angulos rectos: cōſtructumq; erit inſtrumentū, quo varias magnitudines licebit metiri, vt patebit:



Sit enim primum metienda diſtantia BF, cuius terminum F, menſor in altero termino B, exiſtens videre poſſit ex A, etiamſi in medio ſint valles, & alia impedimenta. Conſtituatur inſtrumentum in tali ſitu, vt AB, ſit ad Horizontem perpendicularis, & BE, eidem æquidiſtans. Inſpecto extremo F, ex A, notetur ſumma cura ac diligentia punctum D, in baculo CD, per quod radius viſualis tranſit. [a] Nam cum triangula ACD, ABF, ſint ſimilia [b] ſi fiat,

a coroll. 4. ſexti.
b 4. ſexti.

Vt AC, *ad AB,* *Ita CD,* *ad BF,*

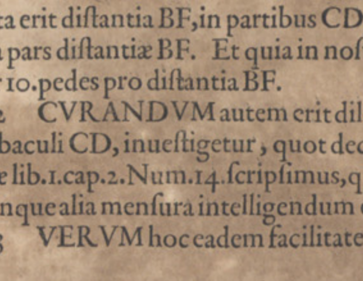
inuenta erit diſtantia BF, in partibus CD. Itaque ſi AC, eſt quinta pars, verbi gratia, baculi AB, erit quoque CD, quinta pars diſtantiæ BF. Et quia in noſtro exemplo CD, continet 2. pedes, ſi eos multiplicemus per 5. producentur 10. pedes pro diſtantia BF.

2 CVRANDVM autem erit diligenter, vt quando radius viſualis non tranſit per aliquem pedem integrum baculi CD, inueſtigetur, quot decimæ, vel centeſimæ vnius pedis in particula abſciſſa contineantur, per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus, quod fiet, ſi in regula CD, decem pedes comprehendantur. Idemque de quacunque alia menſura intelligendum eſt, ſi ea in CD, loco pedum ſignetur.

3 VERVM hoc eadem facilitate præſtitimus ope quadrati, tum penduli, tum ſtabilis.

DISTANTIAM inter duo montium aut turrium cacumina, ope prædicti inſtrumenti coniicere.

PROBLEMA XXXVII



1 SINT duo cacumina montium F, G. Poſito puncto B, prædicti inſtrumenti in cacumine F, minoris montis, deprimatur baculus AB, donec baculus BE, recta in cacumen G, tendat, quod per duos clauiculos in B, E, infixos, facile fiet, vt Numer. 2. problem. 31. diximus. Manente in hoc ſitu inſtrumento, inſpiciatur cacumen G, ex A, obſeruetureque punctum D, interſectionis radii AG, cum baculo CD. [a] Nam cum æquiangula ſint triangula ACD, ABG, ſi fiat,

a coroll. 4. ſexti.

Vt AC,

Vt AC, nota in partibus AB, *ad AB, notarum partium:* *Ita CD, nota in data menſura* *ad BG,*

cognoſcetur diſtantia BG, in partibus CD. Vt ſi AC, eſt quinta pars ipſius AB, & CD, contineat 1. pedem, & inſuper $\frac{2}{3}$. ſi $1\frac{2}{3}$. quinquies ſumatur, efficietur diſtantia BG, pedum $8\frac{1}{3}$.

2 NON aliter diſtantia bF, ex maioris montis cacumine G, inueſtigabitur, vt figura indicat.

EODEM modo procedet, ſi puncta F, G, ſint faſtigia duarum turrium, aut ſi vnum ſit faſtigium turris & alterum cacumen montis, vt conſtat.

3 IDEM hoc per quadratum fiet hoc modo. Sit quadratum a b f g, ſtatuaturque angulus b, in cacumine G, & latus b f, deprimatur, ita vt recta in cacumen F, tendat, ſi productum intelligatur, obſeruetúrq; vmbra verſa abſciſſa g h, à radio viſuali aB. Nam quia triangula a g h, Bb a, æquiangula ſunt,[a] ſi fiat a 4. *ſexti.*

Vt g h, vmbra verſa *ad g a, latus quadrati:* *Ita latus quadrati a b,* *ad B b,*

hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris, nimirum 100000. diuidatur per vmbram verſam, gignetur in Quotiente diſtantia Bb.

IDEMQVE fieret, ſi angulus Quadrati in B, collocetur, infimumque latus recta à B, in cacumen G, tenderet, &c.

LONGITVDINEM aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto, videatur, eiuſdem inſtrumenti beneficio cognoſcere.

PROBLEMA XXXVIII.

1 ACCOMMODETVR prædictum inſtrumentum, vt punctum B, in radice montis ſtatuatur, & baculus BE, beneficio duorum clauiculorum infixorum, vt Num. 2. problematis 31. dictum eſt, recta in cacumen F, vergat; noteturq; interſectio D, radij viſualis cum baculo CD, inſpecto cacumine F, ex A.[a] Nam iterum triangula ACD, ABF, ſimilia erunt.[b] Quare ſi fiat,



a coroll. 4. *ſexti.*
b 4. *ſexti*

Vt AC, nota in partibus AB, *ad AB, notarum partium:* *Ita CD, nota in data menſura* *ad BF,*

cognoſcetur aſcenſus obliquus montis B, F, in partibus CD.

2 PARI ratione, ſi F, ſit faſtigium alicuius turris, inueſtigabis diſtantiam à puncto B, in terra vel alibi poſito, vſque ad F, hoc eſt hypotenuſam BF, vt perſpicuum eſt. Atque hoc eodem inſtrumento complures aliæ dimenſiones abſolui poterunt, quod prudens lector facile perſpiciet.

3 IDEM aſſequemur quadrato ABGH, ſi eius angulus B, in radice ſtatuatur, & latus BG, eleuetur, ita vt recta tendat in cacumem F. Obſeruata enim vmbra verſa HI, quam dioptra in cacumen F, directa abſcindit, fiunt triangula AHI, FBA, æquiangula.[c] Quamobrem, ſi fiat, c 4. *ſexti.*

Vt HI, vmbra verſa *ad AH, latus quadrati:* *Ita latus quadrati AB,* *ad BF,*

id eſt, ſi quadratus numerus 1000000. lateris diuidatur per vmdram verſam, dabit quotiens numerus longitudinem aſcenſus obliqui BF.

ALTITVDINEM, ad cuius baſem pateat acceſſus, beneficio ſpeculi plani, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere.

PROBLEMA XXXIX.

1 SIT altitudo AB, à cuius baſe B, recedatur per quotuis paſſus, aut pedes, vſque ad C, punctum, in quo ſpeculi plani centrum collocetur, & ſecundum rectam B C, retrocedatur, donec menſoris oculus in E, conſtitutus cacumen A, intueri poſſit per radium reflexum ECA, ita vt DE, ſit ſtatura menſoris ab oculo vſq; ad planum. Et quoniam angulus incidentiæ DCE, æqualis eſt angulo reflexionis ACB, vt Perſpectiui docent, & anguli D, B, recti ſunt; erunt triangula DCE, BCA, æquiangula;[a] ideoque erit, vt CD, ad DE, ita CB, ad BA. Quocirca ſi fiat, a 4. *ſexti.*



Vt CD, diſtantia menſoris à ſpeculo C, *ad DE, ſtaturam menſoris:* *Ita CB, diſtantia ſpeculi ab altitudine* *ad BA,*

producetur altitudo BA, quam quærimus, nota in partibus ſtaturæ menſoris DF.

ALITER.

2 MENSVRETVR per quadrantem angulus DCE, BCA, (Hoc fiet, ſi angulus rectus conſtruatur FGH, & recta FG, tot particulas æquales contineat, quot paſſus, vel pedes in CD, diſtantia continentur: Item

tem recta GH, tot particulas eaſdem, quot paſſus aut pedes ſtatura menſoris DE, complectitur. Iuncta namque
b 4. primi. recta FH,[b] erit angulus F, angulo C, æqualis, quem angulum F, nullo negotio per quadrantem aliquem in gradus diuiſum cognoſcemus.) Nam ſi poſito ſinu toto CB, fiat,

Vt ſinus totus CB,	*ad BA, tangentem anguli reflexionis BCA, vel incidentiæ DCE, quem proxime inuenimus:*	*Ita CB, diſtantia cognita*	*ad BA,*

prodibit altitudo BA, nota in partibus diſtantiæ CB. Et ſi rurſum fiat,

Vt ſinus totus CB,	*ad CA, ſecantem eiuſdem anguli BCA:*	*Ita CB, diſtantia cognita*	*ad CA,*

cognita etiam erit CA, diſtantia à ſpeculo C, vſque ad cacumen A, in partibus diſtantiæ CB.

ALITER.

c 10. Triā. rectil. 3 PER ſolos ſinus ita progrediemur, ſi libet.[c] Fiat,

Vt ſinus anguli A, complementi anguli C, reflexionis, vel incidentiæ,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus anguli C, incidentiæ, vel reflexionis,*	*ad BA,*

d 10. trian. rectil. Nam productus numerus dabit altitudinem BA, notam in partibus diſtantiæ CB.[d] Rurſus fiat,

Vt ſinus anguli A, complementi anguli eiuſdem C,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus totus recti anguli B,*	*ad CA,*

Numerus enim proueniens dabit hypotenuſam CA, in partibus diſtantiæ CB, cognitam.

ALTITVDINEM inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere.

PROBLEMA XL.

1 SIT rurſus in præcedenti figura altitudo AB, ſupra planum BD, erecta. Collocato ſpeculo plano in C, recedatur ab altitudine ad D, donec cacumen A, per radium reflexum ECA, cerni poſſit, obſeruetur que per quadrantem angulus ECD, ideoque & angulus ACB, vt in problemate præcedenti Num. 2. dictum eſt. Deinde collocato ſpeculo in K, puncto, quotuis paſſibus à C, verſus altitudinem diſtante, recedatur iterum ad I, donec cacumen A, inſpiciatur rurſum per radium reflexum LKA; inquiraturque magnitudo anguli IKL, ideoque & anguli AKB. Et quoniam poſito ſinu toto AB, rectæ BK, BC, tangentes ſunt angulorum BAK, BAC, qui complementa ſunt angulorum K, C, reflexionum per quadrantem cognitorum; cognita erit KC, earum tangentium differentia. Si ergo fiat.

Vt KC, differentia tangentium, quæ complementis angulorum incidentiæ debentur,	*ad AB ſinum totum*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad AB,*



procreabitur numerus, qui altitudinem AB, notam exhibebit in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

RVRSVS ſi fiat,

Vt KC, differentia tangentium complementorum angulorum incidentiæ ſpeculi	*ad CB, tangentem maiorem:*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad CB,*

reperietur CB, maior diſtantia ſpeculi C, ab altitudine. Ex qua ſi auferatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, nota remanebit KB, minor diſtantia ſpeculi K, ab eadem altitudine. Quæ etiam inuenietur, ſi fiat, vt KC, differentia tangentium prædictorum angulorum, qui complementa ſunt angulorum incidentiæ in ſpeculo, ad KB, tangentem minorem: Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi ad aliud, vt perſpicuum eſt.

a 32. prim. [a] DEINDE quia angulus AKB, in propinquiore ſpeculi poſitione duobus angulis ACK, CAK, æqualis eſt, ſi angulus ACK, remotioris poſitionis detrahatur ex angulo AKB, poſitionis propinquioris: remanebit an-
b 10. trian. rectil. gulus CAK, notus.[b] Si igitur fiat,

Vt ſinus anguli CAK, differentiæ angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli AKC, complementi anguli AKB, ad duos rectos in propinquiore poſitione ſpeculi*	*ad CA,*

c 10. triang. rectil. gignetur hypotenuſa CA, remotioris poſitionis ſpeculi, in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.[c] Et ſi rurſus fiat,

Vt ſi-

Vt ſinus anguli CAK, differentia angulorum incidentiæ	*ad KB, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli reflexionis ACK, in remotiori poſitione ſpeculi,*	*ad KA,*

procreabitur quoque hypotenuſa KA, propinquioris poſitionis ſpeculi, in eiſdem partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

ALITER

2 PER ſolos ſinus idem aſſequemur hoc modo. Inuenta hypotenuſa CA, vt proxime diximus, per ſinus [d] fiat (d 10. trian. rectil.)

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli ACB, remotioris poſitionis ſpeculi*	*ad AB,*

Prodibit enim in Quotiente altitudo AB, nota in partibus hypotenuſæ inuentæ CA. [e] Quod ſi rurſus fiat, (e 10. trian. rectil.)

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli BAC, complementi anguli in remotiore poſitione ſpeculi*	*ad CB,*

Producetur CB, maior ſpeculi diſtantia ab altitudine. Ex qua ſi ſubtrahatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, cognita etiam relinquetur diſtantia minor KB. Quæ etiam, ſi inueſtigetur hypotenuſa KB, vt ſupra traditum eſt, reperietur: ſi fiat, vt ſinus totus anguli recti B, ad hypotenuſam inuentam KB, ita ſinus anguli BAK, complementi anguli in propinquiore poſitione ſpeculi, ad aliud, vt manifeſtum eſt.

ALTITVDINEM monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici, vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam.

PROBLEMA XLI.

1 QVANDO ad turrim patet acceſſus, vt eius à menſore diſtantia cognoſci poſſit; ſi per probl. 39. inueſtigetur tam altitudo à ſummitate portionis propoſitæ, vſque ad baſem turris, quam altitudo ab infima parte eiuſdem portionis, vſque ad eandem turris baſem: & minor hæc altitudo ab illa maiore dematur, reliqua fiet portio, quæ inquiritur.

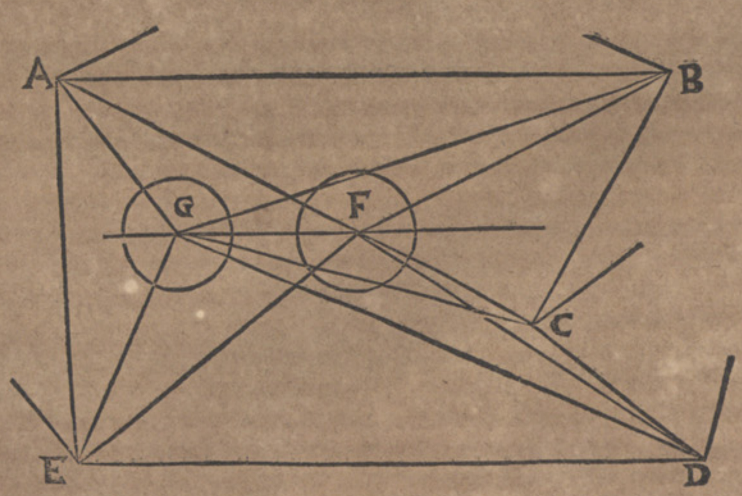
2 AT vero, quando altitudo monti eſt impoſita, & baſis altitudinis apparet, aut ad turrim non patet acceſſus: exquirenda erit per præcedens problema vtraque altitudo prædicta. Nam rurſus minor detracta ex maiore, reliquam faciet altitudinem, vel portionem, quæ deſideratur.

SITVM cuiuslibet campi, aut atrij, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiuſuis in plano deſcribere, ſi è duobus locis intra ipſum ſitum aſſumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certe ipſi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri poſſint: ſimulque longitudines laterum campi, vel ædificij, nec non diſtantias inter angulos, & vtrumuis locorum aſſumptorum in data menſura cognoſcere. Quod ſi talia duo loca intra ſitum eligi nequeant, idem efficere, dummodo ſitum poſſimus circumire.

PROBLEMA XLII.

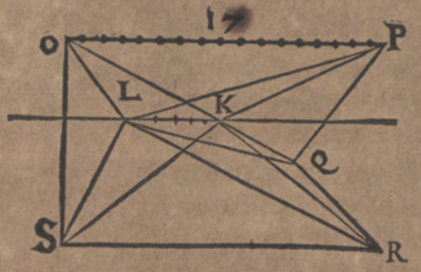
Situs cāpi cuiuſuis, quo pacto ex duobus locis intra ipſum aſſumptis delineetur.

1 ETSI problema hoc vel Geographicum eſt, vel Architectonicum; tamen quia ſine dimenſione linearum abſolui non poteſt, lubet illud hoc loco paucis explicare. Sit ergo cāpus quinque lateribus AB, BC, CD, DE, EA, cinctus. Figantur in quinque angulis A, B, C, D, E, quinque baculi ad angulos rectos cum Horizonte, nareturq; circa medium areæ planum aliquantulum altum Horizonti æquidiſtans, in quo duo puncta F, G, quantumlibet inter ſe diſtantia, verbi gratia 100. pedibus, è quibus omnes quinque baculi cerni poſſint. Per F, G, ducatur recta FG, ad vtraſq; partes; continebitq; ſegmentū FG, 100. pedes ex hypotheſi. Affixa deinde dioptra volubili cum pinnacidiis in vtroq; puncto F, & G, deſcriptiſq; circulis duob. ex F, & G, vt per eorū circūferentias angulorū magnitudines, qui in F, G, conſtituentur, cognoſci poſſint, inſpiciatur ex F, & G, per foramina pinnacidiorū (circūducta dioptra) baculi ex angulis A, B, C, D, E, erecti, & anguli, quos linea fiduciæ cum recta



I 2 facit,

facit, aut quos rectæ à linea fiduciæ deſignatæ inter ſe faciunt, transferantur ordine ad puncta K, L, quomodocunque inter ſe diſtantia in recta KL, quæ ſeorſum in charta aliqua ſit deſcripta, productis lineis, quæ illos angulos in K, & L, efficiunt vt in 2. figura apparet. Si namque puncta, vbi dictæ lineæ ex K, & L, prodeuntes concurrunt, lineis rectis coniungantur, deſcripta erit figura OPQRS, ſimilis omnino figuræ campi A B C D E. Quod ſic demonſtro. Triangula AGF, OLK, ſimilia ſunt, quod anguli AGF, AFG, angulis OLK, OKL, æquales ſint, ex conſtructione. *a 4. ſexti.* [a] Igitur erit AG, ad GF, vt OL, ad LK. Eademque ratione, ob ſimilitudinem triangulorum FGE, KLS, erit GF, ad GE, vt LK, ad LS: ac proinde ex æquo erit AG, ad GE, vt OL, ad LS. Cum ergo & anguli AGE, OLS, circa quos latera illa ſunt proportionalia, æquales ſint, quippe cum angulo AGE, factus ſit æqualis ex conſtructione angulus OLS: *b 6. ſexti.* [b] ſimilia erũt triangula AGE, OLS, hoc eſt, æquiangula. Pari ratione ob ſimilitudinem triangulorum FGD, KLR, *c 4. ſexti.* [c] erit GD, ad GF, vt LR, ad LK. Item ob ſimilitudinem triangulorum FGE, KLS, erit FG, ad GE, vt KL, ad LS. Igitur erit ex æquo GD, ad GE, vt LR, ad LS: Ac proinde cum anguli DGE, RLS, ex conſtructione ſint æquales; *d 6. ſexti* [d] æquiangula quoque erunt triangula DGE, RLS. Non aliter oſtẽdemus, triangula CGD, BGC, AGB, triangulis QLR, PLQ, OLP, eſſe æquiangula. Immo eiſdem argumentis concludemus, quamuis non ſit neceſſarium, triangula, quæ in F, ſupra latera campi constructa ſunt, æquiangula eſſe triangulis in K, ſupra latera figuræ OPQRS, conſtitutis. Ex his ſequitur, figuram ABCDE, figuræ OPQRS, æquiangulam eſſe: quippe cum earum anguli coagmentati ſint ex angulis æqualibus, nimirum angulus AED, ex angulis AEG, GED, ipſum componentibus, qui angulis OSL, LSR, angulum OSR, componentibus æquales ſunt; & ſic de cæteris. Sequitur etiam latera earundem figurarum circa æquales angulos eſſe proportionalia. *e 4. ſexti.* Nam propter triangulorum ſimilitudinem, [e] eſt AE, ad EG, vt OS, ad SL: & EG, ad ED, vt SL, ad SR. Ideoque ex æquo AE, ad ED, vt OS, ad SR: Atque ita de aliis. Similes ergo ſunt figuræ ABCDE, OPQRS.



2 IAM vero vt longitudines laterum AB, BC, CD, DE, EA, & rectarum ex F, vel G, ad angulos in prima figura ductarũ inueniamus, diuidendum erit in figura inuenta, id eſt, in ſecunda, interuallum KL, in quotcunq; partes æquales. Deinde inquirendum, quotnam ex illis partibus in ſingulis lateribus, & rectis eiuſdem figuræ ſecundæ ex K, vel L, prodeuntibus contineantur, quod vel per circinum fieri poteſt, repetendo ſæpius vnam particulam in dictis lateribus rectis: vel (quod magis probo) hoc modo. Repetatur tota KL, in quolibet latere, vel recta, quoties fieri poteſt, & in reliquo ſegmento vna etiam particula interualli KL, circino iteretur, quoties fieri poteſt. Nam quoties rèpetita fuerit KL: toties numerus particularum ipſius KL, in latere continebitur, cum tot inſuper particulis, quot per circinum in reliquo ſegmento fuerint deprehẽſæ. Aut certe per ea, quæ lib. 1. c. 1. ad finem Num. 2. ſcripſimus, inueſtigetur in inſtrumento partium, quot particulæ interualli KL, in dictis lateribus, & rectis comprehendantur. Deinde fiat, vt numerus particularum interualli KL, aſſumptus in 2. figura, ad numerum pedum inter puncta F, & G, in prima figura aſſumptum, ita numerus particularum in quolibet latere, vel recta in ſecunda figura inuentarum, ad aliud. Quotiens enim numerus indicabit, quot pedes in aſſumpto latere, vel recta contineantur. Ratio eſt, quia cum eandem proportionem habeat KL, in 2. figura ad quodlibet latus, vel rectam eiuſdem figuræ, quam habet FG, in prima figura ad reſpondens latus, vel rectam, propter ſimilitudinem figurarum, erit permutando KL, ad interuallum FG, vt latus ad latus, &c. Verbi gratia. In 2. figura interuallum KL, ſectum eſt in 5. particulas, qualium 17. in latere OP, inuentæ ſunt: Et quia ſpatium FG, in 1. figura poſitum eſt 100. pedum: ſi fiat,

Vt KL, quinque particularum — *ad FG. 100. pedum:* — *Ita OP, 17. particularum* — *ad AB,*

hoc eſt, ſi, vt regula aurea præcipit, 100. ducantur in 17. ſecundus numerus in tertium, & productus numerus 1700. diuidatur per 5. id eſt, per primum numerum, reperientur in Quotiente 340. pedes pro latere AB, & ſic de cæteris.

Situs cãpi cuiuſuis qua ratione ex vno loco intra ipſum aſſumpto deſcribatur.

3 EVNDEM ſitum campi propoſiti ABCDE, delineabimus etiam ex vno tantum loco F, intra ipſum aſſumpto hac ratione. Dioptra ad ſingulos baculos ex angulis erectos, dirigatur, notatis angulis, quos lineæ, per dioptram deſignatæ inter ſe faciunt; diſtantiæque ab F, ad ſingulos angulos inquirantur in aliqua menſura, vel catenulam aliquam ferream, quæ nec intendi poſſit, nec remitti, vel per chordam ex F, ad ſingulos angulos extenſam, vel certe, ſi diſtantiæ illæ magnæ ſint, per problema 2. vel 36. beneficio quadrati, alteriusue inſtrumenti. Nam ſi in charta aliqua ad quodlibet punctum K, iidem anguli conſtituantur, & in rectis illos angulos efficientibus accipiantur tot particulæ inter ſe æquales cuiuſuis magnitudinis, quot menſuræ inuentæ ſunt in rectis reſpondentibus, quæ ex F, exeunt: extrema autem puncta vltimarum particularum rectis lineis coniungantur, *f 6. ſexti.* deſcripta erit figura OPQRS, ſimilis omnino campo ABCDE: [f] propterea quod triangula ad punctum F, collecta ſimilia ſunt triangulis ad punctum K, collectis, ob æqualitatem angulorum in F, & K, conſtitutorum, & latera circa illos angulos proportionalia, ex conſtructione.

4 LATERVM autem longitudines in campo ABCDE, cognoſcentur, ſi per circinum inquiratur, quot particulæ in lateribus figuræ OPQRS, contineantur ex illis, quæ in quauis recta ex K, emiſſa ſumptæ fuere. Totidem namque menſuræ in lateribus campi comprehendentur, vt perſpicuum eſt ex figurarum ſimilitudine.

Vrbis cuiuſuis, ac regionis ſitus quo pacto deſcribatur.

5 EADEM prorſus ratio tenenda eſt in ſitu alicuius atrii vel templi, vel vrbis, aut regionis explorando. Solum in vrbe deſcribenda pro punctis F, & G, eligendæ ſunt duæ turres altæ, è quibus omnes vrbis anguli conſpici poſſint, & quarum diſtantia vnius ab altera vel cognita ſit, vel per præcedentia problemata inueſtigata. In regione autem delineanda pro iiſdem punctis F, & G, duo oppida deligenda ſunt, & in quolibet ex altiſſima turre circumiacentia oppida inſpicienda, vt anguli habeantur, quos rectæ ab oculo menſoris ad ſingula oppida eductæ conſtituunt. Hi autem facilius obſeruabuntur, ſi loco dioptræ, quia nimis alta eſt, ſtatuatur planum ere-

erectum in punctis F,& G, ita vt circumductum tranſeat per oppida circumiacentia, ſi intelligatur eſſe productum. Ita namque planum ipſum rectas deſignabit, quæ angulos prædictos conſtituant. Atque hoc etiam in ſitu vrbium perueſtigando faciendum erit. Itaque ſi anguli vrbis cuiuſpiam, aut oppida alicuius regionis ſint A,B, C,D,E,& duę turres in F,& G, omnia perficienda erunt, vt ſupra de campi ſitu dictum eſt. Nam ſitum vrbis vel regionis exhibebit figura OPQRS, diſtantiæque locorum A,B,C,D,E, vnius ab altero cognoſcentur, vt de lateribus campi dictum eſt.

6 QVOD ſi intra ſitum propoſitum duo loca, vel vnus ſaltem nõ exiſtat, vnde omnes anguli conſpici poſſint, vt in omnibus ædificijs contingit, oportebit ſitum circumire, & inueſtigare angulos per rectas, quæ in campo à baculo ad baculum ducendæ ſunt per catenulam ferream, vel chordam, aut certe erigendum planum, quod per binos baculos tranſire conſpiciatur. Ipſum enim planum dictas rectas exhibebit. In ædificijs autem ac templis ipſi muri exteriores dictos angulos conſtituunt, quorum amplitudo inueſtigari ſolet ab artificibus inſtrumento quodam ex duab. regulis compacto, quarũ vna ſub alterã ingreſſa moueatur (quod Italis Squadra zoppa dicitur) vt hæc figura indicat, aperto namq; inſtrumento, ſi crura duobus muris angulũ efficientib. cõgruent dabunt interiora cruriũ latera in concurſu angulũ quæſitum. Et ſi idem inſtrumentũ interioribus angulis ædificiorum applicetur, dabunt eadẽ latera interiora cruriũ angulos, qui à muris efficiuntur. Inuentis angulis ac notatis, menſuranda erunt interualla inter baculos in campo erectos, vel inter angulos ædificiorum, per catenulã ferream vel chordam, aut certe in campis, ſi ea interualla longa ſint, per problema 2. vel 36. exploranda in aliqua menſura nota, vt in cubitis. Nam ſi in charta ducatur linea OP, tot particulas æquales continens, quot cubiti, verbi gratia, in interuallo AB, depreheſi ſunt, & angulus POS, angulo BAE, inuento fiat æqualis: & in recta OS, accipiantur tot particulæ prioribus æquales vſq; ad S, quot cubiti in interuallo AE, reperti ſunt: ac rurſum angulus OSR, angulo AED, æqualis fiat, & ſic deinceps repreſentabitur ſitus campi per figuram OPQRS. Idemque de ſitu ædificiorum tam exteriori, quam interiori intelligendum eſt, ſi diligenter anguli ac diſtantiæ obſeruentur.



LONGITVDINEM trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore & altitudine faſtigij ſupra Horizontem, per Quadratum metiri.

PROBLEMA XLIII.



1 Trabs inclinata ſupra murum CD, ſit AB, & menſor in E, conſtitutus è directo ipſius trabis, ita vt ipſe & trabs in eodẽ ſint plano, metiri debeat longitudinẽ AB, angulum inclinationis ABE, diſtantiam BE, & altitudinem AF, etiamſi tantum portionem ſupremam AC, videat, baſem occultante muro CD. Si quadratum ad E, bis applicetur, ſemel videlicet inclinatum, vt vnum latus recta tendat ad punctum A, & iterum demiſſum ad Horizontem, ita vt centrum dioptræ ſit in E, & latus EL, Horizonti incumbat. Nam inſpecto puncto A, ex a, [a] ſi fiat, vt vmbra verſa e b, ad latus b a, ita latus a E, ad aliud, gignetur diſtantia ſiue hypotenuſa EA. (a 4. ſexti.) Deinde explorata portione dioptræ EI, vt in ſcholio Problematis 7. Numer. 2. docui; [b] Si fiat, vt EI, portio dioptræ inuenta ad repertam hypotenuſam EA, ita fI, lateri quadrati æqualis ad aliud, producetur altitudo AF, æquſita, quod eſt quartum. (b 2. ſexti & componendo.)

2 [c] ET ſi rurſus fiat, vt EI, portio dioptræ ad hypotenuſam EA, ita Ef, ipſi cI, æqualis ad aliud, nota fiet diſtantia EF. (c 2. ſext & componendo.) Non aliter, ſi aliud punctum G, inſpiciatur, cognita fiet hypotenuſa EG, & altitudo GH, vna cum diſtantia EH, ſi nimirum quadratum primo ita applicetur ad E, vt vnum latus tendat recta ad G, &c. quemadmodum in ſcholio probl. 7. oſtendimus.

3 IAM ſi EF, inuenta ex cognita EH, ſubducatur, nota relinquetur FH, id eſt, GI, quæ in ſublimi duci cogitetur parallela Horizonti. Eodem modo ſi GH, cognita, vel illi æqualis FI, ex inuenta AF, dematur reliqua AI, nota fiet. Cum igitur in triangulo rectangulo AGI, in ſublimi conſtituto duo latera AI, IG cognita ſint, [d] cognoſcetur & baſis AG, & angulus AGI, [e] qui æqualis angulo inclinationis ABE, qui quæritur, quod eſt ſecundum. (d 6. Trian. rectil. e 29. prim.)

4 ITAQVE cum in triangulo rectangulo ABF, latus AF, notum ſit factum, vna cum angulo B, ac proinde & cum eius complemento BAF, [f] cognitum fiet alterum quoq; latus BF, cui ſi adijcietur diſtantia EF, inuenta, tota diſtantia quæſita EB, manifeſta erit, quod eſt tertium. (f 4. Trian. rectil.)

5 DENIQVE in eodem triangulo ABF, rectangulo, ex latere AF, & angulo B, ac proinde & eius complemento BAF, cognitis, [g] cognoſcetur etiam baſis AB, longitudo videlicet trabis, quod eſt primum. Hæc autem nota etiam efficitur, [h] ſi fiat, vt AI, differentia altitudinum cognitarum AF, GH, ad AF, maiorem altitudinem, ita AG, paulo ante nota effecta, ad AB. (g 4. Trian. rectil. h 2. ſexti & componendo.)

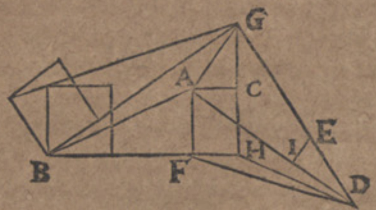
VISIS duarum turrium ſummitatibus, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vna cum ipſarum altitudinibus ac diſtantijs à menſore conijcere.

PROBLEMA XLIV.

1 SINT duæ turres AF, GH, quarum ſola faſtigia A, G, cernantur ex loco Horizontis B. Oportet inueſtigare & diſtantiam FH, & interuallum AG, & vtriuſque turris altitudinem. Sit primum minor turris AF, inter maiorem, & menſorem, ita vt menſor in eodem cum turribus ſit plano, & minor non occultet faſtigium G, maioris. Per ſcholium problem. 7. inuenietur & vtraque diſtantia BF, BH, & vtraque altitudo AF, GH: ſi nimirum in B, Quadratum ita locetur, vt vnum eius latus cum hypotenuſis BA, BG, coincidat, &c. quod eſt quartum, ac tertium. Et quia tria puncta B, F, H, ponuntur in eadem recta, erit diſtantiarum differentia FH, cognita, hoc eſt, diſtantia inter turrium baſes, quod eſt primum. Rurſus differentia altitudinum GC, nota erit,[a] ac propterea in triangulo rectangulo ACG, ex duobus lateribus, AC, CG, cognitis, baſis quoque AG, efficietur nota, quod eſt ſecundum.

[a] 6 triang. rectil.

2 DEINDE conſiſtat menſor in D, ita vt ipſe, ac baſes F, H, non iaceant in vna linea recta. Per ſcholium problem. 7. iterum tam altitudines AF, GH, quam diſtantiæ DF, DH, cognitæ fient, ſi videlicet quadrati vnum latus hypotenuſis DA, DG, congruet, &c. quod eſt tertium, ac quartum. Inueſtigatis autem hypotenuſis DA, DG, vt in eodem ſcholio traditum eſt, cognoſcetur per problema 16. præſertim per ea, quæ Numero 2. eiuſdem problematis ſcripſimus, interuallum AG, ſi nimirum in hypotenuſis accipiētur portiones DI, DE, ipſis hypotenuſis proportionales, vt in illo Numer. 2. diximus, &c. quod eſt ſecundum. Et quoniam altitudines AF, GH, notæ factæ ſunt, erit etiam earum differentia GC, nota. Quamobrem ex baſe AG, & latere GC, in triangulo rectangulo ACG, cognitis, latus quoque AC, hoc eſt, diſtantia FH, inter baſes nota erit: quod eſt primum.



SI turres eſſent AF, CH, æquales, eſſet diſtantia AC, inter faſtigia diſtantiæ FH, inter baſes æqualis.

SCHOLIVM.

Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas, quando earum extrema videntur.

1 EX omnibus, quæ demonſtrata ſunt in hoc 3. libro, colligi poteſt regula generalis ad dimetiendas omnes longitudines, ſiue eæ ſint diſtantiæ in Horizonte, ſiue altitudines, profunditateſue, ſiue hypotenuſæ, id eſt, diſtantiæ ab oculo ad quodlibet punctum, ſiue interualla inter duo puncta, vbicunque exiſtant: dummodo vtrumque extremum longitudinis dimetiendæ videri poſſit à menſore, vbicunque etiam ipſe exiſtat. Nam ſi per problema 15. præſertim per ea, quæ Numero 5. eius problematis ſcripſimus, diſtantiæ à menſore vſque ad duo extrema longitudinis explorentur, inueſtigato prius angulo, quem duæ illæ diſtantiæ, ſiue hypotenuſæ efficiunt, vt in ſcholio problem. 7. Numero 2. docuimus; &c. factum erit, quod proponitur. Itaque ſi diligenter ea, quæ in proble. 15. ac 16. ſcripſimus, percepta fuerint, eadem ſemper ratio metiendarum rectarum tenenda erit, ſi vtraque extremitas rectæ propoſitæ cerni poteſt, vt diximus.

2 SED neque hoc omittendum puto, quando inuentæ ſunt duæ diſtantiæ à menſoris loco vſq; ad duas extremitates rectæ metiendæ, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo, certius (quanquam laborioſius) interuallum inter duo illa extrema, hoc eſt, rectam propoſitam inueniri poſſe ex duabus illis diſtantiis, & angulo comprehenſo, per 12. triang. rectil. quam per duas dictas portiones illis diſtantiis proportionales: propterea quod interuallum inter extrema illarum portionum vix accurate per circinum reperiri poſſit. Id quod etiam in prob. 16. ad finem Num. 2. monuimus.

SPATIVM terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere.

PROBLEMA XLV.

Inſtrumēti conſtructio pro librationibus.

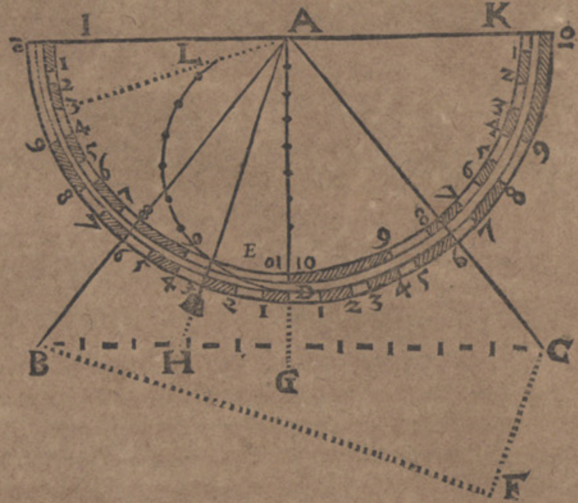
1 QVANDO oblatum ſpatium non eſt valde magnum, excogitauit Ioannes Ferrerius Hiſpanus nobilis Architectus, & Mathematicus, inſtrumentum percommodum pro librationibus, hoc modo. Compingantur duæ regulæ AB, AC, ex ligno aliquo ſolido, ac duro, æqualium crurum, quæ longitudinem habeant ſatis longam, ita vt diſtantiæ inter extrema B, C, contineat 10. palmos præciſe, aut etiam plures. Deinde ducta recta AG, ad BC, perpendiculari, deſcribatur ex A, ſemicirculus quantuſcunque IDK, cuius ſemidiameter AD, in tot æquales partes ſecetur, quot palmi in diſtantia BC, comprehenduntur. Deſcripto quoque circa AD, ſemicirculo occulto AED, transferantur ex D, in eius peripheriam omnia interualla inter D, & puncta rectæ AD: ac tandem ex A, per ſingula puncta ſemicirculi AED, rectæ occultæ emittantur, notenturque interſectiones earum cum peripheria DI, atque in alteram peripheriam DK, tranſportentur. Si namque ex A, filum cum perpendiculo egrediatur, & omnes partes excindantur, relictis ſolum cruribus inſtrumenti AB, AC, vna cum peripheria ſemicirculi IDK, conſtructum erit inſtrumentum ad librationes peropportunum.

2 NAM

2 NAM in campo aliquo, vel horto, poſitis punctis B, C, in terra, ſi filum perpendiculi tranſit per D, erunt puncta B, C, in terra eiuſdem altitudinis, ita vt ſi ſpatium interiectum BC, complanetur, ſpatium illud horti, vel campi ſit libratum, hoc eſt, Horizonti parallelum.

Spatiũ inæquale quo pacto libretur.

SI vero filum perpendiculi AH, abſcindet ex quadrante DI, aliquot partes, nimirum 3. erit punctum C, tribus palmis altius puncto B, atque ita fodiendum ibi erit ad altitudinem trium palmorum, vt complanatum ſpatium inter B, & infimum punctum effoſſum Horizonti ſit parallelum. Quod ſi filum perpendiculi abſcinderet ex alio quadrãte DK, quotcunque partes, nimirum 5. eſſet punctum C, depreſſius quinque palmis puncto B. Quare tunc ſuperimponẽda, foret puncto C, terra ad altitudinem 5. palmorum, vt ſpatium inter B, & ſupremum punctum terræ ſuperimpoſitæ complanatum Horizonti æquidiſtet. Complanato ſpatio inter B, & aliud punctum prope C, ſiue effoſſum, ſiue eleuatum, iteranda erit eadem operatio, poſito crure AB, in puncto inuento, &c. Atque ita deinceps procedendum eſt vſque ad vltimum ſignum in horto, vel campo propoſitum.



Hoc ita demonſtratur. Concipiatur ducta recta BC, & recta CF, filo perpendiculi AH, duci parallela, quæ ad Horizontem erit perpendicularis, ac proinde ducta BF, ad CF, perpendicularis Horizonti æquidiſtabit. Et quoniam in triangulis AGH, BFC, recti anguli G, F, æquales ſunt,[a] nec non & alterni C, H,[b] æquiangula erunt triangula; Eſt autem AGH, triangulo ADE, æquiangulum, quod & recti G, E, æquales ſint, & A, communis. Igitur triangula quoque ADE, BCF, æquiangula erunt.[c] Ideoque erit vt AD, 10. partium ad DE, 3. partium, ita BC, 10. palmorum, ad CE, ac proinde CF, 3. palmos continebit, tot nimirum, quot partes filum perpendiculi abſcindit ex ſemicirculo IDK. Quod ſi quadratum CF, nimirum in dato exemplo 9. palmi (cum latus CF, ſit 3. palmorum) dematur ex 100. id eſt, ex quadrato BC, 10. palmorum, reliquum fiet quadratum 91. lineæ horizontalis BF, cuius quadrata radix $9\frac{10}{19}$. dabit horizontalem diſtantiam BF, à puncto B, vſque ad perpendicularem CF.

a 29. primi.
b 32. primi.
c 4. ſexti.

HÆC eadem diſtantia horizontalis BF, cognoſcetur quoque ſine numerorum ſupputatione, hoc modo. Ex A, deſcribatur alius ſemicirculus, & in ſemicirculum AED, transferantur omnia interualla inter A, & puncta rectæ AD, ac tandem ex A, rectis occultis emiſſis per puncta in ſemicirculo notata, obſeruentur earum interſectiones cum ſemicirculo ex A, deſcripto, transferanturque in alterum quadrantem verſus K. Nam quot partes filum perpendiculi AH, ex vltimo hoc ſemicirculo ex A, deſcripto abſcindet, tot palmos continebit horizontalis longitudo BF:[d] propterea quod eadem eſt proportio DA, ad AE, quæ CB, ad BF, quippe cum triangula DAE, CBF, oſtenſa ſint ſimilia. Cum ergo ex conſtructione, recta AE, complectatur tot partes rectæ AD, quot ex A; in ſemicirculum AED, vſque ad filum perpendiculi ſunt translatæ, (vt in noſtro exemplo partes propemodum $9\frac{1}{2}$.) comprehendentur totidem palmi rectæ CB, in recta BF. Eſt autem conſideratione dignum, partes poſterioris ſemicirculi contrario ordine ſimiles eſſe partibus prioris ſemicirculi IDK. Nam ſi verbi gratia rectæ DE, quæ æqualis eſt tribus partibus rectæ DA, initium ſumentibus à D, accipiatur æqualis AL, trium quoque partium rectæ AD, initium ſumentium à puncto A, ducaturque recta AL, fiet angulus IAL, æqualis angulo DAE. Quia enim arcus DE, AL, æquales ſunt, erunt quoque reliqui AE, DL, æquales.[e] Igitur anguli ADE, DAL, æquales erunt, ideoque & reliqui DAE, IAL, æquales inter ſe erũt: propterea quod tam duo ADE, DAE, propter rectum E, in ſemicirculo, quam duo DAL, IAL, vni recto ſunt æquales. Ex quo fit, rectas AI, AL, ex poſteriori ſemicirculo ex A, deſcripto auferre arcum ſimilem arcui in priori ſemicirculo IDK, inter rectas AD, AE, intercepto: Eademque ratio eſt de aliis.

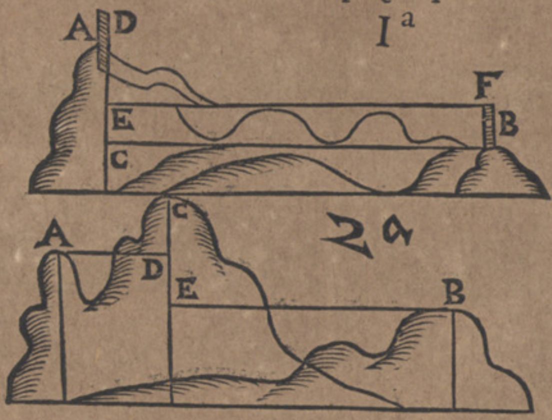
d 4. ſexti.
e 27. tertij.

QVANDO inſtrumentum ſæpius repetitum fuit, quæritur autem, quanto altius, vel depreſſius ſit primũ punctum, quam vltimum, ſcietur hoc per altitudines, depreſſioneſue intermedias. Vt ſi primus locus fuerit altior quam ſecundus, quinque palmis; & hic altior quam tertius, duobus palmis; hic autem depreſſior, quã quartus locus, tribus palmis; & hic denique altior quam vltimus locus, vno palmo, colligemus primum locum altiorem eſſe vltimo loco quinque palmis. Nam primus locus erit altior tertio ſeptem palmis, cum primus ſecũdum quinque palmis ſuperet, & ſecundus tertium, duobus. Et quia tertius ſuperatur à quarto, tribus palmis, ſuperabit primus quartum quatuor palmis. Cum ergo hic altior ſit, quam vltimus, vno palmo, erit primus altior, quam vltimus, quinque palmis, & ſic de cæteris.

3 CÆTERVM quando duo loca multum inter ſe diſtant, explorabimus per quadratum ſtabile, quanto alter altero ſit altior, vel humilior, hac ratione. Sit primus locus A, ſecundus B, in prima figura. Erecto baculo AD, ſtaturæ menſoris æquali, concipiatur ex B, ad perpendiculum loci A, altioris perpendicularis BC, (per quadratũ autẽ facile cognoſces, vter locorum ſit altior. Nam quando per latus ſupremũ Horizonti æquidiſtans, ex A, locus B, cernitur, eadem eſt altitudo vtriuſque loci: Si vero deprimendum eſt illud, vt B, videri poſſit, erit locus A, altior: Si denique idem latus attollendum eſt, erit locus B, altior.) Nam ſi per doctrinam ſcholij probl. 9. inueſtigetur altitudo DC, & auferatur menſoris ſtatura AD, reliqua erit altitudo AC: Ac tanto erit altior locus A, loco B. Et ſi è contrario in loco humiliori B, erigatur baculus BF, ſtaturæ menſoris æqualis, & per doctrinam ſcholij probl. 7. inquiratur altitudo AE, vſque ad perpendicularem FE, per cogitationem ad AC, ductam, & ap-

Librationes pro cõducendis aquis, quo modo fiãt.

ponatur ſtatura menſoris BF, nota euadet tota altitudo AC; Ac tanto depreſſior erit locus B, quam locus A. Atque ita ex loco A, ad locum B, conduci poteſt aqua, non autem contra.



4 QVOD ſi inter primum locum A, & ſecundum B, interpoſitus ſit mons C, ita vt ex A, locus B, videri nequeat, vt in 2. figura, ita procedemus. Ex A, per ſcholium problem. 7. indagabimus altitudinem CD. Deinde ex C, per ſcholium problem. 9. explorabimus altitudinem CE, ductis nimirum ad CE, perpendicularibus AD, BE. Nam hac ratione concludes locum A, altiorem eſſe loco B, quantitate DE. Quamobrem ſi perfodiatur mons C, vel aquęductus circa ipſum extruatur, conduci poterit aqua ex A, ad B, & non contra.

5 POSTREMO ſi in monte aliquo, vel in eius latere ſit aqua vel in puteo aliquo profundo, vel in foſſa aliqua profunda CD; & ſcire deſideres, an ex D, ad B, conduci poſſit aqua per aquæductum, ita erit agendum. Primum ſi CD, puteus eſt, inueſtiga eius profunditatem CD, per problem. 27. ſi vero foſſa, aut vorago aliqua, per problema 28. Deinde concipiatur ex B, ad perpendiculum CD, duci perpendicularis BE: atq; per ſcholium probl. 7. ex B, inueſtigetur altitudo CE. Si namq; hæc deprehenſa fuerit æqualis profunditati inuentæ CD, habebit fundus aquę D, eandem altitudinem cum loco B, ac proinde aqua ad B, ex D, defluere non poterit per aquæductum: Si vero altitudo CE, reperta fuerit maior quam profunditas CD, conduci poterit aqua ex D, in locum B: Si denique altitudo CE, inuenta fuerit minor profunditate CD, erit locus B, altior quam aqua iuxta D, atque idcirco defluere non poterit ad B.

EX his non obſcure intelliges, vbi aquæductus vtiliter ſint extruendi, & vbi non.

FINIS LIBRI TERTII.

GEOME-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER IV.

AREAS
Superficierum planarum inueſtigans.

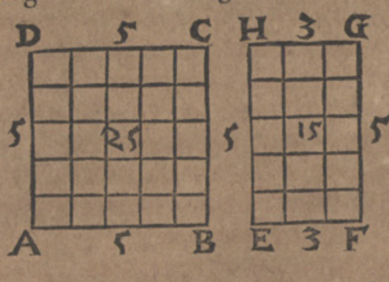
QVEMADMODVM linea recta rectas lineas metitur, ita Geometræ ſuperficies planas per ſuperficiem quadratam, & corpora, ſiue ſolida, per corpus cubicum metiri ſolent. Nam ſicut linea recta dicitur 100. palmorum in qua linea vnius palmi centies continetur, ita ſuperficies plana dicitur 100. palmorum, quæ centies quadratum continet, cuius latus palmo æquale eſt: & ſolidum 100. palmorum illud dicitur, quod complectitur 100. cubos, quorum quilibet latus habet vnius palmi: quod de aliis etiam menſuris, vt de pede, cubito, paſſu, milliario, &c. intelligendum eſt. Quia vero quælibet ſuperficies tot quadrata cuiuſque menſuræ comprehendere dicitur, quot in parallelogrammo rectangulo, quod illi æquale eſt, continentur, explicandum primo loco erit, qua ratione area cuiuslibet rectanguli cognoſcatur. Deinde de area triangulorum, quadrilaterorum non rectangulorum, cæterarumque figurarum plurium laterum agemus: ac denique circulum, eiuſque partes metiemur.

Penes quid menſuræ linearum rectarum, planarum ſuperficierum & ſolidorum ſumantur.

DE AREA RECTANGVLORVM
CAPVT I.

QVONIAM Euclides defin. 1. lib. 2. docet, omne parallelogrammum rectangulum contineri ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendũt angulum manifeſtum eſt, aream cuiuſque rectanguli produci ex multiplicatione duorum laterum circa rectum angulum, vnius in alterum; adeo vt in quadrato ſatis ſit ducere vnum latus in ſe, vt eius area cognoſcatur: quippe cum duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſint. Vt in quadrato ABCD, cuius ſingula latera quinos palmos continent, ſi latus AB, quinque palmorum in ſe ducatur, producentur 25. quadrata, quorum quodlibet habet latus vnius palmi; atq; tot palmos quadratos continere dicetur area quadrati ABCD. At area rectanguli altera parte longioris EFGH, cuius vnum latus circa rectum angulum continet 5. pedes, & alterum 3. dicetur continere 15. palmos quadratos, propterea quod ex mutua laterum 5. & 3. multiplicatione numerus 15. procreatur.

Area quadrati, & altera parte longioris quo pacto cognoſcatur.



2 ITAQVE ſi campum aliquem rectangulum, vel parallelogrammum rectangulum metiri iubeamur, menſuranda erunt per aliquam menſuram notam, vt per palmum, vel pedem, &c. duo latera circa angulum rectum. Nam vno in alterum ducto, area propoſiti campi, vel parallelogrammi rectanguli producetur, vt dictum eſt.

Vt campus rectãgulus menſuretur, quid agendum.

DE AREA TRIANGVLORVM
CAPVT II.

1 QVANDO trianguli omnia tria latera cognita ſunt, duabus viis eius area cognoſci poteſt. Prima, quæ accuratiſſima eſt, ita ſe habet. *Colligantur omnia latera in vnam ſummam: Ex huius ſumma ſemiſſe ſubtrahantur*

ſingula

ſingula latera, vt habeantur tres differentiæ inter illam ſemiſſem, & latera ſingula: Poſtremo tres hæ differentiæ, & dicta ſemiſſis inter ſe mutuo multiplicentur. Producti enim numeri radix quadrata erit area trianguli quæſita.

VERBI gratia, ſi latera ſint 10. 17. 21. erit ſumma ex illis collecta 48. & ſemiſſis 24. Differentiæ autem inter hanc ſemiſſem, & latera erunt 14. 7. 3. Hæ inter ſe multiplicatæ (ducendo primum 14. in 7. deinde productum in 3.) faciunt 294. quæ ducta in 24. ſemiſſem prædictam, producunt 7056. cuius numeri radix quadrata 84. erit area dicti trianguli, cuius latera ſunt 10. 17. 21. Ruſus ſi in alio quopiam triangulo latera ſint 13. 14. 15. inueniemus eãdem aream. Nam ſumma laterum eſt 42. ſemiſſis 21. Differentiæ inter hanc ſemiſſem, & tria latera ſunt 8. 7. 6. quę inter ſe multiplicatæ faciunt 336. quæ ducta in 21. ſemiſſem prædictam efficiunt 7056. cuius numeri quadrata radix 84. dabit aream trianguli, quod lateribus 13. 14. 15. continetur. Denique ſi detur triangulum ABC, in quo latus AB, 7. BC, 10. & AC, 11. ſumma omnium eſt 28. & ſemiſſis 14. quæ latera ſuperat hiſce numeris 7. 4. 3. qui inter ſe multiplicati faciunt 84. quæ ducta in 14. ſemiſſem ſummæ gignunt numerũ 1176. cuius radix quadrata $34\frac{2}{5}\frac{0}{9}$. fere dabit aream trianguli ABC. Ex quo colliges, non omnis trianguli aream eſſe numerum rationalem: propterea quod numerus vltimo loco productus non eſt ſemper quadratus, vt in poſtremo hoc exemplo contigit.

HANC praxim, ſiue regulam, quæ exquiſitiſſima eſt, vt dixi, ita in triangulo ABC, demonſtrabimus. Diuiſis angulis ABC, ACB, bifariam per rectas BD, CD, coeuntes in D, ducantur ex D, ad ſingula latera perpendiculares DE, DF, DG, iungaturque recta AD. Quoniam igitur duo anguli E, DBE, in triangulo DEB; æquales
a 26. prim. ſunt duobus angulis G, DBG, in triangulo DGB, & latus DB, commune; [a] erunt tam latera DE, DG, quam BE, BG, æqualia. Eodemque modo tam latera DF, DG, quam CF, CG, æqualia erunt in triãgulis DFC, DGC: ac proinde DE, DF, (cum vtraque ipſi DG, ſit oſtenſa æqualis) inter ſe æquales erunt: ideoque omnes tres perpendiculares DE, DF, DG, æquales inter ſe erunt.

b 47. prim. [b] DEINDE quia quadrato ex AD, æqualia ſunt tam quadrata ex AE, ED, quam quadrata ex AF, FD, æqualia erunt quadrata ex AE, ED, quadratis ex AF, FD; Ac proinde ablatis æqualibus quadratis rectarum ED, FD, æqualium, reliqua quadrata rectarum AE, AF, æqualia erunt: propterea que & rectæ ipſæ AE, AF, æquales erunt. Igitur cum latera AE, AD, trianguli ADE, lateribus AF, AD, trianguli ADF, æqualia ſint, & baſis ED,
c 8. primi. baſi FD; [c] erit angulus DAE, angulo DAF, æqualis.



QVIA vero AE, ipſi AF, & EB, ipſi BG, æqualis eſt oſtenſa, erit tota AB, duabus AF, BG, æqualis: additiſque æqualibus CG, CF, duæ AB, CG, duabus AC, BG, æquales erunt. Tam ergo duæ AB, CG, quam duæ AC, BG, ſemiſſem trium laterum AB, BC, AC, conſtituent. Quocirca CG vel CF, differentia erit inter ſemiſſem laterum, & latus AB. Itẽ BG, vel BE, differentia inter eandem ſemiſſem, & latus AC. Denique cum AB, CG, ſemiſſem laterum efficiant, ſitque BG, ipſi BE, æqualis, vt oſtendimus, conſtituent quoq; BC, AE, ſemiſſem eorundem laterum: ideoq; AE, differentia erit inter laterum ſemiſſem, & latus BC. Tres ergo rectæ AE, EB, CG, & ſemiſſem laterum conſtituunt, & tres differentias inter ſemiſſem laterum, & tria latera trianguli.

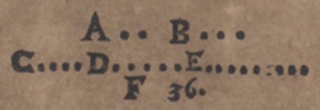
PRODVCTIS iam AB, AC, ſit BH, ipſi CG, & CI, ipſi BG, æqualis; ita vt tam AH, ſemiſſi laterum, rectis videlicet AB, CG, quam AI, eidem ſemiſſi laterum, rectis nimirum AC, BG, ſit æqualis, conſtetque ex tribus differentiis ante dictis. Ducta quoque HK, ad AH, perpendiculari, quæ cum AD, producta conueniat in K; connectantur rectæ KI, KB, KC. Et quia duo latera AH, AK, trianguli AHK, duobus laterib. AI, AK, trianguli AIK,
d 4. prim. æqualia ſunt, anguloſque ad A, continent æquales, vt ſupra oſtendimus, [d] æquales quoque erunt & baſes HK, IK, & anguli H, I. Cum ergo H, per conſtructionem ſit rectus, rectus etiam erit I.

ABSCINDATVR præterea BL, ipſi CG, vel BH, æqualis, vt proinde reliqua CL, reliquæ BG, vel ipſi CI, æqualis ſit, iungaturque recta KL. Producta autem BH, ſumatur HM, ipſi CI, æqualis, connectaturq; recta KM. Et quia duo latera KH, HM, trianguli HMK, duobus lateribus KI, IC, trianguli CIK, æqualia ſunt, anguloſque
e 4. primi. H, I, continent æquales, vtpote rectos; [e] erunt quoque baſes KM, KC, æquales: atque adeo cum duo latera BM, BK, trianguli BMK, duobus lateribus BC, BK, trianguli BCK, æqualia ſint, (eſt namque BM, ipſi BC, æqualis,
f 8. primi. quod partes BH, HM, partibus BL, LC, ſint æquales) ſitque baſis KM, baſi KC, oſtenſa æqualis; [f] erunt quoque anguli KBM, KBC, æquales. Itaq; quoniam duo latera BH, BK, trianguli BHK, duobus lateribus BL, BK, trian-
g 4. primi. guli BLK, æqualia ſunt, æqualeſque continent angulos ad B, vt oſtendimus, [g] erunt & baſes HK, KL, & anguli H, L, æquales. Cum ergo H, ex conſtructione rectus ſit, erit quoque L, rectus. Quare cum latera KH, KB, trianguli
h 8. primi. KBH, lateribus KL, KB, trianguli KBL, æqualia ſint, & baſis BH, baſi BL, [h] erunt etiam anguli BKH, BKL, æquales.

QVONIAM autem ex iis, quæ ad prop. 32. lib. 1. Euclidis demonſtrauimus, quatuor anguli quadrilateri BHKL, quatuor rectis ſunt æquales: erunt, demptis duobus rectis H, L, duo HBL, HKL, duobus rectis æquales;
i 13. primi. ideoque duobus angulis HBL, EBL, æquales, [i] quod hi quoque duobus ſint rectis æquales, ablatoq; communi HBL, reliquus HKL, reliquo EBL, æqualis erit: ac propterea & HKB, ipſi EBD, dimidius dimidio, æqualis erit.
k 32. prim. Cum ergo & rectus H, recto E, ſit æqualis, [k] erit quoque reliquus HBK, in triangulo HBK, reliquo EDB, in tri-
l 4. ſexti. angulo EDB, æqualis; ac proinde triangula BHK, DEB, æquiangula erunt. [l] Quapropter erit vt DE, ad EB, ita
m 19. prim. BH, ad HK; atque idcirco ſi lineæ hæ ad numeros contrahantur, [m] erit numerus, qui fit ex DE, in HK, æqualis
n 7. quint. numero, qui fit ex EB, in BH. [n] Eandem ergo proportionem habebit quadratus ex DE, ad productum ex DE,
o 17. ſepti. in HK, & ad productum ex EB, in BH. [o] Sed ita eſt quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, vt DE, ad HK: propterea quod DE, multiplicans DE, & HK, fecit & quadratum ex DE, & productum ex DE, in HK. Erit igitur quadratus quoque ex DE, ad productum ex EB, in BH, vt DE, ad HK. Vt autem DE, ad HK, ita eſt AE, ad
p 28 prim. AH. [p] Nam cum parallelæ ſint DE, HK, æquiangula erunt triangula AED, AHK, ex coroll. prop. 4. lib. 6. Euclid.
q 4 ſexti [q] Igitur erit vt AE, ad ED, ita AH, ad HK, & permutando, vt AE, ad AH, ita ED, ad HK. Igitur erit quadratus
r 19. ſepti. quoquẽ ex DE, ad productũ ex EB, in BH, vt AE, ad AH. [r] Quia ergo fit ex quadrato ipſius DE, in AH, æqualis erit ei,

erit ei, qui fit ex AE, in productum ex EB, in BH. Igitur numerus, qui ex producto ex quadrato ipſius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur. (Nam quia æquales numeri, nimirum productus ex quadrato ipſius DE, in AH, & productus ex AE, in productum ex EB, in BH, eundem numerum AH, multiplicant [s] habebunt s 18. ſepti. producti, nimirum numerus, qui ex producto ex quadrato ipſius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, & numerus, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur, eandẽ proportionem, quam multiplicantes. Cum ergo hi æquales ſint, erunt & illi producti æquales) hoc eſt, numerus productus ex AH, in AH, id eſt, quadratus ipſius AH, ductus in quadratum ipſius DE, (per ſcholium enim propoſ. 19. lib. 8. Euclid. quomodocunque tres numeri inter ſe multiplicentur, idem ſemper numerus procreatur) æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, nempe ex producto trium differentiarum AE, EB, BH, inter ſe multiplicatarum, ducto in AH, id eſt, in ſemiſſem laterum gignitur. At ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, producitur quadratus numerus areæ trianguli ABC, vt mox oſtendemus. Igitur & ex producto trium exceſſuum AE, EB, BH, inter ſe multiplicatorum, ducto in AH, ſemiſſem laterum AB, BC, AC, producitur idem quadratus numerus areæ trianguli ABC: ac proinde radix quadrata huius numeri erit dicti trianguli area: quod erat demonſtrandum.

QVOD autem ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, producatur quadratus numerus areæ trianguli ABC, in hunc modum demonſtro. Quoniam vt num. 2. oſtendemus, ex DE, in ſemiſſem lateris AB, producitur area trianguli ADB; Et ex eadem DE, hoc eſt, ex DG, in ſemiſſem lateris BC, efficietur area trianguli BDC; Item ex eadem DE, id eſt, ex DF, in ſemiſſem lateris AC, gignitur area trianguli ADC: Quod autem fit ex DE, in ſemiſſes laterum AB, BC, AC, [t] æquale eſt ei, quod fit ex DE, in AH, ex illis t 1. ſecund. ſemiſſibus conflatam: fiet propterea area trianguli ABC, ex DE, in AH; ac propterea (contractis hiſce lineis ad numeros) quadratus numerus areæ eiuſdem trianguli procreabitur ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH. Quando enim duo numeri ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, producent eorum quadrati ſe mutuo multiplicantes quadratũ illius producti, quod ita perſpicuum fiet. Duo numeri A, & B, ſe multiplicantes faciant D; & ambo ſe ipſos multiplicantes faciant C, & E. Denique hi quadrati C, & E, ſe multiplicantes faciant u 17. ſepti. F. Dico F, eſſe quadratum ipſius D. Cum enim A, multiplicans ſe ipſum, & B, faciat C, & D: [u] erit vt A, ad B, ita C, ad D: Eademque ratione, cum B, multiplicans A, & ſe ipſum, facit D, & E, erit vt A, ad B, ita D, ad E: ideoq; C, x 20. ſecun. D, E, continue proportionales erunt.[x] Quare qui fit ex C, in E, numerus videlicet F, æqualis erit ei, qui fit ex D, in ſe: ac proinde F, quadratus erit ipſius D. Quæ cum ita ſint, cum ex DE, in AH, producatur area trianguli ABC, vt oſtendimus, fiet ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, quadratus numerus areæ eiuſdem trianguli ABC. Quod erat demonſtrandum.

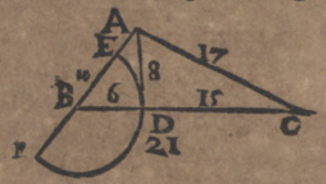


2 ALTERA via, qua ex datis lateribus area trianguli colligitur, hæc eſt. *Area triãguli quo pacto aliter ex datis laterib. colligatur.*

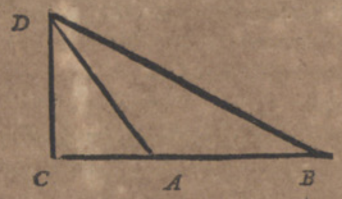
EX quouis angulo ad latus oppoſitum, etiam protractum, ſi opus eſt, perpendicularis ducatur. Hæc enim (ſi eius quantitas cognita fuerit) multiplicata in ſemiſſem baſis, ſeu dicti lateris, vel eius ſemiſsis in totam baſem producet aream trianguli, vel ſi mauis, tota perpendicularis ducta in totam baſem, numerum procreabit, cuius ſemiſsis aream trianguli offeret:

NAM vt lib. 7. propoſ. 1. demonſtrauimus, eſt area trianguli ęqualis rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari, & ſemiſſe baſis, vel ſub ſemiſſe perpendicularis, ac tota baſe; Item ſemiſſi rectanguli ſub perpendiculari, ac tota baſe comprehenſi. Cum ergo per cap. 1. huius lib. area rectanguli illius producatur ex multiplicatione vnius lateris circa angulum rectum in alterum: hoc eſt, ex perpendiculari ([y] quæ vni lateri æqualis eſt) in ſemiſ- y 34. prim. ſem baſis trianguli, vel ex ſemiſſe perpendicularis ([z] quæ ſemiſſi lateris eſt æqualis) in totam baſem: vel denique z 34. prim. rectangulum trianguli duplum ex perpendiculari in totam baſem trianguli: conſtat propoſitum.

MAGNITVDO autem dictæ perpendicularis, ſicuti & baſis, in metiendis campis inueſtiganda eſt per catenulam ferream, quod hæc neque intendatur, neque remittatur, aut cerre, ſi omnia latera nota ſint, Geometrice hoc modo. Sit triangulum ABC, cuius latus AB, ſit 10. & BC, 21. & AC, 17. Primum inueſtiganda ſunt ſegmenta BD, CD, inter perpendicularem, per ea, quæ lib. 1. cap. 3. Num. 9. ſcripſimus, hac ratione. Fiat vt latus BC, in quod cadit perpendicularis AD, (Semper autem eſſet demittenda perpendicularis in maximum latus, vt intra triangulum caderet) ad ſummam aliorum duorum laterum AB, AC, nimirum, vt 21. ad 27. ita differentia eorundem laterum, videlicet 7. ad aliud. Producetur enim numerus 9. (qui quoniam minor eſt latere BC, argumento eſt, perpendicularem intra triangulum cadere. Si enim maior eſſet, caderet extra, vt propoſ. 9. noſtrorum triangulorum rectil. oſtendimus) qui ablatus ex latere BC, id eſt, ex 21. relinquit 12. ſemiſſis 6. dabit minus ſegmentum BD, prope minus latus AB, quæ eadem ſemiſſis ex latere BC, ſubtracta reliquum faciet maius ſegmentum CD, nimirum 15. iuxta maius latus AC. *Segmenta baſis, quæ à perpendiculari abſcinduntur quo pacto cognoſcantur.*



SIT rurſus triangulum ABD, cuius latus AB, 12. AD, 11. & BD, 20. demittenda autem ſit perpendicularis ex D, ad AB. Fiat, vt latus AB, 12. ad ſummam aliorum duorum 31. ita differentia eorundem, nimirum 9. ad aliud. Producetur enim numerus $23\frac{1}{4}$. (qui quoniam maior eſt latere AB, argumento eſt, perpendicularem cadere extra triangulum, angulumque A, eſſe obtuſum,) ex quo latus AB, 12. ſubtractum, relinquit, $11\frac{1}{4}$. Huius autem numeri ſemiſſis $5\frac{5}{8}$. dabit ſegmentum exterius AC, inter perpendicularem, & angulum obtuſum: eademque ſemiſſis addita lateri AB, efficiet aliud ſegmentum BC, inter perpendicularem, & angulum acutum $17\frac{5}{8}$. Atque hæc ratio expeditiſſima eſt.



ALITER

ALITER. Sit ducenda perpendicularis ad maximum latus BC, in priori triangulo ABC, quæ neceſſario cadet intra triangulum; [a] propterea quod angulus A, maior eſt vtrolibet BC; ac proinde vterq; horum acutus eſt. [b] Quoniam autem quadratum rectæ AB, minus eſt quadratis rectarum AC, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, & ſegmento CD, inter C, & perpendicularem: ſi quadratum rectę AB, 100. detrahatur ex ſumma quadratorū rectarū AC, BC, id eſt, ex 730. reliquum fiet rectangulū 630. bis comprehenſum ſub BC, ſegmento CD, inter C, perpēdicularē. Quare eius ſemiſſis 315. æqualis erit rectangulo illo ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 315. diuiſo per latus BC, 21. dabit Quotiens 15. ſegmentū CD, prope angulum acutū C, cui opponitur latus AB, cuius quadratum ex ſumma reliquorum quadratorū detractum fuit. Ablato autē ſegmento CD, 15. ex latere BC, 21. remanebit alterum ſegmentum BD, 6. Eodem pacto, [c] quia quadratum rectæ AC, minus eſt quadratis rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem: ſi quadratum rectæ AC, 289. ſubducatur ex ſumma 541. quadratorum rectarum AB, BC, reliquum fiet rectangulum 252. comprehenſum bis ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem. Quare eius ſemiſſis 126. æqualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 126. diuiſo per latus CB, 21. dabit Quotiens 6. ſegmentum BD, iuxta acutum angulum B, cui latus AC, quadrati ex duobus alijs quadratis detracti opponitur. Quo ſegmento 6. dempto ex latere BC, 21. remanebit alterum ſegmentum CD, 15.

a 18 prim. b 13 ſecun. c 13 ſecun.

DEINDE in poſteriori triangulo ABD, ducenda ſit perpendicularis ad latus AB, nō maximum. Et quia latus DB, latere AD, maius eſt; [d] erit angulus A, maior angulo B. [e] Cum ambo ergo ſimul ſint duobus rectis minores, erit ſaltem minor B, acutus: [f] ac proinde quadratum rectæ AD, minus erit quadratis rectarum AB, BD, rectangulo bis comprehenſo ſub latere AB, & ſegmento inter B, & perpendicularem. Si ergo quadratum rectæ AD, 121. ſubtrahatur ex ſumma quadratorum rectarum AB, BD, id eſt, ex 544. reliquum fiet rectangulum bis comprehenſum ſub AB, & ſegmento inter B, & perpendicularem, nimirum 423. ideoque eius ſemiſſis $211\frac{1}{2}$. æqualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto. Quare ſi rectangulum hoc $211\frac{1}{2}$. diuidatur per latus AB, 12. dabit Quotiens $17\frac{5}{8}$. ſegmentum inter B, & perpendicularem: quod quia maius eſt latere AB, argumento eſt, perpendicularem DC, cadere extra triangulum: ac proinde angulum A, obtuſum eſſe. Quod ſi ex hoc ſegmento $17\frac{5}{8}$. dematur latus AB, 12. remanebit exterius ſegmentum $5\frac{5}{8}$.

d 18. prim. e 17. prim. f 13. ſecun.

QVANDO conſtat, angulum A, eſſe obtuſum, ideoque perpendicularem DC, extra triangulum cadere, reperiemus eadem ſegmenta BC, CA, hoc etiam modo. [g] Quoniam quadratum lateris BD, ſuperat quadrata laterum AB, AD, rectangulo bis comprehenſo ſub latere AB, & ſegmento exteriore AC; ſi ſumma quadratorum rectarum AB, AD, 265. detrahatur ex quadrato lateris BD, 400. reliquum erit rectangulum 135. bis comprehenſum ſub AB, AC: & eius ſemiſſis $67\frac{1}{2}$. illi rectangulo ſemel ſumpto æqualis erit; ac proinde hoc rectangulo $67\frac{1}{2}$. diuiſo per latus AB, 12. indicabit quotiens $5\frac{5}{8}$. ſegmentum exterius CA, cui ſi addatur latus AB, 12. conflabitur ſegmentum BC, $17\frac{5}{8}$. Sed prior ratio, quæ ex 2. lib. Eucl. non pendet, expeditior, ac proinde tenenda: quamuis auctores alij poſteriorem viam plerunque ſequantur.

g 12. ſecun.

Quæ ratio tenenda in ſegmentis exquirendis.

INVENTIS ſegmentis a perpendiculari factis, ita magnitudinem perpendicularis cognoſcemus.

DIFFERENTIA inter vtrumis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam ex eodem ſegmento & latere conflatam. Radix enim quadrata numeri producti perpendicularem exhibebit notam, vt libro primo, capite tertio, numero decimoſeptimo demonſtrauimus.

Perpendicularis in triangulo quo pacto reperiatur.

Verbi gratia. In priori triangulo ABC, ſi differentia 4. inter ſegmentum BD, & latus AB, hoc eſt, inter 6. & 10. multiplicetur per 16. nempe per ſummam eiuſdem ſegmenti BD, & lateris AB, gignetur numerus 64. cuius radix quadrata 8. dabit perpendicularem AD. Pari ratione ſi differentia 2. inter ſegmentum CD, & latus AC hoc eſt, 15. & 17. ducatur in 32 id eſt in ſummam eiuſdem ſegmenti CD, & lateris AC: procreabitur numerus 64. cuius radix quadrata 8. præbebit perpendicularem AD, vt prius.

IN poſteriori autem triangulo ABD, ſi differentia $5\frac{3}{8}$. inter ſegmentum AC, & latus AD, nimirum inter $5\frac{5}{8}$ & 11. ducatur in $16\frac{5}{8}$. hoc eſt in ſummam eiuſdem ſegmenti AC, & latus CD: producetur numerus $\frac{5719}{64}$. ſiue $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata in numeris exhiberi nō poteſt, ſed paulo maior eſt quam appoſita fractio cuius numerator eſt $75\frac{94}{151}$. denominator autem 8. quæ ad hunc numerum $9\frac{547}{1208}$. reducetur, ſi numerator per denominatorem diuidatur: atque tanta eſt ferme perpendicularis DC, nimirum $9\frac{547}{1280}$. Sic etiam ſi differentia $2\frac{3}{8}$. inter ſegmentum BC, $17\frac{5}{8}$. & latus BD, 20. multiplicetur per $37\frac{5}{8}$. ſummam eiuſdem ſegmenti BC, & latus BD, gignetur idem numerus, qui prius, $\frac{5719}{64}$. hoc eſt, $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata paulo maior eſt, quam $9\frac{547}{1201}$. veluti prius. Atque hæc ratio ſatis expedita eſt.

$$\frac{75\frac{94}{151}}{8}$$

h 47. prim.

ALITER. [h] Quoniam quadratum rectæ AB, in priori triangulo ABC, æquale eſt duobus quadratis rectarum AD, BD: ſi quadratum 36. ſegmenti BD, tollatur ex 100. quadrato lateris adiacentis AB, relinquetur quadratum 64. perpendicularis AD. Radix ergo eius quadrata 8. erit magnitudo perpendicularis AD, vt ſupra. Similiter ſi quadratum 225. ſegmenti CD, dematur ex 289. quadrato lateris adiacentis AC, reliquum fiet quadratum 64. perpendicularis AD, cuius radix 8. magnitudo erit perpendicularis AD, vt prius.

IN triangulo vero poſteriori ABD, ſi quadratum $31\frac{41}{64}$. ſegmenti AC, $5\frac{5}{8}$. ſubtrahatur ex 121. quadrato lateris adiacentis AD, 11. remanebit quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix eſt paulo maior quam $9\frac{547}{1208}$. vt ſupra. Sic etiam ſi quadratum $310\frac{41}{64}$. ſegmenti BC, $17\frac{5}{8}$. ſubtrahatur à quadrato 400. lateris adiacentis BD, 20. remanebit rurſus quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix paulo maior eſt quam $9\frac{547}{1208}$. vt ſupra. Verum prior ratio magis expedita videtur, quanquam alii poſteriorem hanc viam tradant.

Quæ via inueſtigādæ perpendicularis ſit expeditior.

IN triangulo porro æquilatero perpendicularis hoc alio modo inuenietur. [i] Quoniam quadratum lateris ſeſquitertium eſt quadrati perpendicularis: ſi fiat vt 4. ad 3. ita quadratum lateris ad aliud, proueniet quadratum perpendicularis. Radix ergo huius quadrati notam exhibebit perpendicularem. Vt ſi latus eſt 10. & fiat vt 4. ad 3. ita 100. quadratum lateris ad aliud, gignetur quadratum perpendicularis 75. cuius radix $8\frac{11}{17}$. proxime erit perpendicularis quæſita.

i 12. quartadecim.

DENIQVE inuentis ſegmentis baſis à perpendiculari factis, perpendicularis ipſa per ſinus ita fiet cognita in priori triangulo. Fiat vt 10. latus AB, recto angulo oppoſitum ad ſinum totum recti anguli D; ita 6. ſegmentum BD,

tum BD,ad aliud;producceturque ſinus anguli oppoſiti BAD,60000.Ergo angulus BAD,erit grad.36. Min.52. ac proinde angulus B,eius complementum erit grad.53. Min.8.Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus ad 10. latus AB: ita 80003.ſinus anguli BAD,ad aliud,procreabitur latus AD,hoc eſt,perpendicularis $8\frac{30}{100000}$.ferme, quę paulo maior eſt,quam 8.ſupra inuenta. quod diſcrimen oritur ex eo, quod ſinus non ſunt omnino tales, quales in tabula deſcribuntur:quod tamen in menſuratione camporum non inducit ſenſibilem admodum errorem.

ITAQVE ſi in priori triangulo ABC,perpendicularis AD,8.ducatur in $10.\frac{1}{2}$.ſemiſſem baſis BC,vel 4.ſemiſſis perpendicularis AD,in 21.totam baſem,procreabitur area trianguli ABC,84. Quæ etiam producetur, ſi tota perpendicularis 8.in totam baſem 21.multiplicetur,& producti numeri 168.ſemiſſis accipiatur 84. *Area prioris trianguli ABC*

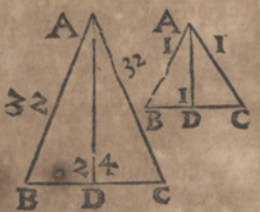
ITEM in poſteriori triangulo ABD, ſi perpendicularis DC,$9\frac{547}{1208}$. ducatur in 6. ſemiſſem baſis AB,vel ſemiſſis perpendicularis,nimirum $\frac{11419}{2416}$.vel $4\frac{1755}{2416}$ in totam baſem 12.cõficietur area trianguli ABD, $56\frac{866}{1208}$. vel $56\frac{433}{604}$. Quæ etiam producetur, ſi tota perpendicularis in totam baſem ducatur, & producti capiatur ſemiſſis. *Area poſterioris trianguli ABD.*

VT autem fractiones, quoad eius fieri poteſt,vitentur, curabis,vt quando perpendicularis eſt numerus par,& baſis numerus impar, accipias ſemiſſem perpendicularis, eamque in totam baſem ducas : quando vero perpendicularis eſt numerus impar,& baſis numerus par,ſumas ſemiſſem baſis,eamque ducas in totam perpendicularem. Quod ſi tam perpendicularis,quam baſis fuerit numerus par, vel impar, nihil intereſt,vtrius ſemiſſem capias. *Vt fractiones vitentur quid agendum.*

QVANDO etiam perpendicularis eſt radix ſurda, quæ videlicet numero exprimi nequeat, qualis fuit DC,in poſteriori triangulo ABD,recte feceris,ſi eius quadratum(non extracta radice illa ſurda)multiplices per quadratum ſemiſſis baſis. Numerus enim productus erit quadratus numerus areæ trianguli; adeo vt radix eius ſit ipſa trianguli area.Hac enim ratione minus à vero aberrabimus. Vt in dicto poſteriori triangulo ABD,ſi quadratum perpendicularis DC,$\frac{5710}{64}$.ducamus in 36.quadratum ſemiſſis baſis,producemus $\frac{205884}{64}$.quadratum areę,cuius radix eſt $56\frac{2605}{3628}$.area videlicet trianguli ABD,paulo maior,quã prius inuenta.Pari ratione,ſi in aliquo triangulo quadratum perpendicularis foret 72. & ſemiſſis baſis 6.ſi radicem numeri 72. nimirum $8\frac{8}{17}$. hoc eſt, ipſam perpendicularem,ducamus in 6.producemus aream $50\frac{14}{17}$.At ſi ipſummet quadratum 72. multiplicemus per 36. quadratum videlicet ſemiſſis baſis,procreabimus 2592. quadratum areæ, cuius radix paulo maior eſt, quam $50\frac{92}{101}$.qui numerus aliquanto maior eſt,quam area prius inuenta $50\frac{14}{17}$. Ratio huius noſtræ regulæ eſt, quòd,vt paulò ante ad finem Num.1.demonſtrauimus,duo numeri ſeſe multiplicantes producant radicem numeri ex eorum quadratis producti. *Quid agendus, quando perdicularis eſt numerus ſurdus.*

3\. EXPOSITIS duabus regulis generalibus, per quas trianguli cuiuslibet area ex cognitis lateribus inueſtigatur,proponemus nunc particularia qnædam præcepta pro particularibus triangulis nonnullis,quæ nonnunquam magno vſui erunt,cum per ea ſæpenumero expeditius in aliquibus triangulis areæ reperiantur,quam per illas generales regulas.Area ergo trianguli rectanguli producetur, ſi duo latera circa rectum angulum inter ſe multiplicentur,& numeri producti ſemiſſis capiatur.Nam ex multiplicatione illa gignitur parallelogrammũ rectangulum ſub duobus lateribus circa angulum rectũ comprehenſum, vt cap.1.dictum eſt,[a] cuius rectanguli triangulum ſemiſſis eſt.Quod perinde eſt,ac ſi ſemiſſis vtriuſuis lateris in totum alterũ,tanquam in baſem,multiplicetur.Vt in præcedenti triangulo ABC,diuiſo in duo triangula rectangula ADB,ADC;ſi AD,8.ducatur in BD,6.producetur numerus 48.cuius ſemiſſis 24.erit area trianguli ADB. Sic ſi AD, 8. ducatur in DC, 15. fiet numerus 120.cuius ſemiſſis 60, erit area trianguli ADC: vbi vides, duo triangula 24.& 60. componere totum triangulum ABC, 84.vt ſupra inuenimus. *Area trianguli rectanguli.* *a 41.primi*

4 AREA trianguli Iſoſcelis,vel etiam æquilateri,procreabitur,ſi quadratum ſemiſſis baſis ex quadrato lateris auferatur, & reliquus numerus in idem quadratum ſemiſſis baſis ducatur, ac deniq; huius producti radix quadrata eruatur. Vt in Iſoſcele ABC,cuius æqualia latera AB, AC,ſint 32.32.& baſis BC,24.ſi quadratam 144. ſemiſſis baſis dematur ex 1024. quadrato lateris AC,vel AB,& reliquus numerus 880.ducatur in 144. quadratum ſemiſſis baſis,erit producti 126720.radix quadrata $355\frac{605}{711}$. (quæ paulo minor eſt vera radice)area trianguli ABC.Nam ſi quadratum ſemiſſis baſis DC,auferatur ex quadrato lateris AC,[b] reliquum fit quadratum perpendicularis AD,quod ex ſcholio propoſ.26.lib.1. Euclid.perpendicularis AD,baſem BC,ſecet bifariam in D,Quare vt circa finem Num.2.oſtendimus, quadratum perpendicularis AD, ductum in quadratum DC, ſemiſſis baſis producet quadratum areæ trianguli ABC. Eademq; ratio eſt in triangulo æquilatero,cum hoc habeat etiam duo latera æqualia. *Area trianguli Iſoſcelis.* *b 47. primi.*



5 Pro area tamẽ trianguli æquilateri hæc etiam regula ab auctoribus traditur,quamuis à nemine (quod ſciam) demonſtrata ſit. Quadratum lateris ducatur in 13. productuſque numerus per 30.diuidatur. Quotiens enim erit area trianguli æquilateri. Vt ſi vnum latus æquilateri trianguli ſit 10.ducatur quadratum lateris 10.nimirũ 100.in 13.productuſque numerus 1300.per 30.diuidatur.Quotiens enim $43\frac{1}{3}$.erit area trianguli. Hanc regulam ita demonſtro. Area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſunt 1. eſt radix quadrata huius numeri $\frac{3}{16}$. (Nam per regulam præcedentem Num. 4. explicatam , ſi $\frac{1}{4}$.quadratum ſemiſſis lateris dematur ex 1. quadrato lateris,& reliquus numerus $\frac{3}{4}$.ducatur in idem quadratum $\frac{1}{4}$. ſemiſſis lateris, producetur quadratum areæ trianguli $\frac{3}{16}$.)nimirum $\frac{13}{30}$.proxime.Cum ergo quadratum lateris 1.ad quadratum lateris 10.hoc eſt, 1.ad 100.eandem proportionem habeat, quam area $\frac{13}{30}$. trianguli, cuius vnum latus eſt 1.ad aream trianguli , cuius vnum latus eſt 10.[c] quod vtraque proportio proportionis lateris 1.ad latus 10. ſit duplicata:ſi fiat vt 1. (quadratum lateris 1.)ad 100.(quadratum lateris 10.)ita area $\frac{13}{30}$.ad aliud,producetur area trianguli, cuius vnum latus eſt 10. Hoc autem fit, ducendo ſecundum numerum 100. in tertium $\frac{13}{30}$. hoc eſt, (vt conſtat ex regula multiplicationis fractorum, ducendo 100.in numeratorem 13.& productum per denominatorem 30.diuidendo.Neq; vero opus eſt productum hunc numerum $43\frac{1}{3}$.per primum 1.partiri, cum vnitas diuidens, aut multiplicans quemcunque numerum producat numerum eundem.Sic etiam ſi latus vnũ trianguli æquilateri ſit 6.ducemus eius quadratũ *Area trianguli æquilateri.* *c 20.& 19 ſexti.*

36.in $\frac{13}{30}$.hoc eſt,in 13.numeratorem,productumq; 468.per 30.partiemur. Quotiens na mque 15$\frac{3}{5}$.erit trianguli propoſiti area.

Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur.

QVOD autem $\frac{13}{30}$.ſit radix quadrata numeri $\frac{3}{16}$.patet ex regula, qua cuiuſuis fracti numeri radix extrahitur:quæ talis eſt.Numerator in denominatorem ducatur, & producti radix propinqua inueniatur. Si enim per hanc radicem diuidemus numeratorem:vel ipſam radicem per denominatorem partiemur;exibit radix fractionis propoſitæ:priori quidem modo maior quam vera,poſteriori autem minor,ſi radix illa propinqua producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera:quia in priori illo modo fit diuiſio,per numerum vero minorẽ,in poſteriori autẽ numerus vero minor diuiditur. Quod ſi radix illa propinqua foret maior, quam vera,produceretur priori modo radix fractionis minor,quam vera,poſteriori aũt maior,vt liquet. Verbi gratia.Inuenienda ſit radix quadrata fractionis $\frac{3}{16}$.quam diximus eſſe quadratum areæ trianguli æquilateri,cuius vnum latus eſt.1. ex 3.in 16.fit numerus 48. cuius radix propinqua 6.$\frac{12}{13}$. minor quam vera,per quam ſi diuidatur numerator 3 prodibit radix $\frac{13}{30}$.fractionis $\frac{3}{16}$.maior, quam vera:at ſi radicem eandem propinquam 6$\frac{12}{13}$. partiamur per denominatorem 16.reperietur radix $\frac{45}{104}$.eiuſdem fractionis $\frac{1}{16}$.minor, quam vera. Ratio huius extractionis vero hæc eſt. Quando numerator 3.denominatorem 16.multiplicat,[d] erit producti 48.radix quadrata medio loco proportionalis inter 3. & 16. quod radix in ſe ducta producat numerum 48. æqualem ei, qui ab extremis 3.& 16.inter ſe multiplicatis gignitur:ac proinde proportio 3.ad 16.erit duplicata tam ꝓportionis 3. ad illam radicẽ,quam illius radicis ad 16.[e] Cum ergo proportio 3. ad 16. ſit quoq; duplicata proportionis,quam radix numeri 3,ad radicem numeri 16.habet:erit vt 3.ad radicem producti 48. Vel vt radix huius producti ad 16.ita radix numeri 3.ad radicem numeri 16. Quapropter cum fractio, cuius numerator eſt radix numeri 3.denominator autem radix numeri 16.ſit radix fractionis $\frac{3}{16}$.erit quoque tam fractio, cuius numerator 3.& denominator radix producti 48.quam fractio cuius numerator radix producti 48. denominator autem 16. hoc eſt, tam Quotiens,qui fit ex diuiſione 3.per radicem producti 48. quam quotiens, qui fit ex diuiſione radicis producti 48.per 16.radix propinqua fractionis $\frac{3}{16}$.Eademq; de cæteris ratio eſt.

d 20. ſep.

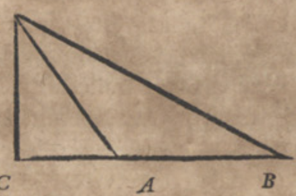
e 11 octaui

ALII hanc tradunt regulam ad aream trianguli æquilateri inueniendam. Ex quadrato lateris ſumatur tam pars decima,quam tertia,Harum enim partium ſumma erit area trianguli. Quod ſic oſtendo.Hæ fractiones $\frac{1}{10}$.& $\frac{1}{3}$.in vnam collectæ ſummam efficiunt $\frac{13}{30}$.ac proinde idem eſt ex quadrato lateris auferre $\frac{1}{10}$.& $\frac{1}{3}$.atque $\frac{13}{30}$.Sed quando auferuntur $\frac{13}{30}$.multiplicatur quadratum lateris per $\frac{13}{30}$.vt in 6.quæſtiuncula fractorum docui. Igitur cum vt Num.5.explicatum eſt,ex multiplicatione quadrati lateris in $\frac{13}{30}$.producatur area trianguli æquilateri,liquido conſtat,partem decimam,& partem tertiam quadrati lateris conficere eandem aream. Itaque ſi latus ſit 30.erit eius quadratum 900.cuius $\frac{1}{10}$.eſt 90.& $\frac{1}{3}$. eſt 300.quæ partes ſimul conficiunt nnmerum 390.pro area illius trianguli æquilateri.

Area trianguli rectanguli ex latere quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto cognito, quo pacto inueſtigetur.

6 HACTENVS expoſuimus regulas,quæ nos in cognitionem areæ cuiuſcunque trianguli ducũt, ſi ſingula latera cognita ſint.Nunc triangulorum areas per doctrinam ſinuum, Tangentium,ſecantiumque inueſtigabimus,licet non omnia latera ſint cognita,ſed vnum duntaxat, vel duo, vna cum duobus angulis, vel vno.In triangulis ergo rectangulis ita procedemus.

QVANDO in triangulo rectangulo latus ergo angulo oppoſitum cognitum eſt,cum vno angulo acuto cognoſcemus aream hoc modo. Detracto angulo acuto dato ex recto,id eſt,ex grad.90.relinquetur alter acutus angulus etiam notus. Vt in triangulo DCB, habente angulum rectum C, & latus BD,notum, vna cum angulo acuto B.[f] Et quoniam duo B, & BDC, vni recto, id eſt, gradibus 90. ſunt æquales, ſi angulus B, ex grad.90.detrahatur,reliquus fiet angulus BDC. Si ergo fiat, vt ſinus totus anguli recti C,ad oppoſitum latus BD, in qualibet menſura cognitum; ita tam ſinus anguli B, quàm anguli BDC,ad aliud,[g] nota fient latera DC, & CB, in partibus lateris BD, atque ita omnia tria latera cognita erunt.Ergo & area cognoſcetur vel ex Num.1.huius cap. vel ex Num.3.



f 32. primi.

g 2. triang. rectil.

ITAQVE ſi campus menſurandus triangularis eſt habens vnum angulum rectum, ſatis erit, ſi ſumma diligentia latus recto angulo oppoſitum menſuretur,& inſuper vnus angulus acutus, beneficio alicuiꝰ quadrantis in gradus diuiſi,qualis eſt à nobis conſtructus cap.2.lib.1.Nam ex his cognitis,vt proxime diximus, tota area trianguli cognoſcetur,etiamſi ad alia duo latera accedere non poſſimus.

h 3. triang rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur.

QVANDO in eodem triangulo rectangulo BDC,alterutrum latus datur circa angulum rectum vna cum latere,quod recto angulo opponitur,nimirum ſi DC,& DB,cognita ſunt,[h] cognoſcetur quoque alterum latus BC,ſi fiat,vt latus DB,angulo recto oppoſitum ad ſinum totum anguli recti C,ita latus datum DC, ad aliud.Productus enim numerus erit ſinus anguli B,quo cognito ex tabula ſinuum, cognitus etiam erit eius complementum BDC.Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus anguli recti C,ad latus oppoſitum datum DB,ita ſinus anguli BDC,inuenti ad aliud,exibit latus oppoſitum BC.Ex duobus igitur lateribus DC,CB,cognitis,area trianguli nota fiet ex ijs,quæ Num.3.paulo ante ſcripſumus.

ATQVE ita in campo,ſi detur portio triangularis,habens angulum rectum;ſatis eſt, ſi diligenter mẽſuretur vnum latus circa angulum rectum, vna cum latere, quod recto angulo opponitur, etiamſi ad tertium latus non pateat acceſſus.Ex illis enim duobus area cognoſcetur,vt dictum eſt.

i 4. triang. rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectũ & vno angulo acuto.

QVOD ſi in eodem triangulo BDC,notum fuerit vnum latus circa rectum angulum,videlicet DC, vna cum alterutro angulo acuto, vtpote cum B, [i] notum efficietur alterum latus CB:ſi fiat, vt ſinus totus ad datum latus DC:Ita Tangens anguli BDC,quæſito lateri CB,oppoſiti,(cognoſcetur autẽ alter hic angulus BDC, ſi angulus B, ex gradibus 90.dematur)ad aliud.Nam inuentus numerus dabit latus CB,quæſitum. Vel ſi fiat,vt ſinus anguli B, dato lateri DC,oppoſiti ad latus datum DC:Ita ſinus alterius anguli BDC, ad aliud. Nã rurſus producetur latus quæſitum BC.Ex duobus ergo lateribus DC,CB,aream cognoſcemus, vt Num.3. traditur.

IN Campo ergo aliquo;ſi proponatur portio triangularis angulum habens rectum,ſatis erit vnum latus circa rectum angulum,& vnum angulum acuti metiri,vt eius trianguli area reperiatur,etiamſi ad alia duo latera acceſſus denegetur.Atque hæc de rectangulis triangulis,veniamus iam ad obliquangula.

7 Si

7 SI ergo in triangulo non rectangulo ABD, notum ſit vnum latus, cum duobus angulis quibuſcunque, perueniemus in cognitionem areæ hoc modo. Ex duobus angulis cognitus erit quoque tertius, cum ſit complementum aliorum duorum ad gr. 180. [e] Igitur alia duo latera cognoſcentur: ac proinde ex tribus lateribus cognitis area fiet nota ex ijs, quæ Num. 1. & 2. tradita ſunt. *e 10. triãg. rectil.*

VT ergo campus triangularis nullum habens angulum rectum cognitus fiat, ſatis erit, ſi vnum latus cum duobus angulis accurate menſuretur. Ex ijs enim duo reliqua latera nota efficientur, &c. vt dictum eſt. *Area trianguli obliquanguli ex vno latere & duobus angulis.*

RVRSVS ſi in eodem triangulo ABD, non rectangulo nota ſint duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo; [f] inuenietur tertium latus: ac proinde, vt prius, ex omnibus tribus lateribus area trianguli efficietur cognita. *f 12. trian. rectil.*

ITAQVE ſatis erit, ſi in campo quouis triangulari duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo menſurentur: vt area ipſius nota reddatur. *Area triãguli obliquanguli ex duobus lateribus & angulo ab ipſis cõprehenſo.*

8 NEQVE vero hoc omittendum videtur: ſi videlicet vnũ latus trianguli, vel cuiuſuis figuræ rectilineæ in partes quotlibet ęquales ſecetur, reliqua latera in eiſdẽ partibus fieri poſſe cognita, beneficio inſtrumẽti partium vt ad finem Num. 1. cap. 1. lib. 1. declarauimus. Verum vt magis exquiſitè reperiantur, inquirendum erit fragmentum vltimæ particulæ (ſi quod ſuperfuerit) in partibus milleſimis, per ea, quæ Num. 14. cap. 2. lib. 1. docuimus. ita enim in dimenſionibus figurarum minus à vero aberrabimus. *Diuiſo vno latere figuræ in quotuis partes æquales, quo pacto alia latera in eiſdem partibus fiant nota.*

9 NEMINEM autem moueat, aut perturbet, quod rectas dixerimus metiendas eſſe nonnunquam mechanice per catenulam aliquam ferream, aut per inſtrumentum partiũ. Nam in hoc dimetiendi negotio, præſertim in campis, & agris admittenda omnino eſt huiuſmodi mechanica linearum dimenſio, tum quia apud omnes agrimenſores hic mos eſt: tum quia non ſemper via Geometrica id præſtare poteſt; tum vero maxime, quia in dimenſionibus agrorum, ſiue figurarum ſatis eſt rem prope verum attingere, dummodo notabilis error non committatur. Quod ſi hæc dimenſio quarundam linearum alicui non probetur, is profecto è medio tollat, neceſſe eſt omnem agrorum, figurarumue dimenſionem. Vnde enim conſtat, agrum propoſitum, vel figuram habere latera cognita, niſi hæc ipſa per menſuram aliquam materialem ſint explorata? Si igitur laterum dimenſio mechanica, tanquam à vero parum aberrans, ab omnibus vſurpatur, cur eam in lineis intra figuras metiendis reijciendam cenſeamus, non video. Non nego tamẽ, viam Geometricam, quando fieri poteſt, adbibendam eſſe. In figuris quoque, vbi latera non ſunt nimis magna, vtendum cenſeo doctrina, quam in inſtrumento partium lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 2. tradidimus, nõ neglectis etiam ijs, quę in eodem lib. 1. cap. 2. Num 14. de quauis particula lineæ cognoſcenda, in partibus ſaltem milleſimis, ſcripſimus, quod hac ratione vix à vero quis aberrare poſſit. *In negotio dimenſionum admittẽdam eſſe in nonnullis lineis & angulis mechanicam menſurationem.*

IDEM de mechanica angulorum dimenſione per quadrantem intelligendum eſt: præſertim ſi præter gradus inueſtigentur quoque minuta, vt lib. 1. cap. 2. docuimus.

DE AREA QVADRILATERORVM NON RECTANGVLORVM.

CAPVT III.

1 TRIA ſunt genera quadrilaterarum figurarum, quæ vel nullum angulum rectum habent, vel certe non omnes rectos: Rhombus, Rhomboides, & Trapezium. Primæ duæ figuræ nullum habent angulum rectum: poſterior autem poteſt habere vel vnũ rectum, vel duos, vel etiam nullum: Item duo latera oppoſita parallela, vel non parallela. Rhombi & Rhomboidis, quorum latera nota ſint, area producitur ex ductu perpendicularis in latus, in quod perpendicularis cadit. Ita vt magnitudo perpendicularis accurate ſit prius exploranda vel per inſtrumentum partium initio huius operis conſtructi, vt paulo ante cap. 2. Num. 8. monuimus, vel alio modo, vt mox dicam. Verbi gratia, in Rhombo & Rhomboide ABCD, producetur area ex multiplicatione perpendicularis AE, in latus BC, [g] Nam rectangulum AF, ſub AE, & AD, comprehenſum æquale eſt parallelogrammo BD, quòd hæc duo parallelogramma ſint inter parallelas AD, BC, & ſuper eandem baſem AD. Itaque fruſtra alij præcipiunt, vt diameter ducatur AC, & beneficio perpendicularis AE, area trianguli ABC, inquiratur, quod hæc duplicata aream exhibeat totius parallelogrammi: [h] quippe cum triangulum ABC, ſemiſſis ſit parallelogrammi. Fruſtra, inquam, hoc præcipiunt, cum expeditius area inueniatur ſi perpendicularis in totum latus BC, ducatur, quam ſi in ſemiſſem multiplicetur, ac productus deinde numerus dupletur. *Rhombi & Rhomboidis area.*



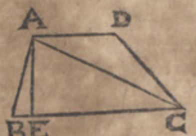
g 35. primi



h 34. pimi.

SI per quadrantem cap. 2. lib. 1. conſtructum inueſtigetur quantitas anguli B, reperietur perpendicularis AE, per ſinus, hac ratione. Fiat vt ſinus totus anguli recti E, ad latus oppoſitum AB, ita ſinus anguli B, ad aliud. [i] Productus enim numerus erit perpendicularis AE, cognita in partibus lateris dati AB. *Perpendicularis inuentio.* *i 2 triang. rectil.*

2 TRAPEZII, in quo duo latera oppoſita ſint parellela AD, BC, & omnia latera nota, area producitur ex perpendiculari AE, inter duo latera parallela multiplicata in ſemiſſem ſummæ ex lateribus parallelis conflatæ. Nam ducta diametro AC, area trianguli ABC, producitur ex perpendiculari AE, in ſemiſſem baſis BC, vt cap. 2. Num. 2. dictum eſt: Item area trianguli ACD, ex eadem perpendiculari AE, in ſemiſſem baſis AD: Ac proinde hæ duæ areæ ſimul aream totius Trapezij ABCD, conficient. [k] Cum igitur idem fiat ex AE, in ſummam ex ſemiſſe rectæ BC, & ex ſemiſſe rectæ AD, conflatam, id eſt, in ſemiſſem rectarum BC, AD, ſimul: quod ex AE, in ſemiſſem lateris BC, & ex AE, in ſemiſſem lateris AD; liquido conſtat, aream Trapezij gigni ex perpendiculari AE, in ſemiſſem ſummæ laterum AD, BC. Atque hæc ratio locum etiam habet in Trapezio habente vnum angulum rectũ, vel duos rectos. *Area trapezij habentis duo latera parallela.* *k 1. ſecũdi*





PERPENDICVLARIS vero AE, inuenietur, vt in Rhombo, & Rhomboide diximus, duobus modis, ſi per quadrantem angulus B, inueſtigetur, &c.

Area trapezij nulla habentis latera parallela.

c 12. triãg. rectil. Nu. 2.

IN Trapezio autem FGHI, in quo nulla ſunt latera parallela, omnia tamen latera ſunt nota, menſuranda primum eſt diameter IG, per inſtrumentum partium. Deinde vtriuſque trianguli FGI, GHI, area inuenienda, vt cap. 2. Num. 1. & 2. tradidimus. Ambæ enim areæ ſimul conficient aream totius Trapezij.

QVOD ſi malueris angulum F, vel H, per quadrantem inuenire, cognoſcemus diametri GI, magnitudinem, per doctrinam Sinuum, ac Tangentium,[c] vt lib. 1. cap. 3. docuimus, ex duobus lateribus F G, F I, & angulo F, ab ipſis comprehenſo, vel ex duobus lateribus HG, HI, & angulo H, quem continent.

Area figuræ quadrilateræ irregularis.

3 NON aliter aream conſequemur cuiuſcunque quadrilateri irregularis, etiamſi non habeat omnes angulos introrſum, ſicut Trapezium. Vt ſi in Trapezio FGHI, ducantur ex G, & I, duæ rectę GK, IK, conſtituetur quadrilaterum GHIK, irregulare, cum ſolum habeat tres angulos GHI, HIK, HGK. Nam ad K, non fit angulus GKI, introrſum verſus H, cum illud ſpatium ſit duobus rectis maius, ſed verſus F, extrorſum. Huius ergo figuræ quadrilateræ irregularis aream colligemus, ducta diametro KH, ex duabus areis triangulum IKH, GKH, vt de Trapezio FGHI, dictum eſt.

DE AREA MVLTILATERARVM FIGVRArum irregularium.

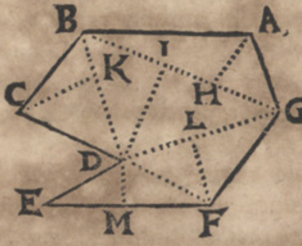
CAPVT IV.

Area multilateræ figuræ.

Quando figura in triangula reſolui poteſt, quo modo eius area colligatur.

f 9. triang. rectil.

1 FIGVRAS multilateras irregulares, quæ videlicet plura latera habent inæqualia, quam quatuor, etiãſi valde irregulares ſint, metiemur, vt trapezia irregularia: reſoluendo nimirum illas in triangula, & ſingulorũ triangulorũ areas inueſtigando. Nã omnes areæ in vnã ſummam collectæ æquales ſunt areæ totius figurę propoſitæ. Vt ſi figura ſeptem laterum ABCDEFG, reſoluatur in quinque triangula ABG, GBD, DBC, DEF, FDG, ita vt eorum latera ſe mutuo non interſecent, inquirendæ ſunt areæ ſingulorum hoc modo. Quando omnia latera triangulorum nota effici poſſunt per aliquam menſuram, ſiue figura agrum aliquem repreſentet, ſiue in charta ſolum ſit deſcripta, demittantur ex angulis ad latera oppoſita perpendiculares AH, DI, CK, DM, FL, ſingulæ in ſingulis triangulis. Deinde in triangulo ABG,[f] inquirantur ex tribus lateribus notis ſegmenta BH, HG; & ex his perpendicularis AH, vt cap. 2. huius lib. Num. 2. declarauimus Nam AH, in ſemiſſem baſis BG, ducta producet aream trianguli ABG. Eademque ratione aliorum triangulorum areæ perueſtigentur: atque omnes areæ in vnam redigantur ſummam, vt area totius figuræ habeatur. Quod ſi malueris, poteris omnium triangulorum areas indagare ex tribus lateribus cognitis, per ea, quæ cap. 2. Num. 1. ſcripſimus, etiamſi neque perpendiculares ductæ ſint, neque ſegmenta BH, GH, inuenta.



Quando figura in triangula reſolui nõ poteſt quo modo eius area deprehendatur.

g 12. triãg. rectil. h 2. triãg. rectil. i 12 trian. rectil. Nu. 2. k 2. trian. rectil. l 12. trian. rectil. Nu. 2. m 2. trian. rectil. n 12. trian. rectil. o 2. trian. rectil. p 16. triã. rectil. q 2 trian. rectil.

2 QVANDO latera triangulorum interiora menſurari nequeunt, immo neque duci, vt non raro accidit in campis, aut agris, qui vel propter arbores, vel paludes interiectas, rectis itineribus pertranſiri non poſſunt; alia ratione ſcopum attingemus, hac videlicet. Cognitis lateribus figuram ambientibus per aliquam menſuram, inueſtigentur quoq; anguli ab ipſis comprehenſi beneficio quadrantis alicuius in gradus diuiſi. In propoſita figura angulus CDE, indagandus non eſt, quod ſit extra figuram. Reſoluta deinde figura mente, aut cogitatione in triangula, ac ſi latera interiora ducta eſſent, vt prius:[g] explorentur in triangulo ABG, duo anguli B, G, ex duobus lateribus AB, AG, anguloq; ab ipſis comprehenſo; atq; inſuper latus BG. Hinc n. in triangulo rectangulo ABH, vel AGH,[h] demiſſa perpendicularis ex A, cognoſcetur ex baſe AB, & angulo B, vel ex baſe AG, & angulo G: ac proinde area trianguli reperietur, vt antea ex ijs, quæ c. 2 huius lib. Nũ. 1. & 2. tradita ſunt. Nõ aliter area trianguli BCD, nota fiet ex duob. laterib. CB, CD, notis angulum C, notũ ambientibus,[i] ſi nimirũ inueſtigentur prius anguli B, D, vna cum latere BD,[k] & ex his demiſſa perpendicularis CK. Poſt hæc in triangulo BDG, ſi anguli ABG, CBD, iam cogniti detrahantur ex toto angulo ABC, noto, remanebit angulus DBG, notus. Cum ergo latera BD, BG, ipſum includentia facta ſint etiam nota;[l] cognoſcentur eodem modo & anguli D, G, & latus DG;[m] atq; inſuper perpendicularis ex B, in DG, demiſſa, &c. Similiter in triangulo GDF, ſi ex angulo noto AGF, tollantut anguli AGB, BGD, iam noti effecti, relinquetur angulus DGF, notus. Cum igitur & latus GD, notum factum ſit:[n] cognoſcemus & duos angulos GDF, GFD, & inſuper latus DF,[o] vna cum perpendiculari ex G, in DF, demiſſa, &c. In triangulo deniq; DEF, cum omnia latera ſint nota;[p] efficientur quoq; noti omnes tres anguli: ac proinde demiſſa perpendicularis DM, ex D, demiſſa, vel ex quocunq; alio angulo[q] nota fiet, &c. Ex his facile intelliges, quomodo in alijs figuris irregularibus te gerere debeas.

Quomodo figura agro propoſito ſimilis deſcribi poſsit.

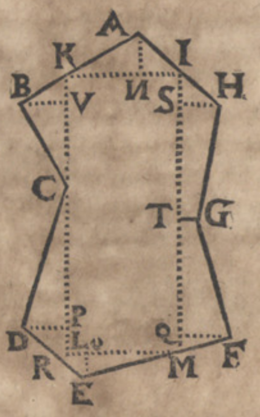
POTES etiam, ſi vis, deſcribere in charta aliqua figuram agro ſimilem: ſi nimirum ſumas rectam AB, tot particularum æqualium, quot menſuræ in latere agri reſpondente includuntur, angulumq; conſtituas ABC, æqualem ei, quem in ambitu agri inueniſti. Deinde in BC, tot particulas accipias, quot in latere agri reſpondente continentur, iterumq; angulum BCD, æqualem illi conſtituas, quem in figura deprehendiſti. Denique ſi idem facias de angulo CDE, & reliquis, necnon de rectis CD, DE, & alijs, deſcripta erit figura ſimilis agro: quæ ſi reſoluetur in triangula, quorum latera intra figuram per inſtrumentum partium menſurentur, reperietur eius area, ſicuti prius, quando ager reſolui poterat in triangula.

QVAN-

QVANDO campi planities non eſt impedita, magis exquiſitè figura ei ſimilis deſcribetur per ea, quæ lib.3.Problemat.42. Num.3.ſcripſimus: ſi videlicet intra campum eligatur punctũ quodpiam, ex quo ad omnes angulos rectæ ducantur, notatis angulis, quos efficiunt. Nam ſi illæ rectæ menſurentur, angulique ad aliquod punctum in charta transferantur, & in rectis angulorum capiantur tot particulæ æquales, quot menſuræ in rectis angulorum circa punctum in campo electum conſiſtentium deprehenſæ ſunt, continebunt rectæ extrema puncta connectentes figuram ſimilem campo, vt in loco citato demonſtrauimus. Quod ſi duo puncta eligantur in campo, è quibus rectæ ad angulos ducantur, notatis punctis, vbi binæ rectæ conueniunt, deſcribetur etiam figura campo ſimilis, quamuis rectæ illæ non menſurentur: quemadmodum ibidem Num 1.declarauimus.

MANIFESTVM autem eſt, eodem pacto menſurari poſſe campum, in quo lacus, vel ſilua comprehendatur, licet in triangula reſolui non poſſit, dummodo eius latera exteriora cum angulis cognoſci poſſint. Quod ſi in circuitu agri fuerit aliqua portio curua, & non recta, ſecanda ea erit in tot partes, donec à rectis lineis parum differant, eæque pro lateribus rectis aſſumendæ. *Qua ratione campus intra quē lacus vel ſilua exiſtat menſuretur.*

3 AGRIMENSORES ne cogantur totum campum ſæpius perambulare, vt perpendiculares in triangulis ducant, anguloſque metiantur, hanc ineunt rationem. In agro, ſeu figura conſtituunt, quam poſſunt, maximum rectangulum, atque ad eius latera ex angulis figuræ perpendiculares concipiunt demitti, quod faciunt, applicando vnum latus normæ ad latus rectanguli, & aliud ad angulum figuræ oppoſitum dirigendo. Ita namq; tota figura reſoluta erit in rectangulum illud conſtitutum, & in trapezia duorum laterum parallelorum, atque in triangula rectangula. Deinde vel ipſi met metiuntur latera rectanguli: & perpẽdiculares, vel vt ab alijs menſurentur, præcipiunt, quod quidem per catenulam ferream exequuntur. Poſtremo triangula quidem rectangula metiuntur, vt cap.2. Num.3.tradidimus, trapezia vero duorum laterum parallelorum, vt cap.3.Num.2.docuimus. Rectangulum deniq; per ea, quæ cap.1.ſcripſimus, menſurant. Horum enim areæ in vnam ſummam collectę conficiunt aream totius agri, ſeu figurę. In propoſito octangulo ABCDEFGH, continetur rectangulum IKLM, trapezia HSTG, GTQF, OLRE; & triangula rectangula ANK, ANI, ISH, FQM, MOE, DPR, CDP, BCV, BKV. *Ratio communis mẽſorum in area cuiuſuis figuræ inueſtiganda.*

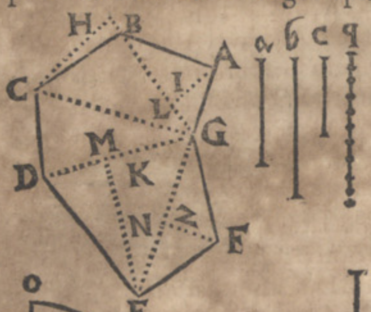


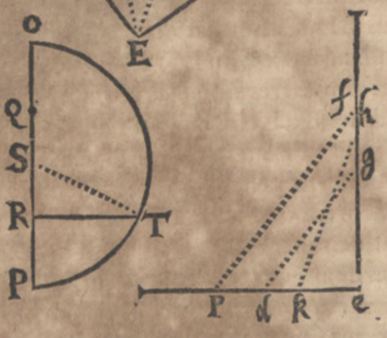
ALII non conſtituunt rectangulum intra campum, vel figuram, ſed lineam, quam poſſunt, longiſſimam ducunt, nimirum à puncto A, ad latus EF, quam fundamentalem appellant. Ad hanc ex angulis demittunt perpendiculares: atque ita totam rurſus figuram in trapezia duorum laterum parallelorum, & in triangula rectangula diſpertiunt, &c. Sed prior ratio commodior videtur: quippe in qua perpendiculares ex angulis deductæ breuiores ſint, ac propterea facilius menſurentur, ac certius.

QVANDO intra agrum dictæ operationes fieri nequeunt, ſolent etiam menſores circa agrum includentem ſiluas, lacus, & ædificia, vel alia impedimenta, formare rectangulum. Nam ſi ad eius latera ducantur perpendiculares ab angulis exterioribus agri, conſtituentur iterum trapezia rectangulum duorum laterum parallelorum, vel parallelogramma, & triangula rectangula extra agrum: quorum areæ ſi ex area totius rectanguli ſubducantur, reliqua fiet area propoſiti agri.

4 SED neque aſpernanda mihi videtur ea ratio, quam olim meis auditoribus explicare ſolebam. Vt nimirum toti figuræ (reducto prius agro ad ſimilem figuram, vt paulo ante Num.2. præcepi) conſtituatur quadratum æquale, vel certe latus eius quadrati inueniatur. Nam ſi vnum huius quadrati latus menſuretur, atque in ſeipſum ducatur, prodibit area figuræ propoſitæ. Menſurandum porro eſt latus in particulis laterum figuræ, quæ menſuris laterum agri reſpondent, quod facile fiet per inſtrumentum partium. *Pulchra ratio areæ inueniendæ cuiuſcunq; figuræ.*

QVO pacto autem cuilibet figuræ quadratum æquale ſine magno labore conſtrui poſſit, docui in ſcholio propoſ.14.libr.2. Euclid. quod hoc loco, paucis in melius mutatis, repetendum cenſeo. Sit ergo heptagonum irregulare ABCDEFG, quo reſoluto in 5. triangula ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, ducantur ad BG, baſem communem duorum triangulorum ab angulis oppoſitis A, C, perpendiculares AL, CH, quarũ poſterior in GB, protractam cadit in noſtra figura. Deinde in recta quacũq; OP, ſumantur OQ, QR ipſis AL, CH, æquales. Item RP, ipſi BI, ſemiſſi baſis BG, æqualis; ac circa OP, ex medio puncto S, ſemicirculus deſcribatur OTP: ac deniq; ex R, termino rectę OR, quę duabus perpendicularibus AL, CH, æqualis eſt, ad OP, perpendicularis excitetur RT, ſemicirculum ſecans in T. Dico quadratum rectæ RT, duobus triangulis ſimul ABG, BCG, eſſe æquale. Quia enim rectangulum ſub BI, ſemiſſe baſis, & perpendiculari AL, æquale eſt triangulo ABG, ex propoſ.1.lib.7. huius; & rectangulum ſub eadem BI, & perpendiculi CH, æquale, eſt triangulo BCG: Quod autem ſub BI, & aggregato ex AL, CH, hoc eſt, ſub RP, OR, (quod RP, ipſi BI, ſumpta ſit æqualis, & OR, ipſis AL, CH, ſimul) [i] æquale eſt eis, quæ ſub BI, & AL, CH, comprehenduntur, rectangulis; erit rectangulum ſub OR, RP, duobus triangulis ABG, BCG, ęqualis.[k] Cum ergo quadratum ex RT, rectangulo ſub OR, RP, ſit æquale, (quod ex ſcolio propoſ.13.lib.6. Euclid: RT, media proportionalis ſit inter OR, RP,) erit quoque quadratum ex RT, duobus triangulis ABG, BCG, æquale. quod eſt propoſitum. Immo quadratum ex RT, rectangulo ſub OR, RP, æquale eſſe, demonſtrabitur hoc etiam modo ſine ope lib.6. Euclid.[l] Rectangulum ſub OR, RP, vna cum quadrato ex SR, æquale *Quadratũ datæ figuræ æquale qua ratione conſtruatur.*





i 1.ſecundi

k 17.ſexti.

l 5.ſecundi

eſt quadrato ex SP, hoc eſt, (ducta ST,) quadrato ex ST,[m] hoc eſt, quadratis ex SR, RT, Ablato ergo communi quadrato rectæ SR, reliquum rectangulum ſub OR, RP, reliquo quadrato ex RT, erit æquale.

m 47. primi.

EODEM modo reperiemus quadratum duobus triangulis CDG, DEG, æquale, ſi ad baſem communẽ DG, ducantur perpendiculares CD, EM, quarum prior in noſtra figura cum latere CD, coincidit, &c. Atq; ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, reperiemus ſemper binis triangulis ſingula quadrata ęqualia. Sed quia in noſtra figura ſupereſt vnum tantum triangulum EFG, inueniemus ei quadratum æquale, ſi, ducta perpendiculari FN, circa rectã ex FN, & ſemiſſe baſis EZ, cõflatam ſemicirculus deſcribatur, &c. Sint ergo a, b, c, latera quadratorum trapezijs ABCG, CDEG, & triangulo EFG, æqualium, quibus omnibus quadratis vnum æquale exhibebimus hac arte. Fiat angulus rectus d e f, & lateribus a, b, æquales ſumantur rectæ e d, e g,[n] eritque quadratum ductæ rectæ d g, quadratis rectarum ed, eg, hoc eſt, laterum a, b, æquale. Capiatur rurſus e k, lateri c, & recta e h, rectæ d g, æqualis;[o] eritque rurſus quadratum ex kh, æquale quadratis ex k e, e h, id eſt, ex c, e h, nimirum tribus ex a, b, c. Si igitur latus ex k h, menſuretur, & in ſe ducatur, gignetur area figuræ propoſitæ ABCDEFG.

n 47. primi.

o 47. primi.

EODEM artificio, ſi plura ſint latera, inueniemus quadratũ omnibus quadratis æquale. Vt ſi foret alterũ latus q, acciperemus ei æqualem rectam e p. Item rectam e f, rectæ k h, æqualem. Nam quadratum ex p f, quadratis ex e p, hoc eſt, ex q, & ex e f, id eſt, ex a, b, c, erit æquale, & ſic de pluribus,

Facilis ratio menſurandi trapezij irregularis.

EX his colligitur facilis ratio metiendi trapezij irregularis cuiuſmodi eſt in proxima figura trapezium ABCG. Nam ducta diametro BG, ſi ad eam duæ perpendiculares demiſſæ AL, CH, menſurentur, earumque aggregatum in medietatem diametri BG, multiplicetur, procreabitur area trapezij, vt demonſtratum eſt.

IN octauo porrò lib. propoſ. 6. docebimus quoque, qua ratione datæ figuræ rectilineæ rectangulum æquale conſtruatur: quod ſi fiat hoc loco, efficietur illi rectangulo quadratum æquale, per vltimam propoſ. lib. 2. Euclidis, ſine vllo negotio, aut moleſtia.

DE AREA MVLTILATERARVM FIGVRARVM regularium.

CAPVT V.

1 QVAMQVAM regulares figuræ, quæ ſcilicet ſunt & æquilateræ & æquiangulæ, menſurari poſſint, vt irregulares præcedentis capitis, reſoluendo eas in triangula, &c. ſolet tamen dari propria ac peculiaris regula, qua cuiuſque figuræ regularis area inuenitur: quæ ita ſe habet.

Area figuræ regularis.

SEMISSIS ambitus figuræ multiplicetur in perpendicularem è centro figuræ ad vnum latus cadentem. Numerus enim productus area erit figuræ.

NAM vt lib. 7, de Iſoperimetris propoſ. 2. demonſtrabimus, area cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.

Perpendicularis & ſemidiameter figuræ regularis quo pacto inueniatur.

2 PERPENDICVLARIS porro è centro figuræ in vnum latus cadens, vna cum ſemidiametro circuli figuram ambientis ſic reperietur. Numerus laterum, ſiue angulorum duplicetur, & à duplo auferantur 4. Nam reliquus numerus indicabit, quot rectis angulis omnes anguli figuræ æquiualeant, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. demonſtrata ſunt. Hic idem numerus reliquus, videlicet, numerus angulorum rectorum per numerum angulorum diuidatur, vt Quotiens vnius anguli figuræ magnitudinem exhibeat, qui in hexagono continet rectum cum parte tertia, hoc eſt, grad. 120. Et quoniam ſemidiameter ſecat angulum figuræ bifariam, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 12. lib. 4. Euclid. fit vt ſi ſemiſſis lateris, in quod perpendicularis cadit, ponatur ſinus totus, perpendicularis ſit Tangens ſemiſſis anguli figuræ, & ſemidiameter, Secans. Si fiat ergo

Vt 100000. ſinus totus	*ad ſemiſſem lateris:*	*ita Tangens ſemiſsis anguli, vel ſecans,*	*ad aliud,*

prodibit tam perpendicularis, quam ſemidiameter in partibus lateris figuræ. Verbi gratia, in Hexagono regulari, cuius vnum latus ſit 12. ſi fiat: vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris: ita 173205. tangens ſemiſſis anguli Hexagoni ad aliud, reperietur perpendicularis $10\frac{39230}{100000}$. vel $10\frac{3923}{10000}$. Item ſi fiat, vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris; ita 200000. Secans ſemiſſis anguli Hexagoni ad aliud, exibit ſemidiameter figuræ 12.

ITAQVE ſi perpendicularis $10\frac{3923}{10000}$. ducatur in 36. ſemiſſem ambitus Hexagoni ex tribus lateribus conflatam, producetur area Hexagoni $374\frac{1228}{10000}$. vel $374\frac{307}{2500}$. Eodemque modo procedendum eſt in alijs figuris regularibus, in quibus angulorum ſemiſſes in tabula Tangentium, ac ſecantium accipi poſſunt.

Quare ex latere figuræ regularis dato non ſemper poſſit inueniri area, niſi figura ipſa deſcripta ſit.

3 QVONIAM vero circa quamlibet figuram regularem circulus deſcribi poteſt, vt ex lib. 4. Eucl. cõſtat, proponemus hic plurimarum figurarum regularium latera in partibus diametri circuli ambientis 20000000. vel ſemidiametri, ſiue ſinus totius 10000000. ex probatis auctoribus, vt earum areæ magis exquiſite inueniri poſſint per regulam Num. 1. propoſitam. Nam ſi ex ſolo vno latere in aliqua menſura cognito aream inueſtigare velimus, quemadmodum in Hexagono factum eſt, occurrẽt multæ difficultates ac magnæ, propterea quod ſemidiametri, perpendicularesq; ex ſinubus, Tangentibus, ac ſecantibus erui non poſſunt, niſi quando ſemiſſis anguli figuræ comprehẽdit præciſe gradus, vel gradus cum minutis, vel gradus cum minutis & ſecundis: (quamuis ſi ſecunda adſint, neceſſe ſit partem proportionalem adhibere) ſicut in Hexagono paulo ante factum eſt, cuius anguli ſemiſſis continet grad. 60. quod in quamplurimis figuris non contingit. Nam, verbi gratia in Heptagono omnes 7. anguli ex ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. ęquiualent 10. rectis, ideoq; vnus angulus complectitur

vnum

vnum rectum cum $\frac{4}{7}$. hoc eſt, gradus 128. Min. 34. Sec. 17. Ter. 8. Quar. 34. &c. atque eius ſemiſſis grad. 64. min. 17. Secun. 8. Ter. 34. Quar. 17. &c. ex qua ſemiſſe neque Tangens pro perpendiculari, neque ſecans pro ſemidiametro per tabulas Tangentium, atque Secantium excerpi poteſt. Idemque in alijs figuris innumeris accidere comperies. Quod ſi ſcientia inuenta eſſet conſtruendi omnes figuras regulares, ſuperari aliquo modo poſſet hæc difficultas: propterea quod cognito latere vno in quantiſcunque partibus, cognoſci quoque poſſet tam perpendicularis, quam ſemidiameter in iiſdem partibus, beneficio inſtrumenti partium, vt lib. 1. cap. 1. ad finem Num. 1. tradidimus. Sed quia pauciſſimas figuras æquilateras deſcribere nouimus intra circulum, areas plurimarum ignorari neceſſe eſt. Hanc ob cauſam nonnulli Geometræ, inter quos ſtrenuã operam nauauit Ludolphus à Collen, ingenti labore latera figurarum, ſiue deſcriptæ eæ ſint, ſiue non, explorarunt: quamuis earum anguli præter gradus, ac minuta comprehendant inſuper Secunda, Tertia, Quarta, &c. vt earum areas conſequi poſſimus.

TABVLA CONTINENS LATERA FIGVRArum regularium à triangulo vſque ad figuram 80. laterum, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.

Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000 vel ſiuu toto 10000000	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000 vel ſinu toto 10000000	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000 vel ſinu toto 10000000
3	17320508	29	2162380	55	1141776
4	14142135	30	2090569	56	1121408
5	11755705	31	2023366	57	1101755
6	10000000	32	1960341	58	1082778
7	8677674	33	1901120	59	1064443
8	7653668	34	1845367	60	1046719
9	6840402	35	1792786	61	1029575
10	6180339	36	1743114	62	1012983
11	5634651	37	1696118	63	996917
12	5176380	38	1651586	64	981353
13	4786313	39	1609331	65	966275
14	4450418	40	1569181	66	951638
15	4158233	41	1530985	67	937445
16	3901806	42	1494601	68	923669
17	3674990	43	1459906	69	910291
18	3472963	44	1426783	70	897296
19	3291891	45	1395129	71	884666
20	3128689	46	1364848	72	872387
21	2980845	47	1335852	73	860444
22	2846296	48	1308062	74	848824
23	2723332	49	1281404	75	837513
24	2610523	50	1255810	76	826499
25	2506664	51	1231218	77	815771
26	2410733	52	1207569	78	805318
27	2321858	53	1184812	79	795130
28	2239289	54	1162896	80	785196

Nam ex latere cuiuſcunque figuræ regularis cognito in partibus diametri circuli circumſcripti, vel ſinus totius, veniemus per ea, quæ cap. 2. Num. 2. ſcripſimus, in cognitionem lineæ perpendicularis ex centro in vnum latus deductæ, ac proinde totam aream nanciſcemur, vt paulo ante Num. 1. docuimus. Latera igitur in quam plurimis figuris in tabula præcedenti expoſita habes, quæ omnia veris lateribus ſunt paulo minora; & ſi adieceris vnitatem, fient paulo maiora veris; ita vt verum latus trianguli æquilateri inter hos duos numeros 17320508. 17320509. conſiſtat.

Ex cognita ſemidiametro circuli inuenire latus figuræ regularis in eo circulo deſcriptæ.

4. IAM vero cognita ſemidiametro alicuius circuli in partibus cuiuſcunque menſuræ, reperiemus in iiſdem partibus latus figuræ regularis, cuius laterum numerus maior non eſt, quam 80. beneficio præcedentis tabulæ: ſi nimirum fiat, vt ſinus totus 10000000. ad latus figuræ propoſitæ in præcedenti tabula, ita ſemidia-

meter circuli propoſiti data ad aliud. Sit verbi gratia, ſemidiameter alicuius circuli 12. & inueniendum ſit latus decagoni reſpectu dictæ ſemidiametri: Fiat vt 10000000. ſinus totus ad 6180339. latus Decagoni; ita 12. ſemidiameter data ad aliud; exibitque latus quæſitum $8\frac{164068}{10000000}$. vel in minoribus numeris $8\frac{41017}{2500000}$.

Fractionẽ magnam ad minorẽ fere æquiualentem reducere.

ET ſi moleſtum videatur operari cum fractione tam magna, reduces eam ad minorem quaſi æquiualentem hoc modo. Elige pro Numeratore quemuis numerum, vt 10. Et fiat vt Numerator 164068. ad ſuum Denominatorem 10000000. ita Numerator electus 10. ad aliud, reperiesque Denominatorem $609\frac{82588}{164068}$. Ita vt relicta hac fractione, Denominator 609. ſit minor quam verus; & 610. maior, hoc eſt, fractio $\frac{10}{609}$. ſit maior fractione $\frac{164068}{10000000}$. fractio autem $\frac{10}{610}$. minor. Inter has autem duas fractiones $\frac{10}{609}$. $\frac{10}{610}$. produces mediam $\frac{20}{1219}$. cuius Numerator ex Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus conflatus eſt. Eritque hæc fractio inuenta fere maiori illi æqualis.

Inter duas fractiones inuenire mediam.

FRACTIONEM porro, cuius Numerator ex duobus Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus duarum minutiarum componitur, eſſe maiorem minore, & minorem maiore, demonſtrabimus lib. 8. propoſ. 10.

Ex cognito latere figuræ regulrais, inuenire ſemidiametrum circuli circumſcripti.

VICISSIM ex dato latere cuiuslibet figuræ regularis cognoſcemus ſemidiametrum circuli circumſcribentis: ſi fiat, vt latus propoſitæ figuræ in tabula antecedente ad 10000000. ita latus datum ad aliud. Vt ſi latus Pentagoni detur 12. & fiat, vt 11755705. ad 10000000. ita 12. ad aliud, reperietur ſemidiameter circuli circumſcripti $10\frac{2442050}{11755705}$. Et ſi fiat, vt Numerator huius fractionis ad ſuum Denominatorem: ita Numerator electus quicunque, nimirum 1. ad aliud, inuenietur Denominator ſequens $4\frac{1083205}{2442050}$. ita vt fractio $\frac{1}{4}$. ſit maior, quam $\frac{2448050}{11755705}$. at $\frac{1}{5}$. minor. Ex additione numeratorum 1. 1. inter ſe, & Denominatorum 4. 5. inter ſe, efficies fractionem $\frac{2}{9}$. mediam: quæ adhuc maior eſt, quam $\frac{2442050}{11755705}$. Media autem inter $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. eſt $\frac{3}{14}$. quæ parum ab illa differt: ita vt ſemidiameter quæſita dici poſſit eſſe $10\frac{3}{14}$. Atque in hunc modum per minores numeros operationes fieri poſſunt, quamuis non omnino exquiſite, quod fractiones aſſumptæ non ſint omnino veræ; ſed hic error in dimenſionibus camporum tolerabilis eſt.

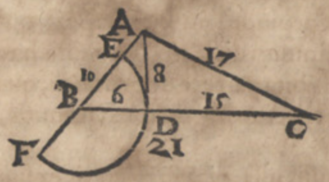
5 ANTEQVAM rectilinearum figurarum dimenſionem concludam, lubet regulam attexere, qua ex cognita area cuiuſcunque figuræ latus habentis notum venire poſſimus in cognitionem alterius figuræ ſimilis illi ſimiliterque poſitæ latus homologum etiam notum habentis: quæ ſic ſe habet.

Qua ratione ex area cuiuslibet figuræ eruatur area alterius figuræ ſimilis.

QVADRATVS numerus denominatoris proportionis, quam latus figuræ ignotæ ad latus figuræ cognitæ habet, (qui denominator habebitur, ſi latus figuræ ignotæ per latus figuræ cognitæ diuidatur,) ſi ducatur in aream cognitam, producetur area alterius figuræ quæſitæ. Debent autem figuræ eſſe ſimiles, ſimiliterque poſitæ, & earum latera homologa ſumi vt dictum eſt.

NAM denominator proportionis lateris figuræ quæſitæ ad latus figuræ datæ in ſe multiplicatus gignit denominatorem proportionis duplicatæ eorum laterum, vt ad defin. 10. lib. 5. Euclid. ſcripſimus. [a] Cum ergo figuræ ſimiles ſimiliterque poſitæ habeant etiam proportionem duplicatam laterum homologorum; ſit vt denominator proportionis duplicatæ laterũ prædictorũ multiplicans aream cognitã producat aream quæſitam, hoc eſt, numerum, qui ad aream cognitam proportionẽ habeat duplicationẽ proportionis datorum laterũ, denominatã ſcilicet à denominatore, qui ex denominatore proportionis eorum laterũ in ſe multiplicato producitur. Verbi gratia, Trianguli ABC, cuius latus AB, 10. AC, 17. & BC, 21. area eſt 84. Si ergo ſit aliud triangulum huic ſimile habens latus ipſi AB, homologum 70. ipſi vero AC, homologum 119. & ipſi BC, homologũ 147. diuidatur latus 70. per 10. vt denominator 7. proportionis lateris 70. ad latus 10. procreetur, & quadratus numerus huius denominatoris, nimirum 49. ducatur in 84. aream trianguli ABC, producetur area 4116. poſterioris trianguli. Rurſus quia area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſint 1. area eſt $\frac{13}{30}$. ferme, vt ſupra patuit, ſi detur aliud triangulum æquilaterum, cuius ſingula latera ſint 70. inueniemus eius aream hoc modo. Denominator proportionis laterum eſt ipſummet latus 70. quod 70. diuiſa per 1. faciant 70. Ducemus ergo 4900. quadratum lateris 70. in $\frac{13}{30}$. aream cognitam. Productus enim numerus $2123\frac{1}{3}$. erit area poſterioris trianguli.

a 19. vel 20. ſexti.



Regula ſupradicta aliter propoſita.

6. HÆC regula ita quoque proponi poterit. *Fiat vt quadratus numerus lateris figuræ cognitæ ad quadratum numerum lateris figuræ quæſitæ, ita area figuræ cognitæ ad aliud. Productus enim numerus erit area figuræ quæſitæ.* Propterea quod eadem eſt proportio quadrati lateris cognitæ figuræ ad quadratum lateris figuræ quæſitæ, quæ figuræ notæ ad figuram quæſitam: [b] quippe cum vtraque proportio ſit duplicata proportionis laterum homologorum. Et quoniam quadratum lateris 1. eſt 1. fit, vt quotieſcunque latus figuræ aream cognitam habentis fuerit 1. ſatis ſit, quadratum numerum lateris figuræ quæſitæ multiplicare in datam aream, vt quæſita area producatur: Adeo vt operæ pretium ſit areas inueſtigare plurimarum figurarum regularium, quarum latera ſint 1. Ex his enim ſine magno labore areæ aliarum figurarum ſimilium elicientur, quarum latera cognita ſint. Areas decem figurarum regularium, quarum latera ſunt 1. hic ſubiecimus, vt per eas ſimilium figurarum, quarum latera vnitatem ſuperant, inueſtigari poſſint ex regula Num. 5. vel 6. præſcripta; quamuis in quadrato id neceſſarium non ſit, cum latus datum in ſe ductum producat ſuum quadratum.

b 19. vel 20. ſexti.

Figu-

	Figuræ regulares.	Areæ prædictarum figurarum ſunt fere hæ.
Quarum latera ſunt 1	Trigonum	$\frac{1875000}{4330127}$ Vel $\frac{13}{30}$
	Tetragonum	1
	Pentagonum	$1\frac{8469719}{11775706}$
	Hexagonum	$2\frac{2990381}{5000000}$
	Heptagonum	$3\frac{5507221}{8677674}$
	Octogonum	$4\frac{1585127}{1913417}$
	Enneagonum	$6\frac{1243755}{6840402}$
	Decagonum	$7\frac{858089}{1236068}$
	Vndecagonum	$9\frac{517050}{1408663}$
	Duodecagonum	$11\frac{84614}{431365}$

POSSVNT autem hæ fractiones ad minores fere æquiualentes, ſi placet, reuocari, vt ſupra Num. 4. docuimus. *Quarta: tione beneficio laterum ſuperioris tabulæ areæ figurarum regulariũ inueniantur.*

7. AREÆ porro hæ procreatæ ſunt per regulam Num. 1. præſcriptam, inuentis prius perpendicularibus ex centris in latera cadentibus, licet in nonnullis figuris anguli contineant ſecunda, ac tertia, præter gradus, & minuta; hoc modo. Pro heptagono, verbi gratia, ex ſuperiori tabula ſumpta eſt ſemiſſis lateris heptagoni 4338837. (quando numerus lateris eſt impar, addenda eſt 1. vt fiat par, ac proinde ſemiſſem habeat, quandoquidem minus eſt vero latere, vt diximus. Deinde, quia, vt in tractatione ſinuum dictum eſt, ſemiſſis hæc ſinus eſt anguli oppoſiti in centro, quæſitus eſt is angulus ex tabula ſinuum (adhibita parte proportionali, quemadmodum ad finem Lemmatis 53. noſtri Aſtrolabij docuimus, vt angulus reperiretur in gradibus, minutis, ac ſecundis.) inuentusque eſt grad. 25. min. 42. ſec. 51.

POST hæc, [c] quia eſt, vt ſinus huius anguli inuenti, nimirum ſemiſſis ipſa 4338837. lateris ex ſuperiori tabula excerpti, ad $\frac{1}{2}$. ſemiſſem lateris, ita ſinus complementi eiuſdem anguli inuenti, hoc eſt, ita ſinus grad. 64. min. 17. ſec. 9. (adhibita quoq; parte proportionali, propter ſecunda.) nimirũ 9011398. ad perpendicularem huic complemento inuẽti anguli oppoſitam in triangulo rectangulo: Inuenta eſt hæc perpendicularis $\frac{9011208}{8677678}$. quæ tandem ducta in $\frac{7}{2}$. ſemiſſem ambitus heptagoni produxit aream heptagoni $3\frac{11014442}{17355348}$. vel in minoribus numeris $3\frac{5507221}{8677674}$. Atque hac eadem ratione aream cuiuſcunque figuræ regularis latus habentis 1. dummodo numerus laterum maior non ſit, quam 80. reperies: Ex qua deinde aream ſimilis figuræ latus habentis maius, quam 1. per regulam Num. 5. vel 6. traditam elicies. *c 4. triãg. rectil.*

EODEM tamen artificio hoc Num. 7. expoſito aream cuiuſuis figuræ regularis, etiamſi latus habeat maius, quam 1. (ſi placet) colligere licebit, quamuis non reperiatur prius area figuræ ſimilis, cuius latus ſit 1. ſi nimirum loco $\frac{1}{2}$. ſemiſſis lateris 1. accipiatur ſemiſſis lateris dati, quod maius ſit quam 1. vt perſpicuum eſt.

8. Cognita area figuræ regularis, cuius numerus laterum maior non ſit, quam 12. cognoſcetur eius latus hoc modo. Fiat vt area figuræ ſimilis latus habentis 1. ex præcedenti tabula deſumpta ad aream figuræ propoſitæ: Ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud. Productus enim numerus erit quadratus lateris quæſiti. Radix ergo eius quadrata dabit latus quæſitum. Nam ita eſt area ad aream, vt quadratum lateris ad quadratum lateris; [d] quod vtraque proportio ſit proportionis laterum duplicata. *Ex area cognita quo pacto latus eruatur.* *d 10. vel 20. ſexti.*

QVOD ſi area cognita ſit figuræ regularis plura latera habentis, quam 12. non plura tamen, quam 80. inuenienda primum erit area figuræ ſimilis latus habentis 1. beneficio ſuperioris tabulæ laterum, vt Num. 7. docuimus. Deinde latus exquirendum, vt hoc Num. 8 declaratum eſt. Et ſi tabula ſuperior laterum extenſa eſſet ad plura latera, inueniretur eodem modo latus figuræ plurium laterum, quam 80. ex eius area. Exempli gratia. Sit area alicuius trianguli æquilateri $15\frac{3}{5}$. Et quia area æquilateri trianguli, cuius latus eſt 1. inuenta eſt ſupra $\frac{13}{30}$. ſi fiat vt $\frac{13}{30}$. ad aream propoſitam $15\frac{3}{5}$. ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud, reperietur quadratum lateris quæſiti 36. cuius radix quadrata 6. dabit latus, quod quæritur.

DE DIMENSIONE CIRCVLI EX Archimede.

CAPVT VI.

VT circulum quemlibet propoſitum, eiuſque partes metiri poſſimus, neceſſe eſt probe
1 noſſe, quæ Archimedes de circuli dimenſione tradidit. Non abs re ergo erit, ſi eius libellum de circuli dimenſione acutiſſimum ſane, & ſubtiliſſimum hic interſeram, tum quia breuiſſimus eſt, quippe qui tribus duntaxat propoſitionibus conſtet: tum ne ſtudioſus, vt rem tam vtilem, atque apud omnes artifices peruulgatam intelligat, Archimedẽ ipſum adire cogatur: tum vero maxime, quod cum Archimedis ſcripta ob affectatam breuitatem, ſint paulo obſcuriora, illis nos lucem aliquam allaturos ſperamus. Neç dubitamus etiam, quin res hæc ſtudioſo lectori grata, ac iucunda ſit futura.

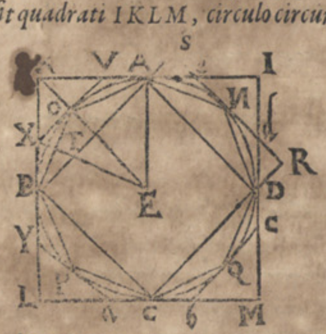
PROPOSITIO I.

AREA cuiuſlibet circuli æquālis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, alterum vero peripheriæ eiuſdem circuli æquale eſt.

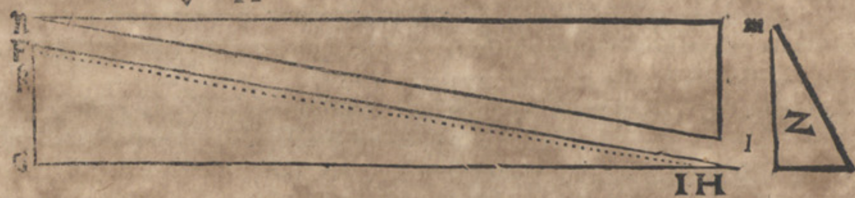
SIT circulus ABCD, cuius centrum E, ſemidiameter EA: ſitque triangulum rectangulum FGH, angulum habens rectum G, latus vero FG, ſemidiametro circuli EA, & latus GH, peripheriæ eiuſdem circuli æquale. Dico circulum ABCD, triangulo FGH, æqualem eſſe. Si enim dicatur non eſſe æqualis, ſit primum, ſi fieri poteſt, circulus maior quam triangulum, magnitudine z: adeo vt circulus æqualis ſit triangulo, & magnitudini z, ſimul; proptereaque maior, quam z. Si igitur ex circulo auferatur plus, quam dimidium, & à reſiduo plus etiam, quam dimidium, & ita deinceps: [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z.

a 1. deci.

HÆC autem detractio continua fiet, ſi primo loco auferatur ex circulo quadratum inſcriptum ABCD. Hoc enim cum dimidium ſit quadrati IKLM, circulo circumſcripti, vt in ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Euclid. oſtendimus: circulus autem ipſius quadrati IKLM, pars ſit: erit quadratum inſcriptum ABCD, maius quam dimidium circuli. Deinde ſi auferantur à reſiduis quatuor ſegmentis quatuor triangula Iſoſcelia AOB, BPC, CQD, DNA, ductis rectis ad media puncta arcuum. Hæc enim ſimul maiora ſunt, quam dimidium quatuor ſegmentorum ſimul, cum vnumquodque maius ſit, quam dimidium ſegmenti, in quo exiſtit. Completo enim rectangulo AR, [b] erit eius dimidium triangulum AND: ac proinde idem triangulum maius erit quam dimidium ſegmenti AND. Eademque ratio eſt de aliis. Pari ratione, ſi à reſiduis octo ſegmentis auferantur octo alia triangula Iſoſcelia in illis conſtituta, &c. atque ita deinceps.



b 41. pri.



PONANTVR ergo iam octo ſegmenta AO, OB, BP, PC, CQ, QD, DN, NA, relicta eſſe minora magnitudine z. & quoniam circulus æqualis conceditur triangulo FGH, & magnitudini z, ſimul: ſi demantur inæqualia, nimirum iſta ſegmenta ex circulo, & magnitudo z, ex aggregato trianguli cum z, reliqua erit figura inſcripta, octogona videlicet, maior triangulo FGH, quod eſt abſurdum, quippe cum multo minor ſit. Si namque ex centro E, ad latus BO, ducatur perpendicularis ET, & in triãgulo ſumatur Gk, ipſi ET, & recta G i, ambitui octogoni æqualis, cadet punctum k, citra F, & i, citra H, quod ET, minor ſit ſemidiametro circuli, & ambitus octogoni minor peripheria eiuſdem circuli. Igitur ducta recta k i, erit triangulum G k i, minus triangulo FGH, pars toto. Eſt autem triangulum G k i, octogono æquale: quippe cum ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Euclid. æquale ſit rectangulo ſub Gk, & ſemiſſe ipſius G i, comprehenſo, quod per propoſitionem 2. lib. 7. de Iſoperimetris octogono æquale eſt. Octogonum ergo minus eſt triangulo FGH. Non ergo maius eſt: ac proinde circulus triangulo maius eſſe nequit.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, circulus ABCD, minor, quam triangulum FGH, magnitudine z. Circumſcribatur circulo quadratum IKLM, cuius latera circulum tangant in punctis A, B, C, D. quod maius erit triangulo FGH. Cum enim eius ambitus (vt lib. 8. propoſ. 1. probabimus) maior ſit peripheria circuli, hoc eſt, recta GH, & perpendicularis EA, ipſi FG, æqualis, erit triangulum rectangulum latus vnum habens æquale ipſi FG, & alterum maius latere GH, (æquale nimirum ambitui quadrati IKLM.) maius triangulo FGH. Cum ergo triangulum illud, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. Euclid. ſit æquale rectangulo ſub FG, & ſemiſſe ambitus quadrati IKLM, comprehenſo: hoc autem rectangulum per propoſ. 2. lib. 7. de Iſoperimetris, quadrato IKLM, æquale; erit quoque quadratum IKLM, maius triangulo FGH. (Et quia triangulum FGH, ponitur æquale circulo, & magnitudini z, ſimul, ac proinde maius quam z, erit quoque quadratum IKLM, (quod maius eſſe oſtendimus triangulo FGH,) maius, quam z. Si igitur ex quadrato IKLM, auferatur plus, quam dimi-

dimidium, & à reſiduo plus etiam quam dimidium, atque ita deinceps,[a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z.

Hæc autem detractio continua fiet, ſi primo loco auferatur circulus ABCD: Hic enim maior eſt ſemiſſe quadrati IKLM, propterea quod quadratum inſcriptum (quod minus eſt circulo, pars toto) ſemiſsis eſt quadrati circumſcripti, ex ſcholio propoſ.9.lib.4. Euclid. Quod ſi ducta recta EK, ſecante circulum in O, ducatur per O, ad EK, perpendicularis VX,[b] quæ circulum tangeo in O: idemque fiat, ductis rectis EL, EM, EI, &c. deſcriptum erit Octogonum æquilaterum, & æquiangulum VXYabcdeV, vt conſtat ex conſtructione, demonſtrationeque propoſ.12. lib.4. Euclid. quippe cum ad EA, EO, & ad reliquas ſemidiametros octogoni inſcripti ductæ ſint perpendiculares ve, VX, &c. Quoniam vero vA, vO, per 2. coroll. propoſ.36. lib. 3. Euclid. æquales ſunt;[c] & eſt KV, maior quam vO: erit quoque KV, maior quam vA, ideoque & triangulum KvO, triangulo vAO, maius erit;[d] cum ſit triangulum ad triangulum, vt baſis ad baſem. Igitur triangulum KVO, maius erit, quam dimidium trianguli KAO; ac proinde multo maius, quam dimidium trianguli mixti KAO, cuius vnum latus eſt arcus AO. Eadem ratione erit KOX, maius, quam dimidium trianguli mixti KOB, cuius vnum latus eſt arcus OB. Auferendo ergo triangulum KVX, ex figura miſtilinea KAB, in qua vnum latus eſt arcus AOB, ablatum erit plus quam dimidium. Subtractis igitur quatuor eiuſmodi triangulis KVX, LYa, Mbc, Ide, ablatũ erit plus, quã dimidium ex quatuor reſiduis extra circulum, & ſic deinceps. Ponantur igitur iam octo triangula mixta reſidua, quorum baſes ſunt arcus AO, OB, BP, &c. minora magnitudine z. Cum ergo circulus cum z, æqualis poſitus ſit triangulo FGH, erit circulus cum illis octo reſiduis, hoc eſt, figura Octogona VXYabcdeV, minor eodẽ triangulo FGH, quod eſt abſurdum, cum maius ſit: quippe cum perpendicularis EO, æqualis ſit lateri FG, & ambitus Octogoni maior circumferentia circuli, hoc eſt, recta GH. Hinc enim fit, triangulũ rectangulum, cuius latus FG, æquale perpendiculari O, & alterum latus æquale ambitui Octogoni maius videlicet, quam GH, maius eſt triangulo FGH. Cum ergo illud triangulum ſit, ex ſcholio propoſ.41.lib.1.Euclid. æquale rectangulo ſub FG, & ſemiſſe ambitus octogoni comprehenſo; hoc autem rectangulum octogono æquale, ex propoſ.2.lib.7. de Iſoperimetris: erit quoque octogonum maius triangulo FGH. Non ergo minus eſſe poteſt, ac proinde circulus ABCD, minor non eſt triangulo FGH. Sed neque maior eſt, vt demonſtrauimus. Igitur æqualis eſt, quod erat demonſtrandum.

a 1. deci.
b 16. tert.
c 19. pri.
d 1. ſexti.

SCHOLIVM.

IOSEPHVS Scaliger, vel quia vim huius demonſtrationis non perpendit, vel quia ſuæ circuli quadrandi rationi vidit eſſe contrariam, non eſt veritus Archimedem hoc loco falſitatis arguere; conaturque oſtendere, non recte ab eo demonſtratum, circulum æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus ſemidiametro, & alterum circumferentiæ circuli eſt æquale. Nam, ait, ſi demonſtratio Archimedis bona eſt, demonſtrabitur eodem modo, circulum æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro æquale eſt, & alterum peripheria circuli maius. Sit enim in triangulo lmn, latus quidem lm, trianguli ſemidiametro circuli EA, æquale, at mn, peripheria maius. Concedit ergo Scaliger, circulum non eſſe maiorem triangulo FGH, recte eſſe ab Archimede demonſtratum, hoc eſt, triangulum FGH, cuius latus GH, peripheriæ eſt æquale, non eſſe minus circulo, ac proindeque triangulum lmn, cuius latus mn, maius eſt peripheria, circulo minus eſſe. Concedit item, recte probatum eſſe, circulum non eſſe minorem triangulo FGH, ſi latus GH, peripheriæ ſit æquale, hoc eſt, triangulum FGH, non eſſe maius circulo. Sed negat, ex hoc ſequi, triangulum FGH, eſſe æquale circulo. Cur? quia, inquit, eodem modo, ſi baſis mn, maior eſt peripheria, ſed minor circumſcripti polygoni ambitu, (hoc enim contingere, ait, nihil prohibet) polygonum erit quidem maius triangulo lmn, quod ambitus Polygoni maior ſit recta mn, & ſemidiameter EA, rectæ lm, æqualis. Sed reſectis portionibus, ſequeretur, idem polygonum eſſe triangulo lmn, minus, quod eſt ineptum. Itane vero mi Scaliger? Non aduertis te cum hypotheſi pugnare? Nam poſito latere mn, maiore, quam peripheria; quando eo peruentum erit, polygonum eſſe minus triangulo lmn, (ſi nimirum relictæ portiones fuerint magnitudine z,) ſequitur neceſſario, ambitum polygoni minorem eſſe latere mn. Cum enim triangulum rectangulum, cuius altitudo ſemidiametro polygoni, & baſis ambitui æqualis eſt, æquale ſit, ex ſcholio propoſ.41.lib.1.Euclid. rectangulo ſub eadem ſemidiametro, & ſemiſſe ambitus Polygoni comprehenſo; hoc autem, per propoſ.2.lib.7.huius de Iſoperimetris, polygono æquale: erit quoque triangulum illud minus triangulo lmn. Quare cum hæc triangula habeant æquales altitudines;[e] erit vt illud triangulum ad lmn, ita baſis illius ad baſem mn: ac proinde illa baſis, hoc eſt, ambitus polygoni, baſe mn, minor erit. Non ergo ponere potes baſem trianguli lmn, ſi maior eſt, quam peripheria circuli, minorem ambitu polygoni: In demonſtratione autem Archimedis conſtat, ambitum polygoni maiorem eſſe baſe trianguli FGH, ſi GH, æqualis eſt peripheriæ circuli, cum maior ſit, quam peripheria: ac propterea recte concluſit Archimedes, polygonum eſſe maius triangulo FGH, cum tamen ex hypotheſi aduerſarij oſtenſum ſit eſſe minus. Itaque potuiſſet Archimedes ita quoque propoſitum colligere. Polygonum minus eſt triangulo FGH, propter relictas ſectiones minores magnitudine z. Ergo eius ambitus minor eſt baſe GH, (quemadmodum proxime demonſtrauimus.) hoc eſt, peripheria circuli, quod eſt abſurdum, cum ambitus polygoni maior ſit quam peripheria. Quod abſurdum doctiſſime Scaliger, colligere non potes in tuo triangulo lmn, cum ſtatuas baſem mn, peripheria circuli maiorem. Et ſane miror te, Mathematicus cum ſis, negare quantitatem aliquam illi eſſe æqualem, qua neque maior eſt, neque minor. Si enim æqualis non eſt, erit inæqualis. Igitur vel maior vel minor, contra hypotheſim, cum dicatur neque maior eſſe, neque minor. An non vides, non ſolum Archimedem, ſed etiam Euclid. lib. 12. hunc argumentandi modum frequentiſſime vſurpare.

e 1. ſexti.

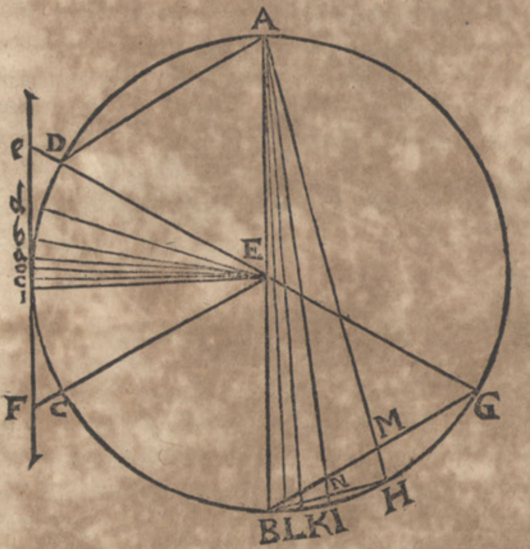
PRO-

PROPOSITIO II.

CVIVSLIBET circuli peripheria tripla eſt diametri, & adhuc ſuperat parte, quæ quidem minor eſt decem ſeptuageſimis, hoc eſt, ſeptima parte diametri, maior vero decem ſeptuageſimis primis.

HÆC eſt Archimedis propoſitio 3. quam nos ſecundam facimus, vt doctrinæ ordo ſeruetur, quandoquidem ſequens propoſitio 3. quam ipſe 2. facit, hanc noſtram propoſitionem 2. in demonſtrationem adhibet.

SIT igitur circulus ABCD, cuius centrum E, diameter AB, quam ad rectos angulos ſecet ſemidiameter
a 16. tert. E c, & e c F, ad E c, perpendicularis ducatur, [a] quæ circulum tanget in c. Ducatur latus hexagoni A D, [b] quod
b 15. quar. ſemidiametro æquale erit, & arcus A D, grad. 60. Ideoque D c, grad. 30. Ducta ergo recta E D e, erit angulus e E c, tertia pars recti, cum rectus angulus contineat grad. 90. Fiat quoque angulus c E F, angulo c E e, æqualis; eruntque anguli e, F, inter ſe æquales, quod vterque complementum ſit tertiæ partis anguli recti, ac proinde v-
c 32. pri. terque duas tertias partes vnius recti comprehendet. [c] Cũ ergo omnes tres anguli in triangulo eEF, contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, continebit quoque e E F, $\frac{2}{3}$. vnius recti, ipſumque triangulum æquiangulum erit, hoc eſt, per coroll. propoſ. 6. lib. 1. Euclid. æquilaterũ; proptereaq; perpendicularis E c, baſem e F, bifariã ſecabit, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. Euclid. atque ideo E e, ipſius c e, dupla erit. Poſita igitur c e, 153. erit E e, 306. Et ſi quadra-
d 47. pri. tũ ipſius c e, 23409. dematur ex 93636. quadrato ipſius
e 8. quin. E e, [d] reliquum fiet quadratum ipſius E c, 70227. cuius radix eſt paulo maior, quam 265. [e] ac proinde E c, ad
f 3. ſexti. c e, maiorem habebit proportionem, quam 265. ad 153.



SECTO iam angulo eEc, bifariam per rectam E d; [f] erit e E, ad Ec, vt e d, ad d c. Et componendo eE, Ec, ſimul ad E c, vt e c, ad d c. Et permutando e E, E c, ſimul ad e c, vt E c, ad c d. Quia vero e E, Ec, ſimul ma-
g 8. quin. iores ſunt, quam 571. (quippe cum e E, ſit 306. & E c, paulo maior, quam 265.) & e c, poſita eſt 153. [g] habe-
h 10. quin. bunt e E, E c, ſimul ad e c, maiorem proportionem, quam 571. ad 153. ideoq; & proportio E c, ad c d, maior erit, quã 571. ad 153. ac proinde ſi c d ponatur 153. [h] erit E c, paulo maior, quam 571. Igitur quadratum ipſius E c, paulo maius erit, quam 326041. atque idcirco, cum
i 47. pri. quadrarum ipſius c d, ſit 23409. erit quadratum ipſius E d, [i] quod quadratis rectarum E c, c d, eſt æquale, paulo maius, quam 349450. eiuſque radix maior, quam 591 $\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis quadratum ſit tantum
k 8. quin. 349428 $\frac{49}{64}$. [k] Habebit igitur E d, ad d c, maiorem proportionem, quam 591 $\frac{1}{8}$. ad 153.

l 3. ſex. & componendo permutandoq́; SECTO rurſus angulo d E c, bifariã per rectam E b; [l] erit rurſus vt d E, Ec, ſimul ad d c, ita E c, ad c b. Quia vero d E, E c, ſimul maiores ſunt, quam 1162 $\frac{1}{8}$. (quippe cum E d, maior ſit, quam 591 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 571.) & d c, poſita eſt 153. [m] habebunt d E, E c, ad d c, maiorem proportionem, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ad 153.
m 8. quin. ideoque & E c, ad cb, proportionem habebit maiorem, quam 1162 $\frac{1}{8}$. ad 153. ac proinde ſi ponatur c b, 153. erit
n 10. quin. E c, maior, quam 1162 $\frac{1}{8}$. [n] Igitur quadratum ipſius E c, maius erit quam 1350534 $\frac{33}{64}$. cui ſi addatur quadra-
o 47. pri. tum 23409. ipſius c b, erit quadratum ipſius E b, [o] quod quadratis rectarum E c, c b, æquale eſt, maius, quam 1373943 $\frac{33}{64}$. eius radix propterea, id eſt, recta E b, paulo maior, quam 1172 $\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis qua-
p 8. quin. dratum ſit tantum 1373877 $\frac{1}{64}$. [p] Habebit ergo E b, ad b c, maiorem proportionem, quam 1172 $\frac{1}{8}$. ad 153.

q 3. ſexti. & componendo permutandoque. SECTO item angulo b E c, bifariã per rectam E a; [q] erunt b E, E c, ſimul ad b c, vt E c, ad c a. Quia vero bE, maior eſt, quam 1172 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 1162 $\frac{1}{8}$. erunt b E, E c, ſimul maiores, quam 2334 $\frac{2}{8}$. vel 2334 $\frac{1}{4}$. Cum ergo c b, poſita ſit 153. [r] habebunt b E, E c, ſimul ad c b, maiorem proportionẽ, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ideoque & E c, ad c a, proportionem habebit maiorem, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ac proinde, ſi c a, ponatur
r 8. quin. 153. [s] erit E c, maior, quam 2334 $\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipſius E c, maius erit, quam 5448723 $\frac{1}{16}$. cui ſi addatur
s 10. quin. quadratum 23409. ipſius c a, erit quadratum ipſius E a, [t] quod quadratis rectarum E c, c a, æquale eſt, maius
t 47. pri. quam 5472132 $\frac{1}{16}$. eiuſque radix maior, quam 2339 $\frac{1}{4}$. cum huius radicis quadratum ſit tantum 5472090 $\frac{9}{16}$. [u] Ergo E a, ad a c, maiorem proportionem habebit, quam 2339 $\frac{1}{4}$. ad 153.

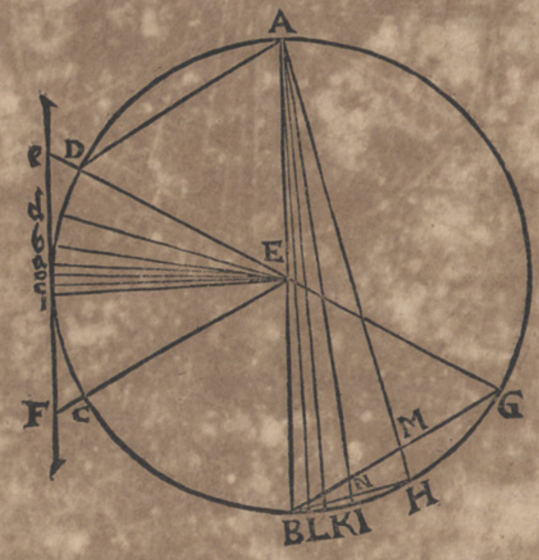
u 8. quin. x 3. ſexti & componendo permutandoque. SECTO denique angulo quoque a Ec, bifariam per rectam E o, [x] erunt a E, Ec, ſimul ad a c, vt E c, ad c o. Quia vero a E, maior eſt, quam 2339 $\frac{1}{4}$. a & E c, maior quam 2334 $\frac{1}{4}$. erunt aE, Ec, ſimul maiores, quam 4673 $\frac{1}{2}$. Cum ergo c a, poſita ſit 153. [y] habebunt aE, Ec, ſimul ad c a, hoc eſt, Ec, ad co, maiorem proportionem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. ac propterea ſi ponatur c o, 153. [z] erit Ec, maior quam 4673 $\frac{1}{2}$.

y 8. quin. QVONIAM igitur angulus e E c, tertia pars eſt recti, erit eius ſemiſſis dEc, ſexta pars recti, & huius ſe-
z 10. quin. miſſis bEc, $\frac{1}{12}$. recti, & huius ſemiſſis a E c, $\frac{1}{24}$. recti, & denique huius ſemiſſis oEc, $\frac{1}{48}$. recti. [a] Qualium ergo
a 33. ſexti. partium 48. eſt quadrans Ac, talium 1. erit arcus c o: & idcirco erit c o, $\frac{1}{192}$. totius circumferentiæ. Fiat angulus
b 33. ſexti. cEi, angulo cEo, æqualis; eritq; totus angulus o E i, $\frac{1}{96}$. quatuor rectorum: [b] ideoque arcus o i, $\frac{1}{96}$. totius circumferentiæ. Per doctrinam ergo propoſ. 12. lib. 4. Euclid. recta o i, latus erit polygoni circulo circumſcripti, quod lateribus æqualibus 96. continetur. Et quia oſtenſum eſt, E c, ad c o, maiorem habere proportio-
c 15. quin. nem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. [c] habebit quoque diameter A B, ipſius E c, dupla ad o i, ipſius c o, duplam maiorem

iorem proportionem quam $4673.\frac{1}{2}$.ad 153. Si ergo o i, latus polygoni ponatur 153.[d] erit diameter AB,maior, d 10.quin.
quam $4673\frac{1}{2}$.Multiplicentur 153.per 96.vt totus ambitus polygoni producatur 14688.[e] habebitq; ambitus po- e 8 quin.
lygoni ad diametrum AB, minorem proportionem, quam 14688. ad $4673\frac{1}{2}$.[f] Eſt autem proportio 14688.ad f 8.quin.
$4673\frac{1}{2}$.minor,quam tripla ſeſquiſeptima;quod 14688.ad $4673\frac{5}{11}$.(qui numerus paulo minor eſt quam $4673\frac{1}{2}$.
habeant proportionem triplam ſeſquiſeptimam.[g] Igitur & ambitus Polygoni ad diametrum AB,proportionē g ſchol.13.
habet minorem tripla ſeſquiſeptima:[h] atq; adeo circumferentia,quæ (vt lib.8.propoſ.1.probabimus)minor eſt quin.
ambitu polygoni,multo minorem proportionē tripla ſeſquiſeptima diametrum habebit;ideoq; circumferētia h 8.quin.
tripla eſt diametri,& adhuc ſuperat parte,quæ minor eſt $\frac{10}{70}$.hoc eſt.$\frac{1}{7}$.diametri.Nā ſi contineret ter, & $\frac{1}{7}$.haberet circumferentia ad diametrum proportionem triplam ſequiſeptimam:ſi vero contineret ter, & plus quam $\frac{1}{7}$.haberet maiorem proportionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, cum tamen minorem habeat, vt demonſtratum eſt.

IAM vero in eodem circulo ſit latus hexagoni BG,ſemidiametro equale,per coroll.propoſ.15.lib.4.Euclid.iunganturque rectæ AG,EG.Et quia triangulum EBG,eſt æquilaterum conſtans ex tribus ſemidiametris;
[i] erit angulus BEG,$\frac{2}{3}$.vnius recti,[k] ac proinde eius ſemiſſis BAG,erit $\frac{1}{3}$. vnius recti. Et quia diameter AB,dupla i coroll. 3.
eſt ſemidiametri BG,ſi BG,ponatur 780.erit AB,1560.[l] Cum ergo quadratum ipſius AB, æquale ſit quadratis propoſ. 32. lib.1.
rectarum BG,GA;[m] quod angulus AGB,in ſemicirculo rectus ſit:ſi quadratum 608400. ipſius BG, dematur k 20. tert.
ex 2433600.quadrato ipſius AB,reliquum fiet quadratū 1825200.ipſius AG,cuius radix paulo minor eſt, quam l 47. pri.
1351.cum huius quadratum 1825201.maiꝰ ſit, quam 1825200.[n] Igitur AG,ad GB,minorem habebit proportio- m 31. tert.
nem,quam 1351.ad 780.ac proinde ſi BG,ponatur 780.[o] erit AG,minor,quam 1351. n 8. quin.

SECTO iam angulo BAG,bifariam per rectam AH,ſecantem BG,in M,ductaque HB,erunt triangu- o 10.quin.
la BHM,AHB, æquiangula:[p] propterea quod angulus HBM,æqualis eſt angulo HAG, ob eādem baſem GH; ideoq; per conſtructionē angulo HAB,& angulꝰ rectꝰ H,in ſemicirculo cōmunis. p 21. tert.
[q] Igitur erit AH, ad HB,vt HB,ad HM. Item AB,ad BH,vt BM,ad MH:& permutando AB,ad BM,vt BH,ad HM: ideoq; erunt tres hæ ꝓportiones AH, ad,HB; HB, ad HM: & AB,ad BM,æquales. q 4. ſexti.
Sed vt AB,ad BM, ita eſt vtraque ſimul BA,AG, ad BG,[r] *Nam vt AG,ad AB,ita eſt GM,ad MB; & componendo vt AG, AB, ſimul ad AB, ita GM. MB, ſimul, id eſt,tota GB,ad MB:Et permutando vt AG,AB, ſimul ad GB,ita AB,ad MB.* Igitur erit quoque, vt vtraque AG,AB, ſimul ad GB, ita AH, ad HB. r 3 ſexti.



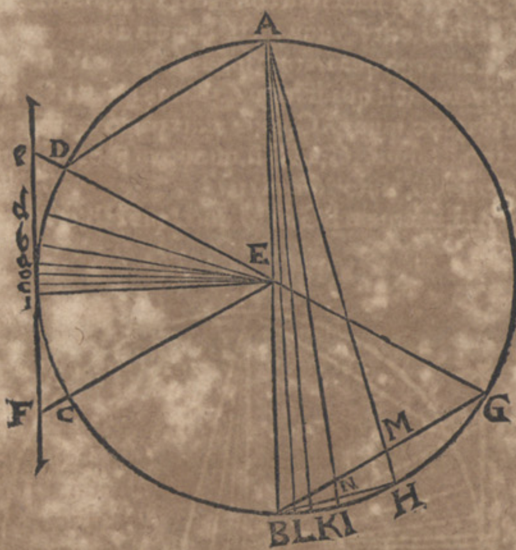
Eſt autem AG, oſtenſa minor, quam 1351.& AB,poſita eſt 1560.&GB,780.Igitur vtraque AG,AB, ſimul (cum minus efficiant,quam 2911.)[s] minorem habebit proportionem ad GB, quam 2911. ad 780. Quare etiam s 8.quinti.
proportio AH,ad HB,minor erit,quam 2911.ad 780.ac proinde ſi HB, ponatur 780.[t] erit AH, t 10.quin.
minor,quam 2911.ideoq; eius quadratum minus,quam 8473921.cui ſi addatur quadratum 608400.ipſius BH,
fiet quadratum ipſius AB,[u](quod quadratis rectarum AH,HB,æquale eſt)minus,quam 9082321.ideoque eius u 47.pri.
radix,vel recta AB,minor,quam $3013\frac{3}{4}$.cum huius quadratum $9082689\frac{1}{16}$.maius ſit,quam 9082321.Igitur AB,
ad BH,minorem proportionem habebit,quam $3013\frac{3}{4}$.ad 780.ac proinde ſi BH,ponatur 780.[x] erit AB , minor
quam $3013\frac{3}{4}$. x 10.quin.

SECTO rurſus angulo H A B, bifariam per rectam AI,ſecantem H B, in N; erunt vt prius, triangula BIN,AIB,æquiangula. Ergo vt ſupra demonſtrabimus,vtramque BA,AH,ſimul ad HB,habere eandem proportionem quam A I, ad I B. Eſt autem BA,oſtenſa minor,quam $3013\frac{3}{4}$. & AH,minor, quam 2911.& ob id earum ſumma minor,quam $5924\frac{3}{4}$.ipſa autem HB,poſita eſt 780. [y] Igitur vtraque B A, A H, ſimul ad H B, hoc y 8.quint.
eſt, AI,ad IB,minorem habebit proportionem,quam $5924\frac{3}{4}$.ad 780. Si ergo IB,ponatur 780.[z] erit AI,minor, z 10.quin.
quam $5924\frac{3}{4}$. Et quoniam eſt, vt $5924\frac{3}{4}$.ad 780. ita 1823.ad 240. quod idem numerus fiat ex primo in quartum,qui ex ſecundo in tertium,quæ quidem proportio denominatur à $7\frac{143}{240}$. habebit quoque AI,ad IB,minorem ꝓportionē,quam 1823.ad 240.ideoq; poſita IB,240.[a] erit AI,minor quam 1823.atq; ob id quadratū ipſiꝰ
A I, minus, quam 3323329.cui ſi addatur quadratū 57600. ipſius I B, fiet quadratum ipſius AB,[b] (quod qua- a 10. quin.
dratis rectarum A I,I B,æquale eſt) minus quam 3380929. eiuſque radix propterea,vel recta A B, minor quam b 47.prim.
$1838\frac{9}{11}$. cum huius quadratum $3381252\frac{27}{121}$. maius ſit,quam 3380929.[c] Igitur AB,ad BI,minorem proportio-
nem habebit,quam $1838\frac{9}{11}$.ad 240.ac proinde poſita B I, 240.[d] erit AB,minor,quam $1838\frac{9}{11}$. c 8. quin.

SECTO item angulo I A B, bifariam per rectam A K,oſtendemus eodem modo, vtramque BA,AI,ſimul ad IB,habere eandem proportionem,quam AK,ad KB. Sunt autem BA, AI, ambæ ſimul minores, quam d 10.quin.
$3661\frac{9}{11}$.(quod BA,oſtenſa ſit minor,quam $1838\frac{9}{11}$.& AI,minor,quam 1823.) & IB,poſita eſt 240. [e] Vtraque e 8.quint.
ergo BA,AI,ſimul ad IB,hoc eſt, AK,ad KB, minorem habebit proportionem, quam $3661\frac{9}{11}$.ad 240. Vt autem $3661\frac{9}{11}$.ad 240. ita eſt 1007. ad 66. quod idem gignatur numerus ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium,quæ quidem proportio denominatur à $15\frac{17}{66}$. Igitur AK,ad KB, minorem quoque proportionem habebit,quam 1007.ad 66. ideoque poſita KB, 66. [f] erit A K, minor, quam 1007. ac propterea eius quadratum f 10. quin.
minus, quam 1014049. cui ſi addatur quadratum 4356. ipſius KB; fiet quadratum ipſius AB,[g] (quod illis g 47.prim.
duobus æquale eſt) minus quam 1018405. eiuſque radix propterea,id eſt,recta AB,minor,quam $1009\frac{1}{6}$. cum

h 8. quin. huius quadratum 1018417 $\frac{13}{36}$. ſit maius, quam 1018405. [h] Quocirca AB, ad BK, minorem proportionem habebit,
i 10. quin. quam 1009 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco poſita BK, 66. [i] erit AB, minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$.

SECTO denique angulo KAB, bifariam, per rectam AL, demonſtrabimus eadem ratione, vtramque BA, AK, ſimul ad CK, eſſe, vt AL, ad LB. Sunt autem ambæ BA, AK, ſimul minores, quam 2016 $\frac{1}{6}$. (quod BA,
k 8. quin. ſit oſtenſa minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$. & AK, minor, quam 1007.) & BK, poſita eſt 66. [k] Igitur vtraque BA, AK, ſimul ad CK, hoc eſt, AL, ad LB, habebit proportionem minorem, quam 2016 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco ſi LB, ponatur
l 10. quin. 66. [l] erit AL, minor, quam 2016 $\frac{1}{6}$. ideoque quadratum eius minus quam 4064928 $\frac{1}{36}$. cui ſi addatur qua-
m 47. pri. dratum 4356. ipſius LB; fiet quadratum ipſius AB, [m] (quod duobus illis eſt æquale) minus, quam numerus 4069284 $\frac{1}{36}$. ideoque eius radix, id eſt, recta AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. cum huius quadratum 4069297 $\frac{9}{16}$. ſu-
n 8. quin. peret 4069284 $\frac{1}{36}$. [n] Quamobrem AB, ad BL, minorem proportionem habebit, quam 2017 $\frac{1}{4}$. ad 66. ideoque
o 10. quin. ſi BL, ponatur 66. [o] erit AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$.



p 26. tert. QVONIAM igitur angulus GAH, angulo HAB, æqualis eſt; [p] erit arcus GH, arcui HB, æqualis: eademque ratione arcus HI, arcui IB, & IK, ipſi KB, & KL, ipſi LB, æqualis erit. Cum ergo GB, ſit $\frac{1}{6}$. totius circumferentiæ, erit HB, $\frac{1}{12}$. & IB, $\frac{1}{24}$. & KB, $\frac{1}{48}$. & LB, $\frac{1}{96}$. ac proinde recta BL, latus erit Polygoni circulo inſcripti, quod 96. lateribus æqualibus continetur. Quoniam vero BL, poſita eſt 66. ſi 66. ducantur in 96. fiet ambitus Polygoni 6336.
q 8. quin. [q] Quapropter ambitus Polygoni ad diametrum AB, maiorem proportionem habebit, quam 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. cum diameter AB, oſtenſa ſit minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$.
r 8. quin. [r] Eſt autem proportio 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. maior, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, quod proportio 6336. ad 2017 $\frac{65}{223}$. (qui numerus maior eſt, quam 2107 $\frac{1}{4}$.) ſit tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas. Ergo ambitus Polygoni maiorem proportionem habet ad diametrum, quam 3 $\frac{10}{71}$. Cum igitur circumferentia circuli ſit ma-
s 8. quin. ior ambitu polygoni, [s] habebit circumferentia ad diametrum multo maiorem proportionem, quam 3 $\frac{10}{71}$. Ac proinde circumferentia diametrum continebit ter, & inſuper partem maiorem, quam $\frac{10}{71}$. Nam ſi contineret $\frac{10}{71}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem 3 $\frac{10}{71}$. Si autem contineret maiorem partem, quam $\frac{10}{71}$. haberet proportionem minorem, quam 3 $\frac{10}{71}$. cum tamen maiorem habere demonſtratum ſit. Et quoniam $\frac{1}{8}$. minor eſt, quam $\frac{10}{71}$. liquet ex hac ſecunda parte propoſitionis, circumferentiam continere diametrum ter, & plus, quam $\frac{1}{8}$. diametri. Cum ergo ex prima parte conſtet, circumferentiam continere diametrum ter, & minus, quam $\frac{1}{7}$. diametri: perſpicuum eſt, veram proportionem circumferentiæ ad diametrum conſiſtere inter triplam ſeſquiſeptimam, & triplam ſeſquioctauam.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi diameter per 3 $\frac{1}{7}$. multiplicetur, gignetur numerus maior, quam circumferentia: ſi vero multiplicetur per 3 $\frac{10}{71}$. procreabitur minor numerus, quam circumferentia. E contrario, ſi circumferentia diuidatur per 3 $\frac{1}{7}$. producetur numerus minor, quam diameter: ſi vero diuidatur per 3 $\frac{10}{71}$. prodibit numerus maior, quam diameter.

PROPOSITIO III.

CIRCVLVS quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proxime.

SIT circulus ABCD, & quadratum diametri BD, circulo circumſcriptum EGHI. Dico circulum ad quadratum eſſe, vt 11. ad 14. proxime. Producto enim latere EG, ſumatur EK, ipſius EG, tripla, & KF, ſeptima pars diametri BD, vel lateris EG; iunganturq; rectæ BG, BF. Quoniam igitur EF, ad diametrum EG, proportionem habet triplam ſeſquiſeptimam, ex conſtructione; erit per præcedentem EF, circumferentiæ circuli ferme æqualis. Cum ergo BE, æqualis



ſit ſemidiametro: erit per 1. propoſ. triangulum BEF, circulo æquale proxime: Triangulum autem BEG, quarta
a 1. ſexti. pars erit quadrati EH. Quia vero poſito latere EG, 7. recta EF, eſt 22. [a] erit triangulum BEF, hoc eſt, circulus ABCD, ad triangulum BEG, vt 22. ad 7. Sed poſito triangulo BEG, 7. quadratum EGHI, ipſius quadruplum, eſt 28. Igitur circulus ad quadratum, eſt ferme, vt 22. ad 28. hoc eſt, vt 11. ad 14. quod erat demonſtrandum.

DE A-

DE AREA CIRCVLI, INVENTIONEQVE CIRcumferentiæ ex diametro, & diametri ex circumferentia.

CAPVT VII.

1 QVONIAM triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, & alterum peripheriæ eiuſdem æquale eſt, [a] areæ circuli adæquatur: huius autem trianguli area ex ductu perpendicularis in ſemiſſem baſis producitur, vt cap. 2. Num. 2. huius libri ſcripſimus: *Fit vt area circuli producatur ex multiplicatione ſemidiametri in ſemiſſem peripheriæ:* (*ſi nimirum baſis illius trianguli ſtatuatur latus, quod peripheriæ æquale eſt.*) *Vel ex ductu totius peripheriæ in ſemiſſem ſemidiametri, hoc eſt, in quartam partem diametri:* (*ſumendo videlicet in eodem triangulo pro baſe latus, quod ſemidiametro eſt æquale.*) *Vel denique ex ductu totius diametri in quartam peripheriæ partem.* quod ita perſpicuum faciemus.

a 1. de Dimenſ. circuli.

Area circuli trib. viis ex cognita diametro, & circumferentia.



REPETATVR figura præcedentis propoſitionis, diuidaturque EF, quæ peripheriæ circuli eſt æqualis, bifariam in L, ita vt EL, ſemiperipheriæ ſit æqualis: Item EL, bifariam ſecetur in M, vt EM, æqualis ſit quartæ parti peripheriæ. Et tandem BE, bifariam quoque ſecetur in N, vt EN, ſemiſſis ſit ſemidiametri BE, hoc eſt, quarta pars totius diametri. [b] Et quia triangulum BEF, æquale eſt circulo ABCD; erit quoq; rectangulũ ſub ſemidiametro BE, & ſemiperipheria EL, comprehenſum (quod per propoſitionem 1. lib. 7. huius, triangulo æquale eſt.) eidem circulo æquale; quod eſt primum.

b 1. de Dimenſ. circuli.

NON aliter rectangulum comprehenſum ſub tota peripheria EF, & EN, quarta parte diametri (quod per propoſ. 1. lib. 7. huius, eidem triangulo æquale eſt) eidem circulo erit æquale, quod eſt ſecundum.

DENIQVE quia quatuor lineæ EI, EB, EL, EM, proportionales ſunt, quod tam priores duæ, quam poſteriores duæ habeant proportionem duplam; [c] erit rectangulum ſub EI, diametro, & EM, quarta parte peripheriæ comprehenſum, rectangulo ſub EB, ſemidiametro, & EL, ſemiperipheriæ comprehenſo æquale. Cum ergo hoc in prima parte oſtenſum ſit æquale circulo, erit quoque illud eidem circulo æquale. quod eſt tertium.

c 16. ſexti.

VT fractiones interdum vitentur, ducenda erit tota diameter in totam circumferentiam. Quarta enim pars numeri producti area erit circuli: propterea quod numerus productus quadruplus eſt numeri producti ex ſemidiametro in ſemicircumferentiam, vt liquet.

SEQVITVR ex prima parte, aream ſemicirculi produci ex ſemidiametro in quartam circumferentiæ: quia nimirum producitur ſemiſſis eius, quod fit ex ſemidiametro in ſemiſſem peripheriæ. Item aream Quadrantis procreari ex ſemidiametro in octauam partem circumferentiæ: Et aream octauæ partis ex ſemidiametro in ſextamdecimam partem circumferentiæ: Et aream ſextædecimæ partis ex ſemidiametro in $\frac{1}{32}$. circumferentiæ, & ſic deinceps: quia ſemper producitur ſemiſſis præcedentis producti; quemadmodum & partes circuli ſemiſſes ſunt præcedentium partium: nimirum Quadrans ſemiſſis eſt ſemicirculi; & octaua pars ſemiſſis Quadrantis; & ſextadecima pars ſemiſſis octauæ partis, &c.

Area ſemicirculi, Quadrantis octauæ partis, &c.

2. IGITVR vt area circuli reperiatur, neceſſe eſt tam eius diametrũ, quam circumferentiam eſſe cognitam. Quare trademus hic regulas nonnullas, per quas ex data diametro circumferentia tum maior, tum minor, quam vera, ex propoſ. 2. de Dimenſione circuli inueniatur. Deinde alias regulas præſcribam, per quas area circuli tum maior, tum minor, quam vera, vel ex ſola diametro, vel ex ſola circumſtantia cognita eruatur.

I.

EX data diametro circuli circumferentiam vera maiorem reperire.

FIAT vt 7. ad 22. ita data diameter, verbi gratia, 28. ad aliud. procreabiturque circumferentia 88. maior quam vera. [a] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima, proportio autem 88. ad 28. eſt tripla ſeſquiſeptima, eadem videlicet, quæ 22. ad 7. [b] erit numerus 88. maior, quam circumferentia circuli, cuius diameter eſt 28.

a 2. de Dimenſ. circuli.
b 10. quin.

II.

EX data diametro circuli circumferentiam vera minorem elicere.

FIAT vt 71. ad 223. ita data diameter 28. ad aliud, produceturque circumferentia $87\frac{67}{71}$. *minor quam vera.* [a] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas; proportio autem $87\frac{67}{71}$. ad 28. eſt tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, nimirum eadem, quæ 223. ad 28. [b] erit circumferentia circuli, cuius diameter 28. maior, quam $87\frac{67}{71}$.

a 2. de Dimenſ. circuli.
b 10. quin.

III.

EX data circuli circumferentia, diametrum vera maiorem indagare.

FIAT vt 223. ad 71. ita data circumferentia, verbi gratia 88. ad aliud. Productus enim numerus $28\frac{4}{221}$. *dabit diame-*
a 1. de Dimenſ. circuli. *trum vera maiorem.* [a] *Cum enim circumferentia ad diametrum habeat maiorem proportionem, quam triplam ſuperdecupartientem ſeptuageſimas primas, hoc eſt, maiorem quam 223. ad 71. habebit quoque data circumferentia 88. ad ſuam diametrum proportionem maiorem, quam ad* $28\frac{4}{221}$. [b] *ac proinde diameter circumferentiæ 88. minor erit, quam* $28\frac{4}{221}$.
b 10. quin.

IV.

EX data circuli circumferentia diametrum inueſtigare vera minorem.

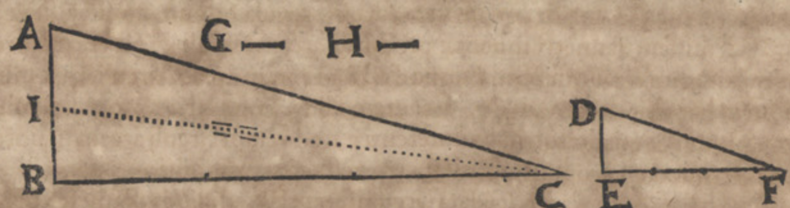
FIAT vt 22. ad 7. ita circumferentia data 88. ad aliud. Numerus enim procreatus 28. offeret diametrum vera minorem. [a] Cum enim circumferentia ad diametrum habeat minorem proportionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, hoc eſt, quam 22. ad 7. habebit quoque circumferentia data 88. ad ſuam diametrum proportionem minorem, quam ad 28. [b] atque idcirco diameter circumferentiæ 88. maior erit, quam 28.
a 1. de Dimenſ. circuli. b 10. quin.

3. IAM vero vt doceamus, qua ratione area circuli vel ex ſola diametro cognita, vel ex ſola circumferentia cognoſcatur, ita vt neceſſe non ſit ex diametro circumferentiam, vel ex circumferentia diametrum inueſtigare, demonſtrandæ prius erunt ſequentes tres propoſitiones, quarum primam deinde lib. 8. propoſ. 2. ex Pappo Alexandrino aliter quoque demonſtrabimus,

PROPOSITIO I.

Circulorum diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

SINT diametri duorum circulorum AB, DE, & rectæ circumferentijs æquales BC, EF, quæ cum diametris angulos rectos efficiant B, E, compleanturque triangula ABC, DEF. Dico ita eſſe diametrum AB, ad diametrum DE, vt eſt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Diametris enim AB, DE, inueniatur tertia
a coroll. 20 ſexti. proportionalis G: Et tribus rectis BC, EF, DE, quarta proportionalis H. Et quia continue proportionales ſunt
b 2. duodec. AB, DE, G; [a] erit quadratum ex AB, ad quadratum ex DE, vt AB, ad G. [b] Sed vt quadratum ex AB, ad qua-



c 15. quin. dratum ex DE, ita eſt circulus diametri AB, ad circulum diametri DE. [c] Et vt circulus ad circulum, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, quod hæc triangula circulorum ſint dupla. (Nam diuiſa diametro AB, bifariam in I, ductaque recta IC, [d] erit triangulum IBC, circulo æquale: ac proinde cum [e] triangula AIC, IBC, æqualia ſint; erit triangulum ABC, duplum trianguli IBC, hoc eſt, circuli, cuius diameter AB. Eademque ratione triangulum DEF, duplum erit circuli, cuius diameter DE.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt AB, ad G. At vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt AB, ad H, quod vtraque proportio compoſita ſit ex iiſdem proportionibus. ([f] Nam proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſita eſt ex proportione baſis AB, ad baſem DE, & ex proportione altitudinis BC, ad altitudinẽ EF, hoc eſt, ex proportione DE, ad H, quæ ex conſtructione eadem eſt, quæ BC, ad EF. Proportio autem AB, ad H, componitur quoque ex proportionibus AB, ad DE, & DE, ad H, ex defin.) Igitur erit, vt AB, ad G, ita AB, ad H; [g] ideoque G, & H, æquales erunt: [h] ac proinde erit DE, ad G, vt DE, ad H. Eſt autem per conſtructionem AB, diameter ad diametrum DE, vt DE, ad G, hoc eſt, vt DE, ad H. Et vt DE, ad H, ita per conſtructionem, circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Igitur erit quoque diameter AB, ad diametrum DE, vt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. quod erat demonſtrandum.
d 1. de Dimenſ. circuli. e 38. pri. f ſchol. 23. ſexti. g 9. quin. h 7. quin.

PROPOSITIO II.

PROPORTIO quadrati ex diametro cuiuſlibet circuli deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

a 2. duodec. [a] QVONIAM enim quadratum diametri cuiuſuis circuli ad quadratum diametri alterius circuli eſt, vt circulus ad circulum: erit permutando quadratum diametri ad circulum eiuſdem diametri, vt quadratum alterius diametri ad circulum eiuſdem diametri. Poſita autem diametro alicuius circuli 1. proportio quadrati ipſius ad circulum maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. Igitur proportio quadrati diametri cuiuſuis alterius circuli ad ipſum circulum, maior quoque erit quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

QVOT

QVOD autem proportio quadrati diametri 1. ad ſuum circulum maior ſit, quam 14. ad 11. minor vero, quam 284. ad 223. ita perſpicuũ fiet. Si fiat vt 7. ad 22. ita diameter 1. ad aliud, prodibit ex regula prima Num. 2. circumferentia $3\frac{1}{7}$. vel $\frac{22}{7}$. maior, quam vera. Igitur ex eius ſemiſſe $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemidiametrum procreabitur, vt Num. 1. dictum eſt, area circuli $\frac{11}{14}$. maior tamen, quam vera: [b] Ac proinde quadratum diametri 1. quod eſt 1. ad veram aream circuli, quæ minor eſt, quam $\frac{11}{14}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{11}{14}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{11}{14}$. vt 14. ad 11. (Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio eſt numeratoris 11. ad denominatorem 14. quæ minutiæ $\frac{11}{14}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 14. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{14}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream circuli veram, maiorem proportionem, quam 14. ad 11. quod eſt propoſitum. Conſtat ergo prima propoſitionis pars. b 8. quin.

RVRSVS ſi fiat, vt 71. ad 223. ita diameter 1. ad aliud, reperietur per regulam 2. Num. 2. circumferentia circuli $3\frac{10}{71}$. vel $\frac{223}{71}$. minor, quam vera. Igitur, vt Num. 1. dictum eſt, ex eius ſemiſſe $\frac{223}{142}$. in $\frac{1}{2}$. ſemidiametrum producetur area circuli $\frac{223}{284}$. minor tamen quam vera: [c] Ac proinde quadratum diametri 1. quod eſt 1. ad veram circuli aream, quæ maior eſt, quam $\frac{223}{284}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{223}{284}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{223}{284}$. vt 284 ad 223. (Nam quia ex propoſ. 2. Minutiarum, eadem eſt proportio numeratoris 223. ad denominatorem 284. quæ minutiæ $\frac{223}{284}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 284. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{284}$. habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream veram circuli minorem proportionem, quam 284. ad 223. quod eſt propoſitum. Conſtat ergo ſecunda etiam pars propoſitionis. c 8. quin.

PROPOSITIO III.

PROPORTIO quadrati à circumferentia circuli cuiuſuis deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7,

[a] QVONIAM enim circumferentia cuiuſuis circuli ad circumferentiam alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum: [b] erit quoque quadratum circumferentiæ ad quadratum circumferentiæ, vt quadratum diametri, ad quadratum diametri. [c] Sed vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita eſt circulus ad circulum. Igitur erit quadratum quoque circumferentiæ ad quadratum circumferentiæ; vt circulus ad circulum: Et permutando quadratum circumferentiæ, ad ſuum circulum, vt quadratũ alterius circumferentiæ ad ſuum circulum. Poſita autem circumferentia alicuius circuli 1. proportio quadrati circumferentiæ illius circuli ad circulum maior eſt, quam 892. ad 71. minor vero, quam 88. ad 7. Igitur & proportio quadrati circumferentiæ cuiuslibet alterius circuli ad ipſum circulum maior erit, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7. a 1. huius Num. 3. b 22. ſex. c 2. duode.

QVOD autem proportio quadrati ex circumferentia 1. deſcripti, ad ſuum circulum maior ſit, quam 892. ad 71. minor vero, quam 88. ad 7. ſic demonſtrabimus. Quoniam ſi fiat, vt 223. ad 71. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter procreatur $\frac{71}{223}$. maior, quam vera, vt ex 3. regula Num. 2. conſtat. fit vt $\frac{1}{2}$. ſemiſſis circumferentiæ ducta in $\frac{71}{446}$. ſemiſſem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{71}{892}$. vera maiorem, vt Num. 1. dictum eſt. [d] Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod eſt 1. ad veram aream circuli, quæ minor eſt, quam $\frac{71}{892}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{71}{892}$. Vt autem 1. ad $\frac{71}{892}$. ita eſt, ex propoſ. 2. minutiarum, & conuertendo, 892. ad 71. Igitur & quadratum circumferentiæ 1. ad veram circuli aream maiorem proportionem habebit, quam 892. ad 71. quod eſt propoſitum. Vera ergo eſt prior propoſitionis pars. d 8. quin.

RVRSVS, quia ſi fiat, vt 22. ad 7. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter producitur $\frac{7}{22}$. minor quam vera: fit vt $\frac{1}{2}$. ſemiſſis circumferentiæ ducta in $\frac{7}{44}$. ſemiſſem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{7}{88}$. vera minorem, vt ex ijs conſtat, quæ Num. 1. diximus. [e] Igitur quadratum circumferentiæ 1. quod eſt 1. ad aream veram circuli, quæ maior eſt, quam $\frac{7}{88}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{7}{88}$. Vt autem 1. ad $\frac{7}{88}$. ita eſt, ex propoſitione 2. Minutiarum, & conuertendo, 88. ad 7. Ergo etiam quadratum circumferentiæ 1. ad aream circuli minorem proportionem habebit, quam 88. ad 7. quod eſt propoſitum. Vera igitur etiam eſt poſterior pars propoſitionis. e 8. quin

4 HIS ita demonſtratis, ſequuntur iam quatuor regulæ, per quas aream circuli propoſiti ſiue maiorem, ſiue minorem vera, vel ex ſola diametro, vel ex ſola circumferentia cognita coniicere licebit.

I.

EX diametro aream circuli vera maiorem inueſtigare.

FIAT vt 14. ad 11. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Productus enim numerus dabit aream circuli vera maiorem. [a] Cum enim maior ſit proportio quadrati diametri ad aream circuli, quam 14. ad 11. Sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 14. ad 11. erit quoque maior proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam. [b] Ac proinde vera circuli area erit minor, quam inuenta: hoc eſt, area inuenta maior erit, quam vera. a 2. Nũ. 3. b 10. quin.

I I.

EX diametro aream circuli vera minorem inueſtigare.

FIAT vt 284. ad 223. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Numerus enim procreatus aream circuli vera minorem offeret. [a] Cum enim minor ſit proportio quadrati diametri datæ ad aream circuli, quam 284. ad 223. ſit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 284. ad 223. erit quoque minor proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Atque idcirco vera area circuli maior erit, quam inuenta, hoc eſt, inuenta area erit minor, quam vera. a 2. Nu 3. b 10. quin.

III.

EX circumferentia aream circuli vera maiorem colligere.

a 3. Nu. 3. *b 10. quin.*

FIAT vt 892. ad 71. ita quadratum datæ circumferentiæ ad aliud. Procreatus namque numerus aream circuli vera maiorem indicabit. [a] Cum enim maior ſit proportio quadrati circumferentiæ ad aream circuli, quam 892. ad 71. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad aream inuentam, vt 882. ad 71. erit quoque maior proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] ideoq; vera circuli area minor erit, quam inuenta; hoc eſt, inuenta area maior erit, quam vera.

IV.

EX circumferentia aream circuli vera minorem concludere.

a 3. Nu. 3. *b 10. quin.*

FIAT vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ datæ ad aliud. Numerus namq; qui gignitur, inerit area circuli minor, quam vera. [a] Cum enim minor ſit proportio quadrati circumferentiæ datæ ad aream circuli, quam 88. ad 7. ſit autem quadratum circumferentiæ datæ ad aream inuentam, vt 88. ad 7. erit quoque minor proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Ac proinde area circuli vera erit maior, quam inuenta: hoc eſt, area inuenta minor erit, quam vera.

Accuratior proportio diametri ad circumferentiam.

5. OMNES hæ viæ, quibus area circuli inquiritur, pendent ex proportione circumferentiæ circuli ad diametrum, quam Archimedes inuenit eſſe quidem minorem tripla ſeſquiſeptima, maiorem vero tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas: ac proinde cum hæ proportiones accuratæ non ſint, neceſſe eſt, aream inuentam vel veram magnitudinem circuli ſuperare, vel ab ea deficere, vt ex ſuperioribus regulis liquet. Et quamuis differentia inter veram aream, atque inuentam in paruis circulis perexigua ſit, in magnis tamen circulis negligenda non videtur. Quamobrem qui magis accuratam circuli aream deſiderat, aſſumat proportionem diametri ad circumferentiam vero propinquiorem, quam poſteriores Geometræ, præſertim Ludolphus à Collen, & Chriſtophorus Gruenbergerus inuenerunt, vt ſequitur.

Diameter	Circumferentia maior quam vera
100000000000000000000.	314159265358979323847.
Diameter	**Circumferentia minor quam vera**
100000000000000000000.	314159265358979323846.

$$3\frac{14159265358979323847}{100000000000000000000}$$

$$3\frac{14159265358979323846}{100000000000000000000}$$

Ita vt proportio circumferentiæ ad diametrum maior, quam vera, denominetur ab hoc primo numero, quę minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima. Proportio vero minor, quam vera, denominetur ab hoc ſecundo numero quæ maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas: qui denominatores habentur, ſi vtraq; circumferentia per diametrum diuidatur.

Accuratior inuentio circũferẽtiæ ex data diametro: & diametri ex data circumferentia.

ITAQVE ſi fiat, vt diameter prædicta ad circumferentiam vera maiorem, ita diameter alicuius circuli data ad aliud, reperietur circumferentia maior, quam vera, minus tamen differens à vera, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex regula 1. inuenta fuit. Si autem fiat, vt eadem diameter prædicta ad circumferentiam vera minorem, ita data diameter alicuius circuli ad aliud, reperietur circumferentia minor, quam vera, magis tamen ad veram accedens, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex reg. 2. inuenitur. E contrario vero, ſi fiat vt prædicta circumferentia minor, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, prodibit diameter maior quam vera: Si autem fiat, vt circumferentia prædicta maior, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, proueniet diameter minor, quam vera. Vtraque tamen diameter inuenta magis ad veram accedet, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. per reg. 3. & 4. inuenta fuit.

Accuratior inuentio areæ circuli.

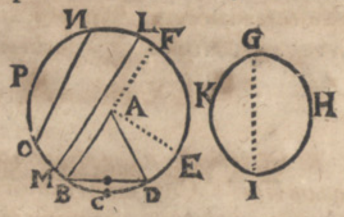
INVENTA circumferentia ex diametro, vel diametro ex circumferentia, reperietur area circuli, vt Num. 1. traditum eſt: ſi nimirum ſemidiameter in ſemicircumferentiam ducatur: vel tota circumferentia in ſemiſſem ſemidiametri: vel denique tota diameter in quartam partem circumferentiæ. quæ quidem area minus à vera diſtabit, quam illa, quæ ex proportione Archimedis inuenitur. Sed quia difficilius eſt per magnos numeros calculum inſtituere, quam per minores, vſus artificum obtinuit, vt proportio Archimedis ad calculum adhibeatur. Quando tamen deſideratur accuratior calculus, vtendum erit poſteriori hac proportione Ludolphi, præſertim in maioribus circulis.

DE A-

DE AREA SEGMENTORVM CIRCVLI.

CAPVT VIII.

SIT primum propoſitus ſector circuli ABCD, comprehenſus duabus ſemidiametris AB, AD, & arcu BCD. Huius aream ita explorabimus. Si tam ſemidiameter AB, nota ſit, nimirum palmorum 7. quam arc⁹ BCD, palmorum videlicet $3\frac{2}{3}$, ducatur ſemidiameter 7. in $\frac{11}{8}$. id eſt, in ſemiſſem arcus, Productus enim numerus $12\frac{5}{8}$. palm. erit area ſectoris ABCD, vt demonſtrabimus Si autem neque ſemidiameter AB, neque peripheria BCD, data ſit, menſuranda erit ſemidiameter aliqua menſura nota, & ſecundum eandem menſuram inuenienda circumferentia circuli per regulas antecedentis cap. nec non recta BD. Deinde fiat, vt AB, nota in aſſumpta menſura ad ſinum totũ 100000. ita BD, nota in eadem menſura aſſumpta ad aliud. Numerus enim procreatus dabit rectam BD, cognitam in partibus ſinus totius. Huius autem medietas ſinus erit ſemiſſis arcus BD: ac proinde ex



tabula ſinuum ſemiſſis BC in gradibus nota erit, ideoque totus arcus BD, non ignorabitur, Et quia tota circuli circumferentia nota facta eſt in aſſumpta menſura: ſi fiat vt grad. 360. ad totam circumferentiã in aſſumpta mẽſura cognitam, ita arcus BD, in gradibus cognitus ad aliud, cognoſcetur idem arcus BD, in menſura aſſumpta. Quare, vt prius, area ſectoris ABCD, reperietur. Poſſent quoq; gradus in arcu BD, contenti inueſtigari beneficio quadrantis alicuius in gradus diuiſi, adhibita doctrina cap. 2. lib. 1. Num. 10. tradita, vt minuta etiam cognoſcantur, quando in arcu BD, vltra gradus aliqua particula ſupereſt.

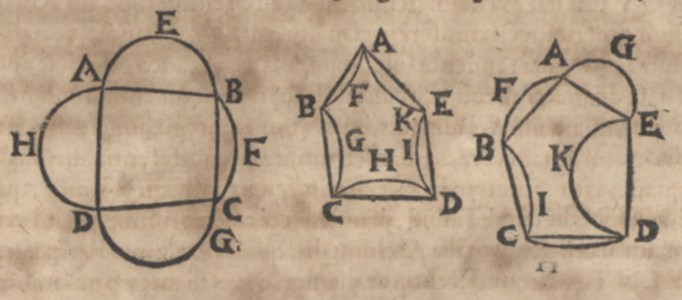
AREAM porro ſectoris produci ex ſemidiametro in ſemiſſem arcus ſectoris, ſic demonſtro. Sit quadrans BE, & ſemicirculus BEF.[a] Et quoniam eſt, vt arcus BD, ad quadrantem BE, ita ſector ABCD, ad ſecto- *a 33. ſexti.*
rem ABDE: erit quoq; ex ſcholio propoſ. 22. lib. 5. Euclid. vt arcus BD, ad quadruplum quadrantis BE, hoc eſt, ad totam circũferentiam, ita ſector ABCD, ad quadruplum ſectoris ABDE, hoc eſt, ad totum circulum.[b] Vt au- *b 15. quin.*
tem arcus BD, ad totam circumferentiam, ita eſt, BC, ſemiſſis arcus BD, ad BEF, ſemiſſem totius circumferentiæ. Igitur erit quoq; vt BC ad BEF, ita ſector ABCD, ad totum circulum.[c] Sed vt BC, ad BEF, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub AB, BEF. Ergo erit quoque ſector ABCD, ad totum circulum, vt rectan- *c 1. ſexti.*
gulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub AB, BEF. Cum ergo vt cap. 7. Num. 1. tradidimus, circulus æqualis ſit rectangulo ſub AB, BEF,[d] erit quoque ſector ABCD, rectangulo ſub AB, BC, æqualis. quod erat demon- *d 14. quinti.*
ſtrandum.

EADEM ratione procreabitur ſector ABFDA: ex ſemidiametro AB, in ſemiſſem arcus BFD.

2 SIT deinde ſegmentum BCD.[e] Inuento centro A, arcus BCD, & cognitis per aliquam menſuram *e. 25. tertij*
lateribus trianguli ABD. & arcu BCD, in eadem menſura, vt Num. 1. diximus, inueſtigetur tam area ſectoris ABCD, quam trianguli ABD. Hæc enim detracta ex illa relinquet aream ſegmenti propoſiti BCD.

3 SIT præterea figura lenticularis duobus arcubus GHI, GKI. contenta. Ducta recta GI, inquiratur, vt Num. 2. docuimus, vtriuſq; ſegmenti GHI, GKI, area. Summa n. ex duabus hiſce areis conflata, erit area propoſitæ figuræ GHIK. Quod ſi ſegmenta GHI, GKI, ſint æqualia, ſatis erit vnius aream inueſtigare. Hæc namq; duplicata dabit præpoſitæ figuræ GHIK, aream.

4 NON aliter metiemur figuras ex varijs circulorum ſegmentis coagmentatas, ſiue omnes circumferentiæ extrorſus vergant, ſiue introrſum, ſiue partim introrſum, & partim extrorſum. Vt in tribus his figuris, ſi arcubus ſubtendantur chordæ, metiemur in prima quadrilaterum ABCD, vt cap. 1. vel 3. docuimus: & ſegmenta AEB, BFC, CGD, DHA, vt hoc cap. Num. 2. traditum eſt. Si enim hęc ſegmenta quadrilatero adijciantur, quod omnia extrorſum tendant, conflabitur area figurę AEBFCGDH, ex quatuor arcubus compoſitæ.



IN ſecunda autem metiemur pentagonum ABCDE, per ea, quæ cap. 4. ſcripta ſunt: Ex quo ſi dememus quinq; ſegmẽta introrſum vergentia, quæ quidem ex ijs, quæ Num. 2. huius cap. ſcripſimus, cognoſcentur, reliqua fiet area figuræ AFBGCHDIEK, ex quinque arcubus conflatæ.

IN tertia denique pentagono ABCDE, adijciemus tria ſegmenta, AFB, AGE, CHD, extrorſum vergentia & ex compoſito numero duo ſegmenta BIC, DKE, introrſum vergentia tollem⁹, vt area relinquatur figuræ AFBICHDKEG, ex quinque arcubus compoſitæ. Atque hoc modo agrum quantumuis irregularem metiri licebit.

5 SIT denique in prima figura huius cap. ſegmentum circuli LMON, comprehenſum duabus rectis LM, NO, & duobus arcubus LN, MO. Exploretur, vt Num. 2. declaratum eſt, area vtriuſque ſegmenti PLM, PNO. Minor enim area PNO, detracta ex maiori PLM, reliquam faciet aream propoſiti ſegmenti LMON.

6 VT quartus hic liber concludatur, lubet hic appendicis loco regulas quaſdam alias à noſtro inſtituto non alienas ſubiungere.

I.

DATA circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoſcere.

FIAT vt 7. ad 88. ita data area ad aliud. Productus enim numerus erit quadratũ circũferentiæ vero maius, vt ex 4. reg. Num. 4, cap. 7. liquet. Radix ergo quadrata numeri producti dabit circumferentiam vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 71. ad 892. ita data area ad aliud, gignetur quadratum circumferentiæ vero minus, vt conſtat ex 3. reg. Num. 4. cap. 7. Ac proinde eius radix quadrata circumferentiam vera minorem indicabit.

FIAT rurſus, vt 223. ad 284. ita area propoſita ad aliud. Procreatus namq; numerus erit quadratũ diametri vero maius, vt ex 2. reg. Num. 4. cap. 7. perſpicuum eſt. Radix ergo quadrata numeri producti diametrum exhibebit vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 11. ad 14. ita area data ad aliud, reperietur quadratum diametri vero minus, vt ex reg. 1. Num. 4. cap. 7. colligitur. Ac proinde radix eius quadrata diametrum offeret vera minorem.

II.

DATO arcu cuiuſuis circuli, diametrum circuli in numeris inueſtigare.

f corol. 1. tertii.
g 35. tertii.

SIT datus arcus ABC. Ducta chorda AC, ſectaque bifariam in F, ducatur per F, perpendicularis FB,[f] quæ per centrum circuli tranſibit,[g] ideoque rectangulum ſub CF, AF, hoc eſt, quadratum ex AF, æquale erit rectangulo ſub BF, & reliqua portione diametri. Si igitur AF. FB, per aliquam menſuram fiant notæ, & quadrans numerus rectæ AF, diuidatur per FB, prodibit reliqua portio diametri FD, quæ addita perpendiculari FB, conficiet totam diametrum BD, notam in eadem menſura, in qua AF, FB, cognitæ ſunt.



GEOMETRICE eadem portio FD, reperietur, ſi duabus FB, AF, inueniatur tertia proportionalis FD: propterea quod ex ſcholio propoſ. 13. lib. 6. Eucl. AF, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta.

III.

DATIS diametris duorum circulornm, vel circumferentijs: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum ſimilium, ſimiliterque poſitarum: quam proportionem circuli, vel figuræ inter ſe habeant, cognoſcere.

QVONIAM circuli, & figuræ ſimiles ſimiliterq; poſitæ, habent duplicatam proportionem diametrorum vel circumferentiarum, & laterũ homologorum: ſi maior diameter, vel circumferentia per minorem, & maius latus homologum per minus diuidatur, prodibit denominator proportionis, quam maior diameter, circumferentiaue ad minorem, vel maius latus homologum ad minus habet. Si igitur hic denominator in ſe ducatur, producetur denominator duplicatæ proportionis, quam videlicet circulus, vel figura ad minorem habet. Vt ſi diameter vnius circuli ſit 56. & circumferentia 176. Alterius autem circuli diameter 14. & circumferentia 44. Diuiſis 56. per 14. vel 176. per 44. fit Quotiens 4. qui ductus in ſe producit 16, denominatorem proportionis maioris circuli ad minorem. Eandemque proportionem habebit figura ad minorem ſimilem, ſimiliterque poſitam, ſi latera homologa ſint 56. & 14. vel 176. & 44.

IV.

DATIS pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ ſint: Item pluribus figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis, quarum latera homologa ſint nota: Inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propoſitis æqualis ſit. Item latus reperire, cuius figura ſimilis, ſimiliterque poſita æqualis ſit omnibus propoſitis figuris.

MVLTIPLICENTVR diametri, vel circumferentiæ, aut latera homologa in ſe, & numeri producti in vnam ſummam colligantur. Radix enim quadrata huius ſummæ erit diameter, circumferentiaue, aut latus homologum quæſitum. Verbi gratia, ſi ſint quatuor diametri, circumferentiæue circulorum, aut latera homologa ſimilium figurarum, ſimiliterque poſitarum, 84. 3. 4. 12. atque in ſe multiplicentur, gignentur numeri 7056. 9. 16. 144. quorum ſumma 7225. Radix ergo quadrata huius ſummæ 85. erit diameter, circumferentiaue circuli, aut latus homologum, quod quæritur: ita vt circulus, cuius diameter, vel circumferentia eſt 85. aut figura ſupra rectam 85 ſimilis; ſimiliterq; poſita figuris datis, æqualis ſit quatuor circulis, aut figuris propoſitis. Nam

h 2. duod.

cum quadratum 7225. radicis 85. æquale ſit quatuor quadratis 7056. 9. 16. 144. radicum 84. 3. 4. 12.[h] Circuli autem eandem habeant proportionem, quam quadrata diametrorum: ac proinde quam quadrata circumferen-

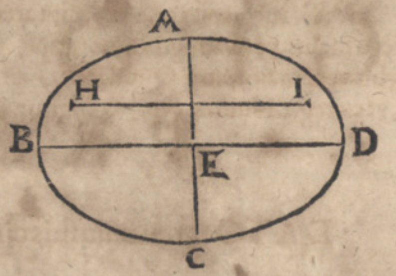
i 20. ſexti.

tiarum; quod circumferentiæ diametris ſint proportionales: Item figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ inter ſe ſint, vt quadrata laterum homologorum,[i] propterea quod tam quadrata, quam figuræ habent duplicatam proportionem laterum: erit quoque tam circulus, cuius diameter, circumferentiaue 85. æqualis quatuor circulis, quorum diametri, circumferentiæue 84. 3. 4. 12. quam figura ſupra latus 85. ſimilis ſimiliterque poſita, quatuor figuris, quarum latera 84. 3. 4. 12. æqualis, quod eſt propoſitum.

V.

Aream propoſitæ Ellipſis indagare.

LVBET deniq; librũ hunc quartũ duob⁹ problematibus terminare, quæ ab Archimede Syracuſano acutiſſime inuenta ſunt, ac demonſtrata. Vnum eſt de area Ellipſis; alterũ de area Parabolæ. Sit ergo Ellipſis ABCD, cuius maior diameter BD, & minor AC, ſecans maiorem in E, bifariam. [b] Inueniatur HI, media proportionalis inter BD, & AC: & circuli circa diametrũ HI, deſcripti area, inquiratur, per ea, quæ cap. 7. huius lib. ſcripſimus. Dico hanc aream areæ Ellipſis ABCD, eſſe æqualem. [c] Quoniam enim eſt, vt BD, ad AC, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, [d] Vt autem quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, ita eſt circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Igitur erit quoque, vt BD, ad AC, ita circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Cum ergo per propoſitionem 5 Archimedis de Conoidibus, & ſphæroidibus, ſit quoque, vt maior diameter BD, ad minorem AC, ita circulus diametri BD, ad Ellipſim ABCD; [e] habebit circulus diametri BD, eandem proportionem ad circulum diametri HI, & ad Ellipſim ABCD. [f] Ideoque area circuli diametri HI, areæ ellipſis ABCD, æqualis erit. quod erat demonſtrandum.

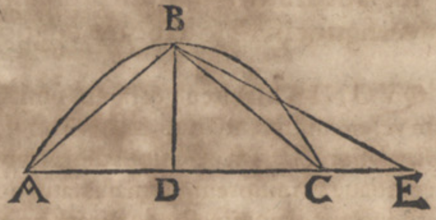


b 13. ſexti.
c coroll. 20 ſexti.
d 2. duod.
e 11. quin.
f 9. quinti.

VI.

AREAM propoſitæ parabolæ inueſtigare.

SIT data parabola ABC, cuius baſis AC, & axis BD, diuidens baſem bifariam in D, & vertex B. Inſcribatur parabolę triangulum ABC, eandem habens baſem, ac verticem cum parabola. Producta autem baſe AC, ſumatur CE, tertia pars ipſi⁹ AC; ita vt AE, ipſius AC, ſit ſeſquitertia. Iungatur recta EB. Inquiraturq; deniq; per cap. 2. huius lib. area trianguli ABE. quam dico eſſe æqualem areæ parabolæ ABC. [g] Quoniam enim eſt, vt AE, ad AC, ita triangulum ABE, ad triangulum ABC: Eſt autem AE, ipſius AC, ſeſquitertia, ex conſtructione; erit quoque triangulum ABE, trianguli ABC, ſeſquitertium. Cum ergo, vt Archimedes in lib. de Quadratura paraboles demonſtrauit, parabola quoque ABC, trianguli ABC, ſit ſeſquitertia: [h] habebunt triangulum ABE, & parabola ABC, ad triangulum ABC, eandem proportionem. [i] Ideoque area trianguli ABE, Areæ paraboles ABC, æqualis erit. quod erat oſtendendum.



g 1. ſexti.
h 11. quin.
i 9. quinti.

FINIS LIBRI QVARTI.

GEOME-

GEOMETRIAE PRACTICAE LIBER V.

AREAS

Solidorum, corporumue perſcrutans.

SVPEREST tertia magnitudinis ſpecies, quæ corpora, ſolidaue complectitur. Et quia initio lib. 4. diximus, corpora metienda eſſe per corpuſcula cubica: ita vt quando dicitur corpus aliquod continere 1000. palmos, intelligendum ſit, 1000. cubos æquales, quorum ſinguli latera habent vni palmo æqualia, aream illius corporis explere: docendum iam erit hoc lib. qua ratione cuiuſcunque corporis area inueſtigetur, hoc eſt, numerus corpuſculorum cubicorum in eo contentorum. Præcipua autem corpora, de quibus acturi ſumus, ſunt Parallelepipeda. Priſmata, Cubi, Pyramides, Fruſta pyramidum, Cylindri, Coni, Fruſta Conorum, ſphæræ, ſphærarum portiones, quinque corpora regularia, videlicet Tetraetrum, Hexaedrum ſiue cubus, Octaedrum, Icoſaedrum, Dodecaedrum, qua omnia lib. 11. ab Euclid: definita ſunt. His adiungemus nonnulla corpora vacua, & alia quædam irregularia.

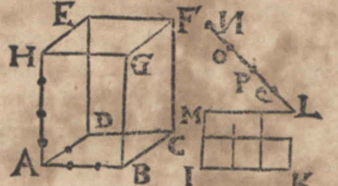
DE AREA PARALLELEPIPEDORVM, PRISmatum, & Cylindorum.

CAPVT I.

a 30. defin. vndec.

Area parallelepipedi rectanguli.

PARALLELEPIPEDVM [a] eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quę ex aduerſo, parallelę ſunt, contenta. Huiuſmodi figuram ſolidã exprimit columna aliqua quadrilatera vniformis craſſitiei. Vt figura ſolida ABCDEFGH, in qua tam duo plana oppoſita ABCD, EFGH, quam duo ADEH, BCFG, & duo ABGH, DCFE, parallelogramma ſunt inter ſe parallela, & æqualia, dicitur parallelepipedum. Huius area ita inueſtigbitur. Sit primo propoſitum parallelepipedum rectangulum habens omnia ſex parallelogramma rectangula, ac proinde omnes eius angulos ſolidos rectos: ſitque longitudo baſis AB, palm. 3. latitudo AD, palm. 2. & altitudo AH, palm. 4. Ducatur ergo latitudo 2. in longitudinem 3. vt producatur baſis palmorum 6. quadratorum, vt lib. 4. cap. 1. traditum eſt. Deinde baſis hæc 6. palmorum ducatur in altitudinem 4. Numerus enim productus 24. indicabit in parallelepipedo contineri 24. cubos, quorũ ſingula latera ſingulos palmos complectuntur, quod ita planũ faciemus. Exponatur ſeorſum rectangulũ IKLM, æquale baſi ABCD,



intelligaturq; altitudo perpendicularis LN. 4. palm. Si igitur ducatur lat⁹ IM, palm. 2. in IK, palm. 3. producetur area baſis palmorũ quadratorũ 6. ſupra quæ ſi concipiantur extructi 6. cubi æquales, implebunt ij parallelepipedum vſque ad primũ palmum LQ, altitudinis. Si deinde alij 6. cubi æquales prioribus ſuperimponantur, implebitur parallelepipedũ vſq; ad ſecundum palmum altitudinis QP. Et alij 6. cubi æquales parallelepipedũ vſq; ad tertium palmum PO, altitudinis implebunt. Deniq; alij 6. cubi appoſiti totũ parallelepipedum explebunt vſq; ad quartum altitudinis palmum ON. Conſtat ergo in toto parallelepipedo exiſtere toties 6. cubos palmares, quoties palmus in altitudine continetur. hoc eſt, cubos 24.

Area parallelepipedi non rectanguli.

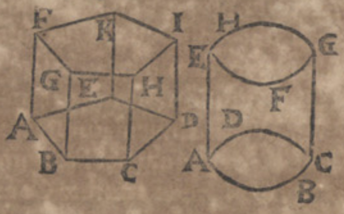
2 INTELLIGATVR deinde parallelepipedum ABCE. cuius baſes ABCD, EFGH, ſint Rhombi, vel Rhomboides, ac latera AH, DE, DF, BG, CF, ad baſem ABCD, recta, ita vt altitudo ſit AH. Primum ergo inquiratur area baſis ABCD, vt lib. 4. cap. 3. Num. 1. docuimus. Hæc deinde in altitudinem AH, ducatur. Productus namq; numerus erit parallelepipedi area. Nam ſi fiat rectangulum IL. baſi AC, æquale, & ſupra illud concipiatur

piatur parallelepipedum rectangulum, cuius altitudo LN, altitudini AH, ſit æqualis: [b] erit hoc parallelepipedum parallelepipedo ACE, æquale. Cum ergo parallelepipedum, cuius baſis rectangulum IL, & altitudo LN, producatur ex altitudine LN, in baſem IL, vt oſtenſum eſt, producetur quoque parallelepipedum ACE, ex altitudine AH, in baſem AC, baſi IL, æqualem. *b 31. vnd.*

SI nullum latus parallelepipedi rectũ eſt ad baſem, demittenda erit ex aliquo angulo ſupremi parallelogrammi ad planum, in quo baſis, linea perpendicularis, pro altitudine parallelepipedi, eaq; diligenter metienda. Si namque area baſis inueſtigetur vel per cap. 1. lib. 4. quando eſt rectangula, vel per cap. 3. eiuſdẽ lib. quando non eſt rectãgula, eaq; in altitudinẽ inuentam ducatur, producetur area ꝓpoſiti parallelepipedi. Nam ſi ſupra baſem intelligatur parallelepipedum rectũ eiuſdem altitudinis cum propoſito parallelepipedo, [c] erunt duo hæc parallelepipeda inter ſe æqualia. Conſtat autem ex Num. 1. & 2. parallelepipedum rectum gigni ex ductu baſis in altitudinem. *c 29. vel 30. vndec.*

3 CVBVS, qui etiam parallelepipedũ quoddam eſt rectangulũ, eodẽ modo producitur, nimirum ex latere in ſe, & iterũ in productum. Vt ſi latus cubi ſit 10. erit eius area 1000. quod decies decem decies procreent 1000. *Area cubi*

4 [d] PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorũ aduerſa duo ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallela; alia vero parallelogramma. Vt eſt ſolidum ADF, cuius baſes ſunt pentagona ABCDE, FGHIK, parallela, & æqualia. Hanc figuram ſolidam repreſentat columna aliqua laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, ac parallelæ, ſiue hæ triangula ſint, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Ex quo fit, vt priſma quodcunq; ambiant tot parallelogramma, quot latera, vel anguli in vnoquoq; oppoſitorum planorum reperiuntur. Vt propoſitum priſma ambiunt quinque parallelogramma ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK. Area porro cuiuslibet priſmatis inuenietur, ſi area baſis inquiratur, atq; in altitudinẽ ducatur. Nam ſi concipiatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum priſmate, habens baſem, rectangulum baſi priſmatis æquale; [e] erit hoc parallelepipedum priſmati æquale. Cum ergo parallelepipedum producatur ex ſua baſe in altitudinẽ, procreabitur quoq; priſma ex multiplicatione ſuæ baſis in altitudinem. Area porro baſis cognoſcetur ex ijs, quæ lib. 4. ſcripſimus, & altitudo priſmatis, ſi eius latera recta non ſint ad baſem, exploranda erit, vt cap. præcedente Num. 2. altitudinem parallelepipedi inueſtigandam eſſe præcepimus. *d 13. defin. vndec.* *Area priſmatis tã recti, quã obliqui.* *e 2. corol. 7. duodec.*



5 CYLINDRVS eſt figura ſolida æqualis craſſitiei, quæ duobus circulis æqualibus, & æquidiſtantibus, & rotunda ſuperficie inter ipſos intericcta continetur, inſtar columnæ cuiuſpiam rotundæ. Vt eſt ſolidum ACH, cuius baſes ſunt duo circuli ABCD, EFGH, paralleli, & æquales. Huius quoq; area procreabitur ex multiplicatione baſis, ex cap. 7. lib. 4. inuentæ in altitudinem, quod in Cylindro recto explicabitur, vt Num. 1. in parallelepipedo recto factum eſt. Nam ſi verbi gratia baſis Cylindri circularis ABCD, continet 10. palmos quadratos, explebunt 10. cubi palmares ſupra illos 10. palmos quadratos extructi, Cylindrum vſq; ad primum palmum, altitudinis: at 20. cubi eundem explebunt vſque ad ſecundum palmum, &c. Quod ſi Cylindrus obliquus ſit, exquirenda erit eius altitudo per lineam perpendicularẽ ex ſuperiore baſe demiſſam ad planũ, in quo inferior baſis exiſtit, atq; in hanc altitudinẽ area baſis ex cap. 7. lib. 4. inuenta multiplicanda. Productus enim numerus dabit aream Cylindri propoſiti, [f] cum æqualis ſit Cylindro recto eandem cum illo baſem, & altitudinem habenti. *f coroll 11. duodec.*

DE AREA PYRAMIDVM ET CONORVM.

CAPVT II.

1 PYRAMIS [a] eſt figura ſolida, quæ planis continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta. Vt figura ſolida ABCDEF, ad punctum F, conſtituta ſupra baſem pentagonam ABCDE, & quam ambiunt quinque triangula ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, tot nimirum, quot in baſe ſunt latera, dicitur pyramis. *a defin. 12. vndec.*

CONVS autem eſt figura ſolida rotunda ad vnum punctum conſtituta, ſupra baſem circularem, inſtar pyramidis rotundæ, qualis eſt figura ABCDE.

TAM autem pyramidis, quam Coni area producitur ex multiplicatione baſis in tertiam partem altitudinis. Cum enim, vt in præcedenti cap. oſtendimus, ex baſe in totam altitudinem gignatur priſma, vel Cylindrus eandem habens cum pyramide, & cono altitudinem: [b] producetur ex eadem baſe in tertiam partem altitudinis tertia pars illius priſmatis, vel Cylindri, [c] Cum ergo pyramis, ſit tertia pars illius priſmatis, [d] & Conus tertia pars Cylindri, liquet tam pyramidem, quam Conum produci ex baſe in tertiam partem altitudinis. Ex quo fit, ſi baſis ducatur in totam altitudinem, tertiam partem numeri producti, eſſe quoque aream pyramidis, vel Coni. Item eandem produci ex tota altitudine in tertiam partem baſis: [e] quod hac ratione tertia pars priſmatis, vel Coni gignatur. *Area pyramidis, & coni.* *b ſchol. 14. duodec.* *c corol. 7. duodec.* *d 10. duod.* *Area pyramidis, & coni aliter* *e 1. ſchol. 7. duodec. & 11. duodec.*



2 BASIS porro pyramidis, ſi triangularis eſt, cognoſcetur, vt lib. 4. cap. 2. traditum eſt: ſi multilatera, reperietur, per ea, quæ eodem lib. cap. 3. 4. & 5. ſcripſimus. Baſis autem Coni inueſtigabitur ex cap. 7. eiuſdem lib.

Atvero

Altitudo piramidis, & coni. At vero altitudo tam pyramidis, quam Coni, obtinebitur, ſi in verrice ſtatuatur planum baſi æquidiſtans, ab eoque ad planum, in quo baſis, perpendicularis demittatur, eaque exquiſitè menſuretur. Quamuis enim eadem hæc altitudo indagari, poſſit Geometrice, ſi inclinatio vnius lateris ad baſem, & magnitudo quoque eiuſdem lateris cognoſcatur: quia tamen hæc ipſa exploranda ſunt materialiter per aliquod inſtrumentum, præſtat ipſam quoque altitudinem ſtatim per inſtrumentum exquirere, præſertim per inſtrumentum partium, quod lib. 1. cap. 1. deſcripſimus: cum inuentio illa Geometrica difficilior ſit, procedatq; ex inclinatione, ac latere per inſtrumentum cognitis.

3 ATQVE hæc, quæ diximus, intelligi volumus tam de pyramidibus, Conisque rectis, quam de obliquis, & ſcalenis.

DE AREA FRVSTI PYRAMIDIS, ET CONI.

CAPVT III.

1. FRVSTVM pyramidis, & Coni appello id, quod alij pyramidem decurtatam, & Conum decurtatum dicunt. Sit ergo fruſtum pyramidis ABCDEF, cuius baſes ABC, DEF, ſint paralleiæ, & ſimiles, & cuius area inueſtiganda ſit. Quod duobus modis fieri poteſt. Primum cogitetur integra pyramis ABCH, cuius altitudinem HG, perpendicularem ad baſem (licet pyramis actu non ſit integrata) ita inueniemus.[a] Quoniam eſt, vt AB, ad AH, ita DE, ad DH, & permutando, vt AB, ad DE, ita AH, ad DH; erit quoque diuidendo, (ſumpta AS, æquali ipſi DE) vt SB, ad DE. ita AD, ad DH.[b] Quia vero plana parallela ABC, DEF, ſecant rectas AH, GH, proportionaliter in I, G; erit quoque vt SB, ad DE, ita GI ad IH. Si igitur fiat, vt SB, differentia inter latera homologa AB, DE, baſium ad DE, ita GI, altitudo Fruſti pyramidis (quæ cognoſcetur per lineam perpendicularem demiſſam ad baſem ex aliquo puncto plani DEF, etiam producti, ſi opus eſt.) ad aliud, prodibit recta IH, altitudo nimirum pyramidis DEFH: qua addita ad GI, tota altitudo GH, cognita erit. Quocirca ſi per caput præcedens inueniatur area tam integræ pyramidis ABCH, quam abſciſſæ pyramidis DEFH, & hæc ab illa dematur, reliquum fiet Fruſtum ABCDEF.

a 4. ſexti.
b 17. vnde
Area fruſti pyramidis.

Area fruſti coni. 2 NON aliter fruſtum Coni ABCD, inueſtigabitur, vt patet, ſi integer Conus intelligatur ABH, &c.

3 ALIO modo idem fruſtum tam Pyramidis, quam Coni cognoſcemus, etiamſi neq; pyramis, neq; conus integretur.[c] Fiat quadrata KLMN, NOPQ, baſib⁹ ABC, DEF, notis æqualia, inueniaturque inter quadrata KM, NP, ſuperficies media proportionalis, qualis eſt rectangula figura OK, producto latere OP, ad R.[d] Quoniam enim eſt, vt MN, ad NO, ita KM, ad NR. Item vt KN, ad NQ, ita NR, ad NP,[e] eſtque MN, ad NO, vt KN, ad NQ: erit quadratum KM, ad rectangulum NR, vt rectangulum NR, ad quadratum NP: ideoque NR, medio loco proportionale eſt inter quadratum KM, NP. Quamobrem, ſi radix quadrata baſis ABC, notæ, id eſt, latus KN, quadrati KM, ducatur in radicem quadratam baſis DEF, notæ, hoc eſt, in latus NO, quadrati, NP, producetur area rectanguli NR.

c 14. ſecundi.
d 1. ſexti.
e 7. quinti





IAM vero ducatur GI, altitudo fruſti in ſummam ex quadrato KM, hoc eſt ex baſe ABC, & quadrato NP, ſiue baſe DEF, & ſuperficie NR, media proportionali inter baſes, vel dicta quadrata collectam, Productus enim numerus triplus erit fruſti pyramidis ABCDEF; ideoque tertia producti pars area erit prædicti fruſti.[f] Quoniam enim priſma, quod fit ex GH, altitudine pyramidis in baſem ABC, ſiue quadratum KM, triplum eſt pyramidis ABCDEFH: erit quoque parallelepipedum factum ex GI, in quadratum KM, vna cum parallelepipedo facto ex IH, in idem quadratum KM, triplum pyramidis eiuſdem.[g] Eſt autem & ablatum parallelepipedum factum ex IH, in baſem DEF, hoc eſt, in quadratum NP, triplum ablatæ pyramidis DEFH.[h] Igitur & reliquum, quod fit ex GI, in quadratum KM, vna cum ijs, quæ fiunt ex IH, in KP, & in RM, triplum erit fruſti reliqui ABCDEF.

f 7. duod.
g 7. duod.
h 5. quinti.

4 QVIA vero æquales ſuperficies ABC, KM, & ſuperficies æquales DEF, NP, eandem habent proportionem; erit permutando ABC, ad DEF, vt KM, ad NP.[i] eritque latus AB, ad latus DE, vt latus KN, ad latus NQ, & diuidendo (ſubtracta recta AS, æquali ipſi DE, ex AB,) SB, ad DE, vt KQ, ad QN. Eſt autem, vt Num. 1. demonſtrauimus, vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Igitur erit etiam vt KQ, ad QN, ideoq; vt MO, ad ON, ita GI, ad IH.[k] Sed vt KQ ad QN, ita eſt KP, ad PN; Et vt MO, ad ON, ita MR, ad RN. Igitur erit quoque, vt GI, ad HI, ita tam KP, ad PN, quam MR, ad RN. Contractis ergo hiſce magnitudinibus ad numeros,[l] erit numerus factus ex GI, primo in PN, quartum, æqualis ei, qui fit ex IH, ſecundo in KP, tertium. Item numerus factus ex GI, primo in RN, quartum æqualis ei, qui fit ex IH, ſecundo in MR, tertium:[m] Ac propterea duo, qui fiunt ex GI, in PN, & ex GI, in RN, æquales erunt duobus, qui fiunt ex IH, in KP, & IH, in MR. Adiecto ergo communi, qui fit ex GI, in KM, erunt tres, qui fiunt ex GI, in KM, & in PN, & in RN, æquales tribus, qui fiunt ex GI, in KM, & ex IH, in KP, & in MR. Sed hi poſteriores tres tripli ſunt fruſti pyramidis ABCDEF, vt ad finem Num. 3. demonſtrauimus. Ergo & priores tres, qui nimirum fiunt ex GI, altitudini fruſti in KM, & in PN, & in RN, hoc eſt, in ſummam ex KM, baſi ABC, æquali, & ex PN, baſi DEF, æquali, & ex RN, media proportionali inter baſes collectam, tripli erunt eiuſdem fruſti: ideoque tertia eorum pars æqualis erit areæ fruſti. quod erat demonſtrandum.

i 22. ſexti.
k 1. ſexti.
l 19. ſep.
m 2. pronunc.

5 EADEM ratione fruſtum Coni ABDC, producetur ex altitudine GI, in ſummam ex baſe AB, & baſe CD, & ſuperficie media proportionali inter baſes collectam vt conſtat, ſi concipiantur quadrata KM, NP, baſibus æqualia, & proinde ſuperficies RN, media proportionalis inter baſes, &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

1 SI ea, quæ hactenus dicta ſunt, rebus materialibus accommodentur, licebit nobis per cap. 1. metiri murum quemcunque vniformis craſſitiei, tanquam parallelepipedum quoddam, cuius longitudo eadem ſit, quæ longitudo muri: latitudo vero eadem quæ muri latitudo: altitudo denique, ſiue profunditas eadem, quæ altitudo muri.

Soliditas muri.

EADEMQVE ratione metiemur fruſtum alicuius marmoris, vel alterius ſaxi, tanquam priſma quodpiam, ſi vniformem habeat craſſitiem, lateraque ad baſes ſint recta.

NON aliter ſaccum tritici, tanquam Cylindrum quendam, dimetiemur, plus minus. Nam cum ſaccus non ſit accuratus Cylindrus, vera eius menſura haberi non poteſt.

Soliditas alicuius fruſti marmoris.

2 RVRSVS per caput 2. aceruum tritici, tamquam conum aliquem, eodem modo, plus minus, metiri licebit. Itaq; ſi cognoſcemus, quot grana, vel libræ tritici in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, multiplicenturq; grana, vel libræ vnius cubi in numerum cuborum, qui in toto ſacco, vel aceruo reperti ſunt, producetur numerus granorum, vel librarum in eodem ſacco, vel aceruo exiſtentium.

Capacitas ſacci tritici.

3 SIC etiam, ſi detur vas aliquod excauatum in modum parallelepipedi, aut Cylindri, ſciemus eius capacitatem, ſi eius parallelepipedum interius aut Cylindrum, non ſecus, ac ſi ſolida figura eſſet, metiemur: ita vt ſi cognitum fuerit, quot menſuræ aquæ alterius ve liquoris in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, ignorari non poſſit, quot menſuræ in cubis in toto vaſe contentis comprehendantur, ſi nimirum menſuræ vnius cubi ducantur in numerum cuborum, quos in vaſe comprehendi inuenimus.

Capacitas acerui tritici.

Capacitas vaſis excauati.

4 DENIQVE ſi deſideretur ſoliditas alicuius vaſis, quod tam interius, quam exterius formam habeat parallelepipedi, ſeu priſmatis, Cylindriue, metienda erit vtraq; figura tum interior, tum exterior. Si namque illa ex hac detrahetur, reliqua fiet ſoliditas vaſis excauati.

Soliditas vaſis excauati.

DE AREA QVINQVE CORPORUM REGULARIUM.

CAPVT IV.

1 QVINQVE tantum ſunt corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icoſaedrum, vt in ſcholio propoſ. 18. lib. 13. Euclid. demonſtrauimus: quæ ſic ab Euclide lib. 11. definiuntur.

TETRAEDRVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta, qualem figuram exprimit pyramis triangularis æquilatera.

HEXAEDRVM eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta, qualem refert cubus, ſeu parallelepipedum baſium quadratarum, in quo omnes tres dimenſiones ſunt æquales.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

2 CVBI ſiue Hexaedri aream gigni ex multiplicatione lateris in ſe, & iterum in productum, cap. 1. Num, 3. docuimus. Item pyramidem, ſeu Tetraedrum produci ex eius altitudine (quæ mechanice cognoſcetur, vt cap. 2. Num. 2. traditum eſt) in tertiam baſis partem: vel ex eius baſe in tertiam partem altitudinis, declarauimus ca. 2. Num. 1. Quod ſi Geometrice inuenire lubeat altitudinem Tetraedri, ita faciemus. Quoniam quadratum lateris Tetraedri ad quadratum diametri ſphæræ Tetraedrum ambientis eſt, vt 2. ad 3. [a] quod diameter ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis: Si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri ad aliud, prodibit quadratum diametri ſphæræ, eiuſque quadrati quadrata radix diametrum ipſam exhibebit, [b] cuius duæ tertiæ partes altitudinem Tetraedri offerent.

Area cubi, & Tetraedri.

Altitudo Tetraedri.

a 13. tertijdec.

b 2. coroll. 13. tertijde.

3 [c] QVONIAM vero Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles, & æquales, quarum baſis communis eſt quadratum à latere deſcriptum: ſi vtriuſque pyramidis inueſtigetur area, ignorari non poterit area Octaedri, cum ex areis illarum pyramidum conflata ſit. Producetur autem area illarum duarum pyramidum, ſi quadratum lateris Octaedri ducatur in diametrum Octaedri, & producti numeri tertia pars capiatur, quia productus ille numerus ex quadrato lateris Octaedri in eiuſdem diametrum, eſt parallelepipedum duarum illarum pyramidum triplum: [d] propterea quod ſemiſſis illius parallelepipedi eandem habens baſem, & altitudinem, cum vtralibet pyramidum, tripla eſt vnius pyramidis. Diameter porro Octaedri, quæ à diametro ſphæræ, vel quadrati lateris Octaedri non differt, inuenietur, ſi ex duplo quadrati lateris radix quadrata eruatur; [e] quod tam quadratum ex diametro quadrati deſcriptum duplum ſit quadrati lateris, [f] quam quadratum diametri ſphæræ quadrati lateris Octaedri. Semiſſis vero huius diametri, altitudo erit vtriuſuis Pyramidis. Quare ſi hæc altitudo ducatur in tertiam partem quadrati lateris, producetur area vnius pyramidis, id eſt, ſemiſſis Octaedri: ac proinde duplum huius pyramidis aream totius Octaedri indicabit.

c 2. coroll. 14. tertijde.

Area Octaedri.

d coroll, 7. duodec.

Diameter Octaedri.

e ſchol. 47. primi.

f 14. tertijd.

4 DEINDE quia ductis ex centro Dodecaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Dodecaedrum in 12. pyramides pentagonas æquales diuiditur; ſi area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 12. procreabitur area totius Dodecaedri. Vt autem vnius pyramidis area habeatur, neceſſe eſt, & aream baſis pentagonæ inueſtigare ex latere dato, per ea, quæ libr. 4. capit. 5. ſcripſimus, & pyramidis altitudinem, vt iam docebo. Ex ſuperiori plano producto demittatur ad planum baſis oppoſitæ linea perpendicularis: Huius enim ſemiſſis diligenter inquiſita in partibus lateris Dodecaedri, per inſtrumentum partium lib. 1. cap. 1. conſtructum, dabit pyramidis altitudinem quæſitam, quemadmodum & tota perpendicularis altitudinem Dodecaedri exhibet. Quam

Area Dodecaedri.

a 8. quinti. *b 1. triang. rectil.* *c 15. tertij-dec.*

tamen Geometrice ita quoque deprehendemus. [a] Quia cubus in Dodecaedro deſcriptus eadem ſphæra, qua Dodecaedrum, comprehenditur, eiuſque latus vnum angulũ Pentagoni Dodecaedri ſubtendit; ideoq; eadem diameter eſt ſphæræ, Dodecaedri, & cubi: [b] Si recta ſubtendens angulum pentagoni inueſtigetur, habebitur latus cubi. [c] Et quia diameter ſphæræ potentia eſt tripla lateris cubi, ſi quadratum lateris cubi inuenti triplicetur, habebitur quadratum diametri ſphæræ, vel cubi, cuius radix quadrata ipſam diametrum dabit. Cum ergo diameter Dodecaedri, & altitudo eiuſdem centra baſium oppoſitarum coniungens ſe in centro ſecent bifariam, venabimur ſemiſſem huius altitudinis, nimirum altitudinem pyramidis quæſitam, hac ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis eſt ſemidiameter Dodecaedri nota, cum tota diameter proxime cognita ſit, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & ſemidiameter circuli baſem Dodecaedri circumſcribentis. Cum ergo ſemidiameter hæc cognoſci poſſit, ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [d] cognoſcetur quoque reliquum latus, altitudo videlicet pyramidis, quam quærimus. Porro ſemidiameter prædicti circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis ita quoque reddetur nota. Quoniam latus pentagoni ſubtendit in eo circulo gra. 72. & latus Decagoni grad. 36. cognita erunt hæc latera in partibus ſinus totius. Si ergo fiat, vt latus pentagoni in partibus ſinus totius cognitum ad idem latus notum ex hypotenuſi, ita latus Decagoni in iiſdem partibus ſinus totius cogniti ad aliud, prodibit Decagoni latus in menſura lateris pentagoni, cognitum. [e] Et quia latus pentagoni poteſt latera Decagoni, & Hexagoni eiuſdem circuli, ſi quadratum lateris Decagoni proxime cogniti detrahatur ex quadrato lateris pentagoni, reliquum fiet quadratum lateris Hexagoni, id eſt, ſemidiametri, ideoque eius radix quadrata ſemidiametrum exhibebit notam.

Perpendicularis è centro ſphæræ ad baſem Dodecaedri. *d 3. triang. rectil.* *Semidiameter circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.* *e 10. tertij-dec.*

5 POSTREMO quia ductis ex centro Icoſaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Icoſaedrum in 20. pyramides triangulares æquales diuiditur; ſi area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 20. gignetur totius Icoſaedri area ex illis 20. pyramidibus conflata. Vt autem vnius pyramidis area obtineatur, inueſtiganda primum erit area baſis triangularis, ex iis, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. & 5. ſcripſimus. Deinde altitudo pyramidis mechanice, hoc pacto. Ex ſuperiori plano producto, hoc eſt, ex inferiori ſuperficie alicuius plani, quod corporis ſupremæ baſi imponeretur, ad planum baſis oppoſitæ perpendicularis demittatur. Hæc enim accurate dimenſa altitudinem Icoſaedri dabit, eiuſque ſemiſſis altitudinem pyramidis, quæ quæritur. Quam Geometrice ita etiam explorabimus. Fiat pentagonum ex 5. lateribus Icoſaedri, inueſtigeturque eius ſemidiameter, & latus Decagoni in circulo illud pentagonum circumſcribente, in partibus, in quibus latus Icoſaedri datum eſt, hac ſcilicet ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis ſemidiameter dicti circuli, latera vero ſemiſſis lateris pentagoni, hoc eſt, Icoſaedri, & perpendicularis è centro ad punctum medium dicti lateris demiſſa. Ita namque cognoſcetur ſemidiameter; ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. Num. 2. tradita ſunt. Latus vero Decagoni in eodem circulo deſcripti reperietur, vt paulo ante circa finem Num. 4 dictum eſt. [f] Et quia diameter ſphæræ, ſiue Icoſaedri potentia eſt quintupla inuentæ ſemidiametri; ſi quadratum ſemidiametri; inuentæ quintupletur, procreabitur quadratum diametri Icoſaedri, cuius radix quadrata diametrum offeret, ideoque & ſemidiameter Icoſaedri nota erit. Vel aliter. [g] Quoniam diameter ſphæræ, id eſt, Icoſaedri, componitur ex latere Hexagoni, & duobus lateribus Decagoni in circulo pentagonum ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circumſcribente: erit ſumma collecta ex ſemidiametro illius circuli, & duobus lateribus Decagoni, diametro Icoſaedri æqualis: ideoque rurſus ſemidiameter Icoſaedri nota erit.

f 1. coroll. 16. tertij de. *g 2. cor. 16. tertij dec.* *Error Orontij.* *h 10. tertij d.* *Perpendicularis è cẽtro ſphæræ ad baſem Icoſaedri.* *i 3. triang. rectil.*

HINC patet, Orontium cum illis, qui ipſum ſequuntur, decipi, qui putat, ex ſemiſſe ſemidiametri illius circuli, & ex latere Decagoni componi ſemiaxem Icoſaedri, hoc eſt, axem, vel altitudinem pyramidis, cuius baſis triangulum Icoſaedri, & vertex centrum ſphæræ. Nam vt ex iis conſtat, quæ proxime ſcripſimus, eo modo componitur ſemidiameter ſphæræ, vel Icoſaedri, quæ maior eſt prædicto axe. Semidiameter porro circuli prædictum pentagonum circumſcribentis reperiri quoque poterit, vt ad finem Numer. 4. diximus, ſi nimirum quadratum lateris Decagoni ex quadrato lateris dicti pentagoni, quod à latere Icoſaedri non differt, tollatur, & reliqui numeri radix quadrata extrahatur: [h] propterea ꝙ latus pentagoni poteſt latera Decagoni, & Hexagoni eiuſdẽ circuli.

k 12. tertij-dec. *Semidiameter circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis.* *Areæ Tetraedri, cubi, & Octaedri aliter inuentæ.*

IAM vero cognita ſemidiametro Icoſaedri, inueniemus altitudinem pyramidis, cuius baſis eſt triangulum Icoſaedri, & vertex eiuſdem centrum, hoc modo. Quoniam diameter Icoſaedri, eiuſdemq; altitudo ſeſe in centro ſecant bifariam, concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis eſt ſemidiameter Icoſaedri proxime cognita, latera vero circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & ſemidiameter circuli baſem Icoſaedri circumſcribentis. Cum ergo hæc ſemidiameter cognoſci poſſit ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [i] cognoſcetur quoque latus reliquum pyramidis, videlicet altitudo, quæ inquiritur. Semidiameter porro circuli baſem triangularem Icoſaedri circumſcribentis efficietur hoc etiam pacto cognita. [k] Quoniam trianguli æquilateri latus potentia triplum eſt ſemidiametri illius circuli; ſi quadratum lateris Icoſaedri diuidatur per 3. erit Quotientis radix quadrata, ſemidiameter quæſita.

l 13. tertij d. *m 2. cor. 13. tertij de.* *Perpendicularis è centro ſphæræ ad baſem Tetraedri, cubi & Octaedri.* *n 13. tertij-dec.*

6 EADEM hac arte, quæ in Dodecaedro, & Icoſaedro expoſita eſt, areas Tetraedri, cubi, & Octaedri inueſtigare licebit, ſi, lineis ex eorum centris ad omnes angulos ductis, in pyramides æquales diſtribuantur. Tetraedrum nimirum in 4. pyramides triangulares; cubus in 6. quadrangulares; & Octaedrum in 8. triangulares. Inuenta namque per cap. 2. in quolibet area vnius pyramidis, ſi ea in numerum baſium corporis regularis ducatur, inſurget totius corporis area. Vt autem area vnius pyramidis habeatur, inquirenda prius erit altitudo ipſius, vt dicta in tertiam baſis partẽ pyramidis aream producat. Altitudo ergo hæc in Tetraedro ſic reperiatur. [l] Quoniam diameter ſphæræ Tetraedrum ambientis potentia eſt ſeſquialtera lateris Tetraedri: ſi Fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri dati ad aliud, prodibit quadratum diametri ſphæræ, cuius radix quadrata ipſam diametrum oſtendet. [m] Huius autem diametri ſexta pars, altitudo erit pyramidis quæſita, recta videlicet perpendicularis è centro ſphæræ in baſem Tetraedri demiſſa.

IN cubo vero dicta altitudo ſemiſſi lateris cubi æqualis eſt, quod perpendicularis è centro ſphæræ in baſem cubi demiſſa æqualis ſit ſemiſſi lateris cubi, vt liquet.

IN Octaedro denique eadem altitudo ſic deprehendetur. [n] Quoniam diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris Octaedri: ſi fiat, vt 1. ad 2. ita quadratum lateris Octaedri dati ad aliud, procreabitur quadratum diametri ſphæræ, vel Octaedri. Huius ergo radix quadrata dabit diametrum, ideoque ſemidiameter non ignorabitur,

Hinc

Hinc altitudo pyramidis quæſita, hoc eſt, perpendicularis è centro ſphæræ in baſem Octaedri demiſſa, elicietur ea ratione, quam in Icoſaedro ad finem Num. 5. explicauimus.

7 NON videtur autem omittenda alia ratio dimetiendi omnia quinque corpora regularia, quæ quidem in lib. 14. Euclid. demonſtrata eſt, & eſt eiuſmodi. Primum quæratur ſuperficies conuexa cuiuſque corporis, ex eius latere cognito, etiamſi nullius baſis area inueſtigetur: hoc videlicet pacto. Quoniam quælibet baſis cuiuſuis corporis diuiditur per rectas ex centro baſis ad omnes angulos ductas in tot triangula æqualia, quot anguli, vel latera in baſe continentur: ſi ducatur hic numerus triangulorum in numerum baſium corpus regulare, quod propoſitum eſt, ambientium, habebitur numerus omnium huiuſmodi triangulorum in tota ſuperficie conuexa contentorum, Vt quia baſis quadrata cubi ABCD, diuiſa eſt in quatuor triangula ex centro E, continebuntur 24. eiuſmodi triangula in 6. baſibus. Item quia baſis triangularis Tetraedri, Octaedri, & Icoſaedri ABC, ex centro D, diſtributa eſt in 3. triangula, exiſtent in 4. baſibus Tetraedri 12 eiuſmodi triangula, & 24. in 8. baſibus Octaedri, & 60. in 20. baſibus Icoſaedri. Denique quia baſis pentagona Dodecaedri ABCDE, reſoluta eſt ex centro F, in 5. triangula, complectentur 12. baſes Dodecaedri 60. eiuſmodi triangula.

In quot triangula diuidantur omnes baſes cuiuſuis corporis regularis ex earum centris.



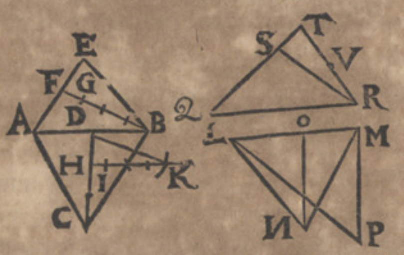
DEINDE quia rectangulum contentum ſub perpendiculari è centro baſis in latus demiſſa, & ſub vno latere, æquale eſt duobus eiuſmodi triangulis, [a] propterea quod vnius duplum eſt: erit in cubo rectangulum illud duodecies ſumptum toti ſuperficiei cubi æquale: In Tetraedro vero ſexies ſumptum totam Tetraedri ſuperficiem conficiet: In Octaedro deinde duodecies acceptum toti ſuperficiei Octaedri adæquabitur: At in Dodecaedro, & Icoſaedro tricies ſumptum ſuperficiei toti tam Dodecaedri, quam Icoſaedri æquale erit. Dicta autem perpendicularis EF, in baſe cubi æqualis eſt ſemiſſi lateris cubi AB. [b] Quoniam enim perpendicularis EF, ſecat latus AB, bifariam, [c] eſtque ipſi AF, æqualis, quod anguli FAE, FEA, ſemirecti ſint; conſtat EF, ſemiſſi lateris cubi eſſe æqualem. Perpendicularis autē DE, in baſe Tetraedri, Octaedri, & Icoſaedri, [d] ſemiſſis eſt ſemidiametri CD. [e] Cum ergo latus AC, ſit potentia triplum ſemidiametri CD: Si fiat, vt 3. ad 1. in quadratum lateris dati AC, ad aliud, prodibit quadratum ſemidiametri CD, cuius radix quadrata ipſam CD. indicabit, eiuſque ſemiſſis perpendicularem DE, exhibebit. Perpendicularis denique FG, in baſe Dodecaedri [f] ſemiſſis eſt ſummæ ex ſemidiametro AF, & latere decagoni circuli ABD, collectæ, quod latus decagoni cognoſcetur, vt ad finem Num. 4. traditum eſt.

a 41. primi.
Superficies regularium corporū & perpendiculares baſium.
b ſchol. 26. primi.
c 6. primi.
d 2. coroll. 12. tertijdec.
e 12. tertijdec.
f 1. quartidec.

8 QVIA vero ſolidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcumque corporis regularis ad aliquam eius baſem ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, ipſi corpori æquale eſt; ſi inueſtigetur ſuperficies conuexa dati corporis regularis, vt proxime docuimus, atque in tertiam eius partem ducatur altitudo vnius pyramidum, in quas corpus ipſum per rectas è centro ipſius ductas diuiditur, (quæ altitudo reperietur, vt ſupra tradidimus) hoc eſt, perpendicularis è centro corporis in eius baſem demiſſa, procreabitur area, ſiue ſoliditas ipſius corporis. Quæ etiam obtinebitur, ſi dicta altitudo ducatur in totam ſuperficiem conuexam, & producti tertia pars capiatur.

g ſchol. 20. quartidec.
Areæ corporum regularium aliter inuenta.

8 ITAQVE vt vides, tota difficultas in corporibus regularibus dimetiendis conſiſtit ferme tota in altitudine pyramidis baſem habentis eandem cum corpore, verticem autem in centro ſphæræ, exquirenda: cuius quidem inuentio Geometrica per numeros moleſtiſſima eſt, propter radices ſurdas, & numeros fractos quorum numeratores, denominatoreſque nimis magni ſunt, adeo vt operæ pretium videatur eſſe eandem mechanice explorare, vt ad initium Num. 2. 4. & 5. diximus, præſertim ſi exquiſita diligentia in ea per inſtrumentum partium dimetienda adhibeatur. Sed quia nō ſemper in promptu habemus corpora regularia, vt mechanice eam altitudinem conſequi poſſimus, libet rationem quandam nouam, eamque facillimam hic præſcribere, qua ſine moleſtia illa numerorum, eadem illa altitudo per lineas inueniatur, etiamſi corpus regulare non adſit, ſed ſolum eius latus datum ſit, ac cognitum. Sit ergo primo datum latus Tetraedri AB, quotcunque palmorum, conſtruaturq; triangulum æquilaterum ABC, pro baſe Tetraedri: Diuiſo autem latere AB, bifariam in D, iungatur recta CD, [h] quæ ad AB, perpendicularis erit. Conſtructo quoq; Iſoſcele ABE, cuius vtrumq; latus rectæ CD, æquale ſit, demittatur ad AE, perpendicularis BF, cuius quarta pars ſit FG. Dico FG, altitudinem eſſe vnius pyramidis, hoc eſt, æqualem eſſe perpendiculari ex centro ſphæræ Tetraedro circumſcriptæ ad vnam baſem deductæ. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis, ex Hypſicle demonſtrauimus, E, angulus eſt inclinationis vnius baſis Tetraedri ad alteram, eſtque EB, perpendiculari CD, æqualis: ſi triangulum BEF, concipiatur circa EF, moueri, donec rectū ſit ad baſem Tetraedri, cadet punctum B, in verticem Tetraedri; ac proinde perpendicularis BF, altitudo erit Tetraedri. [i] Et quia altitudo Tetraedri duas partes tertias diametri ſphæræ continet: ſi ſemidiameter ponatur 6. erit altitudo BF, 4. & ſemidiameter 3. [k] Cum ergo altitudo vnius pyramidis ſit tertia pars ſemidiametri, BG, ſemidiameter, & GF, altitudo vnius pyramidis. Quam etiam inueniemus, licet Iſoſceles AEB, non extruatur, hoc modo. Sumpta DH, tertia parte perpendicularis CD, excitetur ad CD, perpendicularis HK, quæ ex D, ad interuallum CD, ſecetur in K. Dico HI, quartam partem ipſius HK, eſſe altitudinem vnius pyramidis. Erecto n. triangulo DHK, ſupra baſem Tetraedri ABC, cadet punctum K, in verticem Tetraedri, quod DK, ducta æqualis ſit perpendiculari ex medio latere ad angulum baſis oppoſitum ductæ. Ergo vt prius, HK, altitudo erit Tetraedri, & HI, perpendicularis ex centro ſphæræ in H, centrum baſis cadens. [l] Nam DH, tertia pars perpendicularis CD, in centrum trianguli cadit.



h ſchol. 26. primi.
Altitudo pyramidis Tetraedri.
i 2. coro. 13. tertijdec.
k 2. cor. 13. tertijdec.
l 2. coro. 13. tertijdec.

SIT deinde datum latus Octaedri LM, ſupra quod conſtruatur triangulum æquilaterum LMN, pro baſe Octaedri. Diuiſo autem latere LM, bifariam in O, iungatur recta NO, [m] quæ ad LM, erit perpendicularis. Con-

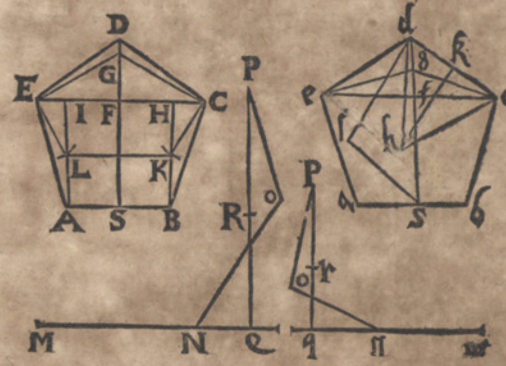
m ſchol. 26. primi.

ſtructo iam Iſoſcele QRS, ſupra baſem QR, æqualem diametro ſphæræ, vel quadrati ex latere Octaedri deſcripti, (quæ habebitur, ſi educatur perpendicularis MP, lateri LM, æqualis. Iuncta enim recta LP, diameter erit illius quadrati, vel ſphæræ) vtrumq; laterum QS, RS, æquale habens perpendiculari NO; ducatur ex R, ad QS, *Altitudo pyramidis Octaedri.* perpendicularis RT, quæ bifariam ſecetur in V. Dico TV, eſſe altitudinem pyramidis quæſitam, hoc eſt, æqualem eſſe perpendiculari ex centro ſphæræ ad vnam baſem Octaedri cadenti. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, angulus QSR, inclinationem vnius baſis ad alteram indicat, eſtque obtuſus, erit perpendicularis RT, cadens ad partes anguli acuti RST, æqualis altitudini Octaedri, id eſt, perpendiculari baſium Octaedri oppoſitarum centra connectenti, vt ex Octaedro materiali perſpicuum eſt: Ac propterea eius ſemiſſis TV, altitudo erit pyramidis quæſita, quod altitudo Octaedri bifariam ſecetur in centro.

Altitudo pyramidis cubi. SI detur latus cubi, ſiue hexaedri, erit eius ſemiſſis altitudo pyramidis quæſita: propterea quod cubi altitudo eiuſdem lateri ſit æqualis.

DATVM iam ſit AB, latus Dodecaedri, ſupra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, pro baſe Dodecaedri. Iuncta autem recta CE, [a] quæ latus erit cubi in Dodecaedro, & in eadem cum ipſo ſphæra deſcripti, [b] atque lateri AB, parallela: ſecetur AB, bifariam in S, connectaturque recta SD, [c] quæ angulum CDE, bifariam ſecabit: [d] ac proinde & rectam CE, bifariam, & ad angulos rectos diuidet: ideoque & anguli ad S, recti erũt. Fiat ſupra CE, Iſoſceles CGE, cuius vtrumque laterum CG, EG, perpendiculari SF, ſit æquale. Sumptis quoque FH, FI, ſemiſſi lateris AB, æqualibus, erigantur ad EC, perpendiculares HK, IL, quæ ex C, E, ad interuallum FD, ſecentur in KL, iungaturque rectæ EL, CK. His paratis, fiat angulo CGE, æqualis angulus MNO, ponaturque NO, ipſi SD, æqualis: Item angulo ELK, fiat æqualis angulus NOP, ponaturque OP, lateri AB, æqualis: ac tandem demittatur ex P, ad MN, perpendicularis PQ, quæ bifariam ſecetur in R. Dico RQ, altitudinem eſſe pyramidis vnius in Dodecaedro. Nam quia, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, angulus CGE, inclinationem vnius baſis ad alteram metitur, ſi MN, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima ex angulo pentagoni ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit NO, perpendiculari, quæ in pẽtagono ad illam baſem inclinato ex eodem medio puncto ad oppoſitum angulum ducitur: propterea quod angulum MNO, angulo inclinationis CGE, & rectam NO, perpendicularis SD, æqualem poſuimus. Recta autem OP, referet latus Dodecaedri inter angulum dicti pentagoni inclinati, & angulum ſupremæ baſis poſitum propterea quod recta OP, poſita eſt æqualis lateri Dodecaedri, & angulus NOP, angulo ELK, qui quidem æqualis eſt illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti pentagoni inclinati ad baſem in medium punctum lateris oppoſiti ductæ, vt conſtat, ſi vna baſis cubi Dodecaedro inſcripti intelligatur dicto lateri Dodecaedri ſubſtrata, ita vt duo latera baſis cubi ſubtendant duos angulos duorum pentagonorum, quorũ vnum ad baſem Dodecaedri inclinatum eſt, alterum vero ſupremum in Dodecaedro. Erit enim tunc recta CE, æqualis rectæ duo puncta media duorum laterum dictorum baſis cubi connectenti. Rectæ autem EL, CK, reſpondebunt rectis ex eiſdem punctis mediis laterum illorum baſis cubi, ad angulos prædictorum pentagonorum ductis: Ac proinde angulus ELK, æqualis erit ei, quem perpendicularis in pentagono inclinato cum prædicto latere Dodecaedri efficit. Ex quo fit punctum P, in plano ſupremæ baſis exiſtere, atque idcirco perpendicularem PQ, ad planum baſis per MN, ductum demiſſam, æqualem eſſe altitudini Dodecaedri; eiuſque ſemiſſem RQ, altitudini vnius pyramidis pentagonæ eſſe æqualem. Quæ omnia facile intelligentur, ſi Dodecaedrum aliquod materiale adhibeatur.

a 2.coro.17. tertijd. *b coroll. 8. quintidec.* *c ſchol. 12. quarti.* *d 4. primi.*



DENIQVE datum ſit Icoſaedri latus, a b, ſupra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum abcde, pro baſe pyramidis ex quinque baſibus Icoſaedri conflatæ. Iuncta autem recta c e, ſecetur latus a b, in ſ, bifariam, & recta ducatur ſd, quæ vt in Dodecaedro oſtendimus proxime, perpendicularis erit ad vtramque a b, ce. Fiat ſupra latus Icoſaedri cd, triangulum æquilaterum cdh, pro baſe vna Icoſaedri; & diuiſo latere cd, bifa- *e ſchol. 26. primi.* riam in k, iungatur recta hk, [e] quæ ad cd, erit perpendicularis. Præterea ſupra ce, fiat Iſoſceles cge, cuius vtrumq; laterum cg, eg, perpendiculari hk, ſit æquale. Poſt hæc ſupra ſd, conſtituatur triangulum ſdl, cuius latus ſl, perpendiculari hk, & latus dl, lateri Icoſaedri ab, ſit æquale. Denique angulo cge, fiat æqualis angulus mno, & recta no, perpendiculari hk, æqualis: Item angulus nop, angulo dls, rectaque op, lateri Icoſaedri a b, æqualis. Dico perpendicularem pq, ad mn, demiſſam, eſſe altitudinem Icoſaedri eiuſque ſemiſſem r q, altitudinem vnius pyrami- *Altitudo pyramidis Icoſaedri.* dis in Icoſaedro. Quia enim, vt ex Hypſicle ad finem Euclidis demonſtrauimus, angulus cge, metitur inclinationem vnius baſis ad alteram, ſi mn, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima Icoſaedri ex angulo trianguli ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit no, perpendiculari, quæ in triangulo ad illam baſem inclinato ex eodem medio puncto ad angulum oppoſitum ducitur: propterea quod angulum mno, angulo inclinationis cge, & rectam no, perpendiculari hk, æqualem fecimus: Recta vero op, referet latus Icoſaedri inter angulum dicti trianguli inclinati, & angulum ſupremæ baſis poſitum; propterea quod recta op, poſita eſt *f 8.primi.* æqualis lateri Icoſaedri, & angulus nop, angulo dls: [f] qui quidem æqualis eſt illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti trianguli inclinati ad baſem, in medium punctum lateris oppoſiti ducitur. Eſt enim recta ds, æqualis perpendiculari ex angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, & latera sl, dl, æqualia perpendiculari in triangulo inclinato, & lateri Icoſaedri inter angulum ſupremum pentagoni prædicti, & angulum trianguli inclinati. Ex quo fit, punctum p, in plano ſupremæ baſis exiſtere: ac proinde perpendicularem pq, ad planum baſis per mn, ductum demiſſam, æqualem eſſe altitudini Icoſaedri, eiuſque ſemiſſem rq, altitudini vnius pyramidis trigoni eſſe æqualem. Quæ omnia facile percipientur, ſi adhibeatur materiale aliquod Icoſaedrum. Inuenta porro hoc modo altitudine pyramidis, cognoſcenda eadem ſumma diligentia erit, beneficio inſtrumenti partium, in partibus lateris corporis regularis propoſiti.

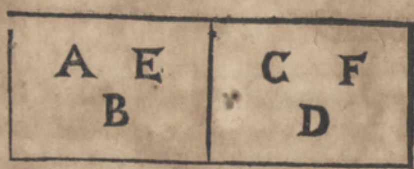
DE AREA SPHÆRÆ, INVENTIONEQVE ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ.

CAPVT V.

1 VT ſphæræ aream, ſoliditatemue pluribus poſſimus viis aſſequi, demonſtranda prius erunt nonnulla ad eam rem valde neceſſaria, atque vtilia; quod ſequentibus 7. propoſitionibus efficiemus.

PROPOSITIO I.

QVAM proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuſcunque, eandem habent duæ ſimiles partes alterius cuiuſuis magnitudinis.



SIT enim A, eadem pars magnitudinis B, quæ C, magnitudinis D: Item E, eadem pars magnitudinis B, quæ F, magnitudinis D. Dico eſſe, vt A, ad E, ita C, ad F. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, quod vtrobiq; eadem proportio ſubmultiplex poſita ſit. Item vt B, ad E, ita D, ad F; quod vtrobique poſita ſit eadem proportio multiplex: erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F, quod eſt propoſitum.

IDEM ſequitur, ſi A, & C, ſint ipſarum B, D, eædem partes plures non facientes vnam: Item, ſi E, & F, earundem B, D, ſint eæde͂ partes plures non facie͂tes vnam, vt $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$. &c. Nam ſi verbi gratia A, C, ſint $\frac{3}{4}$. ipſarũ, B, D, erit $\frac{3}{4}$. ipſius B, ad B, vt $\frac{3}{4}$. ipſius D, ad D.[a] Igitur erunt quoque, vt $\frac{3}{4}$. ipſius B, hoc eſt, ipſa A, ad B, ita $\frac{3}{4}$. ipſius D, hoc eſt, ipſa C, ad D. Rurſus ſi verbi gratia E, F, ſint $\frac{2}{3}$. ipſarum B, D, erit, vt B, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem B, ita D, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem D.[b] Ac proinde vt B, ad $\frac{2}{3}$. id eſt, ad E, ita D, ad $\frac{2}{3}$. i. e. ad F, Quare, vt prius, erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F.

a ſchol. 22. quinti.
b ſchol. 22. quinti.

COROLLARIVM.

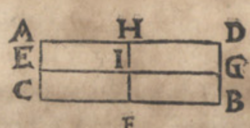
SEQVITVR hinc, ita eſſe $\frac{1}{4}$. cuiuſuis magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, vt eſt $\frac{1}{2}$. cuiuſuis alterius magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem. Quoniam enim, vt oſtendimus, ita eſt $\frac{1}{4}$ prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, vt $\frac{1}{4}$. poſterioris ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem.[c] Vt autem $\frac{1}{4}$. poſterioris ad $\frac{1}{3}$. ita ſunt $\frac{2}{4}$. ad $\frac{2}{3}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. ad $\frac{2}{3}$. Igitur erit vt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, ita $\frac{1}{2}$. poſterioris magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem.

c 1. quint.

PROPOSITIO II.

RECTANGVLVM ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra comprehenſum, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ æquale.

SIT rectangulum AB, comprehenſum ſub diametro AC, & circumferentia CB, maximi in ſphera circuli. Dico rectangulum AB, quadruplum eſſe circuli maximi in ſphæra, & ſuperficiei conuexæ eiuſde͂ ſphæræ æquale. Sectis enim omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, iunctiſque rectis EG, FH, ſecantibus ſeſe in I, diuiſum erit totum rectangulum in quatuor æqualia AI, CI, BI, DI,[d] quod rectæ EG, FH, rectis AD, AC, parallelæ ſint. Ac proinde rectangulum AB, rectanguli CI, quadruplum erit. Eſt autem rectangulum CI, contentum ſub CE, ſemidiametro, & ſemicircumferentia CF, circulo maximo, cuius nimirum diameter AC, æquale, vt lib. 4. cap. 7. Num 1. demonſtratum eſt. Igitur rectangulum AB, circuli maximi quadruplum eſt. Et quia eiuſdem circuli maximi quadrupla eſt ſuperficies conuexa ſphæræ, per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro:[e] æquale erit rectangulum AB, conuexæ ſuperficiei. Quod erat demonſtrandum.



d 33. primi.
e 9. quinti.

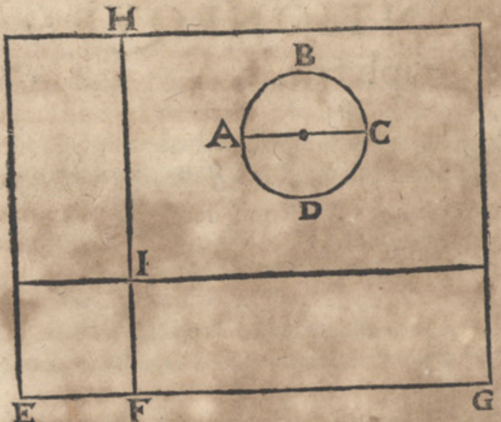
COROLLARIVM.

EX demonſtratione liquet, rectangulum ſub diametro cuiuſuis circuli, (etiamſi non ſit maximus in ſphæra,) & circumferentia eiuſdem, quadruplum eſſe ipſius circuli. Eadem enim ſemper demonſtratio adhibebitur.

PROPOSITIO III.

EADEM eſt proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficie͂ ſphæræ, quæ circumferentiæ circuli maximi ad diametrum. Idem eadem eſt proportio quadrati diametri maximi circuli in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ, quæ diametri ad circumferentiam eiuſdem circuli maximi.

SIT circulus ſphæræ maximus ABCD, eiuſque diameter AC. Dico ita eſſe quadratum ex circumferentia ABCD, deſcriptum ad ſuperficiem ſphæræ, cuius diameter AC, vt eſt circumferentia ABCD, ad diametrum



AC.Item ita eſſe quadratum diametri AC,circuli maximi in ſphæra,ad ſuperficiem ſphæræ,vt eſt diameter AC, ad circũferentiam ABCD. Sit enim EF,diametro AC, & recta FG, circumferentiæ ABCD, æqualis, & ſuper FG, conſtruatur quadratum GH, capiaturque FI, ipſi EF, æqualis; eritque EI,quadratum diametri EF,vel AC. Perfecta autem figura, vt vides, erit tam rectangulum GI, ſub diametro FI, maximi circuli, & circumferentia FG, quam rectangulum EH, ſub diametro E, F, eiuſdem circuli maximi, & circumferentia FH, æquale per præcedentem, ſuperficiei conuexæ ſphæræ.[a] Cum ergo ſit, vt GH, quadratum ex circumferentia FG,deſcriptum ad rectangulum EH,ſuperficiei conuexę ſphæræ æquale,ita GF, circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi,conſtat primum.

a 1. ſexti.

b 1. ſexti. [b] ITEM cum ſit,vt EI,quadratum diametri EF, maximi circuli, ad IG, rectangulum ſuperficiei conuexæ ſphæræ æquale, ita EF, diameter maximi circuli ad FG, circumferentiam, patet id, quod ſecundo loco proponitur.

COROLLARIVM.

Area circuli. HINC manifeſtum eſt(id quod lib.4.cap.7. Num. 1. etiam demonſtrauimus) circuli aream gigni tam ex $\frac{1}{4}$.diametri in totam circumferentiam,quam ex $\frac{1}{4}$ circumferentię in totam diametrum.Cum enim circulus AB-
c 1. ſexti. CD, ſit quarta pars rectanguli GI, quod hoc illius quadruplum ſit oſtenſum propoſ.2. [c] Contineatur autem quarta pars rectanguli GI,tam ſub $\frac{1}{4}$.diametri FI,& circumferentia FG,quam ſub $\frac{1}{4}$.circumferentiæ FG,& diametro FI;liquido conſtat, quod proponitur.

PROPOSITIO IV.

QVADRATVM circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ conuexam maiorem proportionem habet,quam 223. ad 71. minorem vero,quam 22 ad 7.

CVM enim per præcedentem ſit,vt quadratum circumferentiæ maximi circuli ad ſuperficiem conuexam
a 2. de Dimenſ. circuli lib. 4. ſphæræ, ita circumferentia eiuſdem circuli ad diametrum :[a] ſit autem maior proportio circumferentiæ ad diametrum,quam $3\frac{10}{71}$.ad 1.hoc eſt,quam 223. ad 71.minor vero,quam $3\frac{1}{7}$.ad 1.hoc eſt,quam 22.ad 7.liquet id,quod propoſitum eſt.

PROPOSITIO V.

QVADRATVM diametri circuli in ſphæra maximi ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem habet quam 7.ad 22.minorem vero,quam 71.ad 223.

CVM enim per propoſ.3.ſit, vt quadratum diametri ad ſuperficiem ſphæræ,ita diameter ad circumferen-
a 26. quin. tiam:[a] Sit autem maior proportio diametri ad circumferentiam,quam 7.ad 22.([b] quod minor ſit proportio cir-
b 2. de Dimenſ. circuli lib.4. cumferentiæ ad diametrum, quam 22. ad 7.) minor vero,quam 71.ad 223. (quod maior ſit proportio circumferentiæ ad diametrum,quam 223.ad 71.patet verum eſſe, quod proponitur.

PROPOSITIO VI.

PROPORTIO cubi ex circumferentia maximi in ſphæra circuli deſcripti, ad ſphæram maior eſt,quam 298374.ad 5041.minor autem,quam 2904.ad 49.

CVM enim ſit per propoſ.1.cap.7.lib.4.vt circumferentia maximi circuli in quauis ſphæra, ad circumfe-
a 33. vnde. rentiam maximi circuli in quauis alia ſphæra, ita diameter ad diametrum:[a] habeat autem cubus circumferentiæ prioris ſphæræ ad cubum circumferentiæ ſphæræ poſterioris, proportionem triplicatam circumferentiæ ad circumferentiam;[b] Item ſphæra prior ad poſteriorem ſphæram, proportionem triplicatam diametri ad diametrũ:
b 18. duod. erit vt cubus ex circumferentia prioris ſphæræ deſcriptus ad cubum ex poſterioris ſphæræ circumferentia deſcriptum.ita ſphæra prior ad poſteriorem ſphæram;Et permutando,vt cubus circumferentiæ ſphæræ prioris ad priorem ſphæram,ita cubus circumferentiæ poſterioris ſphæræ ad ſphæram poſteriorem.

IAM vero,ſi circumferentia circuli maximi alicuius ſphæræ ſit 1.diuidaturque per $3\frac{10}{71}$.producetur diameter $\frac{71}{223}$.maior quam vera,ex coroll.propoſ.2.de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſſis $\frac{71}{446}$.in $\frac{1}{2}$.ſemiſſem circumferentiæ ducatur,procreabitur area circuli maximi $\frac{71}{892}$. maior, quam vera: quæ rurſus ducta in $\frac{1}{3}$.diametri inuentæ(quæ etiam maior eſt,quam vera)nimirum in $\frac{142}{669}$. gignet, vt infra in regula 2. oſtendam, ſoliditatem
c 8. quinti. ſphæræ $\frac{10082}{596748}$.hoc eſt, $\frac{5041}{298374}$.maiorem tamen,quam veram. [c] Maior ergo erit proportio cubi ex circumferẽtia 1.deſcripti,qui cubus eſt 1.ad ſphæram,quam ad $\frac{5041}{298374}$.Cum ergo ſit 1.ad $\frac{5041}{298374}$.vt 298374.ad 5041.(Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem eſt proportio Numeratoris 5041.ad denominatorem 298374. quæ minutiæ $\frac{5041}{298374}$.ad ſuum integrum 1.erit conuertendo,vt 298374.ad 5041.ita 1. ad $\frac{5041}{298374}$.)maior erit proportio cubi ex circumferentia 1.deſcripti,qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 298374. ad 5041.Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli in ſphæra qualibet deſcriptus ad ſphæram,vt cubus circumferentiæ 1.ad ſuam ſphæram,vt initio huius propoſ.oſtendimus ; Conſtat id,quod primo loco proponitur.

RVR-

RVRSVS ſi circumferentia 1. diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur diameter $\frac{7}{22}$. minor quam vera, ex coroll. propoſ. 2. de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſſis $\frac{7}{44}$. ducatur in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem circumferentiæ, procreabitur area circuli maximi $\frac{7}{88}$. minor quam vera: quæ rurſus ducta in $\frac{2}{3}$. diametri inuentæ (quæ etiam minor eſt, quam vera) nimirum in $\frac{14}{66}$. hoc eſt, in $\frac{7}{33}$. producet, vt infra in regula 2. docebo, ſoliditatem ſphæræ $\frac{49}{2904}$. minorem tamen, quam veram. [d] Minor ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam ad $\frac{49}{2904}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{49}{2904}$. vt 2904. ad 49. (Quoniam enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem proportio eſt Numeratoris 49. ad denominatorem 2904. quæ minutiæ $\frac{49}{2904}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 2904. ad 49. ita 1. ad $\frac{49}{2904}$.) minor erit proportio cubi deſcripti ex circumferentia 1. qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 2904. ad 49. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli ſphæræ cuiuslibet deſcriptus, ad ſphæram, vt cubus circumferentiæ 1. ad ſuam ſphæram, vt initio huius propoſitionis demonſtrauimus, patet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum erat. d *8. quinti.*

PROPOSITIO VII.

CVBVS diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem vero, quam 426. ad 223.

CVM enim ſit, vt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ ad cubum diametri alterius ſphæræ, ita ſphæra ad ſphæram [a] quod vtraque proportio ſit triplicata proportionis diametrorum: erit permutando, vt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ ad ipſam ſphæram, ita cubus diametri alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram. a *33. vndec. & 18. duodec.*

QVOD ſi diameter alicuius ſphæræ ponatur 1. multipliceturque per $3\frac{1}{7}$. [b] proueniet circuli maximi circumferentia $\frac{22}{7}$. maior quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri ducta efficiet $\frac{11}{14}$. aream ipſius maximi circuli vera maiorem: ac proinde ſi hæc area maior, quam vera, ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri, gignetur, vt infra in regula 2. dicetur, ſoliditas ſphæræ $\frac{22}{42}$. hoc eſt, $\frac{11}{21}$ maior quã vera. [c] Igitur cubus diametri 1. qui eſt 1. ad ſphæram, proportionem habebit maiorem, quam ad $\frac{11}{21}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{11}{21}$. vt 21. ad 11. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem eſt proportio Numeratoris 11. ad Denominatorem 21. quæ Minutiæ $\frac{11}{21}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo vt 21. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{21}$.) maior erit proportio cubi 1. ex diametro 1. deſcripti ad ſphæram, quam 21. ad 11. Et quia, vt initio huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuſuis alterius ſphæræ ad ipſam ſphæram, vt cubus diamatri 1. ad ſuam ſphæram, verum eſt, quod primo loco eſt propoſitum, b *coroll. 2. Dimenſ. circuli.* c *8. quint.*

[d] ITEM ſi diameter 1. ducatur in $3\frac{10}{71}$. producetur circumferentia maximi circuli $\frac{223}{71}$. minor quam vera. Eius ergo ſemiſſis $\frac{223}{142}$. ducta in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri 1. faciet $\frac{223}{284}$. aream circuli maximi vera minorem; ideoque ſi ea ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri 1. procreabitur, vt infra in regula 2. dicetur, ſoliditas ſpæræ $\frac{446}{852}$. hoc eſt, $\frac{223}{426}$. minor quã vera. [e] Igitur cubus 1. diametri 1. ad ſphæram habebit proportionem minorem, quam ad $\frac{223}{426}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{223}{426}$. vt 426. ad 223. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio eſt Numeratoris 223. ad denominatorem 426. quæ Minutiæ $\frac{223}{426}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 426. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{426}$.) minor erit proportio cubi diametri 1. ad ſuam ſphæram, quam 426. ad 223. Quoniam vero, vt ad initium huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ alterius ad ipſam ſphæram, vt cubus diametri 1. ad ſuam ſphæram, liquet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum eſt. d *coroll. 2. Dimens circuli.* e *8. quinti.*

2 HIS præmiſſis, ſequuntur regulæ ad inueſtigandam tam ſuperficiem conuexam cuiuslibet ſphæræ, quam eiuſdem ſoliditatem.

I.

SVPERFICIEM conuexam propoſitæ ſphæræ adinuenire.

AREA maximi circuli datæ ſphæræ quadruplicetur. Productus enim numerus conuexam ſphæræ ſuperficiem exhibebit: propterea quod per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & Cylindro, ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt circuli maximi. *Superficies conuexa ſphæræ.*

EADEM ſuperficies procreabitur, ſi diameter ſphæræ in circumferentiam circuli maximi ducatur: propterea quod per propoſ. 2. Num. 2. huius cap. rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli comprehenſum ſuperficiei conuexæ ſphæræ eſt æquale. *Soliditas ſphæræ.*

II.

SOLIDITATEM propoſitæ ſphæræ exquirere.

1 *SPHÆRÆ ſoliditas producitur ex eius ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei conuexæ: Vel ex $\frac{1}{6}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. conuexæ ſuperficiei.*

2 *ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in aream circuli maximi.*

3 *VEL ex duabus tertiis partibus areæ circuli maximi in totam diametrum.*

4 *VEL ex ſemidiametro in quatuor tertias partes areæ circuli maximi.*

5 *VEL ex ſemiſſe areæ circuli maximi in quatuor tertias partes diametri.*

6 *VEL ex dupla diametro in tertiam partem areæ circuli maximi.*

7 *VEL ex diametro in ſextam partem ſuperficiei ſphæræ.*

8 *VEL denique ex tertia parte diametri in ſemiſſem ſuperficiei conuexæ ſphæræ.*

Demõſtratio prima partis. PRIMVM demonſtratum à nobis eſt in commentariis in ſphæram, quam demonſtrationem repetemus lib.7. de Iſoperimetris. Idem tamen aliter hac ratione demonſtrabimus. Concipiatur conus, cuius baſis maximus circulus ſphæræ, & altitudo ſemidiameter eiuſdem. Item alius conus, cuius baſis quadrupla ſit maximi circuli, & altitudo ſemidiameter eadem. Et quia prioris coni tam ſphæra, per propoſ.32.lib.1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, quadrupla eſt,[a] quam poſterior conus:[b] erunt poſterior conus, & ſphæra inter ſe æquales.

a 11. duode.
b 9. quinti.
c 2. duod.

RVRSVS quia circulus, cuius ſemidiameter æqualis eſt toti diametro ſphæræ, quadruplus eſt circuli maximi [c] (cum enim ſit circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri: quadratum autẽ prioris diametri quadruplum ſit quadrati diametri poſterioris, ex ſcholio propoſ.4.lib.2. Eucl. quod illa diameter ſit huius dupla; quandoquidem ſemiſſis prioris diametri ſumpta eſt poſteriori diametro æqualis; erit quoque circulus circuli quadruplus) erit idem circulus, cuius ſemidiameter diametro ſphæræ æqualis eſt, æqualis baſi poſterioris coni, cum huius baſis quadrupla etiam poſita ſit maximi circuli. Quia vero etiam ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt circuli maximi, ex propoſ.31. lib.1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: [d] Erunt ſuperficies ſphæræ, baſis poſterioris coni, & circulus ſemidiametrum habens æqualem diametro ſphæræ, inter ſe æquales.

d 9. quinti.

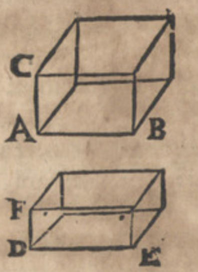
POSTREMO concipiatur cylindrus, cuius baſis ſit prædictus circulus ſemidiametrum diametro ſphæræ habens æqualem, altitudo vero ſemidiameter ſphæræ.[e] Erit hic cylindrus triplus poſterioris coni prædicti: ac proinde & ſphæræ, quæ ei cono eſt oſtenſa æqualis.[f] Idem autem cylindrus triplus quoque eſt cylindri, qui eandem habeat altitudinem, & baſem tertiæ parti baſis illius cylindri, hoc eſt, tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ æqualem.[g] Ergo poſterior cylindrus, (baſem habens tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ æqualem, altitudinem vero ſemidiametro eiuſdem ſphæræ æqualem) & ſphæra æquales ſunt. Cum ergo cylindrus hic poſterior contineatur ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ſuperficiei ſphæricæ: liquido conſtat, ſphæræ ſoliditatem gigni ex ſemidiametro in partem tertiam ſuperficiei ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei ſphæræ: cum hic numerus illi ſit æqualis, quod eſt primum.

e 10. duod.
f 11. duode.
g 9. quinti.

Demõſtratio ſecunda partis. CONCIPIATVR rurſum cylindrus, cuius baſis maximus circulus ſphæræ, & altitudo diameter ſphæræ. Erit hic cylindrus ſeſquialter ſphæræ, ex coroll. propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Quod ſi ex parte ſuperiori per tertiam partem diametri ſphæræ, vel axis cylindri, ducatur baſibus cylindri planum parallelum:[h] erit totus cylindrus ad cylindrum abſciſſum, cuius axis duæ tertiæ partes ſunt totius axis, ſeſquialter;[i] Ac proinde poſterior hic cylindrus abſciſſus, qui quidem continetur ſub maximo circulo, nempe ſub ſua baſi, & duabus tertiis partibus diametri ſphæræ, ſphæræ æqualis erit. Patet igitur etiam ſecundum.

h 13. duod.
i 9. quint.

ALITER



SIT parallelepipedum ABC, comprehenſum ſub AC, duabus tertiis partibus diametri ſphæræ, & ſub baſi AB, quæ circulo maximo eiuſdem ſphæræ ſit æqualis. Dico parallelepipedum ABC, ſphæræ æquale eſſe. Sit enim aliud parallelepipedum DEF, contentum ſub DF, ſemidiametro ſphæræ, & ſub baſe DE, quæ tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ ſit æqualis, quod vt in prima parte huius 2. regulæ demonſtrauimus, æquale erit ſphæræ propoſitæ. Quia ergo baſis AB, circulo maximo ſphæræ æqualis, eſt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ; erit ex coroll propoſ.1. huius cap. vt AB, hoc eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ ad DE, id eſt, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita DF, hoc eſt, ita $\frac{1}{2}$. diametri ſphæræ, ad AC, id eſt, ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem diametri. Ac proinde cum baſes AB, DE, cum altitudinibus DF, AC, reciprocentur,[k] parallelepipeda ABC, DEF, æqualia inter ſe erunt. Cum ergo DEF, ſphæræ æquale ſit, vt dictum eſt, erit quoque ABC, eidem ſphæræ æquale, quod eſt propoſitum.

k 34. vnde.

ALITER.

QVONIAM ex coroll. propoſ.1. huius cap. eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphæræ ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita $\frac{1}{2}$. diametri ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem diametri:[l] idem numerus efficietur ex primo numero, nimirum ex $\frac{1}{4}$. ſuperficiei, id eſt, ex circulo maximo ſphæræ, in quartum, nimirum in $\frac{2}{3}$. diametri, qui ex ſecundo, id eſt, ex $\frac{1}{3}$. ſuperficiei, in tertium, hoc eſt, in $\frac{1}{2}$. diametri. Sed ex $\frac{1}{3}$. ſuperficiei in $\frac{1}{2}$. diametri ſoliditas ſphæræ procreatur, vt in prima parte huius 2. regulæ oſtenſum eſt. Igitur eadem ſoliditas ex circulo maximo in $\frac{2}{3}$. diametri gignetur, quod eſt propoſitum.

l 19. ſeptim.

Demõſtratio tertia partis. RVRSVS quia cylindrus, cuius baſis circulus maximus ſphæræ, & altitudo diameter eiuſdem, ſeſquialter eſt ipſius ſphæræ, ex coroll. propoſ.32. lib.1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: [m] Idemque cylindrus ſeſquialter etiam eſt cylindri, cuius baſis æqualis ſit duabus tertiis partibus circuli maximi, & altitudo eadem diameter;[n] erunt poſterior hic cylindrus, & ſphæra æquales: hoc eſt, ſphæra producetur ex $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in diametrum ſphæræ, quod eſt tertium.

m 11. duod.
n 9 quinti.

Demõſtratio quarta partis. CONCIPIANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in ſphæra æqualis, & altitudo toti diametro: alterius vero baſis æqualis ſit $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi, & altitudo ſemidiametro. Et quia horum parallelepipedorum baſes cum altitudinibus reciprocantur: quod tam prioris baſis ſubdupla ſit baſis poſterioris, quam altitudo poſterioris altitudinis prioris:[o] erunt ipſa parallelepipeda æqualia. Sed prius, per tertiam partem huius 2. regulæ, æquale eſt ſoliditati ſphęræ, igitur & poſterius. Ideoque ſphęra producetur ex ſemidiametro in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi, quod quarto loco proponitur.

o 34. vnde.

Demõſtratio quinta partis. PRÆTEREA concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis æqualis ſit areæ circuli in ſphæra maximi, & altitudo æqualis $\frac{2}{3}$. diametri: alterius vero baſis æqualis ſit $\frac{1}{2}$. areæ circuli maximi, & altitudo $\frac{4}{3}$. diametri. Et quia horum parallelepipedorum baſes reciprocantur cum altitudinibus; quod tam baſis in priori dupla ſit baſis

ſit baſis in poſteriori, quam altitudo in poſteriori altitudinis in priori: [a] æqualia erunt ipſa parallelepipeda: Sed prius eſt, per 2. partem huius 2. regulæ, æquale ſphæræ. Igitur, & poſterius: atque idcirco ſphæra gignetur ex $\frac{1}{2}$. areę circuli maximi in $\frac{4}{3}$. diametri. quod eſt quintum.

a 34. vnde.

ITEM intelligantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis æqualis ſit $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi in ſphæra, & altitudo diametro: alterius vero baſis æqualis ſit $\frac{1}{3}$. areæ maximi circuli, & altitudo duplæ diametro. Et quia horum parallelepipedorum baſes cum altitudinibus reciprocantur: quod tam baſis in priori ſit dupla baſis in poſteriori, quam altitudo in poſteriori altitudinis in priori: [b] erunt ipſa parallelepipeda æqualia: Sed prius per 3. partem huius 2. regulæ, æquale eſt ipſi ſphæræ. Igitur & poſterius: Ac proinde ſphæra ex dupla diametro in $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi procreabitur, quod ſexto loco eſt propoſitum.

Demonſtratio ſextæ partis.
b 34. vnde.

INTELLIGANTVR quoq; duo parallelepipeda, quorum vnius baſis contineat $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphæræ, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri: alterius vero baſis comprehendat $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, & altitudo æqualis ſit diametro. Et quoniam baſes cum altitudinibus ſunt reciprocæ, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei, baſis videlicet prioris parallelepipedi ad $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, id eſt, ad baſem poſterioris, vt altitudo poſterioris, nempe diameter, ad prioris altitudinem, nimirum ad $\frac{1}{2}$. diametri, cum vtraque proportio ſit dupla: [c] ipſa parallelepipeda æqualia erunt: Sed prius ipſi ſphæræ, per 1. partem huius 2. regulæ æquale eſt. Igitur, & poſterius: hoc eſt, ſphæræ ſoliditas producetur ex diametro in ſextam partem ſuperficiei, quod eſt ſeptimum.

Demonſtratio ſeptimæ partis.
c 34. vnde.

DENIQVE concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphæræ, & altitudo ſemidiameter: alterius autem baſis ſit $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, & altitudo $\frac{1}{3}$. diametri. Quia vero baſes, & altitudines reciprocantur, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ad $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, nimirum baſis prioris parallelepipedi ad baſem poſterioris, vt $\frac{1}{3}$. diametri ad $\frac{1}{2}$. diametri, altitudo videlicet poſterioris parallelepipedi ad altitudinem prioris; [d] æqualia erunt ipſa parallelepipeda. Cum ergo, per 1. partem huius 2. regulæ, prius ſit ſphæræ æquale, eidem quoque poſterius æquale erit: Ac propterea ſphæræ ſoliditas producetur ex tertia parte diametri in ſemiſſem conuexæ ſuperficiei, quod eſt octauum.

Demonſtratio octauæ partis.
d 34. vnde.

3 IAM vero ex propoſ. 4. & 5. huius cap. Num. 1. colliguntur quatuor ſequentes regulæ, per quas ſuperficies ſphæræ conuexa inuenitur tum maior quam vera, tum minor, tam ex circumferentia, quam ex diametro circuli maximi.

I.

EX circumferentia circuli in ſphæra maximi ſuperficiem conuexam ſphæræ procreare vera maiorem.

FIAT vt 223. ad 71. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud, prodibitq; ſphæræ ſuperficies maior quam vera. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 223. ad 71. ſit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 223. ad 71. habebit quoque quadratum circumferentiæ datæ ad ſuperficiem ſphæræ veram, maiorem proportionem, quam idem quadratum ad numerum productum: [a] ideoq; productus numerus maior erit ſuperficiei vera.

Superficies ſphæræ maior, quam vera.
a 10. quint.

II.

EX circumferentia circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ conuexam vera minorem eruere.

FIAT vt 22. ap. 7. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud. Numerus enim genitus minor erit vera ſuperficie ſphæræ. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 22. ad 7. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum genitum, vt 22. ad 7. habebit quoq; quadratum datæ circumferentiæ ad ſuperficiem veram ſphæræ, minorem proportionem, quam idem quadratum ad numerum productum. [a] Quam ob rem numerus productus vera ſuperficie ſphæræ minor erit.

Superficies ſphæræ minor, quam vera.
a 10. quint.

III.

EX diametro circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ vera maiorem elicere.

FIAT vt 7. ad 22. ita quadratum diametri datæ circuli maximi ad aliud, gignetur q; ſuperficies ſphæræ maior, quam vera. Nam cum, per propoſ. 5. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati diametri circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ veram, quam 7. ad 22. Sit autem quadratum diametri datæ ad productum numerum, vt 7. ad 22. habebit quoque quadratum datæ diametri ad ſuperficiem veram ſphæræ, maiorem proportionem, quã idem quadratum ad productum numerum. [a] Quocirca procreatus numerus maior erit, quam vera ſuperficies ſphæræ.

Superficies ſphæræ maior, quam vera.
a 10. quint.

IV.

EX diametro circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ vera minorem colligere.

FIAT vt 71. ad 223. ita quadratum datæ diametri circuli maximi ad aliud. Numerus namq; genitus ſuperficiem ſphæræ vera minorem exhibebit. Quoniam enim per propoſ. 5. huius cap. Numer. 1. minor eſt proportio quadrati diametri ad ſuperficiem ſphæræ, quam 71. ad 223. Eſt autem quadratum datæ diametri ad productum numerum, vt 71. ad 223. Erit quoque minor proportio quadrati datæ diametri ad veram ſuperficiem ſphæræ quam eiuſdem quadrati ad numerum productum. [a] Quapropter minor erit productus numerus, quam vera ſuperficies ſphæræ.

Superficies ſphæræ minor, quam vera.
a 10. quint.

4 PARI

4 PARI ratione ex propoſ. 6. & 7. huius c. Numer. 1. eliciuntur quatuor aliæ ſequentes regulæ, per quas tam ex circumferentia, quam ex diametro maximi circuli in ſphæra, eruitur ſoliditas ſphæræ tum maior, quam vera, tum minor.

I.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſphæræ producere vera maiorem.

Soliditas ſphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 298374. ad 5041. ita cubus ex data circumferentia maximi circuli deſcriptus ad aliud. Num. enim genitus dabit ſphæræ ſoliditatem vera maiorem. Nam cum, per propoſ. 6. huius cap. Nume. 1. maior ſit proportio cubi datæ circumferentiæ ad ſphæram, quam 298374. ad 5041. Sit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 298374. ad 5041. habebit quoque cubus datæ circumferentiæ ad ſphæræ ſoliditatem veram, maiorem proportionem, quam idem cubus ad productum numerum:[a] Ideoq; productus numerus maior erit, quam vera ſoliditas ſphæræ.

a 10. quint.

II.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſpheræ vera minorem procreare.

Soliditas ſphæræ minor, quam vera.

FIAT, vt 2904. ad 49. ita cubus datæ circumferentiæ ad aliud. Nam productus numerus offeret ſphæræ ſoliditatem vera minorem. Cum enim per propoſ. 6. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi circumferentiæ datæ ad ſphæram, quam 2904 ad 49. ſit autem cubus datæ circumferentiæ ad numerum procreatũ, vt 2940, ad 49. habebit quoq; cubus datæ circumferentiæ ad veram ſoliditatem ſphæræ, minorem proportionem, quam idem cubus ad numerum productum.[a] Idemque numerus productus minor erit vera ſoliditate ſphæræ.

a 10. quint.

III.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ colligere vera maiorem.

Soliditas ſphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 21. ad 11. ita cubus diametri datæ ad aliud. Procreatus namque numerus ſoliditatem ſphæræ dabit vera maiorem. Cum enim per propo. 7. huius c. Num. 1. maior ſit proportio cubi diametri ad ſphæram, quam 21. ad 11. Sit autem cubus datæ diametri ad numerum productum, vt 21. ad 11. habebit quoq; maiorem proportionẽ cubus datæ diametri ad veram ſoliditatem ſphæræ, quam idem cubus ad numerum genitum.[a] Quapropter numerus procreatus maior erit vera ſoliditate ſphæræ.

a 10. quint.

IV.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ concludere vera minorem.

Soliditas ſphæræ minor, quam vera.

FIAT vt 426. ad 223. ita cubus datæ diametri ad aliud. Numerus enim proueniens minor erit, quam vera ſoliditas ſphæræ. Nam cum per propoſ. 7. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi datæ diametri ad ſphæram quam 426. ad 223. Sit autem cubus diametri datæ ad procreatum numerum, vt 426. ad 223. habebit quoque cubus datæ diametri ad ſphæram, proportionem minorem, quam idem cubus ad numerum genitum.[a] Quare minor erit numerus productus, quam vera ſoliditas ſphæræ.

a 10. quint.

DE AREA SEGMENTOrum ſphæræ.

CAPVT VI.

Superficies conuexa hemiſphærij.

1 HEMISPHERII *ſuperficies conuexa, excluſa baſe, gignitur ex area maximi circuli per 2. multiplicata. Vel ex ſemidiametro in circumferentiam maximi circuli. Vel denique ex tota diametro in ſemiſſem circumferentiæ maximi circuli.* Quæ omnia perſpicua ſunt ex 1. regula Num. 2. capitis 5. propterea quod hi numeri producti ſunt ſemiſſes illorum, qui ſuperficiem cõuexam totius ſphæræ in ea regula exhibuerunt.

Superficies conuexæ portionis ſphæræ.

2 SVPERFICIES *conuexa cuiuslibet portionis ſphæræ hemiſphærio maioris, vel minoris, dempta baſe, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter æqualis eſt rectæ lineæ, quæ à vertice portionis ad circumferentiam baſis ducitur, ex propoſ. 40. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.* Sit enim maximus in ſphæra circulus ABCD, cuius diameter AC, quam in E, ad angulos rectos ſecet BD, recta, per quam intelligatur duci planum diametro ad angulos rectos, ſecans ſphæram in duas portiones, quarum baſis communis circulus diametri BD, & A, vertex minoris portionis, maioris autem vertex C. Iunctis autem rectis AB, CB, erit circulus ſemidiametri AB, ſuperficiei cõuexæ minoris portionis, & circulus ſemidiametri CB, conuexæ ſuperficiei maioris portionis æqualis, ex dicta prop. Archimedis. Quare ſi vtraque AB, CB, in partibus diametri AC, fiat nota, præſertim ope inſtrumenti partium capit. 1. lib. 1. conſtructi, & areæ circulorum ad interualla ſemidiametrorum AB, CB, deſcriptorum inueſtigentur, per ea, quæ lib. 4. cap. 7. ſcripſimus; notæ erunt ſuperficies conuexæ dictarum portionum ſphæræ.



EADEM

EADEM ſuperficies conuexa portionis ſphæræ hemiſpherio minoris, vel maioris, ita quoque cognoſcetur. Ex demonſtratis ab Archimede propoſ. 3. lib. 2. de ſphæra & cylindro, eandem proportionem habet EC, ad EA, quam ſuperficies conuexa portionis ſphæræ baſem habentis circulum diametri BD, & verticem C, ad ſuperficiem conuexam portionis baſem habentis eundem circulum diametri BD, & verticem A. Igitur componendo quoque erit, vt tota diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BAD. Eademque ratione erit, vt tota diameter AC, ad EC, ita conuexa ſuperficies totius ſphæræ ad ſuperficiem conuexam portionis BCD. Quocirca inueſtigata proportione diametri AC, ad ſegmenta AE, EC, per inſtrumentum partium capit. 1. lib. 1. conſtructum; ſi fiat, vt diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ, (quæ ex regula 1. Num. 2. cap. 5. huius lib. cognita fiet) ad aliud, proueniet conuexa ſuperficies portionis minoris BAD. Similique modo ſuperficies conuexa maioris portionis BCD, cognoſcetur; ſi fiat, vt diameter AC, ad EC, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad aliud.



ET quia, vt ex Archimede oſtendimus, ita diameter AC, ad AE, vel ad EC, vt tota ſuperficies ſphæræ ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD: erit quoque ita AF, ſemiſſis diametri ad AE, vel EC, vt hemiſpherii ſuperficies GAH, ad ſuperficiem portionis BAD, vel BCD, quod oſtendetur eodem modo, quo ſcholium propoſ. 22. lib. 5. Euclid. eſt demonſtratum: Si fiat, vt ſemidiameter ſphæræ AF, ad AE, vel EC, altitudinem portionis, ita hemiſphærii GAH, ſuperficies ad aliud; producetur rurſus conuexa ſuperficies portionis minoris BAD, vel maioris BCD.

IMMO cum ſit vt AF. ſemidiameter ad AE, ita hemiſphærij GAH, ſuperficies ad ſuperficiem portionis BAD,[a] erit per conuerſionem rationis, vt AF. ſemidiameter ad EF, ita ſuperficies hemiſphærij GAH, ad ſuperficiem fruſti GBDH, demptis baſibus. Ergo EF, eadem pars erit, vel partes diametri AC, vel ſemidiametri AF, quæ pars eſt, vel partes ſuperficiei fruſti GBDH, demptis baſibus, ſuperficiei totius ſphæræ, vel hemiſphærii GAH. Quam ob rem cognito, quæ pars ſit EF, vel partes ſemidiametri AF, ſi ex ſuperficie hemiſphærij GAH, eadem pars auferatur, vel partes, reliqua fiet ſuperficies conuexa minoris portionis BAD. Et ſi ad hemiſphærij GCH, ſuperficiem adiiciatur eadem pars, vel partes, conflabitur conuexa ſuperficies portionis maioris BCD. Verbi gratia, ſi EF, contineat $\frac{3}{5}$. ſemidiametri AF, & ex ſuperficie hemiſphærij GAH, tollantur $\frac{3}{5}$. reliqua fiet ſuperficies conuexa portionis minoris BAD: Et ſi $\frac{3}{5}$. ſuperficiei hemiſphærii adiiciantur ad ſuperficiem hemiſphærii GCH, conficietur ſuperficies conuexa maioris portionis BCD. Sic ſi EF, eſſet ſemiſſis ſemidiametri, auferenda eſſet ex hemiſphærii ſuperficie ſemiſſis ipſius, vel adiicienda: Et ſic de cæteris.

[a] *coroll. 19. quinti.*

3 HEMISPHÆRII ſoliditas producitur ex ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei hemiſphærij: Vel in ſextam partem ſuperficiei totius ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei hemiſphærij. *Soliditas hemiſphærij.*

ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in ſemiſſem areæ circuli maximi.

VEL ex duabus tertiis partibus areæ circuli maximi in ſemidiametrum: Aut ex tertia parte areæ circuli maximi in totam diametrum.

VEL ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi.

VEL ex ſemiſſe areæ circuli maximi in $\frac{2}{3}$. diametri.

VEL ex dupla diametro in $\frac{1}{6}$. areæ circuli maximi.

VEL ex ſemidiametro in ſextam partem ſuperficiei ſphæræ.

VEL denique ex $\frac{1}{6}$. diametri in ſuperficiem hemiſphærij conuexam, quæ omnia ex 2. regula Nu. 2. c. 5. colliguntur: cum omnes hi numeri producti ſint ſemiſſes illorum, qui ſoliditatem totius ſphæræ in ea regula indicant.

4 SOLIDITAS ſectoris ſphæræ (qui nimirum componitur ex minore portione ſphæræ, & cono baſem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari ex centro in baſem portionis deductæ; Vel qui relinquitur, ſi idem conus ex portione maiore ſubtrahitur vt in proxima figura, ſolidum compoſitum ex portione ſphæræ BAD, baſem habente circulum diametri BD, & ex cono habente eandem baſem, & verticem in centro F: Item ſolidum, quod relinquitur, ſi conus idem ex portione maiore BCD, dematur, appellamus ſectorem ſphæræ) hac ratione inueſtigabitur. Quoniam per propoſ. 42. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro, ſectori ſphæræ æqualis eſt conus baſem habens circulum æqualem ſuperficiei conuexæ portionis ſphæræ altitudinem vero ſemidiametro ſphæræ æqualem: Conus autem producitur, vt cap. 2. huius lib. Num. 1. declarauimus, vel ex baſe in $\frac{1}{3}$. altitudinis: Vel ex tota altitudine in $\frac{1}{3}$. baſis; vt ſector ſphæræ gignatur vel ex ſuperficie conuexa portionis ſphæræ in $\frac{1}{3}$. ſemidiametri, hoc eſt, in $\frac{1}{6}$. totius diametri: Vel ex ſemidiametro in $\frac{1}{3}$. ſuperficiei conuexæ portionis ſphæræ. *Soliditas ſectoris ſphæræ.*

5 SOLIDITAS vero cuiuſcunque portionis ſphæræ hoc modo procreabitur. Inueſtigetur ſoliditas ſectoris ſphæræ, vt proxime traditum eſt, Nam ſi, quando portio propoſita minor eſt hemiſphærio, ex hoc ſectore dematur conus eandem habens cum portione baſem, altitudinem vero perpendicularem ex centro ſphæræ in baſem portionis cadentem, reliqua fiet ſoliditas portionis minoris: At vero ſi, quando portio propoſita hemiſphærio maior eſt, idem conus ad ſectorem adiiciatur, conflabitur ſoliditas portionis maioris. Id quod perſpicuum eſt in ſuperiori figura, cum conus BFD, ablatus ex ſectore ABFDA, reliquam faciat portionem minorem BAD: Idem vero conus BFD, additus ſectoris CBFDC, conſtituat maiorem portionem BCD. Conus porro prædictus BFD, cognitus fiet ex baſe, nimirum ex circulo diametri BD, & altitudine EF, cognitis, vt ca. 2. huius lib. 1. docuimus. *Soliditas cuiuslibet portionis ſphæræ.*

ALITER

SIT in ſphæra circulus maximus ABCD, & portiones ſphæræ, quarum baſis communis circulus diametri BD, & vertices A, C, quarum ſoliditates exquirédæ ſunt. Ex centro H, ducatur ad BD, perpédicularis HE,[b] quæ

rectam



c ſchol. 27. tertij.
d 12. ſexti.

rectam BD, ſecabit bifariam, [c] ac proinde & vtrumque arcum BAD, BCD, bifariam, hoc eſt, per vertices A, C, tranſibit.[d] Fiat, vt CE, ad ſummam rectarum CH, CE, ita AE, ad EF: Item, vt AE, ad ſummam rectarum AH, AE, ita EC, ad EG. Intelliganturq; duo coni, quorum baſis communis circulus diametri BD, & vertices F, G. Erit per propoſ. 2. lib. 2. Archimedis de ſphæra, & cylindro, conus BFD, portioni minori BAD, & conus BGD, portioni maiori BCD, æqualis. Quocirca, inuentis horum conorum ſoliditatibus, vt c. 2. huius lib. Num. 1. traditum eſt, inuentæ quoq; erunt ſoliditates portionum BAD, BCD, quod eſt propoſitum.

Soliditas cuiuslibet fruſti ſphæra.

6 SOLIDITAS denique cuiuſcunque fruſti ſphæræ, ſiue baſes ſint parallelæ, cuiuſmodi eſt in prima figura huius cap. fruſtum BDHG, inter circulos diametrorum BD, GH, incluſum, ſiue non parallelæ, quale eſt fruſtum BDLK, hoc pacto inuenietur. Inueſtigetur, vt Num. 5. diximus, vtriuſque portionis ABD, AGH, ſoliditas. Minori enim detracta ex maiore, reliqua erit ſoliditas fruſti BDHG. Sic etiam, inuento I, vertice portionis KIL, ſi inueniatur ſoliditas vtriuſque portionis BCD, KLI, minorque ex maiore tollatur, remanebit ſoliditas fruſti BDLK, nota.

DE AREA SPHÆROIDIS, eiuſdemque portionum.

CAPVT VII.

Soliditas ſphæroidis.

SIT Ellipſis ABCD, cuius maior axis AC, minor BD, priorem ad angulos rectos ſecans. Soliditatẽ ergo Sphæroidis, id eſt, ſolidi ex circumuolutione Ellipſis circa axem effecti, ita nanciſcemur. Quoniam planum per BD, ductum, & rectum ad axem AC, circulum facit, vt à Federico Commandino ad propoſ. 12. libri Archimedis de Conoidibus, & Sphæroidibus demonſtratur, cuius diameter BD, & centrum E; erit per propoſ. 29. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. ſemiſſis Sphæroidis ABD, dupla coni eandem baſem cum illa ſemiſſe, circulum videlicet diametri BD, habentis, & altitudinem eandem EA. Igitur ſi huius coni ſoliditas per cap. 2. huius lib. inueſtigetur, & duplicetur, exurget ſoliditas ſemiſſis Sphæroidis: quæ duplicata ſoliditatem totius Sphæroidis exhibebit.

Soliditas portionum ſphæroidis.

2 DVCATVR minori axi BD, parallela FG, ſecans maiorem axem in H, ad rectos angulos. Si igitur per FG, ducatur planum rectum ad axem, fiet circulus in Sphæroide diametrum habens FG, & centrum H, vt Federicus Commandinus ad propoſ. 12. lib. Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonſtrauit; abſcindenturque portiones Sphæroidis FAG minor & FCG, maior. Vtriuſque ſoliditas ita fiet cognita. Quoniam per propoſ. 31. libri Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis HA, ad minorem portionem ſphæroidis FAG, proportionem habet, quam maioris portionis axis HC, ad ſummam rectarum EC, HC. Si fiat, vt HC, maioris portionis axis ad ſummam rectarum EC, HC, ita conus prædictus ad aliud (qui quidem conus ex cap. 2. huius lib. cognitus erit) prodibit ſoliditas minoris portionis ſphæroidis FAG.



RVRSVS quia per propoſ. 33. libri Archimed. de Conoid. & Sphæroid. conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis HC, ad maiorem portionem Sphæroidis FCG, proportionem habet, quam minoris portionis axis HA, ad ſummam rectarum EA, HA: ſi fiat, vt HA, minoris portionis axis ad ſummam rectarum EA, HA, ita prædictus conus (quem per cap. 2. huius lib. metieris) ad aliud, procreabitur ſoliditas maioris portionis ſphæroidis FCG.

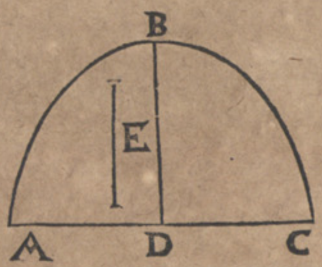
DE AREA CONOIDIS parabolici.

CAPVT VIII.

Soliditas conoidis Parabolici.

SIT Parabola ABC, cuius axis B, D, ad baſem AC, rectus. Soliditatem igitur Conoidis parabolici, quod Parabola circa axem circumducta efficit, ita metiemur.

Quoniam per ea, quæ ad propoſ. 12. libri Archimed. de Conoid. & Sphæroid. Federicus Commandinus demonſtrauit, planum per AC, ductum, & rectum ad axem BD, circulum facit, cuius diameter AC, & centrum D: erit per propoſ. 23. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Parabolicum Conoides ABC, ſeſquialterum coni, cuius baſis circulus diametri AC, & axis BD. Igitur ſi fiat, vt 2. ad 3. ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri metiemur) ad aliud; proſiliet ſoliditas Conoidis Parabolici ABC.



DE AREA CONOIDIS Hyperbolici.

CAPVT IX.

CONCIPIATVR ſuperior figura eſſe Hyperbola, & recta E, æqualis ſemiſſi diametri tranſuerſæ inter duas hyperbolas oppoſitas, hoc eſt, rectæ ex centro hyperbolarum ad verticem B, ductæ. Fietq; rurſus circulus, cuius diameter AC, à plano per AC, ducto, & ad axem recto, vt Federicus Commandinus ad propoſ. 12. libri. Archimed. de conoid. & ſphæroid. demonſtrauit. Soliditatem igitur Conoidis Hyperbolici, quod ab hyperbola ABC, circa axem BD, circumuoluta efficitur, ita venabimur. Quoniam per propoſ. 27. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conoides Hyperbolicum ABC, ad conum, cuius baſis eadem cum baſe Conoidis, circulus videlicet diametri AC, & axis idem BD, proportionem habet eandem, quam linea conflata ex axe BD, & tripla ipſius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & dupla ipſius E. Si fiat, vt linea conflata ex axe BD, & dupla ipſius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & tripla ipſius E, ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri dimetiemur) ad aliud; gignetur ſoliditas Conoidis Hyperbolici ABC.

Soliditas Conoidis Hyperbolici.

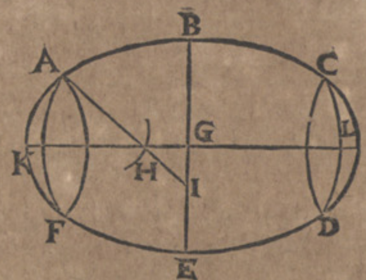
DE AREA DOLIORVM.

CAPVT X.

QVONIAM dolia non eandem formam vbique ſeruant, vix præſcribi poteſt ratio, qua dolij propoſiti capacitas accurate inueniatur. Argumento eſt, quod ſcriptores varie de eius Dimenſione ſcripſerunt. Dicam ergo etiam ego id, quod mihi veriſimile videtur. Sit dolium ABCDEF, in extremitatibus habens circulos AF, CD, orificium B, per quod cogitetur planum ductum rectum ad lineam KL, centra circulorum AF, CD, coniungentem, ſecans dolium bifariam. Si igitur aſſeres dolij in B, & E, curuentur, & deinde ſecundum lineas quaſi rectas extendantur, cuiuſmodi dolia non pauca Romæ vidi: referent ſemiſſes dolij A B E F, CDEB, conos decurtatos: quos ſi per ea, quæ cap. 3. huius libri ſcripta ſunt, metieris, dabit eorum ſumma dolii propoſiti capacitatem. Memor tamen eſto, profunditatem dolij BE, & diametrum circuli AF, menſurandam eſſe intra aſſeres, ita, vt eorum craſſities excludantur; vt habeatur decurtatus conus, cuius baſes ſint circuli BE, AF, &c.

Capacitas dolij.

2 SI vero aſſeres dolij vere ſint aliquo modo circulares, quod nonnulli aſſerunt, concipiendum erit dolium, tanquam fruſtum quoddam Sphæroidis. Nam curuitas aſſerum ſenſibiliter à curuitate Sphæroidis cuius axes ſunt rectæ KL, BE, non different. Sed quia ſolum axis minor, nimirum profunditas dolij, data eſt, reperiemus ex puncto A, in Ellipſi dato, maiorem axem KL, hoc modo. Interuallo ſemiſſis minoris axis BG, deſcribatur ex A, arcus ſecans in H, rectam GH, ad angulos rectos ipſi minori axi per eius punctum medium G, ductam: & ex A, per H, recta emittatur ſecans minorem axem in I. Recta enim AI, dabit ſemiſſes GK, GL, maioris axis, vt lib. 1. noſtri Aſtrolabij in ſcholio Lemmatis 50. demonſtrauimus. Itaque ſi tam ſemiſſis ſphæroidis BKE, quam portio minor AKF, mẽſuretur, vt cap. 7. traditum eſt, & ſoliditas portionis AKF, ex ſoliditate ſemiſſis BKE, detrahatur, remanebit capacitas ſemiſſis dolii ABEF, quæ duplicata totius dolij capacitatem exhibebit. Vtramque hanc rationem dolii dimetiendi à vera dolii capacitate non longe abeſſe arbitror. Paratus tamen interim ſum, ſi quis accuratiorem inuenerit, eam libenti animo, & grato acceptare.



Capacitas d[illegible] alio modo.

DE AREA CORPORVM omnino irregularium.

CAPVT XI.

1 TRADVNT ſcriptores nõnulli regulam quandam mechanicam ad corpora dimetienda, quæ omnino ſunt irregularia. ita vt ſub regulas Geometricas, quæ hactenus explicatæ ſunt, cadere nõ poſſint: cuiuſmodi ſunt ſtatuæ, vrnæ, amphoræ, fruſta ſaxorum, quæ neque vniformis ſunt craſſitiei, neque latera habent prorſus recta, aut ad baſes perpendicularia, &c. Hæc ergo regula, quæ nullo modo videtur aſpernanda, ita ſe habet.

PARETVR arca lignea ex aſſeribus leuigatis, inſtar parallelepipedi cuiuſdam, quæ pice ita oblinatur, vt aquam continere poſſit. Arca hæc tãtæ debet eſſe longitudinis, latitudinis, atque altitudinis, vt corpus metiendum intra ipſam poſitum, aqua totum poſſit operiri. Poſita autem hac arca Horizonti æquidiſtante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantum aquæ, quantum ſatis eſt, vt corpus impoſitum omnino tegat, notenturque diligenter ſuprema latera aquæ in aſſeribus arcæ, vt habeatur

Soliditas cuiuslibet corporis irregularis.

altitudo aquæ vſque ad arcæ fundũ. Extracto deinde corpore, ita tamen, vt nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rurſum latera aquæ, poſtquam quieuerit. Quod ſi per cap. 1. huius lib. metiamur duo parallelepipeda, quorum baſis communis eſt arcæ fundus, ſiue baſis, altitudines vero rectæ à lateribus aquæ notatis vſque ad baſem, & minus à maiore ſubtrahamus, relinquetur parallelepipedum ſoliditati corporis propoſiti omnino æquale, quod parallelepipedum etiam conſequeris, ſi altitudinem inter latera aquæ bis notata duces in baſem arcæ. Sunt, qui infuſa aqua in arcam, latera eius in aſſeribus primo loco notent. Deinde impoſito corpore, eiuſdem aquæ latera ſignent. Si enim altitudo inter poſteriora latera, ac priora ducatur in baſem arcæ, producetur ſoliditas corporis impoſiti.

2 PRO vrnis, atque amphoris, ſiue eæ lapideæ ſint, ſiue Cretaceæ, ita faciemus. Impleatur vas arena, & eius orificium ita obturetur, vt aqua ingredi nullo modo poſſit. Impoſito deinde vaſe in aqua intra arcam contenta, ac ſi eſſet corpus quodpiam irregulare, inueſtigetur eius ſoliditas, vt Num. 1. diximus. Deinde extracta arena, notentur latera aquæ, antequam vas vacuum imponatur. Impoſito denique vaſe vacuo, ſignentur iterum latera aquæ. Si namque altitudo inter poſteriora, ac priora latera multiplicetur per baſem arcæ: procreabitur ſoliditas ſolius vaſis: quæ detracta ex priori ſoliditate, notam relinquet vaſis capacitatem.

DE SVPERFICIE CONVEXA CONI & cylindri recti.

CAPVT XII.

Superficies conica, dẽpta baſe, cui circulo ſit æqualis.

QVONIAM ex Archimede demonſtrauimus, qua ratione ſuperficies conuexa, ſphæræ, eiuſque portionum inueſtiganda ſit: non deerit fortaſſe, qui idem deſideret in cono, ac cylindro recto, quod ex iis, quæ ab eodem Archimede in lib. 1. de ſphæra, & cylindro demonſtrata ſunt, obtinebit hoc modo. Propoſito cono recto quocunque, erit eius ſuperficies conuexa conica ſecluſa baſe, æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus coni, & ſemidiametrum baſis eiuſdem coni, ex propoſ. 14. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

S uperficies fruſti coni, dẽptis baſibus, cui circulo æqualis ſit.

2 QVOD ſi conus rectus ſecetur plano, quod baſi æquidiſtet, erit ſuperficies conuexa fruſti coni, demptis baſibus, æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus conicum fruſti, & rectam ex ſemidiametris duarum baſium conflatam, ex propoſ. 16. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

Proportio conicæ ſuperficiei ad ſuam baſem.

ITEM ſuperficies conica coni recti ad ſuam baſem, proportionem habet eandem, quam latus coni ad ſemidiametrum baſis coni eiuſdem, ex propoſ 15. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

Superficies cylindrica, demptis baſibus, cui circulo ſit æqualis.

4 DENIQVE ſuperficies conuexa cylindri recti, demptis baſibus, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrum baſis cylindri eiuſdem, ex propoſ. 13. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.

FINIS LIBRI QVINTI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER. VI.

In quo de Geodæſia, & de figuris augendis, minuendiſque in data proportione: Item de duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inuentione: Ac denique de radicum extractione agitur.

EXPEDITIS iis, quæ de magnitudinum dimenſionibus initio propoſuimus, reſtat vt de rectilinearum ſuperficierum etiam diuiſione agamus: quæ Geometriæ practicæ pars proprio nomine Geodæſia vocatur. Nam δαίω idem ſignificat, quod partior, vel diuido. Scio pleroſque partem etiam illam, quæ magnitudines, & terram metitur, appellare Geodæſiam; Sed hi, auctore Pediaſimo de menſuratione & partitione terræ, longe à veritate aberrant. *Nam, inquit, terræ menſuratio duas in partes diuiditur, Geometriam ſcilicet, & Geodæſiam. Areæ namque ſecundum artem menſuratio, & terræ menſuratio eſt, & merito Geometria vocatur, vnius vero, & eiuſdem areæ, ſeu loci diuiſio inter diuerſas perſonas, partitio quædam eſt terræ, & iure optimo Geodæſia appellatur.* Hæc Pediaſimus.

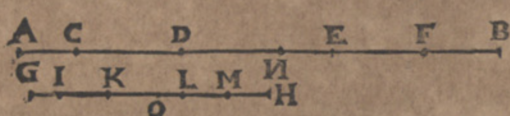
Geometria & Geodæſia quid.

EDIDIT quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellum de ſuperficierum diuiſionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adſcriptum: ipſeque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuerſalem conſcripſit: eſtque ſane libellus vterque acutiſſimus, & eruditione refertiſſimus. Idem vero poſtea argumentum alia via aggreſſus eſt, & meo certe iudicio, faciliori, & magis generali, Simon Steuinius Brugenſis: ſed in qua aliquid deſiderari videatur, vt omnibus ſuperficiebus rectilineis (quod ipſe velle videtur) conuenire poſſit, quod facile iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attente perlegerint. Res enim propoſita nulla ratione confici poteſt, niſi prius duæ propoſitiones demonſtrentur, quarum priorem ipſe ſine demonſtratione aſſumit pro principio, poſterioris vero ne meminit quidem, cum tamen admodum ſit neceſſaria, & quam Machometus Bagdedinus demonſtrauit paulo aliter, quam nos. Has ergo duas propoſitiones ad initium huius lib. demonſtrabimus, & poſteriorem quidem longe generalius, quam à Machometo factum eſt, quod beneuolo Lectori iudicandum relinquo. Deinde ſuperficierum rectilinearum diuiſionem aggrediemur, inſiſtentes eiuſdem Steuinii veſtigiis, niſi quando generalius rem oportebit demonſtrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: tum quia libellus ipſorum in manibus omnium eſt, ac propterea eum, quicunque volet, legere poterit: tum quia propoſita aliqua figura multorum angulorum, non ſine difficultate, ac labore eam ſtudioſus diuidet, niſi diuiſionis omnium præcedentium figurarum memor ſit, quod in noſtra ratione non accidit: tum denique quia illorum ratio ſolum figuris ordinariis conuenit, quæ videlicet omnes angulos habent introrſum, tot nimirum, quot latera figura ipſa continet, noſtra autem via figuras etiam illas complectitur, quæ angulos habent partim introrſum, & partim extrorſum vergentes.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI magnitudo in quotuis partes ſecetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales: habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul eandem proportionem, quam totidem partes poſterioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul. Et ſi quælibet pars prioris magnitudinis ſeceturin duas partes vtcunque, ſecetur autem vt pars poſterioris magnitudinis illi parti reſpondens in alias duas partes duabus illis proportionales: erunt quoque ibidem totæ magnitudines ſectæ proportionaliter.

SIT magnitudo AB, ſecta in quotuis partes vtcunque AC, CD, DE, EF, FB: & alia magnitudo qualiſcunque GH, etiamſi diuerſi ſit generis, ſecta in totidem partes GI, IK, KL, LM, MH, illis ordine proportionales. Dico ita eſſe, verbi gratia, duas partes AC, CD, ſimul ad reliquas tres DE, EF, FB, ſimul, vt ſunt duæ GI, IK, ſimul ad reliquas tres KL, LM, MH, ſimul, &c. Quoniam enim eſt, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, erit componendo etiam, vt AD, ad CD, ita GK, ad IK: Vt autem CD, ad DE, ita eſt IK, ad KL. Igitur ex æqualitate erit, vt AD, ad DE, ita GK, ad KL.



RVRSVS quia conuertendo eſt, vt BF, ad FE, ita HM, ad ML; erit quoq; componendo, vt BE, ad FE, ita HL, ad ML: Vt autem FE, ad ED, ita eſt ML, ad LK. Igitur ex æqualitate erit, vt BE, ad ED, ita HL, ad LK, & componendo, vt BD, ad ED, ita HK, ad LK, & conuertendo, vt DE, ad DB, ita KL, ad KH. Itaque cum oſtenſum ſit, eſſe vt AD, ad DE, ita GK, ad KL, & vt DE, ad DB, ita KL, ad KH, erit ex æqualitate, vt AD, ad DB, ita GK, ad KH.

NON aliter oſtendemus eſſe, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH. Nam rurſus conuertendo, componendo, & ex æqualitate erit vt BC, ad DC, ita HI, ad KI; & conuertendo, vt CD, ad CB, ita IK, ad IH. Cum ergo ſit, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, & vt CD, ad CB, ita IK, ad IH; erit ex æqualitate, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH.

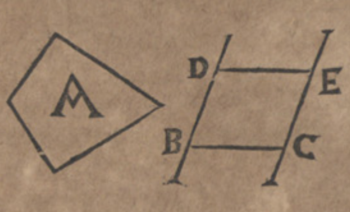
PARI ratione erit, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH. Erit namq; rurſus componendo, & ex æqualitate, vt AF, ad EF, ita GM, ad LM. Cum ergo ſit quoque, vt EF, ad FB, ita LM, ad MH: erit ex æqualitate, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH; & ſic de cæteris. Conſtat igitur primum.

DEINDE pars v.g. tertia DE ſecta ſit vtcunq; in partes duas DN, NE; & tertia quoque pars KL, in duas KO, OL, illis proportionales. Dico eſſe quoque vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Erit enim conuertendo, vt EN, ad ND, ita LO, ad OK, & componendo, vt ED, ad DN, ita LK, ad KO. Quare cum ſit, vt CD, ad DE, ita IK, ad KL, & vt DE, ad DN, ita KL, ad KO: erit ex æqualitate, vt CD, ad DN, ita IK, ad KO. atque ita partes AC, CD, DN, partibus GI, IK, KO, proportionales ſunt.

RVRSVS quia eſt conuertendo, vt FE, ad ED, ita ML, ad LK, & componendo, vt DE, ad NE, ita KL, ad OL: erit ex æqualitate, vt FE, ad EN, ita ML, ad LO: & conuertendo, vt NE, ad EF, ita OL, ad LM, ac proinde omnes partes AC, CD, DN, NE, EF, FB, omnibus partibus GI, IK, KO, OL, LM, MH, proportionales ſunt. Igitur vt in prima parte demonſtratum eſt, erit vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Conſtat ergo etiam ſecundum.

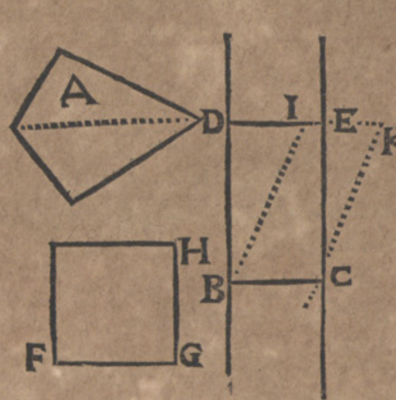
PROBL. I. PROPOS. 2.

DATO rectilineo, ſuper datam rectam inter alias duas rectas interceptam, conſtituere quadrilaterum æquale, cuius latus oppoſitum inter duas eaſdem rectas interceptum datæ rectæ ſit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuſcunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri poteſt, quod ex ipſa problematis ſolutione cognoſcetur.



1 SIT rectilineum datum A, & recta data BC, inter duas rectas BD, CE, intercepta: oporteatq; primum conſtituere rectilineo A, æquale quadrilaterum ſuper datam rectam BC, cuius latus oppoſitum inter eaſdem rectas BD, CE, interceptum datæ rectæ BC, ſit parallelum. Et ſi quidem duæ rectæ BD, CE, ſint parallelæ (quod tum demum eueniet, cum duo anguli B, C, æquales ſunt duob. rectis) efficietur problema, [a] ſi ſuper rectam BC, conſtituetur parallelogrammum BE, ſiue in angulo BCE; ſiue in angulo CBD, rectilineo A, æquale

a 45. primi.



2 QVANDO anguli B, C, recti ſunt, facilius problema efficiemus hac ratione. Rectilineo dato A, conſtituatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2 Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius Geometriæ practicæ ſcripſimus, quadratum FGH, æquale: reſoluendo videlicet rectilineum in triangula, vel trapezia, & cuilibet triangulo, vel trapezio æquale quadratum conſtituendo, ac tandem omnia illa quadrata ad vnum redigendo, vt locis citatis fuſe explicauimus. Deinde duabus rectis BC, FG, inueniatur tertia proportionalis BD, ac per D, ipſi BC, parallela agatur DE. Rectangulum enim BE, rectilineo dato A, æquale erit; [b] cum quadrato FGH, æquale ſit; propterea quod tres rectæ BC, FG, BD, continue proportionales ſunt.

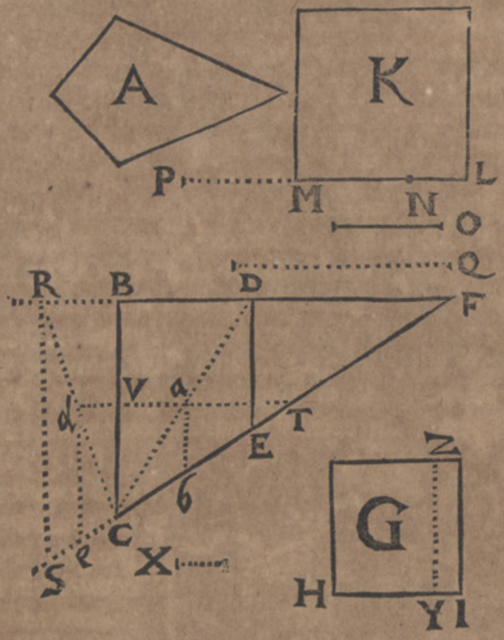
b 17. ſexti.

IMMO eodem hoc artificio vti poterimus, quando parallelæ BI, CK, non faciunt angulos rectos ad B, & C. Nam

C. Nam conſtituto rectangulo CD, æquali quadrato FH, id eſt, rectilineo A, vt dictum eſt: ſi producatur latus DE, donec ſecet rectas BI, CK, in IK,[a] erit parallelogrammum BK, rectangulo CD, æquale, hoc eſt, rectilineo A.

3 Si vero duæ rectæ BD, CE, non ſint parallelæ, conueniant ad partes D, E, in F, (quod tum fiet, cum duo anguli DBC, ECB, minores ſunt duobus rectis) ſitque primum propoſitum ſuper BC, verſus F, conſtituere trapezium rectilineo A, æquale, habens latus rectæ BC, oppoſitum eidem BC, parallelum, quod vt fieri poſſit, neceſſe eſt, rectilineum A, minus eſſe triangulo BCF, vt patet. [a 35. primi.]

RECTILINEO ergo A, conſtruatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius, vt proxime diximus, æquale quadratum G, cuius latus HI.[b] Item triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM. Deinde duabus rectis LM, HI, reperiatur tertia proportionalis LN. Inuenta autem recta O, media proportionali inter LM, & MN; fiat vt LM, ad O, ita BF, ad FD; ac tandem per D, ipſi BC, parallela agatur DE. Dico Trapezium BE, rectilineo A, æquale eſſe.[c] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum DEF, duplicatam proportionem habet lateris BF, ad latus DF, hoc eſt, rectæ LM, ad rectam O: Habet autem & LM, ad MN, duplicatam proportionem eius, quam habet LM, ad O, quod LM, O, MN, ſint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum DEF, ita LM, ad MN; Et per conuerſionem rationis, vt triangulum BCF, ad Trapezium BE, ita LM, ad LN.[d] Cum ergo ſit, vt LM, ad LN, ita quadratum K, ad quadratum G, quod LM, HI, LN, continue ſint proportionales, erit quoque vt triangulum BCF, ad trapezium BE, ita quadratum K, ad quadratum G, hoc eſt, ita triangulum BCF, quod ipſi K, æquale eſt, ad rectilineum A, ipſi G, æquale. Quocirca cum triangulum BCF, ad trapezium BE, & ad rectilineum A, eandem habeat proportionem;[e] æqualia erunt trapezium BE, & rectilineum A, quod eſt propoſitum. [b 14. ſecun.] [c 19. ſexti.] [d coroll. 20. ſexti.] [e 9. quint.]



4 SIT deinde ſuper BC, verſus R, S, vbi anguli RBC, SCB, duobus rectis ſunt maiores, non autem verſus punctum concurſus F, conſtruendum trapezium rectilineo A, cuiuſcunq; magnitudinis ſit, æquale, habens latus oppoſitum rectæ BC, parallelum.[f] Fiat rurſus triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM; & rectilineo A, aliud quadratum G, æquale, cuius latus HI, per ea, quæ ad propoſitionem 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. c. 4. lib. 4. huius docuimus. Deinde lateribus LM, HI, inueniatur tertia proportionalis MP, quæ ipſi LM, in continuum & directum ſit poſita: atque inter totam LP, & LM, reperta ſit media proportionalis Q: ac poſtremo, vt Q, ad LP, ita fiat FB, ad FR, ipſique BC, parallela agatur RS. Dico trapezium BS, rectilineo A, eſſe æquale.[g] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum RSF, proportionem habet duplicatam lateris FB, ad latus FR, hoc eſt, proportionis Q, ad LP; Eſt autem & proportio LM, ad LP, duplicata proportionis LM, ad Q, vel Q, ad LP, quod tres rectæ LM, Q, LP, ſint continue proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum RSF, ita LM, ad LP; ideoque etiam per diuiſionem rationis contrariam in ſcholio propoſ. 17. lib. 5. Euclid. à nobis demonſtratam, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita LM, ad MP.[h] Vt autem LM, ad MP, ita eſt, quadratum K, ad quadratum G, quod tres LM, HI, MP, ſint continue proportionales. Igitur erit quoque, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita quadratum K, ad quadratum G. Cum ergo triangulo BCF, conſtructum ſit æquale quadratum K:[i] erit quoque trapezium BS, quadrato G, æquale, hoc eſt, rectilineo A, cui quadratum G, conſtructum eſt æquale, quod eſt propoſitum. [f 14. ſecun.] [g 19 ſexti.] [h coroll. 20. ſexti.] [i 14. quint.]

5 QVOD ſi quando duæ rectæ BF, CF, in tam remoto puncto concurrant, vt vix haberi poſſit (quod quidem tunc accidet, cum ipſæ rectæ fere parallelæ ſunt) abſoluemus problema, etiamſi punctum concurſus F, non habeamus, hunc in modum. Sumpto vtcunq; puncto T, in altera earum, nimirum in CF, agatur TV, alteri BF, parallela; & duabus BC, CV, inueniatur tertia proportionalis X. Constructo deinde ex ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius, vt Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus, quadrato G, æquali rectilineo A, inueniatur tribus BC, X, HI, quarta proportionalis IY, agaturq; YZ, lateribus quadrati parallela.[k] Et quoniam eſt, vt triangulum BCF (ſi perficeretur) ad triangulum VCT, ita recta BC, ad rectam X, hoc eſt, ita HI, ad IY,[l] hoc eſt, ita quadratum G, ad rectangulum IZ: Eſt autem triangulum BCF, maius quadrato G, ſiue rectilineo A: (quando enim ad partes angulorum, qui duobus rectis minores ſunt, conſtruendum eſt trapezium dato rectilineo æquale, debet eſſe triangulum maius rectilineo)[m] erit quoque triangulum VCT, maius rectangulo IZ, Igitur vt Nume. 3. traditum eſt, conſtruatur trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale: & tribus rectis CV, Va, CB, inuenta quarta proportionali BD,[n] (tranſibit autem recta ducta Ca, per D, ſi quarta BD, rite eſt inuenta,[o] ita vt viciſſim recta Ca, ſi exquiſitè ducatur, exhibeat quartam proportionalem quæſitã BD,) demittatur DE, ipſi BC, parallela. Dico trapezium BE, dato rectilineo A, æquale eſſe. Quoniam enim trapezium BE, trapezio Vb, ſimile eſt, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 6. Euclid. demonſtrauimus;[p] erit trapezium BE, ad trapezium Vb, vt recta BC, ad rectam X, hoc eſt, vt recta HI, ad IY,[q] hoc eſt, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale ſit;[r] erit quoq; trapezium BE, quadrato G, hoc eſt, rectilineo A, æquale, quod eſt propoſitum. [k coroll. 19. ſexti.] [l 1. ſexti.] [m 14. quin.] [n ſchol. 4. ſexti.] [o 4. ſexti] [p coroll. 20. ſexti.] [q 1. ſexti.] [r 14. quint.]

6 NON aliter ex alia parte angulorum RBC, SCB, qui duobus rectis ſunt maiores, etiamſi punctum concurſus F, non habeatur, trapezium conſtituemus rectilineo A, æquale, cuiuſcunque magnitudinis illud ponatur. Neq; enim in hoc caſu neceſſe eſt, ipſum eſſe minus triangulo BCF, ſi perficeretur. Ducta namq; ex quolibet puncto T, rectæ CF, ipſi BF, parallela TV, eaq; producta, inueniatur duabus rectis BC, CV, tertia propor-

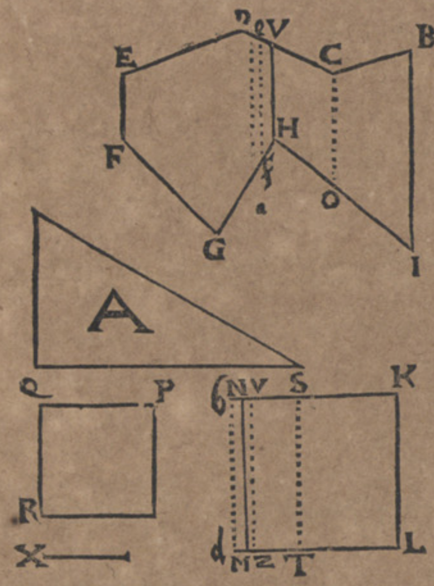
 tionalis

portionalis X. Conſtructo deinde quadrato G,quod rectilineo A, ſit æquale, reperiatur tribus rectis BC, X,& HI,quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela,ita vt rurſus ſit triangulũ BCF, ad triangulum VCT, ſicut quadratum G ad rectangulum IZ.Poſt hæc, vt Num.4.præcepimus, rectangulo IZ,conſtruatur trapezium æquale Ve,& tribus rectis CV, Vd, CB, inuenta quarta proportionali BR,[a] (tranſibit autem recta Cd, ducta per R, ſi quarta BR, recte inuenta eſt: [b] ita vt viciſſim recta Cd, ſi accurate ducatur, abſcindat quartam proportionalem quæſitam BR,)demittatur RS,ipſi BC,parallela. Dico trapezium BS,rectilineo A,æquale eſſe.Quoniam enim trapezium BS,trapezio Ve,ſimile eſt,per ea,quæ in ſchol. prop.18.lib.6.Euclid.monſtrata ſunt à nobis;[c] erit trapezium BS,ad trapezium Ve,vt recta BC,ad rectam X hoc eſt, vt recta HI, ad rectam IY, [d] hoc eſt, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Ve, rectangulo IZ, æquale ſit; [e] erit quoque trapezium BS,quadrato G,hoc neſt,rectilieo A,æquale,quod eſt propoſitum.

a ſchol. 4. ſexti. b 4. ſexti. c coroll. 20. ſexti. d 1. ſexti. e 14. quint.

7 IAM vero datis duobus rectilineis quibuſcunq; A,& BCDEFGHI,ſit ex poſteriore:quod maius ponatur,auferendum rectilineum habens latus lateri BI,parallelum,æquale priori A, quod minus ſtatuatur,ſi fieri quidē id poterit.Fieri autē poterit ſemper in figuris omnes angulos habentib introrſum,in aliis vero nō ſemper Per ea,quæ in ſchol.prop.14.li.2.Eucl.vel potius per ea q̄ Nu.4.c.4.li.4.huius tradidimus,conſtruatur quadratũ KM, rectilineo minori A, æquale. Deinde ex angulo C,qui lateri BI,proximus eſt,ducta lateri BI,parallela CO, cōſtituatur rectilineo BO,eadē ratione quadratũ æquale PQR; & duab. rectis KN,PQ,inuēta tertia proportionali KS, ducatur ST,ipſi KL,parallela:[f] Eritque rectangulũ KT,contentũ ſub prima linea KL, & tertia KS,quadrato mediæ PQ.h.e.rectilineo BO,æquale.Et quoniā KS, inuenta eſt in hoc exēplo minor latere KN,ideoq; & rectangulũ KT,minus quadrato KM,hoc eſt,rectilineo A; erit etiā rectilineũ BO, minus rectilineo A. Ex propinquiore ergo angulo H,ducta rurſum ipſi CO,vel BI,parallela HV,fiat iterum rectilineo CH,æquale quadratum,cuius latus X Et duabus rectis KN,& X,inuenta tertia proportionali SN , quæ in hoc exemplo terminatur in extremo lateris KN;[g] erit rurſum rectangulum SM,ſub prima linea ST, & tertia SN, comprehenſum æquale quadrato mediæ X,hoc eſt,rectilineo CH.Cum ergo & KT,ipſi BO,ſit oſtenſum æquale:erit totum quadratum KM,hoc eſt,rectilineum A , toti rectilineo BCVHOI, æquale;ac proinde ex maiori rectilineo per rectam HV, lateri BI,parallelam rectilineum detraximus minori rectilineo A,æquale,quod faciendum erat.

f 17. ſexti. g 17. ſexti.

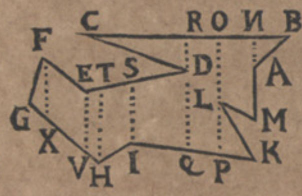


8 QVOD ſi duabus rectis KN,& X,inuenta tertia proportionalis fuiſſet minor,quam SN,nimirum æqualis ipſi SY, ita vt rectangulum SZ,quadrato rectæ X,vel rectilineo CH, foret æquale:ducēda eſſet ex proximo angulo D,alia parallela Da, & rectilineo DH, conſtituendũ quadratum æquale,atque rectæ KN, & lateri poſtremi huius quadrati inuenti adiungenda tertia proportionalis, & ei abſcindenda æqualis Yb.Et ſi Yb,foret minor,quam YN,ducenda adhuc eſſet ex proximo angulo G,parallela lateri BI,& rectilineo inter hanc parallelam,&Da, comprehenſo efficiendum quadratum æquale : ac rectæ KN, & lateri huius quadrati adiungenda tertia proportionalis,&c. Atq; ita progrediendum deinceps, donec inuenta ſit tertia proportionalis SN , quæ terminetur in N,(qualis fuit tertia proportionalis SN,duabus KN,& X,inuenta,)vel cuius terminus vltra N, cadat. Quando enim terminatur in N, erit rectilineum inter BI , & vltimam parallelam comprehenſum æquale quadrato KM,hoc eſt, rectilineo A , vt oſtenſum fuit de rectilineo BH,paulo ante hunc Num.8. Quando autem terminus tertiæ proportionalis cadit vltra N, videlicet in b , ita vt rectangulum Yd,ſit æquale vltimo quadrato inuento , hoc eſt, rectilineo DH , ac proinde totum rectilineum inter BI , & vltimam parallelam , hoc eſt, rectangulum Kd,maius quadrato KM, vel rectilineo A, erit vltimum rectilineum DH,maius rectangulo Nd,propterea quod KZ,ipſi BH, æquale eſt,& Yd,ipſi DH.Quare ſi ſuper rectam Da,inter rectas DV,aH,conſtituatur trapezium Df,per parallelam ef,rectangulo Nd,æquale, vt ſupra Num.3. traditum eſt:erit rectilineum inter BI, & ef,parallelas contentum æquale quadrato KM,hoc eſt,rectilineo A.

CÆTERVM non eſt neceſſe,vt ſemper à proximo angulo parallela ducatur in figura BF. Quando namque ſenſus iudicaret plus minus , parallelam ex aliquo angulo non proximo ductam auferre rectilineum minus quadrato KM , vel non multo maius, ducenda eſſet parallela ex eo angulo , & rectilineo abſciſſo conſtruendum æquale quadratum, & reliqua perficienda, vt prius.

DENIQVE ſi aliquando deprehenderetur,rectilineum abſciſſum non eſſe multo minus quadrato, conſtituendum eſſet.vt Nu.3.docuimus,ſuper parallelam illam trapezium æquale rectangulo,quo quadratum KM, rectilineum abſciſſum ſuperat.

9 EX his puto ſatis ſtudioſum Lectorem intelligere,quo pacto in aliis exemplis ſe gerere debeat. Nam ſi v.g. ex hoc propoſito rectilineo irregulariſſimo per lineam lateri AM, parallelam abſcindēda ſit portio æqualis alteri cuipiam rectilineo minori, producemus MA, vſq; ad N. Et ſi quidem deprehenſum fuerit triangulum ABN , eſſe æquale dato rectilineo minori, (quod ſcietur, ſi quadratũ triangulo æquale conſtructum, fuerit æquale quadrato , quod dato rectilineo minori conſtruitur æquale) recta AN, problema efficiet. Si vero maius, conſtruemus ſuper AN, verſus B, trapezium per parallelam ipſi AN,æquale exceſſui:At ſi minus,ducemus LO,parallelam. Nam ſi



fuerit deprehenſum rectilineum NL,æquale defectui,problema efficiet parallela LO : Si vero maius conſtituemus ſuper LO,verſus MN, per parallelam ipſi MN, trapezium exceſſui æquale.Ea n.parallela problema ſoluet: At ſi minus, producemus OL,ad P:Et ſi quidem triangulũ KLP,fuerit æquale defectui, tota parallela OP, quæſtioni ſatisfaciet:Si vero maius [h] conſtituemus in angulo K, triangulum ſimile triangulo KLP, & exceſſui æquale;ita

h 25. ſexti.

le;ita

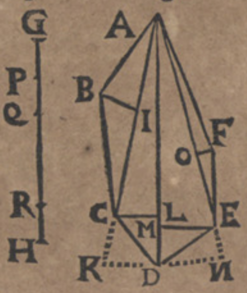
le; ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit dato rectilineo minori æquale. Ex quo colliges, problema in hoc caſu ſolui non poſſe, cum duæ parallelæ, nimirum LO, & illa, quæ triangulum ipſi KLP. ſimile aufert, reſecent ex toto rectilineo BG, partem dato rectilineo minori æqualem. At ſi triangulum KLP, fuerit minus defectu prædicto, ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit minus dato rectilineo minore, ducemus per D, parallelam QR. Et ſi quidem rectilineum PR, æquale fuerit defectui, quo figura KPLMABNO, à dato rectilineo minore deficit, factum erit per parallelam QR, quod iubetur: Si vero maius, parallela, quæ cum QR, verſus OP, auferet rectilineũ huic exceſſui æquale, ſatisfaciet problemati: At ſi rectilineum PR, fuerit minus prædicto defectu, & triangulum CDR, inuentum fuerit vltimo huic defectui, quo rectilineum PR, à prædicto defectu deficit, æquale, parallela DQ. quæſtionem diſſoluet: Si autem triangulum CDR, fuerit maius hoc vltimo defectu, [i] ſi ad C, conſtituatur triangulũ exceſſui æquale. & ſimile triangulo CDR, ſatisfacient quæſtioni duæ parallelæ, videlicet DQ, & baſis prædicti trianguli conſtituti; atq; in hoc caſu per vnicam parallelam ſatisfieri problemati nequit: Si deniq; triangulum CDR, minus extiterit eodem illo vltimo defectu, ducemus parallelam IS. Et ſi quidem rectilineum DI, æquale fuerit illi, quo triangulum CDR, minus eſt vltimo illo defectu, erit totum rectilineum ISDCBAMLKI, dato minori rectilineo æquale: Si autem rectilineum DI, inæquale fuerit, progrediemur vlterius, vt iam ſæpius dictum eſt, donec rectilineum inueniamus dato minori rectilineo æquale; Inuenietur autem omnino vnum æquale, cum totum rectilineum BG, maius ponatur. Vides igitur, facile coniici poſſe, quando problema per vnicam parallelam ſolui poſſit, & quando non ſed per duas: Quotieſcunq; enim incidemus in eiuſmodi triangulum in ipſa conſtructione, qualia fuerunt KLP, & CDR, ex quo auferendum ſit triangulum ſimile, & æquale exceſſui alicui, ſolui problema nequit, niſi per duas parallelas.

i 25. ſexti.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

DIVISO rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto, rectas lineas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire.

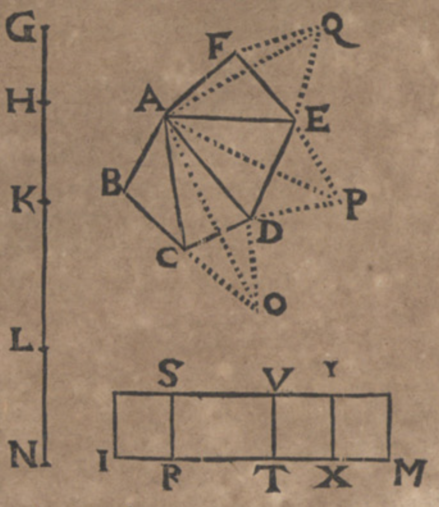
SIT rectilineum quodlibet ABCDEF, diuiſum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, per rectas ex angulo A. (vel aliquo puncto aſſignato in vno latere) ad omnes angulos oppoſitos ductas, atq; hiſce triangulis inueniendæ ſint ordine totidem rectæ proportionales. Ex omnibus angulis, dempto angulo A, ad rectas ex A, egredientes ducantur perpendiculares BI, CL, DK, DN, EM, FO, pro altitudinibus triangulorum. (Nihil autem refert, ſi interdum perpendiculares cadant in rectas extra triangula productas, cuiuſmodi hic ſunt DK, DN,) ita vt ſingula triangula binas habeant altitudines, præter duo extrema, quæ ſingulas duntaxat habent. Deinde in recta quacunque GH, accipiatur GP, æqualis altitudini BI, primi trianguli ABC; & PQ. æqualis altitudini DK, ſecundi trianguli ACD, reſpectu eiuſdem baſis AC. Poſt hæc fiat, [a] vt CL, altitudo ſecundi trianguli reſpectu baſis AD, ad EM, altitudinem tertij trianguli ADE, reſpectu eiuſdem baſis AD, ita PQ. ad QR, Et vt DN, altitudo tertij trianguli ADE, reſpectu baſis AE, ad FO, altitudinem quarti trianguli AEF, reſpectu eiuſdem baſis AE, ita QR, ad RH, atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, ſumendo ſemper duas altitudines ad communem baſem demiſſas, &c. Dico quatuor rectas GP, PQ. QR. RH, eſſe quatuor triangulis ordine proportionales. Nam vt in ſcholio propoſ. 1. lib. 6. Euclid. demonſtratum eſt, à nobis, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum ADC, vt altitudo BI, ad altitudinem DK, propter baſem communem AC, hoc eſt, vt GP, ad PQ. cum hæ ſumptæ ſint illis altitudinibus æquales. Eadem de cauſa ita eſt triangulum ACD, ad triangulum ADE, vt altitudo CL, ad altitudinem EM, hoc eſt, vt PQ, ad QR, cum ex conſtructione ſit, vt CL, ad EM, ita PQ. ad QR. Pari denique ratione ita eſt triangulum ADE, ad triangulum AEF, vt altitudo DN, ad altitudinem FO, hoc eſt, vt QR, ad RH, cum ſit per conſtructionem vt DN, ad FO, ita QR, ad RH. Conſtat ergo id, quod propoſitum fuit.



a 12. ſexti.

ALITER

SIT rurſus rectilineum ABCDEF, diuiſum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, ex puncto A. Quoniam bina proxima triangula conſtituunt quadrilaterum, cuius diameter eſt latus vtrique triangulo commune, cuiuſmodi eſt ABCD, ducemus diametro AC, ex D, parallelam DO, quæ ſecet latus BC, productum in O. Sic in quadrilatero ACDE, diametro AD, parallelam ducemus EP, quæ ſecet latus CD, protractum in P. Itemque in quadrilatero ADEF, diametro AE, parallelam ducemus FQ, quæ latus DE, productum ſecet in Q. Deinde in recta quauis GN, ſumantur GH, HK, ipſis BC, CO, æquales. Et tribus CD, DP, HK, reperiatur quarta proportionalis KL. Ac tandem tribus DE, EQ. KL, quarta proportionalis inueniatur LN. Dico inuentas eſſe quatuor rectas GH, HK, KL, LN, quatuor triangulis proportionales. Ductis enim ex A, ad O, P, Q. puncta concurſuum rectis AO, AP, AQ, [b] erit triangulum ACD, triangulo ACO; & triangulum ADE, triangulo ADP; & triangulum AEF, triangulo AEQ, æquale. [c] Cum ergo ſit, vt BC, ad CO, hoc eſt, vt GH, ad HK, ita triangulum ABC, ad triangulum ACO, hoc eſt, ad triangulum ACD: Item vt CD, ad DP, hoc eſt, vt HK, ad KL, ita triangulum ACD, ad triangulum ADP, hoc eſt, ad triangulum ADE: Et vt DE, ad EQ, hoc eſt, vt KL, ad LN, ita triangulum ADE, ad triangulum AEQ, hoc eſt, ad triangulum AEF: perſpicuum eſt id, quod proponitur.



b 37. primi.
c 1. ſexti.

ALITER

RATIONES duæ expoſitæ, quæ expeditiſſimæ ſunt, propria eſt triangulorum, in quæ diuiditur figura per rectas ab vno aliquo puncto in quouis latere dato, vel ab aliquo angulo emiſſas: poteſt tamen idem hoc problema abſolui alio modo, qui in quaslibet figuras conuenit, licet non ſit tam expeditus. Ita ergo agemus: Sit eadem figura proxima diuiſa in triangula, vel etiam in plurium laterum figuras.[a] Et primo triangulo ABC, vel primæ figuræ, rectangulum, vel quoduis aliud parallelogrammum non rectangulum æquale conſtruatur IS: Et ſuper rectam RS, aliud parallelogrammum ST, ſecundo triangulo ACD, vel ſecundæ figuræ æquale, habens angulum SRT, angulo I, æqualem. Item ſuper rectam TV, aliud VX, tertio triangulo ADE, vel tertiæ figuræ æquale, angulum habens VTX, æqualem eidem angulo I: Ac deniq; ſuper rectam XY, aliud YM, quarto triangulo AEF, vel quartæ figuræ æquale, angulum YXM, habens æqualem eidem angulo I: atq; ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, vel figuræ. Dico rectas IR, RT, TX, XM, triangulis, vel figuris eſſe proportionales. Nam ex quatuor rectangulis, vel parallelogrammis conſtituitur vnum totum, vt ex demonſtratione propoſ. 45. lib. 1. Euclid. manifeſtum eſt, propter angulos I, SRT, VTX, YXM, æquales: ac proinde omnia quatuor eandem habent altitudinem.[b] Igitur rectæ IR, RT, TX, XM, proportionales ſunt parallelogrammis, ideoq; & triangulis, ſiue figuris, quod eſt propoſitum.

a 44. vel 45. primi.
b 1. ſexti.

PROBL. 3. PROPOS. 4.

DATVM rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis, in quam malueris partem, vergat

SIT primum triangulum quodcunque ABC, per rectam ex angulo A, diuidendum in duas partes: ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Secetur latus BC, dato angulo oppoſitum per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 6. Euclid. docuimus, in F, ita vt eadem ſit proportio BF, ad FC, quæ D, ad E, ducaturque recta AF. Dico eſſe vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC. [a] Eſt enim triangulum ABF, ad triangulum AFC, vt BF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E.

a 1. ſexti



DEINDE ſit idem triangulum ABC, diuidendum in duas partes, per rectam ex puncto F, dato in latere BC, ita vt pars verſus B, ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Ducta ex dato puncto F, ad angulum oppoſitum A, recta FA, vt totum triangulum in duo triangula ſit ſectum: [b] reperiantur duæ rectæ GH, HI, habentes eandem proportionem, quam triangulum ABF, ad triangulum AFC: totaque GI, ſecetur in H, vt eadem ſit proportio GH, ad HI, quæ D, ad E. Et quia punctum H, cadit in extremum primæ lineæ GH; eſtque vt GH, ad HI, hoc eſt, vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC, diuidet recta FA, ex dato puncto F, ad oppoſitum angulum A, ducta triangulum ABC, in duas partes in data proportione D, ad E.

b 3. huius.

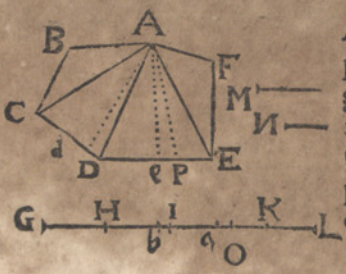
SIT rurſus data proportio K, ad L, diuidendumque ſit triangulum ABC, ex puncto F, in duas partes eiuſdem proportionis. Diuidatur tota GI, in M, ita vt eadem ſit proportio GM, ad MI, quæ K, ad L. Et quoniam diuiſionis punctum M, cadit in primam partem GH, totius lineæ GI, ſecabimus BA, baſem primi trianguli dato puncto F, oppoſitam, in N, vt eadem ſit proportio BN, ad NA, quæ GM, ad MH. Dico ductam rectam FN, problema efficere, hoc eſt, ita eſſe triangulum BFN, ad trapezium FNAC, vt K, ad L. Quoniam enim rectę GH, HI, triangulis ABF, AFC, proportionales inuentæ ſunt: & tam primam partem GH, in M, quam primum triangulum ABF, per rectam FN, ſecuimus proportionaliter, [c] cum ſit triangulum BFN, ad triangulum NFA, vt BN, ad NA, hoc eſt, vt GM, ad MH, [d] erit vt GM, ad MI, id eſt, vt K, ad L, ita BFN, triangulum ad trapezium FNAC, quod eſt propoſitum.

c 1. ſexti.
d 1. huius.

DENIQVE data ſit proportio O ad P, ſecandumque ſit triangulum ABC, in duas partes eiuſdem proportionis. Diuiſa tota GI, in Q, ita vt eadem ſit proportio GQ, ad QI, quæ O, ad P, quoniam punctum diuiſionis Q, cadit in ſecundam partem HI, totius lineæ GI, diuidemus AC, baſem ſecundi trianguli dato puncto F, oppoſitam in R, vt eadem ſit proportio AR, ad RC, quæ HQ, ad QI. Dico ductam rectam FR, problema efficere, hoc eſt, ita eſſe trapezium ABFR, ad triangulum RFC, vt O, ad P. Quoniam enim rectæ GH, HI, repertæ ſunt triangulis ABF, AFC, proportionales; & tam ſecundam partem HI, in Q, quam ſecundum triangulum AFC, per rectam FR, ſecuimus proportionaliter: [e] cum ſit triangulum AFR, ad triangulum CFR, vt AR, ad RC, hoc eſt, vt HQ, ad QI, [f] Erit vt GQ, ad QI, hoc eſt, vt O, ad P, ita trapezium ABFR, ad triangulum RFC, quod eſt propoſitum.

e 1. ſexti.
f 1. huius.

IAM vero ſi antecedens proportionis vergere debeat verſus C, proportioque data ſit O, ad P; fiet id commodiſſime, ſi triangulum ex F, diuidatur ſecundum proportionem P, ad O, ita vt antecedens vergat verſus B, ſicut docuimus. Nam tunc pars verſus C, ad reliquam habebit proportionem, quam O, ad P, per conuerſam proportionalitatem. Quod etiam in aliis figuris intelligi volo.



SIT deinde multilatera figura quæcunque ABCDEF, per rectam ex angulo A, ductam ſecanda in duas partes, ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem proportionem habeat datam M, ad N. Ductis ex dato angulo A, ad omnes angulos oppoſitos rectis partientibus figuram in quatuor triangula; [g] inueniantur ipſis quatuor rectæ proportionales GH, HI, IK, KL. Tota deinde GL, ſecetur in O, vt eadem ſit proportio GO, ad OL, quæ M, ad N. Et quoniam diuiſionis punctum O, cadit in tertiam lineam IK, ſecabimus tertii trianguli baſem DE, dato angulo A, oppoſitam in P, vt ſecta eſt IK, in O, ducemuſque rectam AP.

g 3. huius.

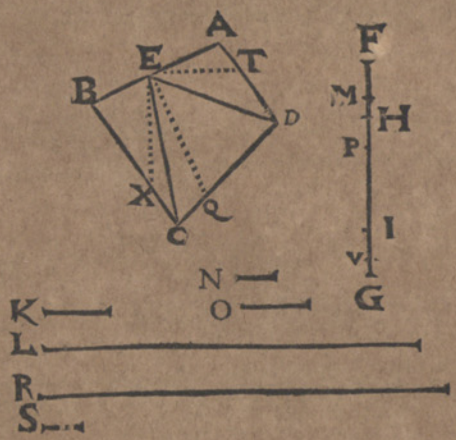
Dico

Dico eſſe rectilineum ABCDIA, ad rectilineum APEFA, vt GO, ad OL, hoc eſt, vt M, ad N. Quoniam enim triangula rectilinei dati proportionalia ſunt ordine rectis GH, HI, IK, KL, per conſtructionem, tertiumq; triangulum ADE, & lineam tertiam IK, diuiſimus proportionaliter per rectam AP, & in puncto O; [a] cum ſit vt DP, ad PE, hoc eſt, vt IO, ad OK, ita triangulum ADP, ad triangulum APE; [b] Erunt totæ quoque magnitudines ſectæ proportionaliter, hoc eſt, erit ABCDPA, ad APEFA, vt GO, ad OL, hoc eſt, vt M, ad N, quod eſt propoſitũ.

a 1. ſexti.
b 1. huius.

QVOD ſi punctum O, diuidens rectam GL, in duas partes proportionis datæ M, ad N, caderet in aliquod punctorum H, I, K, vt in I, terminum ſecundæ lineæ HI, diuideret recta AD, terminans ſecundum triangulum ACD, totum rectilineum in datam proportionem Nam tunc per primam partem propoſ. 1. huius lib. eſſet ABCDA, ad ADEFA, vt M, ad N, vt perſpicuum eſt.

DATVM præterea ſit rectilineum ABCD, ex puncto E, dato in latere AB, diuidendum in duas partes, quarum prior ad B, vergens ad poſteriorem partem habeat proportionem datam K, ad L. Ductis ex dato pũcto E, ad omnes angulos oppoſitos rectis diuidentibus rectilineum in tot triangula vno minus, quot latera figura habet; [c] inueniantur rectæ FH, HI, IG, triangulis EBC, ECD, EDA, proportionales. Secta deinde tota FG, in M, ſecundum datam proportionem K, ad L: quoniam diuiſionis punctum M, incidit in primam lineam FH, diuidemus primi trianguli EBC, baſem BC, dato puncto E, oppoſitam in X, vt FH, ſecta eſt in M. Iuncta namque recta EX, [d] erit triangulum EBX, ad figuram EXCDAE, vt FM, ad MG, hoc eſt, vt K, ad L, propterea quod triangula EBC, ECD, EDA, rectis FH, HI, IG, proportionalia ſunt ex conſtructione; & primæ partes EBC, FH, ſectæ ſunt per rectam EX, & in M, proportionaliter; [e] cum ſit EBX, ad EXC, vt BX, ad XC, hoc eſt, vt FM, ad MH. Conſtat ergo propoſitum.



c 3. huius.
d 1. huius.
e 1. ſexti.

SI proportio data ſit N, ad O; ſecta FG, in P, ſecundum proportionem N, ad O, cadet diuiſionis punctum P, in ſecundam lineam HI. Igitur ſi ſecundi trianguli ECD, baſis CD, dato puncto E, oppoſita ſecetur in Q, vt eſt HI, in P, nectaturq; recta EQ, [f] erit rurſus figura EBCQE, ad figurã EQDA, vt FP, ad PG, hoc eſt, vt N, ad O.

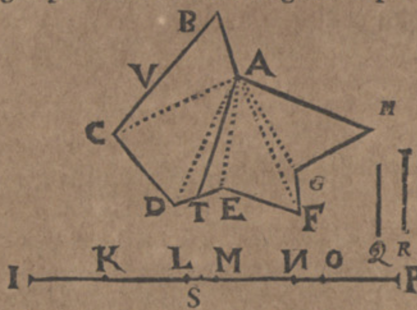
f 1. huius.

SI denique data ſit proportio R, ad S, ſecta FG, in V, ſecundum proportionem R, ad S, cadet diuiſionis punctum V, in tertiam lineam IG. Quam ob rem ſi tertij trianguli EDA, baſis DA, dato puncto E, oppoſita ſecetur in T, vt ſecta eſt IG, in V, iungaturq; recta ET; [g] erit rurſus figura EBCDTE, ad triangulum ETA, vt FV, VG, hoc eſt, vt R, ad S.

g 1. huius.

ATQVE hac via procedendum eſt in omnibus aliis figuris, quæ latera totidem habeant, quot angulos, id eſt, in quibus omnes anguli introrſum vergant.

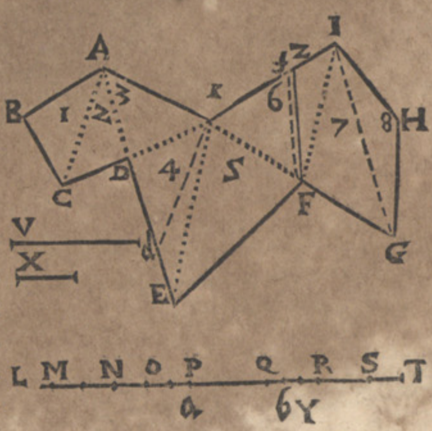
IDEM hoc problema efficiemus in rectilineo, cuius anguli partim extrorſum vergant, & partim introrſum, dummodo ab angulo, vel puncto dato in latere duci poſſint lineæ rectæ diuidentes rectilineum in triangula, quæ nullum ipſius latus ſecent. Vt in hac figura octo laterum ABCDEFGH, cuius quinque anguli B, C, D, F, H, introrſum vergunt, & reliqui tres BAH, DEF, FGH, extrorſum, ductæ ſunt rectæ ex angulo A, ad omnes angulos, præter quam ad duos proximos B, H, nullum figuræ latus interſecantes. [h] Si igitur reperiantur ſex rectæ IK, KL, LM, MN, NO, OP, ſex triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH, proportionales; & tota linea LP, ſecetur in S, ſecundum datam proportionem Q, ad R; atque baſis DE, tertij trianguli. (Nam diuiſionis punctum S, in tertiam lineam LM, incidit) dato puncto A, oppoſito diuidatur in T, vt linea LM, in S, diuiſa eſt, ducaturque recta AT: [i] Erit figura ABCDTA, ad figuram ATEFGHA, vt IS, ad SP, hoc eſt, vt Q, ad R.



h 3. huius.
i 1. huius.

EX angulo B, vel H, non poterit propoſita figura in quamcunq; proportionem diuidi: quia lineæ ex eorum vtrolibet ad oppoſitos angulos emiſſæ partim ſecant latera, & partim cadunt extra figuram. Quod ſi data portio minor eſſet, quam figuræ BCDEB, (ſi nimirum intelligatur ducta recta BE,) ad figuram BEFGHAB, tum demum diuidi poſſet ex B, tota figura in datam proportionem: propterea quod fierent duo trianguli BCD, (ducta videlicet recta BD,) BDE, ad punctum B, quorum baſes ſunt latera figuræ CD, DE; alia vero quatuor ABE, AEF, AFG, AGH, ad punctum A, quorum etiam baſes ſunt figuræ latera AB, EF, FG, GH, &c.

EODEM modo quamcunq; figuram rectilineam, etiam irregulariſſimam, partiemur in datam proportionem, non quidem ex quolibet angulo, vel puncto dato, (niſi ex eo duci poſſint rectæ ad omnes angulos oppoſitos, exceptis duobus proximis, quę nullum figuræ latus interſecent: cuiuſmodi eſſet punctum V, in antecedenti figura) ſed ex aliquo puncto particulari; ſi prius figura diuidatur in triangula ex pluribus punctis, ita vt quodlibet triangulum habeat ſaltem vnum latus, quod etiam ſit latus figuræ. Vt ſi figura hæc ABCDEFHHIKA, diuidatur in octo triangula, & illis in recta LT, [k] inueniãtur totidem lineæ proportionales, totaque linea LT, ſecetur in Y, ſecundum datam proportionem V, ad X & baſis IK, ſexti trianguli (quod punctum Y, cadat in ſextam lineam QR,) ſecetur in Z, vt ſecta eſt QR, in Y; [l] ita vt ducta recta FZ, triangulum FIK, ſectum ſit, vt ſecta eſt baſis IK, hoc eſt, recta QR: [m] Erit figura ABCDEFZKA, ad figurã FZIHGF, vt LY, ad YT, h. e. vt V, ad X. Et ſic de cæteris.



k 3. huius.
l 1. ſexti.
m 1. huius.

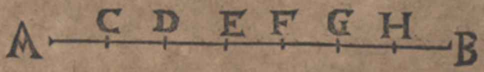
SCHO-

SCHOLIVM.

Quo pacto figura data ſecetur ex dato angulo vel puncto in latere, in quotuis partes æquales.

HIS ritè intellectis, licebit nobis quamlibet figuram ſecare in quotuis partes æquales ex dato angulo, vel puncto in latere, ex quo duci poſſint ad omnes angulos, exceptis proximis duobus, rectæ lineæ, ita vt nullum figuræ latus ſecent. Nam ſi propoſita figura ſit ſecanda, verbi gratia in 7. partes ęquales, diuidemus eam ſecundum proportionem 1. ad 6. nimirum ſecundum ſubmultiplicem denominatam à denominatore partium, minus vno, in quas figura diuidenda eſt. Ita enim prior pars erit $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum poſterior 6. eiuſmodi partes complectatur. Hanc deinde poſteriorem partem ſecabimus ſecundum proportionem 1. ad 5. ita vt prior pars contineat $\frac{1}{6}$. ipſius hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius figuræ. Poſt hæc poſteriorem huius ſecundæ diuiſionis partem partiemur ſecundum proportionem 1. ad 4. Ac rurſus partem huius tertiæ diuiſionis poſteriorem diuidemus ſecundum proportionem 1. ad 3. Atque poſteriorem huius quartæ diuiſionis partem ſecabimus ſecundum proportionem 1. ad 2. Ac poſtremo partem poſteriorem huius quintæ diuiſionis partiemur in duas partes æquales, nimirum ſecundum proportionem 1. ad 1.

NON aliter figuram irregularem, in qua à nullo angulo, vel puncto in latere, duci poſſunt rectæ ad angulos oppoſitos, quin aliqua figuræ latera ſecentur, diuidere licebit in partes quotuis æquales, ex diuerſis angulis, vel punctis. Nam ſi verbi gratia vltima figura huius propoſitionis diuidenda ſit in 5. partes æquales; reſecabimus ex ea, ab aliquo angulo, vel puncto, quintam partem. Deinde ex maiore parte complectente $\frac{4}{5}$. totius figuræ, ab aliquo eius angulo, vel puncto, detrahemus quartam partem: Item tertiam partem ex maiore parte huius diuiſionis: Ac tandem ſemiſſem ex vltima parte poſtremæ huius diuiſionis. Hac enim ratione diuiſa erit tota figura in 5. partes: non ſecus atque in linea recta AB, contingit. Si namq; eam partiri iubeamur in 7. partes æquales, efficiemus id, ſi primo loco ſeptimam partem AC, detrahemus; deinde $\frac{1}{6}$. CD, ex reliqua linea CB; & ex reliqua DB, quintam partem DE: & ex reliqua EB, quartam partem EF; & ex reliqua FB, tertiam partem FG: Ac denique reliquam lineam GB, bifariam ſecabimus in H, hoc eſt, ſemiſſem GH, ex ea abſcindemus.



FACILIVS idem exequemur, quando ex dato angulo, vel puncto, duci poſſunt rectæ ad omnes angulos, duobus proximis exceptis, nullum figuræ latus ſecātes, hac ratione. Lineam ex rectis, quæ triangulis figuræ proportionales ſunt, conflatam ſecabimus in tot partes æquales, in quot figuram partiri iubemur. Si enim baſes triangulorum dato angulo, vel puncto oppoſitas, quæ lineis, in quas puncta diuiſionum cadunt, reſpondent, ita diuidemus, vt ſectæ ſunt reſpondentes lineæ, atque ex dato angulo vel puncto, ad diuiſionum puncta rectas ducemus, factum erit, quod proponitur. Vt ſi ſecunda figura huius propoſ. ſecanda ſit in 5. partes æquales, partiemur lineam GL, in 5. æquales partes GH, Hb, ba, aK, KL. Et quoniam primum punctum H, cadit in H, erit triangulum ABC, quinta figuræ pars; [a] cum ſit vt GH, ad HL, ita triangulum ABC, ad reliquam partem figuræ. Deinde ſecabimus baſem ſecundi trianguli in d, vt ſecunda linea HI, ſecta eſt in b: Et baſem tertii trianguli in e, vt tertia linea IK, ſecta eſt in a; rectaſque ducemus A d, Ae. Quia vero quartum punctum K, cadit in K, terminum quartæ lineæ IK, erit figura diuiſa in 5. partes æquales ABC, ACd, AdDe, AeE, AEF: [b] propterea quod hæ partes partibus GH, Hb, ba, aK, KL, proportionales ſunt.

a 1. huius.

b 1. huius.



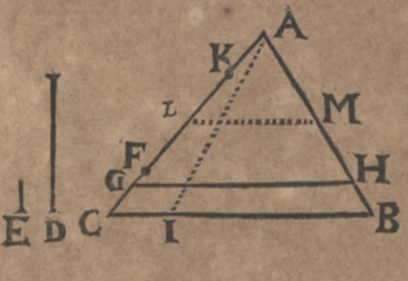
N E Q V E vero difficile erit hanc eandem rationem figuris irregularibus, qualis eſt vltima huius propoſ. accommodare. Si enim ea diuidenda ſit, verbi gratia in tres partes æquales, ſecanda erit linea LT, in tres æquales partes La, ab, bT. Et quarti trianguli baſis DE, diuidenda in d, vt quarta linea OP, diuiſa eſt in a: Item ſexti trianguli baſis KI, ſecanda in f, vt ſexta linea QR, in b, ſecta eſt. Nam ſi ex K, angulo baſi DE, oppoſito recta ducatur Kd: Item ex angulo F, baſi KI, oppoſito recta Ff, erunt tres partes figuræ ABCDdKA, KdEFfK, fFGHIf, inter ſe æquales: [c] cum ſint rectis La, ab, bT, proportionales. Eademque de cæteris ratio eſt.

c 1. huius.

PROBL. 4. PROPOS. 5.

DATVM rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere, ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.

SIT primo triangulum ABC, diuidendum in duas partes per lineam lateri BC, parallelam, vt pars verſus A, ad reliquam habeat proportionem datam D, ad E. Alterutro laterum, cui linea diuidens æquidiſtare non debet, videlicet AC, diuiſo in F, vt eadem ſit proportio AF, ad FC, quæ D, ad E, initio facto ab angulo A, verſus quem antecedens proportionis vergere debet, reperiatur inter totum latus AC, & eius parte AF, quæ terminatur in angulo A, qui lateri opponitur, cui æquidiſtans ducenda eſt, media proportionalis AG, agaturque per G, ipſi BC, parallela GH. Dico hanc parallelam problema efficere, id eſt, eandem eſſe proportionem trianguli AGH, ad trapezium BCGH, quæ eſt D, ad E. [a] Quoniam enim triangulum ABC, ad triangulum AGH, eſt vt latus AC, ad rectam AF, quod tres rectæ AC, AG, AF, continue proportionales ſint, & triāgula ABC, AGH, ſuper AC, AG, ſimilia ſimiliterq; poſita; Erit per conuerſionem rationis triangulum ABC, ad trapezium BCGH, vt AC, ad FC. Ergo diuidendo erit triangulum AGH, ad trapezium BCGH, vt AF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E, quod eſt propoſitum. Quod etiam ita colligemus. [b] Quoniam eſt triangulum ABC, ad triangulum AGH, vt recta AC, ad AF; erit diuidendo trapezium BG, ad triangulum AGH, vt FC, ad AF: Et conuertendo triangulum AGH, ad trapeziun BG, vt AF, ad FC, hoc eſt vt D, ad E.



a coroll. 19. ſexti.
b coroll. 19. ſexti.

ALI-

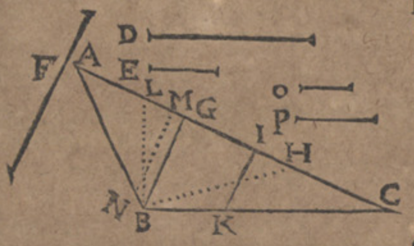
ALITER

DIVISO latere quocunque, nimirum BC, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta
AI: [a] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id eſt, vt D, ad E. [b] Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, a 1. ſexti
CA, conſtituatur trapezium BG, per parallelam GH, æquale triangulo AIC, quod eſt conſequens; erit reliquum b 1. huius.
triangulum AGH, reliquo triangulo ABI, æquale. [c] Quare erit triangulum AGH, ad trapezium BG, vt trian- c 7. quinti.
gulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E. Sed prior via expeditior eſt: placuit tamen
hanc alteram etiam proponere; quia generalis ferme eſt, & in omnes figuras multilateras quadrat, vt infra pa-
tebit.

NON ſecus id, quod propoſitum eſt, exequemur, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad latus BC,
cui recta ducẽda eſt parallela. Diuiſo enim rurſus latere AC, in K ſecundum datam proportionem D, ad E, ita
vt antecedens proportionis incipiat à latere BC; inueniatur inter totam AC, & eius partem AK, quæ eſt conſe-
quens proportionis, media proportionalis AL, agaturque per L, lateri BC, parallela LM. Dico hanc parallelam
problema efficere, hoc eſt, eandem eſſe proportionem trapezij BL ad triangulum ALM, quæ eſt D, ad E. [d] Quia d coroll. 19.
enim eſt, vt triangulum ABC, ad triangulum ALM, ita CA, ad AK, quod tres rectæ AC, AL, AK, continue ſint ſexti.
proportionales, & triangula ABC, ALM, ſuper AC, AL, ſimilia ſimiliterque poſita; Erit diuidendo trapezium
BL, ad triangulum ALM, vt CK, ad AK, hoc eſt, vt D, ad E, quod eſt propoſitum. Hoc idem effici etiam poteſt
via illa altera generali, quamuis non ita expedite. Diuiſo enim quocunque latere, nimirum BC, in I, ſecundum
datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI, [e] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id eſt, e 1. ſexti.
vt D, ad E. [f] Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, CA, conſtituatur trapezium BL, per parallelam LM, æquale tri- f 2. huius.
angulo ABI, quod eſt antecedens: erit reliquum triangulum ALM, reliquo triangulo AIC, æquale. [g] Quare erit g 7. quinti.
trapezium BL, ad triangulum ALM, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E.

SED diuidendum iam ſit triangulum ABC, in datam proportionem D, ad E, per lineam parallelam cui-
cunq; lineæ F: quæ ſi æquidiſtet vni laterum, partiemur triangulum in datam proportionem, per rectam illi la-
teri parallelam, vt iam tradidimus, ſiue antecedens vergere debeat ad angulum lateri illi oppoſitum, ſiue ad ip-
ſummet latus: factumq; erit, quod iubetur; [h] cum parallela illa æquidiſtet etiam datæ rectæ lineæ. h 30. primi.

SI vero data recta F, nulli laterum æquidiſtet, ducatur illi ex aliquo angulo parallela intra triangulum ca-
dens, qualis eſt BG. Si igitur antecedens proportionis ſtatuendum ſit ad
partes A, ſecabimus latus AC, in H, in datam proportionem D, ad E. Ca-
dat autem primo punctum H, inter G, & C; inueniaturque inter GC, &
eius partem CH, terminatam in angulo C, parallelæ BG, oppoſito media
proportionalis CI; & per I, ipſi BG, vel ipſi F, parallela agatur IK; quam
dico problema efficere: hoc eſt, eſſe trapezium ABKI, ad triangulũ IKC,
vt D, ad E. [i] Quoniam enim eſt (ducta recta BH,) vt triangulum GBC, i coroll. 19.
ad triangulum IKC, ita GC, ad CH, quod tres GC, CI, CH, ſint continue ſexti.
proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterq; poſita: [k] Vt autem GC, ad k 1. ſexti.
CH, ita eſt quoque triangulum GBC, ad triangulum HBC; [l] erunt trian- l 9. quinti.



gula IKC, HBC, æqualia: Ac proinde & reliquum trapezium ABKI, reliquo triangulo ABH æquale erit. [m] Igi- m 7. quint.
tur erit vt trapezium ABKI, ad triangulum ICK, ita triangulum ABH, ad triangulum HBC: hoc eſt, ita AH, ad
HC, vel ita D, ad E, quod eſt propoſitum.

CADAT deinde punctum L, (Ponimus iam datam proportionem E, ad D, diuiſamque eſſe AC, in L, ſe-
cundum datam proportionem) inter A, & G. Inuenta ergo inter GA, & eius partẽ AL, terminatam in angulo A,
parallelæ BG, oppoſito, media proportionali AM, agatur per M, ipſi GB, ideoque & ipſi F, parallela MN, quam
dico problema efficere, hoc eſt, eſſe triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt E, ad D. Iuncta namque recta
BL, [n] quoniam eſt, vt triangulum ABG, ad triangulum AMN, ita AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continue n coroll. 19.
proportionales ſint, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita: [o] Vt autem AG, ad AL, ita eſt quoque idem triangu- ſexti. o 1. ſexti.
lum ABG, ad triangulum ABL: [p] erunt triangula AMN, ABL, æqualia: ac proinde & reliquum trapezium MN- p 9. quinti.
BC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. [q] Quapropter erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt trian- q 7. quinti.
gulum ABL, ad triangulum LBC, [r] hoc eſt, vt AL, ad LC, vel E, ad D, quod eſt propoſitum. r 1. ſexti.

QVOD ſi punctum diuiſionis caderet in G, quod contingeret, ſi data eſſet proportio O, ad P; Ipſamet pa-
rallela BG, problema efficeret; [s] cum ſit triangulum ABG, ad triangulum GBC, vt AG, ad GC, hoc eſt, vt O, ad s 1. ſexti.
P. Et ſi antecedens ſtatui debet verſus C, & data proportio eſſet P, ad O; [t] erit quoque triangulum CBG, ad tri- t 1. ſexti.
angulum ABG, vt CG, ad GA, vel vt P, ad O.

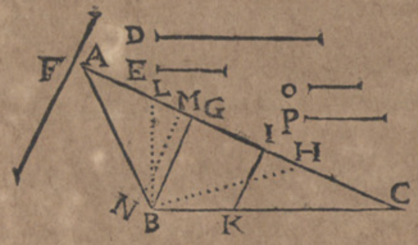
ALITER

DIVISO quouis latere, videlicet AC, in H, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta BH;
quia punctum H, cadit inter G, & C, [u] fiat ſuper BG, inter rectas BC, GC, trapezium BI, per parallelã IK, æquale u 2. huius.
triangulo BGH: Eritq; propterea totum trapezium ABKI, toti triangulo ABH, æquale, atq; idcirco & reliquum
triangulum IKC, reliquo triangulo BCH. [x] Quocirca erit trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt triangulum x 7. quinti.
ABH, ad triangulum BCH, [y] hoc eſt, vt AH, ad HC, vel vt D, ad E. y 1. ſexti.

DIVISO rurſus latere AC, in L, ſecundum datam proportionem E, ad D, iunctaque recta BL, quoniam
punctum L, cadit inter A, & G, [z] fiat ſuper BG, inter rectas BA, GA, trapezium BM, per parallelam MN, æquale z 2. huius.
triangulo BGL: Eritque propterea & totum trapezium MNBC, toti triangulo LBC, & reliquum triangulum
AMN, reliquo triangulo ABL, æquale. [a] Quam ob rem erit triãgulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangu- a 7. quinti.
lum ABL, ad triangulum LBC, [b] hoc eſt, vt AL, ad LC, vel vt E, ad D, quod erat faciendum. b 1. ſexti.

NON

NON aliter problema abſoluemus, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad partes C. Diuiſo namq;
latere CA, in L, in proportionem datam D, ad E: Quoniam punctum L, cadit inter A, & G; inueniemus inter
GA, AL, mediam proportionalem AM, & per M, ipſi BG, parallelam ducemus MN, quam dico problema effi-
a coroll. 19. ſexti. cere, id eſt, ita eſſe trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt D, ad E. Iuncta namq; recta BL:[a] quoniam tri-
angulum ABG, ad triangulum AMN, eſt vt AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continue ſint proportionales,
b 1. ſexti. & triangula ſimilia ſimiliterque poſita:[b] Vt autem AG, ad AL, ita eſt quoque idem triangulum ABG, ad trian-
c 9. quinti. gulum ABL;[c] æqualia erunt triangula AMN, ABL; ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo trian-
gulo LBC, æquale erit. Igitur erit trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt triangulum LBC, ad triangulum
d 1. ſexti. ABL,[d] hoc eſt, vt CL, ad LA, vel vt D, ad E.



QVOD ſi proportio data ſit E, ad D; diuiſo eodem latere CA, in H,
n proportionem datam E, ad D, ductaque recta BH; quoniam punctum
H, cadit inter G, & C, reperiemus inter GC, CH, mediam proportiona-
lem CI, & per I, parallelam ipſi BG, agemus IK: quam dico problema effi-
e coroll. 19. ſexti. cere, hoc eſt, eſſe triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt CH, ad HA,
vel vt E, ad D. Iuncta enim recta BH;[e] quoniam eſt triangulum CBG, ad
triangulum CIK, vt CG, ad CH; quod tres CG, CI, CH, ſint continue
f 1. ſexti. proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita:[f] Vt autem CG,
g 9. quinti. ad CH, ita quoque eſt idem triangulũ CBG, ad triangulũ CBH:[g] æqua-
h 7. quinti. lia erunt triangula CIK, CBH, ideoque & reliquum trapeziũ IKBA, reliquo triangulo HBA, æquale erit.[h] Quo-
i 1. ſexti. circa erit triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt triangulum CBH, ad triangulum HBA,[i] hoc eſt, vt CH, ad
HA, vel vt E, ad D, quod faciendum erat.

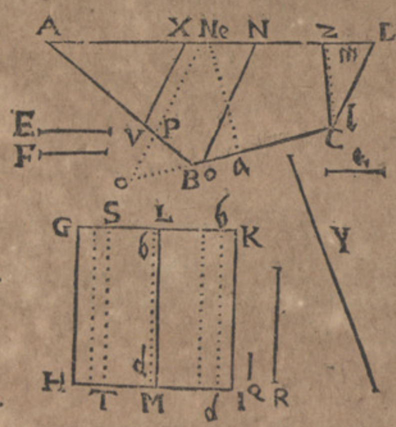
k 2. huius. FIET idem quoque aliter, ſi cadente puncto diuiſionis L, inter A, & G,[k] conſtruatur trapezium GN, per
parallelam MN, æquale triangulo BGL; Cadente vero puncto diuiſionis H, inter G, & C, trapezium conſtitua-
tur BI, æquale triangulo BGH, per parallelam IK, &c.

PRÆTEREA quadrilaterum ABCD, diuidendum ſit per lineam lateri CD, parallelam in duas partes
vt pars verſus A, ad reliquam habeat datam proportionem E, ad F. Per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Eucl.
vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, quadrilatero ABCD, conſtruatur quadratum æ-
quale GHIK; ſeceturque latus GK, in L, in proportionem E, ad F, datam, & per L, ipſi GH, parallela agatur LM.
l 2. huius. Deinde ſuper CD, inter rectas CB, DA,[l] fiat rectilineo LI, æquale quadrilaterum DO, habens latus NO, lateri
CD, parallelum: Et ſi quidem punctum O, cadit in latus CB, vel in ipſum punctum B, recta NO, problema effi-
ciet. Cum enim quadratum GI, toti quadrilatero AC, æquale ſit, & rectangulum ablatum LI, quadrilatero abla-
m 7. quint. to DO; erit quoque reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ANO, æquale.[m] Quapropter erit ANO,
n 1. ſexti ad DO, vt GM, ad MK;[n] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F, quod eſt propoſitum.

SI vero punctum O, cadit in CB, latus productũ, (quod hic fiet, ſi proportio data ſit Q, ad R. Diuiſo enim
latere GK, in S, in datam proportionem Q, ad R; ductaque ST, parallela lateri GH; ſi ſuper CD, inter rectas DA,
o 2. huius. CB,[o] fiat rectangulo KT, æquale quadrilaterum DO, cadet O, vltra B, & parallela NO, ſecabit latus AB, in P,)
p 2. huius. [p] conſtituemus ſuper NP, inter rectas NA, PA, per parallelam VX, trapezium NV, triangulo BOP, æquale, fa-
ctum erit, quod iubetur. Addito enim communi rectilineo CDNPB; erit totum rectilineum CDXVB, toti re-
ctilineo DO, hoc eſt, rectangulo KT, æquale; ideoque & reliquum triangulum AVX, reliquo rectangulo GT,
q 7. quint. æquale.[q] Quare erit triangulum AVX, ad rectilineum CDXVB, vt GT, ad KT,[r] hoc eſt, vt GS, ad SK, vel vt Q,
r 1. ſexti. ad R, quod erat faciendum.

NON alia ratione problema abſoluemus, ſi antecedens proportionis ſtatuendum ſit ad partes CD. Sit
namque data proportio F, ad E, vel R, ad Q. Diuiſo ergo latere KG, quadrati GI, quod quadrilatero AC, factum
eſt æquale in L, ſecundum proportionem datam F, ad E; vel in S, ſecundum datam proportionem R, ad Q, du-
s 2. huius ctaque parallela LM, vel ST:[s] ſi ſuper CD, inter rectas DA, CB, conſtituemus rectilineum DO, rectangulo KM,
vel rectilineum CDXVB, rectangulo KT, æquale per parallelam NO, vel XV, vt paulo ante dictum eſt, ſolutum
erit problema, vt liquet.

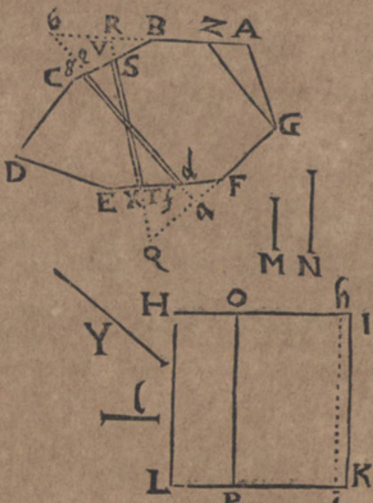
VERVM idem quadrilaterum ABCD, diuidendum ſit per parallelam cuilibet alteri lineæ Y, in propor-
tionem E, ad F, ita vt antecedens proportionis vergat ad A; Si igitur data recta Y, æquidiſtet vni lateri, partiemur



datum quadrilaterum in datam proportionem per lineam illi lateri, proin-
deque & rectæ Y, parallelam, vt proxime ſcripſimus. Si vero nulli lateri re-
cta Y, æquidiſtet, ducemus ei ex aliquo angulo, vt ex C, parallelam CZ, quæ
intra quadrilaterum cadat; & ablato triangulo CDZ, vel rectilineo ablato,
auferemus ex quadrato GI, quod toti quadrilatero ſit æquale, rectangulum
æquale Kd, (quod fiet, ſi triangulo, vel rectilineo CDZ, fiat æquale quadra-
tum, cuius latus a; & duabus KI, & a, tertia proportionalis reperiatur Kb.
t 17. ſexti. Ducta enim bd, ipſi KI, parallela,[t] erit rectangulum Kd, quadrato lateris a,
hoc eſt, rectilineo CDZ, æquale.) Et ſi quidem parallela bd, cadit inter KI,
n 2. huius. & LM,[n] conſtruemus ſuper CZ, inter rectas CB, ZA, rectilineum C a e Z,
rectangulo b M, æquale, cuius latus a e, lateri CZ, hoc eſt, datæ rectæ Y, æ-
quidiſtet; factumque erit, quod præcipitur. Erit enim totum rectilineum
C D e a, toti rectangulo KM; ac propterea & reliquum A B a e, reliquo
x 7. quint. GM, æquale.[x] Quapropter erit ABae, ad e a c D, vt GM, ad KM;[y] hoc
y 1 ſexti. eſt, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si vero parallela b d, coincidit cum recta
LM, efficiet problema recta CZ: quia cum KM, rectilineo CDZ, ſit æquale, erit reliquũ rectangulum GM, reli-
z 7. quinti. quo rectilineo ABCZ, æquale;[z] atq; idcirco erit ABCZ, ad CDZ, vt GM, ad KM,[a] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel vt
a 1. ſexti. E, ad F. Si denique parallela b d, cadit inter LM, & GH; erit rectilineum, vel triangulum ablatũ CDZ, maius re-
ctangulo

rectangulo KM,[a] Si igitur ſuper CZ, inter rectas CD, ZD, cōſtruetur rectilineum C m, rectangulo L d, æquale; erit reliquum D m l, reliquo rectangulo G d, æquale: ac propterea & reliquum m l CBA, reliquo rectangulo KM. [b] Igitur erit ABC l m, ad l m D, vt GM, ad KM: hoc eſt vt GL: ad LK, vel vt E, ad F, quod eſt propoſitum. *a 2. huius.* *b 7. quint.*

EODEM prorſus modo quamlibet aliam figuram, quotquot habeat latera, in datam proportionē ſecabimus per lineam, quæ vni lateri, vel cuius alij rectæ lineæ æquidiſtet. Sit enim datum heptagonum qualecunque ABCDEFG, ſecandum per lineam lateri AG, parallelam, in duas partes, vt ea, quæ ad D, vergit, ad reliquam habeat proportionem eandem, quam M, ad N, habet. Conſtituto quadrato HIKL, æquali ipſi heptagono, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius ſcripſimus; & diuiſo latere HI, in O, in proportionem M, ad N, ductaque OP, latere HL, parallela:[c] fiat ſuper rectam AG, inter rectas AB, GF, rectangulo IP, æquale rectilineum AGQR, habens latus QR, lateri AG, parallelum. Et quoniam QR, cadit vltra F, B, [d] conſtituemus rurſum ſuper rectam ST, inter rectas SC, TE, per rectam VX, ipſi ST, parallelam, rectilineum æquale triangulis FQT, BRS, extra heptagonum exiſtentibus; factumque erit quod proponitur, Cum enim rectilineum AGQR, ac proinde & rectilineum ABVXFG, rectangulo IP, ſit æquale, erit quoque reliquum DEXVC, reliquo rectangulo OL, æquale. [e] Igitur erit DEXVC, ad ABVXFG, vt OL, ad IP, [f] hoc eſt, vt HO, ad OI, vel vt M, ad N, quod erat faciendum. *c 2. huius.* *d 2. huius.* *e 7. quint.* *f 1. ſexti.*



QVOD ſi latus rectilinei ex heptagono abſciſſi æquidiſtare debeat rectæ Y, quæ nulli lateri heptagoni æquidiſtet, (ſi namque æquidiſtaret vni lateri, abſolueretur problema, vt proxime traditum eſt) ducta ex angulo G, rectæ Y, parallela GZ, quæ intra figuram cadit;[g] cōſtruemus rectilineo AGZ, ſuper rectam IK, æquale rectangulum h K;) quod fiet, ſi rectilineo AGZ, fiat æquale quadratum, cuius latus l, & duabus IK, & l, tertia proportionalis reperiatur Ih Ducta enim h i, ipſi IK parallela,[h] erit rectangulum h K, quadrato lateris, hoc eſt, rectilineo AGZ, æquale. [i] Deinde ſuper rectam GZ, inter rectas GF, ZB, conſtituemus rectangulo [i] P, per parallelam b a, æquale rectilineum GZ b a.[k] Nam ſi triangulis B b e, F a d, ſuper rectam d e, inter rectas e C, d E, fiat per parallelam f g, rectilineum d e g f, æquale; factum erit, quod in problemate proponitur, vt ex dictis perſpicuum eſt. Eademq; omnino ratio eſt in omnib⁹ alijs rectilineis quamuis irregularibus, dummodo in ijs duci poſſit vna linea parallela datæ rectæ, quæ rectilineum auferat dato rectilineo æquale. Non enim ſemper hoc fieri poſſe in figuris, cuius anguli partim introrſum, & partim extrorſum vergant, ad finem propoſ. 2. hui⁹ lib. declarauimus, Id quod conſtructio ipſa problematis perſpicue nos docebit. *g 2. huius.* *h 17. ſexti.* *i 2. huius.* *k 2. huius.*

SCHOLIVM.

DIVIDI ergo poterit quælibet figura rectilinea in quotuis partes æquales per lineas, quæ datæ cuius rectæ lineæ æquidiſtent. Nā ſi verbi gratia data figura ſecāda ſit in 8. partes æquales per lineas datæ rectæ parallelas, diuidemus eam primum in duas partes inter ſe proportionē habentes 1. ad 7. Ita namque prior pars erit $\frac{1}{8}$. totius figuræ. Deinde poſteriorem partem ſecabimus in proportionem 1. ad 6. ita vt prior pars huius diuiſionis ſit $\frac{1}{7}$. illius partis diuiſæ, hoc eſt, $\frac{1}{8}$. totius figuræ, cum pars illa diuiſa complectatur $\frac{7}{8}$. totius figuræ. Poſtea partem poſteriorem proximæ diuiſionis partiemur in proportionem 1. ad 5. Et poſteriorem huius diuiſionis partem in proportionem 1. ad 4. Atque ita deinceps, minuendo ſemper, donec ad partem deueniamus, quæ ſecanda ſit in proportionem 1. ad 1. hoc eſt, in partes æquales. *Quo pacto figura data ſecetur per lineas parallelas in quotuis partes æquales.*

HOC idem effici poterit ea ratione, quam ad finem ſcholij propoſ. 4. expoſuimus: ſi videlicet latus quadrati HI, quod rectilineo dato conſtructum eſt æquale, in tot æquales partes ſecetur, in quod partes datum rectilineum diuidendum eſt, & primo rectilineum diuidatur in proportionem primæ partis ad reliquas: Deinde poſterior pars rectilinei in proportionem ſecundæ partis lateris HI, ad reliquas: atque ita deinceps, &c.

ATQVE hic finem habet noſtra Geodeſia complectens diuiſionē omnium figurarum rectilinearum: ſequuntur iam particulares nonnullæ diuiſiones quarundam figurarū, quæ tum, quia ſubtiles acutaſque demōſtrationes continent, tum quia pleraſque earum eruditi quoque Geometræ, vt Leonardus Piſanus, Frater Lucas Paccioluſ, & Nicolaus Tartalea tradiderunt, omittendæ nullo modo viſæ ſunt. Vt autem Geometricè eas demonſtremus, præmittenda ſunt Theoremata nonnulla, quorum primum ſit hoc.

THEOR. 2. PROP. 6.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuerſas partes vergant: Recta oppſitos angulos connectens à latere illo communi bifariam ſecatur.



SINT æqualia duo triangula ABC, ABD, habentia latus AB, cōmune, & in diuerſas partes vergentia. Dico rectam CD, oppſitos angulos C, D, iungentem ſecari in E, bifariam à latere communi AB.[a] Quoniam enim eſt tam triangulum ACE, ad triangulum ADE, quam triangulum BCE, ad triangulum BDE, vt CE, ad ED;[b] erit triangulum ACE, ad triangulum ADE, vt triangulum BCE, ad triangulum BDE.[c] Igitur erunt quoque duo triangula ſimul ACE, BCE, hoc eſt, totum triangulum ABC, ad duo triangula ſimul ADE, BDE, id eſt, ad totum triangulum *a 1. ſexti.* *b 11. quin.* *c 12. quin.*

O lum

lum ABD, vt ACE, ad ADE, hoc eſt, vt CE, ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD, ponantur æqualia, erunt quoque rectæ CE, ED, æquales, ac proinde CD, in E, ſecta eſt bifariam. quod erat oſtendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 7.

SI in triangulo baſi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur ſeſe interſecãtibus; habebit vtriuſuis harum rectarum ſegmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuiſum ad partem eius ſuperiorem. Recta autem ex tertio angulo per interſectionem dictarum rectarum extenſa ſecabit vtramque parallelam bifariam.

a 37. prim.
b 2. ſexti.
c 1. ſexti.



d 14. quin.
e 6. huius.
f ſchol. 4. ſexti.
g 7. quint.
h 1. ſexti.
i 1. ſexti.
k 1. ſexti.

IN triangulo ABC, ducta ſit DE, baſi BC, parallela, & iunctæ rectæ BE, CD, ſe interſecent in F. Dico eſſe BF, ad FE, vt AC, ad AE: Item CF, ad FD, vt AB, ad AD: Et iunctam rectam AF, ſecare parallelas DE, BC, bifariam in G, & H. [a] Quoniam enim triangula BDC, CEB, æqualia ſunt; ablato communi BFC, reliqua BDF, CEF, æqualia quoque erunt. [b] Quia vero eſt, vt BD, ad DA, ita CE, ad EA: [c] Vt autem BD, ad DA, ita eſt triangulum BFD, ad triangulum AFD: Et vt CE, ad EA, ita triangulnu CFE, ad triangulum CFE; erit quoque triangulum BFD, ad triangulum AFD, vt triangulum CFE, ad triangulum AFE. Cum ergo triangulum BFD; triangulo CFE, oſtenſum ſit æquale; [d] erit quoque triangulum AFD, triangulo AFE æquale. [e] Igitur DE, in G, ſecta eſt bifariam, [f] ac proinde & parallela BC, ſecta erit bifariam in H. [g] Et quoniam triangulum AFB, ad triangula æqualia AFD, AFE, eandem habet proportionem; [h] eſtque vt AFB, ad AFD, ita AB, ad AD: Et vt AFB, ad AFE, ita BF, ad FE: Erit quoque BA, ad AD, ideoque AC, ad AF, vt BF, ad FE; Eademque ratione erit AB, ad AD, vel AC, ad AE, vt CF, ad FD, quod etiam inde patet; cum ſit vt CF, ad FD, ita CFE, ad DEF, hoc eſt, ita BFD, ipſi CFE, æquale ad idem DEF, [k] hoc eſt, ita BF, ad FE. quod erat demonſtrandum.

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppoſitorum laterum: Recta ex angulo reliquo per interſectionem earum deducta ſecat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum ſegmentum prope angulum ad reliquum ſegmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab interſectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.

a 2. ſexti.
b 7. huius.
c 7. huius.
d 1. ſexti.
e 38. prim.



IN triangulo præcedentis propoſ. ABC, duæ rectæ BE, CD, ſecent latera AC, AB, bifariam in E, D, ſe autem mutuo interſecent in F. Dico rectam ductam AF, ſecare quoque latus BC, bifariam in H, &c. [a] Iuncta enim recta DE, parallela erit ipſi BC, cum ſecet latera AB, AC, proportionaliter, in partes videlicet æquales: [b] Quam ob rẽ AE, vtramq; parellelam DE, BC, bifariã ſecabit. quod eſt primũ.

DEINDE [c] quia eſt, vt AB, ad AD, ita CF, ad FD: Eſt autem AB, ipſius AD, dupla; erit quoque CF, ipſius FD, dupla. Eademque ratione & BF, ipſius FE; & AF, ipſius EH, dupla erit. quod eſt ſecundum.

POSTREMO [d] quia eſt vt AF, ad FH, ita triangulum AFB, ad triangulum BFH: Eſt autem AF, ipſius FH, oſtenſa dupla; erit quoq; triangulum AFB, trianguli BFH, duplũ. Eſt autem & triangulum BFC, eiuſdem trianguli BFH, duplum [e] quod triangula BFH, CFH, æqualia ſint. Igitur æqualia erunt triangula AFB, BFC. Eodemq; modo triangulum AFC, eidem triangulo BFC, æquale erit: ac proinde omnia tria AFB, BFC, CFA, æqualia erunt. quod eſt tertium.

COROLLARIVM.

ITAQVE facile inueniri poteſt punctũ intra triangulũ, à quo tres rectæ ad tres angulos ductæ ipſũ triangulũ in tria æqualia triãgula partiatur. Huiuſmodi n. punctũ in propoſito triangulo eſt F, vbi duæ rectæ ex duobꝰ quibuſuis angulis ad media pũcta oppoſitorũ laterũ ductæ ſe interſeçãt, vt in tertia parte huiꝰ propoſ. oſtẽdimꝰ.

THEOR. 5. PROPOS. 9.

SI in triangulo ducatur recta vtcunq; duo latera ſecans: Erit totum triangulum ad abſciſſum triangulum, vt rectangulum ſub duobus lateribus ſectis totius trianguli comprehenſum, ad rectangulum ſub duobus lateribus trianguli abſciſſi, quæ priorũ ſegmenta ſunt, comprehenſum.



IN triangulo ABC, recta DE, ſecet latera AB, AC, in D, E. Dico eſſe vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AD, AE, ita triangulum ABC, ad triangulum ADE. Quoniam enim triangula ABC, ADE, angulum habent communẽ A; habebunt per propoſ. 4. ſchol. propoſ. 23. lib. 6. Eucl. eandem proportionem, quam rectangula ſub lateribus AB, AC, & ſub AD, AE, comprehenſa, quod oſtendendum erat.

PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATVM triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.

PROPOSITIONE quartadecima ſcholij propoſ.33.lib.6.Euclid. tradidimus regulam, qua triangulum in duas partes ſecundum datam proportionem diuidendum ſit: Et quo pacto ex triangulo pars imperata ſit auferenda. Si igitur triangulum ex dato puncto in eius latere quouis ſecandum ſit in quotlibet partes ęquales, detrahenda primum erit per lineam rectam ex dato puncto ductam pars denominata à numero partium, in quas diuidendum eſt triangulum. Deinde duæ tales partes: poſtea tres, atque ita deinceps, donec tot partes, vna minus, detractæ ſint, in quot partes diuidendum proponitur triangulum. Vt ſi triangulum ABC, ex puncto D, diuidendum ſit in quinq; partes ęquales, diuidemus latus BC, in quo datum punctum eſt, in quinq; partes æquales, in punctis E, F, G, H. Iuncta deinde recta DA; ducemus ei parallelas EI, FK, GL, HM. Si namque connectantur rectæ DI, DK, DL, DM, diuiſum erit triangulum in quinque partes æquales, Nam vt in dicta propoſ.14.ſcholij propoſ.33.lib.6.Euclid. oſtenſum eſt, triangulum DBI, eſt $\frac{1}{5}$. totius trianguli, hoc eſt, ita ſe habet DBI, ad ABC, vt BE, ad BC. Triangulum autem DBK, continet $\frac{2}{5}$. totius trianguli, id eſt, ita ſe habet DBK, ad ABC, vt BF, ad BC, At vero triangulum DBL, complectitur $\frac{3}{5}$. totius trianguli, id eſt, ita ſe habet DBL, ad ABC, vt BG, ad BC. Quadrilaterum denique ABDM, comprehendit $\frac{4}{5}$. totius trianguli, hoc eſt, ita ſe habet ABDM, ad ABC, vt BH, ad BC. Ex quo fit, reliquum triangulum DMC, eſſe $\frac{1}{5}$, eiuſdem trianguli ABC.

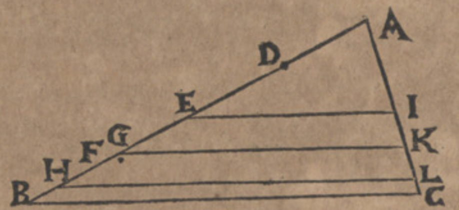


QVANDO punctum datum eſt in vno angulo, manifeſtum eſt, ſi latus oppoſitum in tot partes ſecetur, in quot triangulum diuidendum eſt [a] rectas ex eo angulo ad puncta diuiſionum eductas ſecare triangulum in propoſitas partes æquales. a 1.ſexti.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATVM triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.

SIT triangulum ABC, diuidendum, verbi gratia, in quatuor partes æquales per lineas lateri BC, æquidiſtantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum nimirum AB, in 4. partes æquales, in tot videlicet, in quot triangulum diuidendum eſt, in punctis D, E, F. Et inter AB, AD, inuenta media proportionali AE; atque inter AB, AE, media proportionali AG; ac denique inter AB, media proportionali AH, ducantur EI, GK, HL, lateri BC, parallelæ, quas dico triangulum partiri in 4. partes æquales. [a] Quoniam enim triangulum ABC, triangulo AEI, ſimile eſt; [b] erit triangulum ABC, ad triangulum AEI, vt AB, ad AD, quod tres AB, AE, AD, ſint continue proportionales. Eſt autem AD, quarta pars ipſius AB. Igitur & triangulum AEI, quarta pars eſt trianguli ABC.



a corol. 4. ſexti.
b corol.19. ſexti.

[c] NON aliter oſtendemus, eſſe triangulum ABC, ad triangulum AGK, vt AB, ad AE. quod etiam tres AB, AG, AE, ſint continue proportionales. Quare cum AE, contineat $\frac{2}{4}$. rectæ AB, continebit etiam AGK, triangulum $\frac{2}{4}$ trianguli ABC: Ideoq; cum AEI, ſit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, vt oſtendimus, erit EIKG, $\frac{1}{4}$. eiuſdem trianguli ABC. Denique eadem ratione erit triangulum ABC, ad triangulum AHL, vt AB, ad AF, quod etiam tres AB, AH, AF, ſint continue proportionales: ac proinde triangulum AHL, complectetur $\frac{3}{4}$. trianguli ABC, quemadmodum AF, continet $\frac{3}{4}$. ipſius AB: ideoq; BHLC, erit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, &c. c corol 19. ſexti.

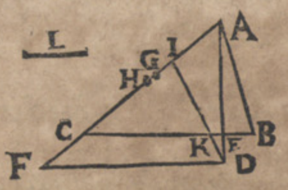
PROBL. 7. PROPOS. 12.

DATVM triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.

EX puncto D, extra triangulum ABC, dato ducenda ſit linea diuidens triangulum bifariam. Ducta recta DA, ad angulum oppoſitum ſecante latus BC, in E: ſi quidem BC, in E, diuiditur bifariam, factum erit, quod iubetur [a]: quod tunc triangula ABE, ACE, ſint æqualia. Si vero BC, non bifariam diuiditur in E, ſit ſegmentum CE, maius, cui ducatur parallela DF, occurrens lateri AC, producto in F. Secto latere AC, bifariam in G, inueniatur tribus DF, BC, CG, quarta proportionalis CH; [b] Eritq; rectangulum ſub DF, CH, æquale rectangulo ſub BC, CG; hoc eſt, ſemiſſi rectanguli ſub BC, CA: [c] cum rectangulum ſub BC, CA, duplum ſit rectanguli ſub a 38.prim. b 16 ſexti. c 1.ſexti.

 BC,

d 17.ſexti.



BC,CG. Deinde inuenta L, media proportionali inter FC,CH,[d] vt quadratum ex L, æquale ſit rectangulo ſub FC, CH, adiungatur ipſi CH, recta HI, vt rectangulum ſub tota CI, & adiuncta HI, æquale ſit quadrato ex L, ſiue rectangulo ſub FC,CH, quemadmodum ad finem ſcholij propoſ. 36.lib.3.Euclid.ſcripſimus: ducaturq; recta DI, ſecans BC, in K. Dico rectam DI, ſecare triangulũ ABC, in duas partes ABKI, IKC, æquales. Quoniam enim per conſtructionem rectangulum ſub CI, IH, æquale eſt rectangulo ſub CF,CH,[e] erit vt CI, ad CF, ita CH, ad IH; Et conuertendo, vt CF, ad CI, ita IH, ad CH: & componendo vt IF, ad CI, ita CI, ad CH.[f] Vt autem IF, ad CI, ita eſt FD, ad CK. Igitur erit quoque FD, ad CK, vt CI, ad CH:[g] Ac proinde rectangulum ſub FD,CH, æquale erit rectangulo ſub CK,CI: Erat autem rectangulum ſub FD,CH, per conſtructionem æquale ſemiſſi rectanguli ſub BC,CA. Igitur & rectangulum ſub CK,CI, æquale erit ſemiſſi rectanguli ſub BC,CA. Vt autem rectangulum ſub CK,CI, ad rectangulum ſub BC,CA,[h] ita eſt triangulum CKI, ad triangulum ABC. Igitur triangulum CKI, æquale quoque erit ſemiſſi trianguli ABC: ac proinde quadrilaterum ABKI, reliquæ ſemiſſi trianguli ABC, æquale erit. quod eſt propoſitum.

e 16.ſexti.
f 4.ſexti. & permutando.
g 16.ſexti.
h 9.huius.

EADEM ratione, ſi pro CG, ſumamus $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel quamcunque partem lateris AC, & reliqua fiant, vt ſupra, auferemus per rectam ex D, ductam $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel denique talem partem ex triangulo ABC, qualis ſumpta eſt CG, ipſius AC, vt perſpicuum eſt.

LEONARDVS Piſanus, & Nicolaus Tartalea, idem hoc problema ſoluunt, quando datum punctum eſt extra triangulum in tali loco, vt vnum latus trianguli productum, in illud incidat, cuiuſmodi eſſet punctum F, datum. Item quando eſt inter duo latera producta: Vt ſi triangulum foret AEC, punctum autem inter B, & D, exiſteret, ita vt ab eo ſolum per angulum E, duci poſſet linea ſecans latus AC: quippe cum rectæ ab eo ad angulos A, C, ductę nullum latus interſecarent. Verum quia hæc curioſa magis, quam vtilia ſunt, dedita opera à nobis omittuntur. Qui autem ea deſiderat, auctores prædictos legere poterit.

PROBL. 8. PROPOS. 13.

DATVM parallelogrammum in quotcunque partes æquales per lineas duobus lateribus oppoſitis æquidiſtantes diuidere.



SIT parallelogrammum ABCD, diuidendum verbi gratia in tres partes æquales per lineas lateribus AB,DC, æquidiſtantes. Diuiſo alterutro reliquorum duorum laterum, nimirum BC, in tres partes æquales, in quot videlicet parallelogrammum proponitur diuidẽdum, in E, & F, punctis ducantur EG, FH, ipſis AB,DC, parallelæ: factumque erit, quod iubetur;[a] quod parallelogramma AE,EH,HC, æqualia ſint, propter æquales baſes BE,EF,FC.

a 1. ſexti vel 38.pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi ex latere auferatur $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{3}{4}$. vel denique qualiſcunque pars, vel partes, & per extremũ eius punctum parallela lateri AB, ducatur, ablata erit ex toto parallelogrammo eadem pars, vel eędem partes. Ita vides AE, eſſe partem tertiam parallelogrammi AC, quemadmodum & BE, tertia pars eſt lateris BC, &c.

PROBL. 9. PROPOS. 14.

DATVM parallelogrammum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam, bifariam diuidere.



SIT primo parallelogrammum ABCD, per rectam ex puncto E, exteriori ductam ſecandum bifariam. Ducta diametro BD, eaq; ſecta bifariam in F, ducatur ex E, per F, recta EH, quam dico parallelogrammũ partiri bifariam, Nam vt in ſcholio Propoſ.34.lib.1. Euclid.demonſtrauimus, recta GH. diuidens diametrum BD, in F, bifariam, ſecat parallelogrammum bifariam. Idem fiet, ſi recta IK, latera AD, BC, ſecans bifariam, diuidatur bifariam in F, & per F, extendatur recta EF, propterea quod IK, diametrum ſecat bifariam, ac proinde per F, punctum medium diametri tranſit.[a] Cum enim anguli IDF, FID, angulis alternis KBF, FKB, æquales ſint, & latera ID, KB, quibus adiacent, æqualia;[b] erunt tam latera DF, BF, quam IF, KF, inter ſe æqualia.

a 29.prim.
b 26.pri.

EODEM modo ex puncto interiori L; Item ex puncto G, in latere BC, recta ducta LF vel GF, parallelogrammum bifariam diuidet.

PROBL. 10. PROPOS. 15.

INTER datas duas rectas, duas medias proportionales prope verum inuenire.

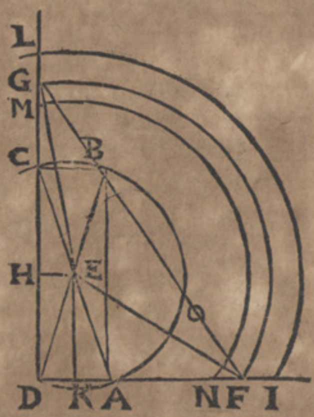
EXPOSITA Geodæſia noſtra prioribus quinq; propoſitionib9 huius lib. & nouẽ alijs propoſitionib9, ijs demõſtratis, quæ addenda eſſe cenſuimus ad idem argumentũ ſpectantia: agendũ iam eſſet de augendis minuẽdiſque figuris in data proportione, vt in titulo huius lib.6. propoſuimus. Verum quia ſicut id in planis figuris effici nõ poteſt ſine inuentione mediæ proportionalis inter duas rectas propoſitas, quam inuentionẽ Euclid.li.6.pro

poſ.

poſ.13. nobis tradidit: ita idem abſolui in figuris ſolidis nulla ratione poteſt, niſi inter duas rectas datas duæ mediæ reperiantur proportionales. Quocirca prius in hac propoſ. in medium afferemus, quæ antiqui Geometræ nobis hac de re ſcripta reliquerunt. Multorum enim ingenia res hęc exercuit, atq; torſit, quamuis nemo ad hanc vſq; diem, vere, ac Geometricę duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Pretermiſſis autem modis Eratoſthenis; Platonis; Pappi Alexandrini; Spori; Menechmi tum beneficio Hyperbolæ, ac parabolæ, tum ope duarũ parabolarũ; & Architæ Tarẽtini, quamuis acutiſſimis ſubtiliſſimisq; : ſolum quatuor ab Herone, Apollonio Pergæo, Philone Byſantio, Philopono, Diocle, & Nicomede traditos explicabimus, quos commodiores, facilioresq;, & errori minus obnoxios iudicauimus. Qui aliorum rationes deſiderat, legere eas poterit in Commentarijs Eutocij Aſcalonitæ in librum 2. Archimedis de Sphæra, & Cylindro: Item in libello Ioannis Verneri Norimbergenſis de ſectionibus Conicis. Hinc itaque exordiamur.

MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRO-ductionibus, & telis fabricandis: qui etiam Apollonio Pergæo adſcribitur.

SINT duæ lineæ rectæ AB, BC, inter quas oporteat duas medias proportionales inquirere. Conſtituantur ad angulum rectum B, & perficiatur rectangulum ABCD, cum diametris AC, BD, [a] quæ ſe mutuo bifariam diuident in E. Satis eſſet vnam tantum diametrũ ducere, eamq; in E, ſecare bifariam. Protractis autẽ laterib9 DA, DC, intelligatur circa punctũ B, moueri regula hinc inde, donec ita ſecet DA, DC, productas in F, & G, vt rectæ emiſſæ EF, EG, ęquales ſint. Vel certe, vt vult Apollonius, ex E, plures circuli deſcribãtur LI, GF, MN, donec chorda arcus vniꝰ præciſe per punctum B, incedat, qualis eſt GF. Quod ſi chorda ſupra B, tranſeat, cuiuſmodi eſt chorda LI, deſcribendus erit circulꝰ infra L; Si vero infra punctũ B, tranſeat, qualis eſt chorda MN, deſcribendus erit circulus ſupra M. Atq; hoc opꝰ toties iterrandum, donec aliqua chorda, qualis eſt GF, per B, incedat. Erunt n. hac ratione EF, EG, ex centro E, ad circũferentiã, GF, inter ſe ęquales. Quibꝰ ita conſtructis. Dico AF, CG, eſſe medio loco ꝓportionales inter AB, BC: hoc eſt, ita eſſe AB, ad AF, vt AF, ad CG, & CG, ad CB. Diuiſis enim AD, CD, bifariam in K, & H; [b] erunt ductæ EK, EH, ad AD, CD, perpendiculares. [c] Quoniam vero rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadrato ex AK, quadrato ex KF, æquale eſt; addito communi quadrato ex EK, erit rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadratis ex AK, EK, [d] hoc eſt, vna cum quadrato ex EA, æquale quadratis ex KF, EK, [e] hoc eſt, quadrato ex EF, hoc eſt, quadrato ex EG, quæ ipſi EF, eſt æqualis. Eadem ratione oſtendemus, rectangulum ſub DG, GC, vna cum quadrato ex CE, id eſt, ex EA, æquale eſſe eidem quadrato ex EG. Igitur rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadrato ex EA, æquale erit rectangulo ſub DG, GC, vna cum quadrato ex EA: demptoque communi quadrato EA, remanebit rectangulum ſub DG, GC, rectangulo ſub DF, AF, æquale. [f] Quocirca erit DG, ad DF, vt AF, ad CG: [g] Vt autem DG, ad DF, ita eſt AB, ad AF. Ergo erit vt AB, ad AF, ita AF, ad CG: hoc eſt, tres AB, AF, CG, continuè proportionales erunt. [h] Sed rurſus eſt, vt DG, ad DF, ita CG, ad CB. Igitur erit quoq; CG, ad CB, vt AB, ad AF; ideoq; vt AF, ad CG. Quare erunt quatuor AB, AF, CG, CB, continue proportionales. quod erat demonſtrandum.



a ſchol.34. primi.
b ſchol.26 primi.
c 6. ſecun.
d 47.pri.
e 47.pri.
f 16. ſexti.
g 4. ſexti.
h 4. ſexti.

MODVS PHILONIS BYSANTII, QVI PHILOpono quoque tribuitur.

SINT rurſus in eadem figura inter rectas AB, BC, inueniendæ duæ mediæ proportionales. Conſtituto rectangulo ABCD, vna cum diametro CA, productiſque lateribus DA, DC, vt ſupra; deſcribatur ex E, medio puncto diametri circulus CBA, ad interuallum EC. vel EA, [a] qui neceſſario per angulum rectum B, tranſibit. Deinde circa punctum B, regula hinc inde moueatur, ſecans DA, DC, protractas in F, & G, & circumferentiam in O, donec BG, OF, æquales ſint. Quod fiet, ſi per B, plurimæ lineæ occultæ ducantur. Vna enim earum habebit ſegmentum inter rectam DG, & circulum æquale ſegmento inter DF, & eundẽ circulũ. Quibꝰ peractis, dico AF, CG, medias proportionales eſſe inter AB, CB. Quoniam enim æquales ſunt GB, FO; addita communi BO, æquales quoque erunt GO, FB: ideoq; rectangulum ſub GO, GB, rectangulo ſub FB, FO, æquale erit. [b] Sed illud rectangulo ſub DG, GC, & hoc rectangulo ſub DF, AF, eſt æquale. Igitur & rectangulum ſub DG, GC, rectangulo ſub DF, AF. æquale erit. Quam ob rem, vt in præcedenti modo, oſtendemus, AB, AF, CG, CB, eſſe continue proportionales. quod eſt propoſitum.

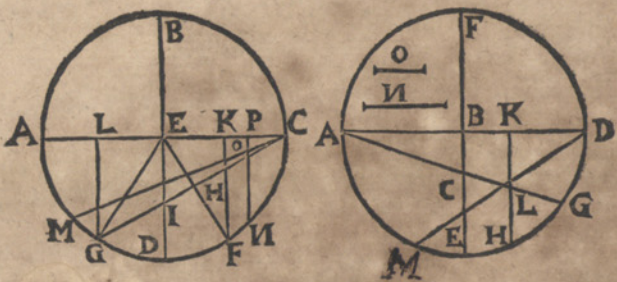
a ſchol 31. tertij.
b 1. corol. 36. tertij.

MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIRIIS PVLCHERRIMVS.

PRAEMITTIT prius Diocles Lemma tale. Deſcribatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, ſe ſe ad angulos rectos ſecantibus in centro E. Sumptis deinde duobus arcubus æqualibus DF, DG, iũgatur recta CG, & per F, ipſi BD, parallela agatur FK, ſecãs CG, in H. Hoc facto, erũt FK, KC, mediæ ꝓportionales inter AK, KH. Ducta nãq; GL, parallela ipſi BD, iunctiſq; rectis EF, EG, [a] quoniã anguli LEG, KEF, inſiſtentes arcubus æqualibꝰ AG, CF, æquales ſunt, [b] & anguli L, K, recti, lateraq; EG, EF, æqualia; [c] erunt &

a 27. tertij.
b 27. primi
c 26. prim.

 GL,



GL,FK,& EL,EK, inter ſe æquales: ideoq; & reliquæ AL,CK; Immo addita communi LK, & totę AK,CL, æquales inter ſe erunt.[e] Quoniam igitur eſt CL, ad LG, vt CK, ad KH: eſtq; vt CL, ad LG, ita AK, ad KF, quod hæ illis æquales ſint: erit quoq; AK, ad KF, vt CK, ad KH.[f] Vt autem AK, ad KF, ita eſt KF, ad CK. Igitur erit AK, ad KF, vt KF, ad CK, & CK, ad KH, hoc eſt, KF, CK, medię proportionales erunt inter AK, KH. quod eſt propoſitum. Pari ratione ſi, ſumptis arcubꝰ æqualibꝰ DM, DN, iunctaq; recta CM, ducatur NP, ipſi BD, parallela, ſecans CM, in O, erunt PN, CP, inter AP, PO, mediæ proportionales, &c.

e 4.ſexti.

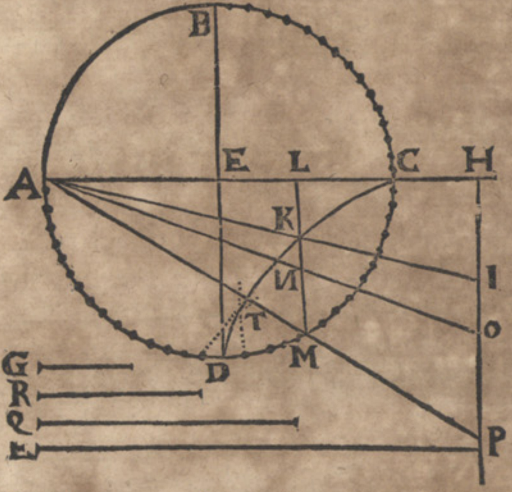
f ſchol. 13. ſexti.

HOC lemmate præmiſſo ſint inter rectas AB,BC, reperiendæ duæ mediæ proportionales. Conſtituantur in altera figura ad angulum rectum B, & centro B, ad interuallum maioris BA, deſcribatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam vſq; protendantur AB, BC, Deinde ex A, per C, ducta recta ACG, ſumatur in quadrante DE, punctũ H, in tali ſitu, vt ducta HK, ipſi EF, parallela ſecãte ipſam AG, in L; recta ex D, per L, emiſſa auferat arcum EM, arcui EH, æqualem. Nam hac ratione, per lemma præmiſſum, erunt KH, DK, mediæ ꝓportionales inter AK, KL.[g] Et quoniam eſt vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: ſi fiat, vt AK, ad KH, ita AB, ad N; & vt KH, ad DK, ita N, ad O; erunt quoq; N, O, mediæ proportionales inter AB, BC. Neque enim dubitandum eſt, eſſe & O, ad BC, vt DK, ad KL. Cum enim ſit, vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: habeat autem AK, ad KL, proportionem triplicatam AK, ad KH, hoc eſt, AB, ad N, habebit etiam AB, ad BC, triplicatam proportionem AB ad N. Cum ergo proportio AB, ad N, ſit æqualis proportioni N, ad O; erit eidem æqualis proportio O, ad BC, vt tres æquales proportiones exiſtant inter AB, & BC. Igitur quatuor, AB, N, O, BC, continue proportionales ſunt, quemadmodum quatuor AK, KH, DK, KL. quod eſt propoſitum.

g 4.ſexti.

VERVM, quia difficile viſum fuit Diocli accipere in poſteriori figura punctum H, in tali ſitu, vt recta DM, ſecans AG, & parallelam HK, in L, auferat arcum Em, arcui EH, æquale: deſcripſit lineam quandam inflexã ad hanc rem aptiſſimam, hac ratione. Deſcribatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, ſeſe ad angulos rectos in E, ſecantibus. Deinde in quadrante CD, capiantur quotcunque puncta parum inter ſe diſtantia, quæ ex D, & B, ordine in quadrantes DA, BC, transferantur. Poſt hæc applicata regula ad bina puncta quadrantum DC, BC, æqualiter à B, D, diſtantia, ducantur rectæ occultæ,[h] quæ ipſi BD, parallelæ erunt. Et ex C, ad ſingula puncta quadrantis DA, rectæ occultæ emittãtur, notenturque harum interſectiones cum prædictis parallelis occultis; nimirũ punctum T, vbi recta ex C, ad proximum punctum ipſi D, ducta interſecat proximam parallelam ipſi BD, & ſic deinceps. Nã ſi omnia hæc interſectionum puncta rite per lineam inflexam coniungantur, qualis eſt CKTD, conſtructa erit figura medijs duabus proportionalibus inueniendis aptiſſima. Sint n. inter duas F, G, duæ mediæ proportionales inueniendæ. In diametro AC, etiam producta, ſi opus eſt, ſumatur AH, maiori F, æqualis. Ducta deinde perpẽdiculari HP, abſcindatur HI, minori G, æqualis. Ducta autem AI, ſecãte lineam inflexam in K, agatur per K, ipſi BD, parallela LM. Deniq; ſumpta LN, ipſi LC, æquali, ducantur per N, & M, rectæ AN, AM, ſecantes HP, in O P. Dico HP, HO, eſſe medias proportiones inter AH, HI, hoc eſt, inter F, & G. Quoniam enim punctum K, lineæ inflexæ inuentum eſt per rectam ad punctum quadrantis DA, ductam, quod tanto interuallo à puncto D, abeſt, quanto punctũ M, ab eodem diſtat, vt ex deſcriptione lineæ inflexæ liquet; erunt ex lemmate Dioclis quatuor rectæ AL, LM, LC, vel LN, & LK, continue proportionales.[i] Cum ergo hiſce quatuor rectis proportionales ſint quatuor rectæ AH, HP, HO, HI; erunt hæ quoque continue proportionales. quod eſt propoſitum,

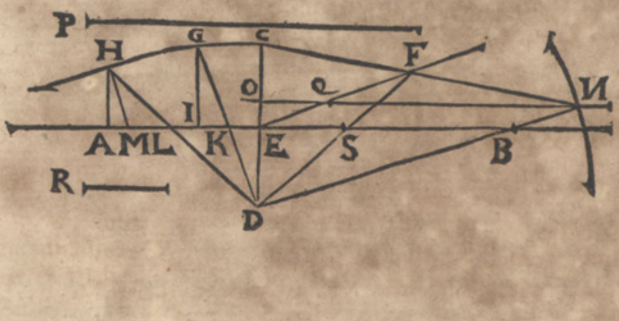
h ſchol 27. tertij.



i 4.ſexti.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO DE LINEIS CONCHOIDIBVS.

NICOMEDES conſtruit prius inſtrumentum quoddam, quo lineam inflexam deſcribit, quam Conchilem, vel Cõchoideos appellat. Sed nos omiſſo eo inſtrumẽto, eandem (quod ad noſtrum inſtitutum ſatis eſt) per puncta delineamus, hac ratione. Sit recta linea AB, & ad eam perpendicularis CD, in pũcto E. Sumatur deinde infra E, punctũ D, pro polo lineæ deſcribendæ, & ſupra E, aliud punctum C, vt libet. In vſu lineæ deſcriptæ conſtabit, quantum tam punctum D, quam punctum C, à puncto E, abeſſe debeat. Si igitur ex D, ducãtur plurimæ lineæ occultæ parum inter ſe diſtantes, & ex ſingulis abſcindãtur portiones rectę EC, ęquales, initio ſemper facto à recta AB; extrema aũt harũ portionum puncta per lineam inflexam coniungantur, deſcripta erit linea conchilis. Exemplum habes in quatuor lineis DH, DG, DF, DN, in quibus ſumptæ ſunt LH, KG, SF, BN, ipſi EC, æquales, per quarum extrema puncta H, G, F, N, inflexa lineæ incedit. Et quo plures lineæ occultæ ex D, educentur, eo crebriora puncta inuenientur, per quæ tranſire debet linea inflexa.



SE-

SEQVITVR ex deſcriptione huius lineæ, eam nunquam poſſe cum recta AB, conuenire, licet vtraq; in infinitum producatur: quia puncta, per quæ incedit, ſunt omnia ſupra rectam AB, terminantia nimirum ſegmenta rectarum ex D, prodeuntium ([a] quæ quidem omnes rectam AB, interſecant) ipſi EC, æqualia, a pron. 11. lib. 1.

DEMONSTRAT deinde Nicomedes duas proprietates huius lineæ inſignes. Prima eſt: Quodlibet eius punctum à puncto C, diuerſum minus diſtat à recta AB, quam punctum C: Aliorum autem punctorum, quod remotius eſt à C, minus diſtat ab eadem recta AB, quam quod minus remotum eſt. Ducta enim recta quacunque DG, demittatur perpendicularis GI. [b] Et quia KG, maior eſt quam GI; erit quoque perpendicularis EC, (ipſi KG, æqualis) maior quam perpendicularis IG. hoc eſt, punctum C, magis diſtabit à recta AB, quam punctum G. Eademque ratione magis à recta AB, diſtabit punctum C, quam quoduis aliud. Sumatur deinde aliud punctum H, remotius à C, quam punctum G, demittaturque perpendicularis HA. Dico punctum H, minus diſtare à recta AB, quã punctum G, hoc eſt, perpendicularem HA, minorẽ eſſe perpendiculari GI. Ducta namque recta DH, [c] erit angulus DKE, maior angulo DLE. [d] hoc eſt, angulus GKI, angulo HLA. Cum ergo recti I, A, æquales ſint; [e] erit reliquus G, reliquo AHL, minor. Si igitur ipſi G, fiat æqualis AHM; erunt triangula KGI, MHA æquiangula; [f] ideoque erit, vt MH, ad HA, ita KG, ad GI. [g] Et quia LH, maior eſt, quam MH, [h] (quod angulus HML, maior ſit recto A, [i] & HLM, minor) [k] erit maior proportio LH, ad HA, quam HM, ad HA, hoc eſt, quam GK, ad GI: ac proinde cum GK, HL, æquales ſint, erit quoque maior proportio HL, ad HA, quam HL, ad GI; [l] ideoque HA, minor erit quam GI, quod eſt propoſitum.

b 19. pri. c 16. pri. d 15. pri. e 32. pri. f 4. ſexti. g 19. pri. h 16. pri. i 17. pri.

ALTERA proprietas eſt. Quamuis Conchilis CF, nunquam conueniat cum recta EB, tamen cum qualibet alia recta, etiam ipſi EB, propinquiſſima, conuenit. Sit enim primum recta NO, ipſi EB, parallela, ſecans EC, in O. Fiat vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Et quoniam EO, minor eſt, quam EC: [m] erit quoque OD, minor quam P. Si igitur ex D, ad interuallum rectæ P, deſcribatur arcus circuli, ſecabit is rectam ON, in aliquo puncto, vt in N. Dico Conchilem CF, prolongatam coire cum ON, in N. Ducta enim recta DN, ſecante EB, in B, quæ ipſi P, æqualis erit; [n] quoniam eſt vt EO, ad OD, ita BN, ad ND; hoc eſt, ad ſibi æqualem P. Fuit autem etiam, vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Igitur BN, EC, ad P, eandem proportionem habebunt: [o] ac proinde inter ſe æquales erunt, ideoque Conchilis per N, tranſibit.

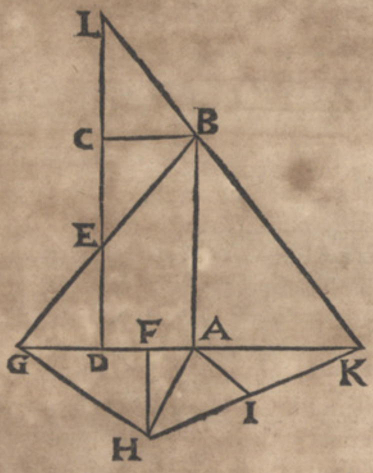
k 8. quin. l 10. quin. m 14. quin. n 4. ſexti. o 9. quin.

SIT deinde recta QF, non parallela ipſi EB, ſed eam ſecet in E, vergatque verſus Conchilem. Quia igitur Conchilis cum recta ON, conuenit, conueniet prius cum ipſa QF, in F, vt perſpicuum eſt.

POST hæc Nicomedes diſſoluit huiuſmodi problema. Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas angulum datum comprehendentes: Ab illo puncto educere rectam ſecantem rectas datum continentes angulum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis ſit datæ rectæ. In eadem namque figura rectæ EB, EF, angulum contineant BEF, ducendaque ſit ex D, linea, ita vt eius portio inter EB, EF, æqualis ſit datæ rectæ R. Ex D, ad inferiorem lineam EB, ducatur perpendicularis DE, ſumaturque EC, datæ rectæ R, æqualis: & polo D, interuallo vero EC, Conchilis deſcribatur, quæ per ſecundam proprietatem rectam EF, ſecabit in F. Ducta ergo recta DF, ſecante EB, in S; erit SF, ipſi EC, hoc eſt, ipſi R, æqualis, vt ex deſcriptione Conchilis liquet.

HIS præmiſſis, ſint duæ rectæ AB, BC, ad angulum rectum B, coniunctæ, inter quas reperiendæ ſint duæ lineæ mediæ proportionales. Compleatur rectangulum AC, cuius duo latera AD, CD, bifariam ſecentur in F, E. Ducta autem ex B, per E, recta ſecante AD, productam in G; [p] erit DG, ipſi CB, hoc eſt, ipſi DA, æqualis; propterea quod anguli D, E, trianguli DEG, angulis C, E, trianguli CEB, æquales ſunt, & latera quoque DE, CE, quibus adiacent, æqualia. Rurſus ductam perpendicularem FH, ſecet AH, ipſi CE, æqualis. quod fiet, ſi ex A, ad interuallum CE arcus delineetur, ſecans FH, in H. Deinde iuncta recta GH, ducatur ei parallela AI: atque producta DA, ex H, per problema præcedens, ducatur recta HK, vtramque AI, AK, ita ſecans, vt intercepta IK, ipſi AH, vel CE; æqualis ſit. quod fiet, ſi ex H, plurimæ rectæ ducentur occultæ, donec vnius portio intercepta æqualis ſit ipſi AH, vel CE. Poſtremo ex K, per B, recta extendatur ſecans DC, productam in L. Dico duas AK, CL, medias proportionales eſſe inter AB, BC. [q] Quoniam enim eſt LC, ad CD, vt LB, ad BK, hoc eſt, vt DA, ad AK;

p 26. pri. q 2. ſexti.



Et vt CD, ad CE, ita eſt GA, ad DA, quod vtraque CD, GA, ſecta ſit bifariam in E, D: erit ex proportione perturbata LC, ad CE, vt GA, ad AK, vt in hac formula apparet:

LC.	GA.
CD.	DA.
CE.	AK.

hoc eſt, vt HI, ad IK. Cum ergo CE, ipſi IK, ſit æqualis per conſtructionem, [r] erit quoque LC, ipſi HI, æqualis, & tota LE, toti HK. [s] Deinde quia rectangulum ſub DK, KA, vna cum quadrato ex AF, æquale eſt quadrato FK; addito communi quadrato ex FH, erit rectangulum ſub DK, KA, vna cum quadratis ex AF, FH, [t] hoc eſt, vna cum quadrato ex AH, vel ex CE, æquale quadratis ex KF, FH, hoc eſt, quadrato ex HK, id eſt, ex LE, ipſi HK, æquali. [u] Sed & rectangulum ſub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE, æquale quoque eſt eidem quadrato ex LE. Igitur rectangulum ſub DK, AK, vna cum quadrato ex CE, æquale erit rectãgulo ſub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE: Et dempto communi quadrato CE, reliquum rectangulum ſub DL, LC, reliquo rectangulo ſub DK, AK, æquale erit. [x] Igitur erit DL, ad DK, [y] hoc eſt, AB, ad AK, vt AK, ad LC. [z] Vt autem AB, ad AK, ita eſt quoque LC, ad CB. Igitur erit AB, ad AK, vt AK, ad LC, & vt LC, ad CB: ac proinde AK, LC, mediæ proportionales erunt inter datas AB, BC. quod eſt propoſitum.

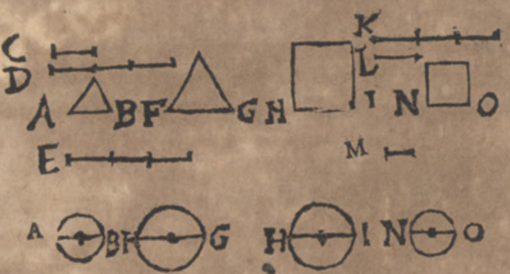
r 14. quin. s 6. ſecun. t 47. pri. u 6. ſecun. x 16. ſexti. y 4. ſexti. z 4. ſexti.

QVOD ſi datæ duæ rectæ ſint nimis longæ, accipi poterunt earum ſemiſſes, vel tertiæ partes, &c. atque inter eas duæ mediæ inquirendæ. Nam ſi inuentæ duplicentur, vel triplicentur, &c. habebuntur duæ mediæ inter datas duas. Quod etiam in alijs modis intelligendum eſt.

PROBL. 11. PROPOS. 16.

DATAM figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.

HOC problema, quod ad figuras planas rectilineas attinet, explicauimus propoſ. 15. ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Euclid. Nunc idem ad circulos quoque extendemus. Sit ergo rectilineum, cuius latus A B, vel circulus, cuius diameter A B, oporteatque conſtituere maius rectilineum, vel circulum maiorem in proportione, C, ad D, nimirum ſubtripla. Tribus lineis C, D, A B, inueniatur quarta proportionalis E, atque inter A B, & E, reperiatur media proportionalis F G, & ſupra FG, figura conſtruatur ſimilis datæ figuræ AB, ſimiliterque poſita. Item circulus deſcribatur circa diametrum F G. Dico tam rectilineum A B, eſſe tertiam partem rectilinei F G, quam circulum A B, circuli F G, nimirum eandem habere proportionem AB, ad FG, quam habet C, ad D. Quoniam enim tres rectæ AB, FG, & E, continue proportionales ſunt, [a] erit figura A B, ad figuram FG, vt AB, ad E, hoc eſt, vt C, ad D. [b] Quia vero eſt, vt quadratum ex A B, ad quadratum ex F G, ita circulus A B, ad circulum F G; eſtque quadratum AB, ad quadratum FG, vt AB, ad E; erit quoque circulus A B, ad circulum F G, vt AB, ad E, vel vt C, ad D.



a coroll. 19. vel 20. ſexti.
b 2. duode.

SIT deinde figura, vel circulus HI, oporteatque conſtruere minorem figuram, vel circulum in proportione K, ad L, nimirum tripla. Tribus rectis K, L, HI, inueniatur quarta proportionalis M: atque inter HI, & M, media proportionalis inueniatur N O, ſupra quam conſtruatur figura ſimilis ſimiliterque poſita figuræ HI: Item circulus deſcribatur circa diametrum N O. Dico tam figuram HI, ad figuram NO, quam circulum HI, ad circulum N O, habere proportionem triplam, eandem videlicet, quam habet K, ad L. Quoniam enim tres rectæ H I, N O, & M, continue ſunt proportionales; [c] erit figura H I, ad figuram NO, vt recta H I, ad M, hoc eſt, vt K, ad L. [d] Et quia eſt, vt quadratum H I, ad quadratum N O, ita circulus HI, ad circulum N O, eſtque quadratum HI, ad quadratum NO, vt recta HI, ad M; erit quoque circulus HI, ad circulum N O, vt recta HI, ad M, vel vt K, ad L.

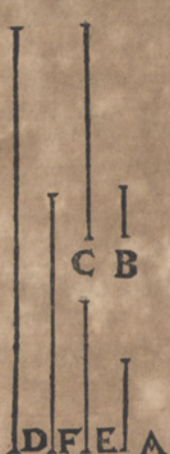
c coroll. 19. vel 20. ſexti.
d 2. duode.

EX his conſtat, qua ratione, dato foramine rotundo, vel etiam quadrato alicuius fontis, aliud foramen rotundum, vel quadratum maius, vel minus in quacunque proportione conſtruendum ſit.

PROBL. 12. PROPOS. 17.

DATAM figuram ſolidam qualemcunque ex ijs, de quibus Eucl. in lib. Stereometriæ agit, augere vel minuere in proportione data.

HVIVSMODI figuræ ſolidæ ſunt parallelepipedum, Pyramis, Priſma, Sphæra, Conus, Cylindrus, & quinque corpora regularia.



SIT ergo figura ſolida, cuius latus A, vel ſphæra, cuius diameter augenda primum in proportione B, ad C. Tribus rectis B, C, A, inueniatur quarta proportionalis D: atque inter A, & D, reperiantur duæ mediæ proportionales E, F. Dico ſolidum lateris A, ad ſolidum ſupra latus E, nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ propinquior eſt lateri dato A, conſtructũ ſimile, ſimiliterq; poſitum ſolido ſupra latus A, conſtituto, habere proportionẽ quam B, habet ad C. Item ſphærã datam diametri A, ad ſpheram diametri E, eſſe, vt B, ad C. Quoniam n. figura ſolida lateris A, ad figuram ſolidã lateris E, ſimilẽ, ſimiliterq; poſitã habet proportionem triplicatam lateris A, ad latus E, vt lib. 11. & 12. Eucl. demonſtratũ eſt: Similiter Conus, & Cylindrus, cuius baſis diameter A, ad Conum & Cylindrum ſimilem, cuius diameter E: Nec non ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri E; Eſt autem, ex defin. 10. lib. 5. Euclid. proportio quoque A, ad D, triplicata proportionis A, ad E: Erit ſolidum A, ad ſolidum E, vt A, ad D, hoc eſt, vt B, ad C. quod eſt propoſitum.

SIT deinde ſolidum lateris, vel diametri D, minuendũ in proportione data C, ad B. Tribus C, B, D, inueniatur quarta proportionalis A; atque inter D, & A, reperiantur duæ mediæ proportionales F, E. Dico ſolidum lateris, vel diametri D, ad ſolidum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſupra F, nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ lateri dato D, propinquior eſt, proportionem habere, quam C, ad B. Quoniam enim ſolidum D, ad ſimile ſimiliterque deſcriptum ſolidum F, proportionem habet triplicatam lateris D, ad latus F: qualem etiam habet ex defin. 10. lib. 5. Euclid. recta D, ad rectam A: erit ſolidum D, ad ſolidum F, vt D, ad A, id eſt, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.

CONSTAT ex his, qua ratione Cubus non ſolum duplicandus ſit (quod veteres inquirebant) ſed etiam augendus minuendusue in quacunque proportione: Item quo pacto pylæ bombardarum maiores, aut minores fieri debeant ſecundum proportionem datam.

SCHO-

SCHOLIVM.

FIGVRAS ſolidas ſimiliterque poſitas habere proportionem triplicatam homologorum laterum, demonſtratum eſt de parallelepipedis quidem lib. 11. Euclid. propoſ. 33. De Pyramidibus vero lib. 12. propoſ. 8. eiuſq; coroll. & de Priſmatis, in eiuſdem ſcholio. De ſphæra autem lib. eodem 12. propoſ. 18. De Conis deinde & Cylindris eodem lib. 12. propoſ. 12. ſi pro lateribus homologis ſumantur diametri ſphærarum, & diametri baſiũ Conorum, & Cylindorum. Ac tandem de quinque corporibus regularibus in coroll. propoſ. 17. lib. 12. quippe cum omnia hæc corpora in ſphæris deſcribi poſſint.

QVAMVIS autem problema hoc de ſupradictis corporib⁹ duntaxat propoſuerimus, idem tamen etiam locum habet in alijs cuiuſque generis corporibus ſimilibus, ſimiliterque poſitis, vt perſpicuum eſt; propterea quod diuidi poſſunt in pyramides ſimiles, æquales numero; [a] quæ quidem proportionem habent laterum homologorum triplicatam. [b] Cum ergo ſit, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes ad omnes, id eſt, ita ſolidum ad ſolidum; ſintq; eadem latera homologa ſolidorum, quæ pyramidum ſimilium, conſtat propoſitum.

a 8. duod. eiuſq. corol. *b 12. quin.*

PROBL. 13. PROPOS. 18.

INTER duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.

NON raro figura ſiue plana, ſiue ſolida augenda, vel minuenda eſt per numeros, quod quidem ſine inuētione vnius medij proportionalis, vel duorũ mediorũ inter datos duos numeros perfici nõ poteſt: idcirco artem præſcribemus, qua huiuſmodi medias inuenire poſſimus. Propoſitis igitur primum duobus numeris quibuſcunque 9. & 25. inter quos reperiendus ſit vnus medius proportionalis; ſi multiplicentur inter ſe, & producti numeri 225 radix quadrata eruatur 15. vt in Arithmetica practica cap. 26. docuimus: [a] erit radix hæc quadrata medio loco proportionalis inter datos numeros, vt hic 9. 15. 25. quippe cum quadratum medij numeri ęquale ſit rectangulo ſub extremis comprehenſo. Sic inter 5. & 13. medius ꝓportionalis erit radix quadrata numeri 65. qui ex multiplicatione datorum numerorum gignitur, quæ radix paulo maior eſt, quã $8\frac{1}{17}$. & paulo minor, quã $8\frac{1}{16}$.

a 17. ſexti. vel 20 ſep.

SINT deinde duo numeri 2. & 54. inter quos inueniendi ſint duo medij proportionales. Multiplicetur quadratus minoris in maiorem. Producti namque numeri 216. radix cubica 6. erit primus medius iuxta minorẽ collocandus. Et ſi maioris quadratus ducatur in minorem, erit producti numeri 5832. radix cubica 18. alter medius iuxta maiorẽ ſtatuẽdus, vt hic 2. 6. 18. 54. Ratio huius rei eſt, quod datis quatuor lineis continuè proportionalibus, parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & ſub altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremo aſſumpto propinquior eſt, vt in ſequenti Lemmate demonſtrabimus. Quoniam vero, vt in ſcholio propoſ. 19. lib. 8. Euclid. oſtendimus, propoſitis hiſce tribus numeris 2. 2. 54. idem procreatur numerus, ſiue prius ducantur 2. in 2, deinde productus 4. in 54. ſiue prius 2. in 54. deinde productus 108. in 2. Idem datis hiſce tribus numeris 54. 54. 2. idem numerus gignitur, ſiue prius ducantur 54. in 54. deinde productus 2916. in 2. ſiue prius 54. in 2. deinde productus 108. in 54. manifeſto colligitur, ſi minor 2. ducatur in maiorem 54. & productus 108. in minorem 2. produci quoque cubum medij proportionalis iuxta minorem conſtituendi: Item ſi maior 54. ducatur in minorem 2. & product⁹ 108. in maiorem 54. procreari cubum medij proportionalis iuxta maiorem ſcribendi. Sic inter 4. & 100. erunt duo medij proportionales, Radix cubica numeri 1600. & Radix cubica numeri 40000. Cæterum inuēto altero mediorũ numerorũ, reperietur alter etiam, ſi inuentus per extremum remotiorem multiplicetur & producti numeri radix quadrata capiatur. Vt in dato exemplo 2. 6. 18. 54. ſi medius inuentus 6. ducatur in 54. erit producti numeri 324. radix quadrata 18. alter medius: Item inuentus medius 18. ſi multiplicetur per 2. erit producti numeri 36. radix quadrata 6. alter medius: propterea quod tam 2. 6. 18. quam 6. 18. 54. ſunt tres continuè proportionales.

LEMMA.

SI ſint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumptæ propinquior eſt.

REPETATVR figura propoſ. 17. in qua lineæ quatuor continue ꝓportionales ſunt A, E, F, D. Dico parallelepipedum ſub quadrato extremæ A, & ſub extrema altera D, contentũ, cubo rectæ E, æquale eſſe. [a] Quoniam n. quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, proportionem habet, quam A, ad F, id eſt, quam E, ad D, reciprocabuntur baſes cum altitudinibus, cum baſis parallelepipedi ſit quadratũ rectæ A, & eiuſdẽ altitudo recta D: cubi autem baſis, quadratum rectæ E, & altitudo ipſamet recta E. [b] Igitur æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. Eadem ratione erit parallelepipedum ſub quadrato extremę D, & ſub altera extrema A, contentum ęquale cubo rectæ F. [c] Nam cum ſit, vt quadratũ rectæ D, ad quadratum rectæ F, id eſt, vt baſis dicti parallelepipedi ad baſem dicti cubi, ita D, ad E, hoc eſt, ita F, ad A, hoc eſt, ita altitudo cubi, ad altitudinem parallelepipedi; reciprocabũtur quoq; baſes cum altitudinib⁹: [d] ideoq; æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. q̄ eſt ꝓpoſitũ.

a corol. 20. ſexti. *b 34. vndecimi.* *c corol. 20. ſexti.* *d 34. vndecimi.*

Quia vero in noſtra Arithmetica practica ſolum radicis quadratæ extractionem explicauimus, operæ me pretium facturum puto, radicis cubicæ extractionem hoc loco, quamuis fortaſſe alieno, inſerere: quandoquidẽ ea neceſſaria omnino eſt, vt problema hoc 13. ad opus poſſit deduci. Hoc autem efficiam, ſi præſcribam artem quandam generalem; qua cuiuſcunq; generis radicem extrahere poſſimus, ex libro eximij cuiuſdam Arithmetici Germani depromptam ferme totam; quod quidem ſtudioſo Lectori non iniucundum, aut ingratum fore confido.

PROBL.

PROBL. 14. PROPOS. 19.

RADICEM cuiuſlibet generis extrahere.

Extractio radicis quid.

EXTRACTIO radicis eſt inuentio numeri ex propoſito numero, qui multiplicatione aliqua in ſe numerum propoſitum producat. Vt extractio quadratæ radicis eſt inuentio numeri ex numero quadrato, qui quadrate multiplicatus ipſum producat: Et extractio radicis cubicæ, eſt inuentio numeri, qui in ſe ductus cubice producat cubum propoſitum, &c. Quid autem ſit multiplicare numerum quadrate, aut cubice, aut alio modo, mox explicabo.

Infinitæ ſpecies radicum.

QVEMADMODVM igitur infinitæ ſunt ſpecies multiplicationum numerorum in ſe, vt ſtatim dicam, ex quibus oriuntur numeri quadrati & ſolidi, vt Cubi, Zenſizenſi, Surdeſolidi, &c. qui à Iunioribus nonnullis in Algebra explicari ſolent: ſic etiam infinitæ ſunt radicum ſpecies iuxta varias numerorum appellationes, qui conſurgunt ex varia radicum multiplicatione. Quæ omnia pulchre nobis repræſentat naturalis numerorum progreſſio, inſeruiens progreſſionibus Geometricis ab vnitate incipientibus: vt hic.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	&c.
	Radix.	Quadratus.	Cubus.	Zenſizēſus.	Surdeſolidus.	Zenſicubus	B, Surdeſolidus.	Zenſizenzenſus.	Cubicubus.	Zenſurdeſolidus.	

PRIMVM numeri ſuperioris progreſſionis ſignificant ſpecies multiplicationum. Vt 2. ſupra quadratum ſignificat, multiplicationem quadratam fieri, dum radix bis ponitur, & ſic multiplicatur, vt 2.2. facit 4. Sic 3. ſignificat, multiplicationem cubicam fieri, dum radix ter ponitur, atque ita multiplicatur, vt 2.2.2. facit 8. Pari ratione, 4. oſtendit multiplicationem Zenſizenſicam: Et 5. ſurdeſolidam, &c.

DEINDE iidem numeri ſignificant radicum ſpecies. Vt 2. ſignificat radicem quadratam producere quadratum per multiplicationem quadratam: Et 3. denotat, radicem Cubicam procreare Cubum per multiplicationem cubicam: Et ſic deinceps.

Quomodo figuræ per puncta ſignentur.

Pro quadrata.

6	8	7	1	9	4	7	6	7	3	6
.		.		.		.		.		.

Pro cubica.

6	8	7	1	9	4	7	6	7	3	6
	.			.			.			.

Pro Zenſizenſica.

6	8	7	1	9	4	7	6	7	3	6
		.				.				.

Pro ſurdeſolida.

6	8	7	1	9	4	7	6	7	3	6
.					.					.

IN extractionibus igitur radicum obſeruanda eſt ſignatio figurarum per puncta in numero, ex quo radix aliqua extrahenda eſt, hoc modo.

IN extractione radicis quadratæ ſignantur omnes figuræ in locis imparibus, incipiendo à dextris: ita vt alternatim ſemper vna figura omittatur, quæ non ſignetur.

IN extractione cubica omittuntur ſemper duæ figuræ. In Zenſizenſica tres. In ſurdeſolida quatuor. Et ſic deinceps in infinitum. Vt in appoſitis exemplis vides.

RESPONDENT autem hæ ſignationes medijs proportionalibus. Vt quoniam inter duos quadratos cadit vnus medius, ideo in extractione radicis quadratæ omittitur ſemper vna figura: Inter duos vero Cubos cadunt duo medij, idcirco omittuntur ſemper duæ figuræ, & ſic de cæteris.

PRO qualibet autem ſpecie radicis extrahendæ inſeruiunt quidam numeri peculiares: qui per ſequentem tabulam inueniuntur, quæ hoc modo conſtruitur. Prima columna continet ſeriem naturalem numerorum. Ex hac columna naſcitur ſecunda: tertia ex ſecunda: & quarta ex tertia, hoc modo. Relictis duabus cellulis primæ co-

1								
2								
3	3							
4	6							
5	10	10						
6	15	20						
7	21	35	35					
8	28	56	70					
9	36	84	126	126				
10	45	120	210	252				
11	55	165	330	462	462			
12	66	220	495	792	924			
13	78	286	715	1287	1716	1716		
14	91	364	1001	2002	3003	3432		
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
17	136	680	2380	6188	12376	16448	24310	24310

Cõſtructio tabulæ mirifica.

lumnæ, repetitur numerus tertiæ çellulæ in ſecunda columna. Deinde ex additione duorũ numerorum, id eſt, ex ter-

ex tertio primæ columnæ, & primo ſecundæ columnæ, fit ſecundus numerus ſecundæ columnæ. Eodem modo ex ſecundo numero ſecundæ columnæ,& ex eius collaterali conficitur tertius ſecundæ columnæ: Atque ex tertio numero ſecundæ columnæ, & ex eius collaterali fit quartus eiuſdem ſecundæ columnæ, & ſic deinceps. Continentur autem in ſecunda columna omnes numeri triangulares. Non aliter tertia columna ex ſecunda oritur, & quarta ex tertia, &c. Semper enim in qualibet columna relinquuntur duæ primæ cellulæ, & numerus tertiæ cellulæ repetitur pro primo numero ſequentis columnæ: atque ex additione eius numeri cum collaterali præcedentis columnæ conflatur ſecundus numerus, &c.

Quo pacto ex ſuperiori tabula deſumantur numeri pro radicum ſingulis ſpeciebus.

HAC extructa tabula, deſumuntur numeri peculiares ex ordinibus tranſuerſalibus hoc ordine. Numeri cuiuslibet ordinis tranſuerſalis ordine ſcribuntur, iidemque ordine retrogrado repetuntur, vltimo ſemper excepto, & penultimo etiam tunc ſolum, quando vltimo æqualis eſt. Vt in ſecundo ordine ſumitur tantum numerus 2. quia cum ſit vltimus, non repetitur. In tertio ſumuntur quoque hi duo tantum 3. 3. quia penultimus non repetitur, cum ab vltimo non differat. In quarto autem ſumendi ſunt hi tres. 4. 6. 4. In nono hi octo 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Et in decimo hi nouem 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. &c. Vbi vides, ſemper tot numeros aſſumi, quot ſunt vnitates in primo numero tranſuerſali, minus vno. Vt in ordine ſeptimodecimo aſſumendi erunt hi ſexdecim 17. 136. 680. 2380. 6188. 12376. 19448. 24310. 24310. 19448. 12376. 6188. 2380. 680. 136. 17. & ſic de cæteris.

CVILIBET deinde numero præponendæ ſunt cifræ, quot numeri ab eo incluſiue numerantur vſque ad vltimum aſſumptum. Vt numero 2. ſecundi ordinis præponenda eſt vna cifra hoc modo, 20. Sed duo tertij ordinis habebunt has cifras 300. 30. Sic in nono ordine, vbi aſſumuntur octo numeri, primus habebit octo cifras, ſecundus ſeptem, tertius ſex, & ſic ſemper minuendo vnam. Cuius autem radicis extractioni inſeruiant prædicti numeri in quolibet ordine tranſuerſali accepti, pulchre indicat primus numerus ordinis tranſuerſalis, Vt quia in ſuperiori progreſſione numerus 3. notat quadratum, & 3. cubum, & 4. Zenſizenſum, &c. ideo numerus 2. ſecundi ordinis cum ſua cifra, hoc modo. 20. inſeruit radici quadratæ: Et duo numeri ex tertio ordine aſſumpti cum ſuis cifris, hoc modo 300. 30. radici cubicæ: Et tres quarti ordinis, hoc modo 4000. 600. 40. radici Zenſizenſicæ: & quatuor quinti ordinis, hoc modo, 50000. 10000. 1000. 50. radici ſurdeſolidæ, &c.

Quot figuras quælibet radix habeat.

IAM vero vt propius ad extractionem radicum accedamus, ſciendum eſt, radicem cuiuslibet numeri habere tot figuras, quot puncta ſub ipſo ſignata ſunt, ſecundum doctrinam ſuperiorem. Item ad punctum vltimum verſus ſiniſtram pertinere ipſam figuram ſupra punctum poſitam, cum omnibus alijs, quæ ipſam verſus ſiniſtram præcedunt. Ex quo puncto ſubtrahatur numerus, vt mox dicemus, ſpectabit ad penultimum punctum figura ſupra ipſum punctum cum reliquis ad ſiniſtram, & ſic de cæteris.

VT autem rite incipiat extractio cuiuslibet radicis, conſtruenda erit tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, B, ſurdeſolidorum, & aliorum numerorum, qui ex nouem figuris Arithmeticis producuntur, cum ſuis radicibus. Vt hic vides.

Radices.	Quadrati.	Radices.	Cubi.	Radices.	Surdeſolidi.	Radices.	B. ſurdeſolidi.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	8	2	32	2	128
3	9	3	27	3	243	3	2187
4	16	4	64	4	1024	4	16384
5	25	5	125	5	3125	5	78125
6	36	6	216	6	7776	6	279936
7	49	7	343	7	16807	7	823543
8	64	8	512	8	32768	8	2097152
9	81	9	729	9	59049	9	4782969

CVR autem non appoſuerim tabellas Zenſizenſorum, & Zenſicuborum cauſa eſt, quod eiuſmodi numerorum radices non egent nouis præceptis, vt poſtea dicetur. Sequuntur ergo iam extractionum exempla aliquot.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATÆ.

Quadratæ radicis extractio.

SIT numerus propoſitus 6765201. ex quo erui debet radix quadrata.

. . . .

Radix 2601.

PRIMVM ab vltimo puncto, id eſt, à figura 6. (Hoc enim punctum vnam tantum habet figuram, cum eam nulla alia præcedat) ſubtrahitur maximus quadratus, qui ſubtrahi poteſt, nimirum 4. & in Quotiente ad marginem ponitur eius radix 2. In reſiduo autem manent 2. pro ſequenti puncto, quod erit 276. atque ita abſolutum eſt vltimum punctum, quod eſt in operatione primum.

DEINDE paro diuiſorem ex figura 2. inuenta in Quotiente multiplicata per 20. nimirum per numerum radici quadratæ inſeruientem: quem inuenio 40. Per hunc diuido punctum ſequens 276. & pro Quotiente reperio 6. Pono ergo primum Quotientem 2. ad ſiniſtram, numerum peculiarem 20. in medio, & nouum Quotientem 6. ad dextram, ſub quo ſcribo eius quadratum 36. vt hic vides.

2 — 200 — 6.
36.

POST

POST hæc multiplico tres numeros 2.20.6. inter ſe,& producto 240. addo quadratum 36. & ſummam 276. ex puncto 276. detraho, nihilque relinquitur, atque ita abſolutum eſt ſequens punctum: aliudque ſequens punctum eſt 52.

PARO iam diuiſorem ex toto Quotiente inuento 26. ducto in 20. id eſt, in numerum peculiarem quadratæ radicis, quem inuenio 520. Et quia per hunc diuidi non poteſt punctum 52. pono in Quotiente 0. neque opus eſt multiplicare, vt reperiatur numerus ſubtrahendus, quia nihil ſubtrahitur, cum 0. multiplicans producat 0. Et ſic fit in omnibus alijs extractionibus, quando diuiſor inuetus in puncto propoſito ne ſemel quidem continetur: atque ita abſolutum eſt punctum 52. punctumque inſequens eſt 5201.

PARO iterum diuiſorem ex toto Quotiente inuento 260. ducto in numerum peculiarem 20. quem reperio 5200. qui ſemel in puncto 5201. continetur. Pono ergo totum Quotientem prius inuentum 260. ad ſiniſtram, & numerum peculiarem 20. in medio, & Quotientem 1. nunc inuentum ad dexteram, eiuſque quadratum 1. ſub illo, vt in exemplo patet.

260 - 20 1
1

MVLTIPLICATIO trium ſuperiorum numerorum facit 5200. addo quadratum 1. figuræ inuentæ 1. fit numerus 5201. qui ex puncto 5201. detractus nil relinquit. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 2601. quæ quadrate, id eſt, in ſe multiplicata producit propoſitum numerum 675201.

ATQVE hæc eſt probatio, vel examen cuiuſuis extractionis, vt videlicet radix inuenta in ſe multiplicetur vel quadrate, vel cubice, vel ſurdeſolide, &c. pro qualitate radicis. Si enim in extractione nihil fuit relictum, veluti in noſtro exemplo, neceſſe eſt, numerum productum æqualem eſſe propoſito numero, ex quo facta eſt extractio: Si autem in extractione aliquid fuit relictum, illud additum producto numero conficiet numerum propoſitum. Inſtitui quoque poteſt examen per 9. vel 7. vt in Diuiſione. Nam ſi ex inuenta radice abiiciantur 9. vel 7. quoties fieri poteſt, & reſiduum collocetur tum in ſiniſtra parte crucis, tum in dextra, quod Quotiens, vel radix inuenta ſit etiam inſtar Diuiſoris. Hoc enim reſiduo in ſe multiplicato quadrate, vel cubice, &c. & ex producto abiectis 9. vel 7. neceſſe eſt, reſiduum hoc æquale eſt reſiduo numeri propoſiti, ſi abiiciantur ex eo omnia 9. vel 7. & nihil in extractione relictum ſit. Nam alioquin ex reſiduo extractionis, & ex producto radicis inuentæ in ſe multiplicatæ abiicienda erunt omnia 9. vel 7. Hoc enim reſiduum æquale eſſe debet reſiduo numeri propoſiti, ſi omnia 9. vel 7. abiiciantur. In noſtro exemplo, ſi probatio inſtituatur per 9. reſiduum ſemper eſt 0. Si vero fiat per 7. ſtabit exemplum examinis, vt hic apparet.

0
0 X 0
0

2
4 X 4
2

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

SIT ex numero 239483190. extrahenda radix cubica.

Cubicæ radicis extractio. radix 621,

PRIMVM ex puncto 239 ſubtraho cubum 216. qui eſt maximus in eo contentus, cuius radicem 6. ſcribo in Quotiente ad marginem. Et quia relinquitur numerus 23. erit ſequens punctum 23483.

DEINDE paro Diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. pono eius quadratum 36. Et ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ, nimirum 300. & 30. vt hic vides. Multiplico ſuperiores duos numeros 36. & 300. inter ſe, & producto 10800. addo productum 180. ex multiplicatione numerorum inferiorum 6. & 30. inter ſe. Nam ſumma 10980. erit Diuiſor. Satis etiam eſſet productus ex duobus ſuperioribus inter ſe multiplicatis, nimirũ 10800. pro Diuiſore, quod in alijs extractionibus intelligendũ quoq; eſt. Diuido ergo punctum meum 23843. per diuiſorem inuentum 10980. & Quotientem 2. ſcribo poſt figuram 6. prius inuentam. Pingo poſt hæc figuram huiuſmodi. Ad dextram numerorum 36. & 300. collocato inuentam figuram 2. & infra eam eius quadratũ 4. & ſub hoc cubum eiuſdem 8. Nam ſi tam ſuperiores tres numeri 36.300. & 2. quã inferiores tres 6.30. & 4. inter ſe multiplicentur, & productis 21600. & 720. addatur cubus 8. fiet numerus 22328. quem ſi ex meo puncto 23483. ſubtraham, remanent 1155. atque adeo punctum ſequens erit 1155190.

36—300
6— 30

36—300.—2.
6— 30.—4.
8.

PARO iam alium diuiſorem hoc pacto. Supra 62. radicem hactenus inuentam ſcribo eius quadratum 3844. & ad dextram eoſdem numeros peculiares 300. & 30. Multiplicatio duorum ſuperiorum inter ſe facit diuiſorem 1153200. per quem ſi diuidatur punctum 1155190. fit Quotiens 1. poſt alias duas figuras 62. ſcribendus. Pingo iam figuram talem. Ad dextram numerorum 3844. & 300. pono figuram 1. proxime inuentam, & infra eam eius quadratum 1. & ſub hoc eiuſdem cubum 1. Nam ſi tam tres ſuperiores numeri 3844. 300. & 1. quam inferiores tres 62. 30. & 1. inter ſe multiplicentur, & productis 1153200. & 1860. addatur cubus 1. fiet numerus 1155061. quem ſi ex meo puncto 1155190. demam, remanent 129. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 621. quæ in ſe cubice multiplicata procreat numerum 239483061. cui ſi adiiciatur reſiduum 129. conflabitur numerus propoſitus 239483190.

3844—300.
62— 30.

3844—300.—1.
62— 30.—1.
1.

EXTRA-

EXTRACTIO RADICIS SVRDESOLIDÆ.

SIT numerus 1039589621. cuius radix ſurdeſolida quæritur.

PRIMVM à puncto 10395. ſubtraho maximum ſurdeſolidum 7776. in eo incluſum, cuius radicem 6. ſcribo in margine pro Quotiente: & quia numerus relinquitur 2619. ideo punctum ſequens erit 261989621.

Surdeſolidæ radicis extractio. radix 63.

DEINDE paro diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. ſcribo eius quadratum 36. & ſupra hunc eiuſdem cubum 216. & ſupra hunc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 1296. ita vt conſtituatur progreſſio Geometrica aſcendens à radice 6. denominata tot terminorum, quot numeri peculiares requiruntur in extractione ſurdeſolida. Et ad dextram colloco quatuor numeros peculiares requiſitos, vt exemplũ monſtrat. Multiplico duos ſuperiores numeros (quod ſatis eſt) 1296. & 50000. inter ſe. Productus namque numerus 64800000. erit diuiſor, per quem ſi diuidatur punctum relictum 261989621. poſſet eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Accipio autem 3. quia figura 2. eſt nimis parua, & 4. nimis magna, vt ex ſequentibus patebit; quem Quotientem 3. in margine ſcribo poſt inuentam figuram 6. Pingo ergo talem figuram. Ad dextram numerorum 1296. & 50000. pono figuram Quotientis acceptam 3. & infra eam eius quadratum 9. & ſub hoc eiuſdem cubum 27. & ſub hoc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 81. & ſub hoc eiuſdem ſurdeſolidum 243. ita vt ad dextram conſtituatur progreſſio Geometrica deſcendens denominata à figura Quotientis 3. inuenta tot terminorum vno amplius, quot numeri peculiares requiruntur: adeo vt vltimus terminus ſit numerus ſurdeſolidus figuræ inuentæ, quemadmodum in cubica extractione fuit cubus, & in quadrata quadratus. Nam ſi terni numeri tranſuerſales inter ſe multiplicẽtur, & ad productos 194400000. 19440000. 972000. 24300. adiiciatur ſurdeſolidus 243. efficietur numerus 214836543. qui ex puncto 261989621. detractus relinquit 47153078. Eſt ergo radix ſurdeſolida inuenta 63. quæ in ſe ſurdeſolide multiplicata, ſi nimirum quinquies ponatur hoc modo, 63. 63. 63. 63. 63. producit numerum 992436543. cui ſi addatur residuum 47153078. conflabitur propoſitus numerus 1039589621.

1296	50000
216	10000
36	1000
6	50

1296	50000	3.
216	10000	9.
36	1000	27.
6	50	81.
		243.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, conſtituenda eſſet progreſſio aſcendens denominata à tota radice hactenus inuenta 63. quatuor terminorum, vt hic vides. Nam productus 78764805. ex ſuperioribus duobus numeris inter ſe multiplicatis eſſet nouus diuiſor. Deinde ex noua figura inuenta eſſet conſtituenda progreſſio deſcendens vſque ad ſurdeſolidum illius figuræ, quemadmodum ſupra cum figura 3. factum eſt.

15752961	50000
250047	10000
3969	1000
63	50

ATQVE in hunc modum radicem cuiuſcunque ſpeciei extrahes, ſi diligenter inquires numeros propoſitæ radici inſeruientes, vt ſupra docuimus. Quæ ſane ratio mihi ſemper præclara eſt viſa. Nam etiamſi operatio videatur aliquanto longior eſſe, quam par ſit, difficilis tamen non eſt, quippe cum ignorari in ea non poſſit, quid faciendum ſit: cum tamen in extractionibus ab alijs Arithmeticis traditis (quadrata excepta) tanta ſit operationis difficultas, vt infinita fere memoria opus ſit ad retinendum ea, quæ ad extrahendas radices adhibenda ſunt, vt in radice cubica extrahenda per aliorum regulam, ſi adhibeatur, patebit: cum tamen cubica extractio ſit longe facilior extractione ſurdeſolida, & alijs inſequentibus, quæ fere inextricabiles ſunt.

SOLA vna difficultas tam in noſtra, quam in aliorum extractione exiſtit, quod nimirum dubium interdum ſit, num figuram nimis paruam in Quotiente alicuius puncti acceperimus. Vt in ſecundo puncto extractionis ſurdeſolidæ potuit eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Nos autem accepimus 3. Si ergo certi eſſe velimus, an accipi potuiſſet figura 4. quandoquidem ſuperfuit numerus 47153078. valde magnus, faciendum periculum erit cum figura 4. conſtituendo ſcilicet progreſſionem deſcendentem Geometricam à 4. denominatam. Et quia quatuor numeri producti tranſuerſales cum ſurdeſolido 1024. faciunt numerum 297141824. qui ex puncto ſecundo 261989621. ſubtrahi nequit; argumento eſt, figuram 4. nimis magnam eſſe, ac proinde figuram 2. nimis paruam; quandoquidem cum figura 3. tales numeri procreati ſunt, qui ex propoſito puncto potuerunt ſubtrahi. Hoc ergo remedium ſi adhibeatur, quamuis longiuſculum, tutiſſima erit noſtra ratio extrahendarum radicum.

Difficultas in extractionibus quo pacto ſuperetur.

1296	50000	4
216	10000	16
36	1000	64
6	50	256
		1024

IAM vero cur in ſuperiori tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, &c. omiſerim Zenſizenſos, ſiue quadrati quadratos, atque adeo radicis Zenſizenſicæ extractionem prætererim; ratio eſt, quod radices Zenſizenſica, Zenſicubica, Zenſizenzẽſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c. quamuis erui poſſint, ſicut alia, habent tamen aliam etiam extractionis regulam, quam vel ex ipſis nominibus colligere licet. Videlicet.

Cur exemplum non ponatur de radice Zenſizenſica, &c.

EXTRACTVRVS radicem Zenſizenſicam, ſiue quadrati quadratam, extrahe primo radicem quadratam: Deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix Zenſizenſica, quæ quæritur.

EXTRACTVRVS vero radicem Zenſicubicam, id eſt, quadrati cubicam, vel cubi quadratam, extrahe primo radicem quadratam, & ex hac deinde radicem cubicam. Vel primo erue radicem cubicam, & ex hac quadratam. Vltima enim radix eruta erit ea, quam quæris. Idem iudicium habeto de alijs radicibus numerorum compoſitorum, vt de radice Zenſizenzenſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c.

REGVLA PROPRIA EXTRACTIONIS RADICIS CVBICÆ.

QVONIAM frequentior vſus eſt radicis quadratæ, & cubicæ apud Mathematicos, quam aliarum radicum, lubet in ſtudioſorum gratiam præſcribere hoc loco regulam propriam ad cubicam radicem extrahendam: quemadmodum idem de quadrata radice fecimus in noſtra Arithmetica practica. Relictis autem aliorum regulis, quod minus faciles, minusque expeditæ ſint, excerpam vnam quaſi nouam ex ſuperiori extractione radicis cubicæ, quæ ſic ſe habet.

SIT eruenda radix cubica ex numero 1860867.

Regula propria radicis cubicæ. radix 123.

EX primo puncto 1. ad ſiniſtram ſubtraho cubum 1. maximum in eo contentum, nihilque remanet. Erit ergo ſequens punctum 860. & pro radice inuenta eſt figura 1.

PARO diuiſorem, multiplicando quadratum figuræ inuentæ, nimirum 1. per 300. qui erit 300. per quem ſi diuidam punctum 860. inuenio Quotientem 2. pro ſecunda figura radicis. Hanc duco in diuiſorem inuentum 300. facioque 600. Deinde duco quadratum nouæ figuræ 2. inuentæ, nimirum 4. in productum ex priori figura 1. multiplicata per 30. hoc eſt, in 30. facioque 120. Poſtremo ad ſummam duorum horum productorum 600 & 120. id eſt, ad 720. adiicio cubum inuentæ nouæ figuræ 2. nimirum 8. totamque ſummam 728. ex meo puncto 860. ſubtraho. Et quia remanent 132. erit vltimum punctum 132867. Scribo ergo inuentam figuram 2. poſt priorem 1.

DEINDE paro eodem modo diuiſorem nouum pro vltimo puncto. Nimirum quadratum totius radicis 12. hactenus inuentæ, id eſt, 144. duco iterum in 300. Productus enim numerus 43200. erit diuiſor, per quem ſi diuidam meum punctum 132867. reperio Quotientem 3. ſcribendum poſt radicem 12. hactenus inuentam. Hanc figuram inuentam 3. ſimiliter duco in diuiſorem inuentum 43200. facio que 129600. Deinde quadratum eiuſdem nouæ figuræ 3. nimirum 9. duco in productum ex radice 12. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc eſt in 360. efficioque 3240. Poſtremo ad ſummam horum duorum productorum 129600. & 3240. hoc eſt, ad 132840. adiicio cubum 27. ex eadem noua figura genitum, fitque numerus 132867. qui ex puncto 123867. detractus nihil relinquit. Atque ita inuenta eſt radix 123. numeri propoſiti 1860867.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, ducendus eſſet quadratus totius radicis 123. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuiſor exurgeret, &c. Vides ergo in hac regula plus memoriæ requiri, quam in ſuperiori, quamuis facilior ſit, quam aliorum regulæ. Memor tamen eſto, quando dubitas, an nimis paruam figuram in Quotiente acceperis, vt facias periculum de maiori figura, vt ſupra dictum eſt.

PROBL. 15. PROPOS. 20.

IN numeris non quadratis, non cubis, non Zenſizenſicis, non ſurdeſolidis, &c. radicem veræ propinquam inuenire.

QVANDO numerus propoſitus non eſt quadratus, aut cubus, aut Zenſizenſus, aut ſurdeſolidus, &c. non poteſt habere verã radicem, ſed per regulas ſuperiores inuenitur radix maximi quadrati, vel cubi, vel Zenſizenſi vel ſurdeſolidi in dato numero contenti. Vt igitur ſciamus, quænam fractio ad inuentam radicem addenda ſit, vt habeatur radix propinquior veræ, agendum erit hoc modo.

Quot binarij cifrarum vel ternarij vel quaternarij, &c. ad propinquam radicem eruendam apponendi ſint.

NVMERO propoſito apponantur aliquot binarij cifrarum, ſi quadrata radix propinqua inquiritur: vel ſi cubica, aliquot cifrarum ternarij: vel aliquot quaternarij, ſi radix Zenſizenſica deſideratur, vel aliquot quinarij cifrarum, ſi de ſurdeſolida radice agitur, &c. Reſpondet autem in qualibet ſpecie radicis numerus cifrarum aliquoties repetendus numero, qui in progreſſione ad initium præcedentis problematis poſita ſcribitur ſupra numerum, à quo radix nomen ſumit. Vt quia ſupra quadratum ponitur 2. ideo pro quadrata radice apponuntur binæ cifræ aliquoties, at pro cubica ternæ, quod ſupra cubum ſcriptus ſit numerus 3. &c. ita vt pro radice cubicubica propinqua apponendi ſint aliquot nouenarij cifrarum, quippe cum ſupra cubicubum numerus 9. reperiatur deſcriptus. Idem numerus cifrarum aliquoties repetendus reſpondet quoque ſignationibus punctorum, quæ faciendæ ſunt, vt radix extrahatur. Vt quia in quadrata radice extrahenda ſignatur ſecunda quæuis figura, propterea aliquot cifrarum binarij aſcribendi ſunt; in cubica vero radice aliquot ternarij cifrarum adiungendi ſunt, quia in ea extrahenda tertia quæque figura ſignatur, &c.

QVO autẽ plures binarij, vel ternarij cifrarũ, &c. numero ꝓpoſito apponẽtur, eo ꝓpinquior radix eruet.

Quæ fractio addenda ſit radici, vt propinquior radix gignatur.

APPOSITIS hoc modo cifris ad numerũ, ex quo radix eruẽda eſt, extrahẽda eſt ex toto illo numero radix, vt ſupra traditũ eſt. Deinde ex ea radice abiectis ad dexterã tot figuris, quot cifrarũ binarij, vel ternarij, vel quaternarij, &c appoſiti fuere, reliquæ figuræ radicẽ integrã dabunt, cui addẽda eſt fractio numeratorẽ habẽs figuras abiectas, denominatorẽ vero vnitatem, cũ totidem cifris, quot binarij cifrarũ, vel ternarij, &c. additi fuerunt, nimirum vel 10. ſi vnus binarius, vel ternarius, &c. additus fuit, vel 100. ſi duo binarij: vel ternarij, &c. additi fuerunt: vel 1000. ſi tres, & ſic deinceps: ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c.

EXEMPLI cauſa. Ex numero 29. extrahenda ſit radix quadrata. Appoſitis tribus binarijs cifrarum, hoc modo 2900000. inuenitur huius numeri quadrata radix 5385. minor quam vera, quippe cum in extractione aliquid remanſerit: addita vero vnitate, fiet radix 5386. maior, quam vera. Abiectis igitur tribus figuris ad dextram, propter tres cifrarum binarios additos, erit propinqua radix $5\frac{385}{1000}$. minor tamen quã vera: at $5\frac{386}{1000}$. maior quam vera. Illius enim quadratus numerus eſt $28\frac{998225}{1000000}$. minor quam propoſitus numerus 29. Huius vero numerus quadratus eſt $29\frac{8996}{1000000}$. maior eodem numero propoſito 29.

ITEM ex numero 29160. eruenda ſit radix cubica. Apponantur tres ternarij cifrarum, vt rurſus habeantur in fractione partes denominatæ à 1000. atq; ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus reſiduus: atq; adeo maior quã vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dextrã, propter tres cifrarũ ternarios appoſitos, erit propinqua

pinqua radix cubica 30 $\frac{779}{1000}$. minor quam vera, cum eius cubus ſit tantum 29158 $\frac{388419139}{1000000000}$. maior autem propinqua radix, quam vera, erit 30 $\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus ſit 29161 $\frac{230552000}{1000000000}$.

DEMONSTRATIO huius inuentionis radicis propinquæ hæc eſt. Quando pro radice quadrata apponuntur 00. ad numerum propoſitum, verbi gratia ad 5. multiplicatur propoſitus numerus per 100. hoc eſt, per quadratum radicis 10. Et quia quadrati 500. & 5. (Nam datus numerus, & conflatus ex additione 00. ſumendi ſunt tamquam quadrati, cum eorum radices quærantur) [a] habent proportionem ſuarum radicum duplicatam: Eſt autem 500. ad 5. vt 10. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 100. fecit 500. Centupla vero proportio decuplæ duplicata eſt, vt in hoc appoſito exemplo patet; erit proportio radicis numeri 500. ad radicem numeri 5. decupla. Cum ergo radix 500. ſit 22. minor quam vera, erit eius $\frac{1}{10}$. nimirum 2 $\frac{2}{10}$. radix numeri 5. minor, quam vera: ac proinde 2 $\frac{3}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando apponuntur 00. abiiciendam eſſe ex radice 22. vnam figuram, vt relinquatur radix 2 $\frac{2}{10}$. a 11. octa.

1.	10.	100.
	5.	500.

QVANDO autem apponuntur 0000. multiplicatur numerus propoſitus, verbi gratia numerus 5. per 10000. id eſt, per quadratum radicis 100. Et quia quadrati 50000. 5. [b] habent duplicatam proportionem ſuarum radicum: Eſt autem 50000. ad 5. vt 10000. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 10000. fecit 50000. Proportio autem 10000. ad 1. duplicata eſt proportionis 100. ad 1. vt in hoc exemplo patet; erit proportio radicis numeri 50000. nimirum 223. ad radicem numeri 5. vt 100. ad 1. Quare ſi radix 223. diuidatur per 100. procreabitur radix quadrata propinqua 2 $\frac{23}{100}$. minor quam vera, at 2 $\frac{24}{100}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, cum apponuntur 0000. abiiciendas eſſe ex radice 223. duas figuras, vt reliqua fiat radix 2 $\frac{23}{100}$. b 11. octa.

1.	100.	10000.
	5.	50000.

PARI ratione, ſi apponantur 000000. procreabitur radix propinqua in milleſimis, atq; ita deinceps.

RVRSVS quando pro radice cubica ad numerum propoſitum, vt ad 5. adduntur 000. multiplicatur datus numerus per 1000. id eſt, per cubum radicis 10. Et quia cubi 5000. 5. [c] habent proportionem ſuarum radicum triplicatam: Eſt autem 5000. ad 5. vt 1000. ad 1. quod multiplicans 5. fecit 5000. Proportio autem 1000. ad 1. triplicata eſt proportionis 10. ad 1. vt in hoc appoſito exemplo apparet; erit proportio radicis numeri 5000. nimirum 17. ad radicem numeri 5. vt 10. ad 1. Quocirca ſi radix 17. diuidatur per 10. fit radix cubica propinqua 1 $\frac{7}{10}$. minor quam vera, at 1 $\frac{8}{10}$. erit maior quam vera. Recte ergo præcepimus, quando pro radice cubica apponuntur 000. abiiciendam eſſe ex radice inuenta 17. vnam figuram, vt reliqua fiat radix 1 $\frac{7}{10}$. c 12. octa.

1.	10.	100.	1000.
		5.	5000.

SIMILI modo ſi apponantur 000000. inuenietur propinqua radix in centeſimis: Et ſi apponantur 000000000. in milleſimis, &c. Nam ibi multiplicatur numerus per 1000000. id eſt, per cubum radicis 100. hic vero 1000000000. nimirum per cubum radicis 1000. Cætera eodem modo demonſtrabuntur.

NEQVE vero diuerſa ratio eſt in alijs radicibus. Nam in ſurdeſolida verbi gratia, quando adduntur 00000. fit multiplicatio per 100000. id eſt, per ſurdeſolidum radicis 10. Et proportio 100000. ad 1. eſt quintuplicata proportionis 10. ad 1. vt in appoſito exemplo apparet, &c.

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.

PROBL. 16. PROPOS. 21.

RADICEM cuiuſque generis ex data minutia extrahere.

IN minutijs extrahenda eſt radix eiuſdem appellationis cum radice, quæ quæritur, tum ex numeratore, tum ex denominatore. Ita enim fiet fractio, quæ radix eſt propoſitæ minutiæ. Vt radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{2}{3}$. Et radix cubica minutiæ $\frac{8}{27}$. eſt ſimiliter $\frac{2}{3}$. Et radix Zenſizenſica minutiæ $\frac{16}{81}$. eſt quoque $\frac{2}{3}$. Et radix ſurdeſolida minutiæ $\frac{32}{243}$. eſt pari ratione $\frac{2}{3}$. & ſic de alijs. Extractio radicum ex minutijs.

QVOD ſi data minutia fuerit fractio, vel minutia alterius minutiæ, reducenda prius erit ad minutiam ſimplicem. Vt ſi quærenda ſit radix quadrata ex hac minutia minutiæ $\frac{2}{4}$. $\frac{8}{9}$, reducenda erit ad hanc ſimplicem minutiam $\frac{16}{36}$. cuius radix quadrata eſt $\frac{4}{6}$. vel $\frac{2}{3}$. &c.

SIMILITER ſi fractio adhæreat integris, erunt integra prius reducenda ad fractionem eiuſdem denominationis. Vt ſi quærenda ſit radix cubica numeri 1 $\frac{10}{27}$. reducendus erit ad hanc fractionem $\frac{64}{27}$. cuius radix cubica eſt $\frac{4}{3}$. hoc eſt, 1 $\frac{1}{3}$. &c.

SI vel numerator, vel denominator minutiæ, vel vterque numerus careat radice eius appellationis, quæ deſideratur, non habebit illa minutia radicem, quæ quæritur. Vt neque $\frac{4}{7}$. neque $\frac{6}{9}$. neque $\frac{5}{12}$. habent radicem quadratam præciſe, propterea quod denominator in prima, numerator vero in ſecunda, & vterque numerus in tertia quadratam radicem non habet.

COGNOSCES autem, an data fractio habeat radicem quæſitam, nec ne, ſi eam ad minimos terminos reduces. Si namque ita reducta habuerit radicem, dicetur quoque data minutia eandem radicem habere: Si vero reducta ad minimos terminos radicem non habuerit, neque propoſita minutia radicem habebit. Vt ſi proponatur minutia $\frac{20}{45}$. volo ſcire, an habeat radicem quadratam: Et redacta ad minimos terminos eſt $\frac{4}{9}$. quæ radicem quadratam habet $\frac{2}{3}$. Hanc ergo eandem radicem quadratam dicetur habere minutia propoſita $\frac{20}{45}$. At vero minutia $\frac{6}{9}$. non habebit radicem quadratam: quia neque $\frac{2}{3}$. in minimis terminis, ad quam reducitur, eam habet. Pari ratione minutia $\frac{24}{81}$. habebit radicem cubicam $\frac{2}{3}$. eandem nimirum, quam habet minutia $\frac{8}{27}$. in minimis terminis, ad quam illa reducitur. Minutia autem $\frac{12}{20}$. radice cubica carebit, quod minutia $\frac{3}{5}$. ad quam in minimis terminis reuocatur, eadem careat. Et ſic de alijs.

QVANDO ergo minutia ad minimos reuocata terminos radicem quæſitam non habuerit, exquirenda erit radix propinqua tam numeratoris, quam denominatoris, apponendo videlicet vtrique prius numero aliquot cifrarum binarios, vel ternarios, quaternarioſue, &c. prout quadrata radix, aut cubica, aut Zenſizenſica, &c. inquiritur. Si namque radix propinqua numeratoris per propinquam denominatoris radicem diuidatur, prodibit radix propinqua, quam quærimus. Verbi gratia, ſi proponatur minutia $\frac{6}{7}$ cuius radix quadrata inquirenda ſit, appoſitis tribus binarijs cifrarum reperietur numeratoris radix propinqua $2\frac{449}{1000}$. denominatoris vero $2\frac{645}{1000}$. Si igitur illa per hanc diuidatur, proueniet radix quæſita $\frac{2449}{2645}$. ſatis propinqua. Idem iudicium de alijs radicibus habeatur, ſi memineris tamen, in cubica tam numeratori, quam denominatori apponendos eſſe aliquot ternarios cifrarum, vt propinquæ eorum radices eruantur: In Zenſizenſica vero aliquot quaternarios, & in ſurdeſolida aliquot quinarios, &c.

QVIA vero moleſtum eſt inquirere duas radices propinquas, vnam pro numeratore propoſitæ fractionis, & pro denominatore alteram, traduntur à Cardano, & Tartalea pro radice quadrata, & cubica, quæ nimirum magis in vſu ſunt, peculiares quædam regulæ, quas hic explicare lubet, quippe cum in eis tantummodo vnius radicis propinquæ inuentione opus ſit.

Alia extractio radicis quadratæ & cubicæ ex data minutia.

PRO quadrata igitur radice, duc numeratorem in denominatorem, & producti numeri radicem quadratam proqinquam diuide per denominatorem: Vel numeratorem per radicem illam propinquam partire. Vtroq; n. modo radix propinqua fractionis propoſitæ gignetur. Et ſi quidē propinqua illa radix numeri producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera, reperietur priori modo radix fractionis propinqua minor quoq, quā vera; propterea quod numerus vero minor diuiditur: poſteriori vero modo inuenietur radix propinqua fractionis maior, quam vera, quod tunc diuiſio fiat per numerum vero minorem. Contrarium eueniet, ſi radix illa propinqua numeri ex numeratore in denominatorem producti fuerit maior quam vera. Nam priori modo gignetur radix fractionis propinqua maior, quam vera, poſteriori vero modo minor, quam vera, vt perſpicuum eſt. Hanc regulam propoſui quoque lib. 4. cap. 2. Num. 5. ibiq; eandem demonſtraui. Exemplum huius etiam regulæ ibidem habes.

PRO radice vero cubica: duc numeratorem in quadratum denominatoris, & producti numeri radicem cubicam propinquam diuide per denominatorem: Vel duc denominatorem in quadratum numeratoris, & per numeri producti radicem cubicam propinquam partire numeratorem. Vtroq; enim modo propinqua radix propoſitæ minutiæ proueniet. Et priori quidem modo, ſi illa radix cubica propinqua fuerit minor quam vera, reperietur radix propinqua fractionis minor quoq; quā vera, propterea quod diuiſio fit nnmeri vero minoris per denominatorem fractionis. Si autem radix illa propinqua fuerit maior quam vera, gignetur quoque radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc numerus vero maior per denominatorem fractionis diuidatur. Poſteriori vero modo, ſi radix illa cubica propinquior fuerit minor quam vera, producetur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuiſio fiat per numerū vero minorem: At ſi illa radix cubica propinqua fuerit maior quam vera, erit inuenta radix fractionis propinqua minor quam vera, quandoquidē tunc diuiditur numerator per numerum vero maiorē. Exemplum in fractione $\frac{8}{27}$. habente veram radicē cubicam $\frac{2}{3}$. Ducto numeratore 8. in 729. quadratum denominatoris 27. fit numerus 5822. cuius radix cubica eſt 18. Hæc diuiſa per denominatorem 27. facit $\frac{18}{27}$. id eſt, $\frac{2}{3}$. pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. Item ducto denominatore 27. in 64. quadratum numeratoris 8. gignetur numerus 1728. cuius radix cubica eſt 12. per quam ſi diuidatur numerator 8. fit Quotiens $\frac{8}{12}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. vt prius, pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. propoſitæ. Alterum exemplum in fractione $\frac{5}{7}$. non habente veram radicem cubicam. Ducto numeratore 5. in 49. quadratū denominatoris 7. fit numerus 245. cuius radix cubica propinqua $6\frac{25}{100}$. (inuenta per appoſitionē duorū ternariorum cifrarum) diuiſa per denominatorē 7. facit Quotientem $\frac{625}{700}$. hoc eſt, $\frac{25}{28}$. pro radice fractionis $\frac{5}{7}$. Item ducto denominatore 7. in 25. quadratū numeratoris 5. fit numerus 175. per cuius radicem cubicam $5\frac{59}{100}$. propinquam inuentam per appoſitionē 000000. ad 175. ſi partiamur numeratorem 5. inueniemus Quotientem $\frac{500}{559}$. pro radice cubica propinqua datæ fractionis $\frac{5}{7}$ atq; ita de alijs. Porro hoc modo reperitur radix fractionis propinquior, quam per ſuperiorem regulam: quia hic ſolum vnus error irrepit propter radicem cubicam propinquam, quæ vera non eſt, manente tam denominatore in priori modo, quam numeratore in poſteriori, in propria ſua quantitate; at in ſuperiori regula duo interueniunt errores, propter duas radices cubicas propinquas, quæ veræ non ſunt.

DEMONSTRO vtrumq; hunc modum pari ratione. Quando numerator in quadratum denominatoris ducitur, erit producti numeri radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem ac denominatorem collocandus iuxta denominatorē, vt conſtat ex ijs, quæ propoſ. 18. huius lib. demonſtrata ſunt. [a] Erit igitur proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis radicis cubicæ inuentæ ad denominatorem: [b] Eſt autem eadem proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata quoq; proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris. Igitur erit radix cubica inuenta ad denominatorem, vt radix cubica numeratoris ad radicem cubicam denominatoris: [c] ac proinde minutia, cuius numerator radix cubica inuenta, ac denominator ipſe denominator, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris, ac denominator radix cubica denominatoris. Quam ob rem ſicut hæc minutia eſt radix cubica fractionis propoſitæ, ita quoq; illa erit radix cubica eiuſdem fractionis. Diuiſa ergo radice illa cubica inuenta per denominatorem fractionis propoſitæ (quæ diuiſio fit, quia illa radix cubica inuenta eſt fractio, ac proinde, vt cognoſcatur valor minutiæ, cuius numerator radix illa inuenta, ac denominator ipſemet denominator fractionis propoſitæ, diuidendus eſt numerator huius minutiæ per eius denominatorem: alioquin ſi illa radix cubica inuenta foret numerus integer, diuiſio facienda non eſſet) producetur radix cubica fractionis propoſitæ: quemadmodum ex diuiſione radicis cubicæ numeratoris per radicem cubicam denominatoris procreatur radix cubica fractionis propoſitæ: quippe cum minutia nil aliud ſit, quam numerator per denominatorem diuiſus.

a 10. defin. quinti.
b 12. octa.
c 7. minutiarum ad finē lib. 9.

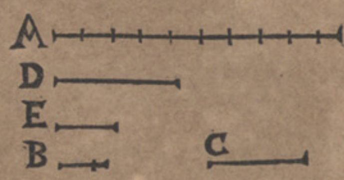
QVANDO vero denominator in quadratum numeratoris ducitur, erit numeri producti radix cubica vnus duorum mediorum proportionaliū inter numeratorem, ac denominatorem, collocandus iuxta numeratorē, vt ex demonſtratis propoſ. 18. huius lib. manifeſtū eſt. Ergo rurſus erit proportio numeratoris ad denominatorem

natorem triplicata proportionis numeratoris ad illam radicem cubicam inuentam, quemadmodum & proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris, eadem illa proportio numeratoris ad denominatorem, tamquam cubi ad cubum, triplicata eſt: Ac propterea, vt ſupra, minutia, cuius numerator ipſemet numerator fractionis propoſitæ, denominator vero radix illa cubica inuenta, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris fractionis propoſitæ, & denominator radix cubica denominatoris eiuſdem fractionis. Quocirca diuiſo numeratore per illam inuentam radicem cubicam, prodibit radix cubica fractionis propoſitæ.

PROBL. 17. PROPOS. 22.

RADICEM quadratam & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometrice inuenire.

SIT datus numerus 10. repræſentans quadratum 10. palmorum, vel pedum, vel aliarum menſurarum. Capiatur linea A, palmorum, vel pedũ 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1.[a] Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, eſſe radicem quadratam, ſiue latus quadratum, numeri A, 10. [b] Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale eſt rectangulo ſub A, & B, comprehenſo: Eſt autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B, numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perſpicuum eſt, rectam C, eſſe latus quadratum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum. a 13. ſexti. b 17. ſexti.



RVRSVS [c] inuentis inter A, & B, duabus medijs proportionalibus D, & E. Dico E, quæ minori B, propinquior eſt, latus eſſe cubicum, ſiue radicem cubicam, numeri 10. [d] Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato rectæ B, & ſub A, recta comprehenſo: Eſt autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, ſe multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquido conſtat, rectam E, eſſe latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum. c 15. huius. d lemma 18. huius.

FINIS LIBRI SEXTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ LIBER VII.

De figuris Iſoperimetris diſputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.

NOBILIS ac præſtans de Iſoperimetris figuris ſemper apud omnes habita eſt diſputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum ſit altera maior, & capacior, & quæſit omnium maxima & capaciſſima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati ſunt, putantes figuras Iſoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, eſſe inter ſe æquales, ſiue æque capaces. Immo è contrario, quod mirum eſt, nonnulli, qui ſe Geometras appellant, adduci vix poſſunt, vt credant, dari poſſe duas figuras Iſoperimetras inter ſe omnino æquales, quod tamen fieri poſſe, clariſſime propoſ. 20. 21. 22. huius demonſtrabimus.

DEFINITIONES.

I.

Definitiones ad tractationem Iſoperimetrarum figurarum pertinentes.

ISOPERIMETRÆ figuræ ſunt, quæ æquales ambitus continent.

II.

REGVLARIS figura dicitur ea, quæ & æquilatera & æquiangula eſt.

III.

CENTRVM figuræ regularis dicitur punctum illud, quod centrum eſt circuli figuræ inſcripti, vel circumſcripti.

IV.

AREA cuiuslibet figuræ dicitur capacitas, ſpatium ſiue ſuperficies intra latera ipſius comprehenſa.

V.

OMNE ſolidum rectangulum (cuius nimirum baſes æquidiſtantes ſunt, & æquales, lateraque ad baſes recta, quale eſt Parallelepipedum) contineri dicitur ſub altera baſium, ac perpendiculari ab illa baſi ad alteram protracta.

QVIA nimirum alterutra baſium indicat longitudinem ac latitudinem figuræ, perpendicularis vero altitudinem, ſiue profunditatem eiuſdem demonſtrat.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Trianguli quod cunq; cui rectangulo æquale ſit.

AREA cuiuſlibet trianguli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari à vertice ad baſim protracta, & dimidia parte baſis. Item rectangulo comprehenſo ſub ſemiſſe perpendicularis, & tota baſe. Vel denique ſemiſſi rectanguli ſub tota perpendiculari, & tota baſe comprehenſi.

SIT triangulum ABC, ex cuius vertice A, ad baſim B C, ducatur perpendicularis AD, diuidatque primo baſim

baſim BC,bifariam,vt in prima figura.Per A,ducatur EAF, in vtramque partem æquidiſtans rectæ BC , compleaturq; rectangulum BEFC, [a] quod erit duplum trianguli ABC;[b] Item duplum rectãguli ADBE. Quare rectangulũ ADBE, quod nimium continetur ſub perpendiculari AD,& dimidio baſis BD,æquale eſt triangulo ABC. Diuidat ſecundo perpendicularis AD baſim BC,non bifariam,vel etiam cadat in baſim CB,protractam,vt in 2.& 3.figura;Et per A,ducatur rurſus AF,in vtramque partem æquidiſtans rectæ BC,compleaturque rectangulum ADCF.Diuiſa deinde baſe BC,bifariam in G,ducãtur rectæ BE,GH,ipſi AD,æquidiſtantes, [c] eritque GH, æqualis perpendiculari AD.[d] Quoniam igitur rectangulum BCFE,duplum eſt trianguli ABC;[e]Item duplum rectanguli BEHG: erit rectangulum BEHG,quod continetur ſub perpendiculari GH,vel AD,& dimidio baſis BG,æquale triangulo ABC.



a 41. prim. b 36. prim. c 34. prim. d 41. prim. e 36. prim.

SECETVR iam perpendicularis AD,vel GH,bifariam in I,agaturq; per I, Ipſi BC,parallela KL.Dico triangulum idem ABC,æquale quoque eſſe rectangulo BCLK,in 1.& 2.figura, Item rectangulo BCLM,in 3.figura,comprehenſo nimirũ ſub ID,vel IG,ſemiſſe perpendicularis AD,vel HG. [f] Quoniam n.triangulũ ABC, dimidium eſt rectanguli EC,eiuſdemq; dimidium etiam eſt rectangulum BL;[g] quod rectangula BL,LE,ſuper æquales baſes æqualia ſint:æqualia inter ſe erunt triangulum ABC, & rectangulum BL. [h] Et quia rectangulum BF,contentum ſub perpendiculari AD,vel BE. & baſe trianguli BC, duplũ eſt trianguli ABC,erit triangulum ſemiſſi illius rectanguli æquale. Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis eſt, &c. quod erat oſtendendum.

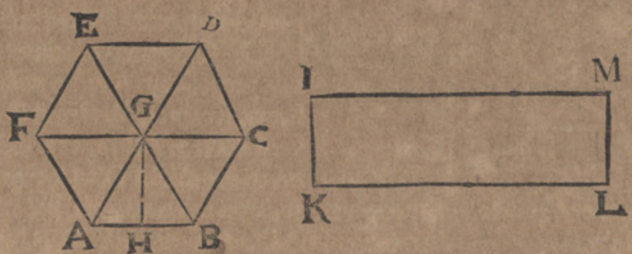
f 41. primi. g 36. prim. h 41. prim.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

AREA cuiuslibet figurę regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta,& ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.

Regularis figura quæcunq; cui rectangulo æqualis ſit.

SIT figura regularis quæcunque ABCDEF, & centrum eius punctum G, à quo ducatur GH,perpendicularis ad vnum latus,nempe ad AB : Sit quoque rectangulũ IKLM,contentũ ſub IK,quæ ęqualis ſit perpendiculari GH,& ſub KL,recta, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ ABCDEF.Dico huic rectangulo æqualem eſſe figuram regularem ABCDEF.Ducantur n. ex G,ad ſingulos angulos lineæ rectæ, vt tota figura in triãgula reſoluatur,quę omnia ęqualia inter ſe erunt,vt in corollario propoſ. 8. lib.1. Eucl. demõſtratum eſt à nobis propterea quod omnia latera triangulorum à puncto G, exeuntia ſint inter æqualia, habeantq; baſes æquales , nempe latera figuræ regularis. [a] Hinc n. efficitur, omnes angulos ad G, æquales eſſe,ac proinde ex dicto corollario,triangula ipſa inter ſe quoque eſſe æqualia.[b] Quoniam igitur rectãgulum contentum ſub GH,perpendiculari, & medietate baſis AB , æquale eſt triangulo ABG,ſi ſumantur tot huiuſmodi rectangula,in quot triangula diuiſa eſt figura regularis,erunt omnia ſimul figuræ ABCDEF, æqualia;propterea quod omnia triangula oſtenſa ſint æqualia triangulo ABG.[c] Cum igitur eadem ſimul æqualia ſint rectangulo IKLM;propterea quod KL,æqualis ponitur dimidio ambitus ABCDEF, hoc eſt, omnibus medietatibꝰ baſium ſimul;& recta IK,perpendiculari GH;erit figura regularis ABCDEF,æqualis rectangulo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt,&c.quod erat demonſtrandum.



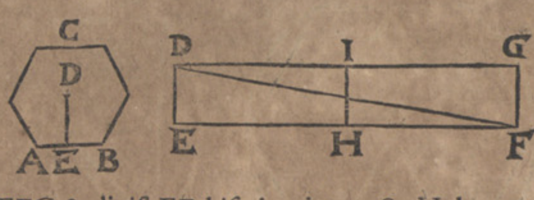
a 8. primi. b 1. huius. c 1. ſecund.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale eſt perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ,alterum vero æquale ambitui eiuſdem figuræ.

Regularis figura quæcunq; cui triangulo rectangulo æqualis ſit.

SIT rurſus figura regularis ABC, cuius centrum D , à quo perpendicularis ad latus AB,ducta ſit DE;triangulum vero rectangulum DEF, habens angulum E,rectum,& latus DE æquale perpendiculari DE,latꝰ autem EF,ęquale ambitui figuræ ABC.Dico triangulũ DEF,figuræ ABC,æquale eſſe.Compleatur enim rectangulũ DEFG;& diuiſa EF, bifariam in puncto H,ducatur HI,æquidiſtans rectæ DE. [a] Erit igitur rectangulum DEHI, contentum ſub DE, perpendiculari, & ſub EH,dimidio ambitus figuræ,æquale figuræ ABC:At rectangulo DEHI,æquale eſt triangulum DEF.Nam rectangulum DEHI,eſt dimidium rectanguli DEFG;[b] propterea quod æqualia ſunt rectangula DEHI,IHFG;[c] Triangulum quoque DEF,dimidium eſt eiuſdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF, æquale erit figuræ ABC. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo,&c.quod demonſtrandum erat.



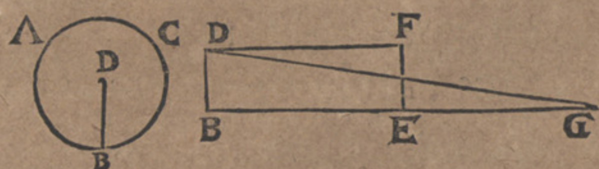
a 2. huius. b 36. prim. c 41. primi.

THEOR. 4. PROP. 4.

AREA cuiuſlibet circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.

Circulus quicunq; cui rectangulo æqualis ſit.

ESTO circulus ABC, cuius ſemidiameter DB: Rectangulum autem DBEF, comprehenſum ſub DB, ſemidiametro circuli, & BE, recta, quæ æqualis ſit dimidiatæ circumferentię circuli. Dico aream circuli ABC, æqualem eſſe rectangulo DBEF.



Producatur enim BE, in continuũ, ponaturq; EG, æqualis ipſi BE, vt ſit BG, recta æqualis toti citcumferentiæ circuli. Coniungantur denique puncta D, G, recta DG. [a] Quoniam igitur circulus ABC, æqualis eſt triangulo DBG: [b] Eſt autem triangulum DBG, rectangulo DBEF, æquale; quod baſis trianguli dupla ſit baſis trianguli; (Id quod etiam ex demonſtratione antecedentis propoſ. liquet, vbi oſtendimus, triangulum DEF, æquale eſſe rectangulo DEHI:) erit quoque circulus ABC, rectangulo DBEF, æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo, &c. quod oſtendendum erat.

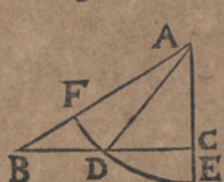
a 1. de Dimenſ. circuli Archim. b ſchol. 41 primi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Proprietas quædam trianguli rectãguli.

IN omni triangulo rectangulo, ſi ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppoſitum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius ſegmentum, quod prope angulum rectum exiſtit, quam anguli acuti prædicti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitum.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus C, ſit rectus; ducaturque ab acuto angulo A, ad latus oppoſitum BC, recta AD, vtcunque. Dico maiorem eſſe proportionem rectæ BC, ad rectam CD, quam anguli BAC, ad angulum CAD.



[a] Quoniam enim recta AD, maior quidem eſt, quam AC; minor vero, quam AB; ſi centro A, interuallo autem AD, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam AC, protractam infra punctum C, vt in E, at vero rectam AB, ſupra punctum B, vt in F. Et quia maior eſt proportio trianguli BAD, ad ſectorem FAD, quã trianguli DAC, ad ſectorẽ DAE, (propterea quod ibi eſt proportio maioris inæqualitatis, hic autem minoris inæqualitatis) [b] erit quoque permutando maior proportio trianguli BAD, ad triangulum DAC, quam ſectoris FAD, ad ſectorem DAE. [c] Componendo igitur maior quoque erit porportio trianguli BAC, ad triangulum DAC, hoc eſt, rectæ BC, ad rectam CD, [d] (habent enim triangula BAC, DAC, eandem proportionem, quam baſes BC, CD,) quam ſectoris FAE, ad ſectorem DAE, hoc eſt, quam anguli BAC, ad angulum CAD; [e] quod eandem habeant proportionem ſectores, quam anguli. Quocirca in omni triangulo rectangulo, &c. quod demonſtrandum erat.

HÆC propoſitio vera quoque eſt in triangulo non rectangulo, dummodo angulus C, maior ſit angulo ADC, vt patet; [f] quod tunc etiam AD, maior ſit, quam AC, minor vero, quam AB, &c.

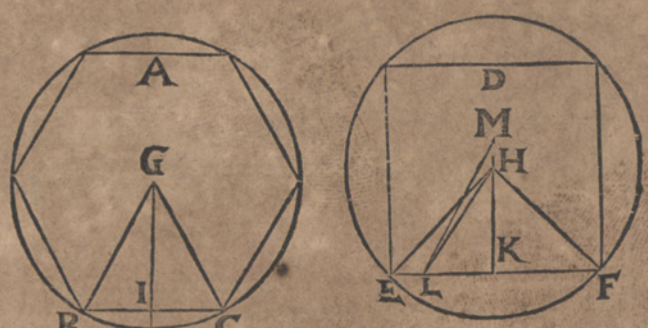
a 19. prim. b 27. quin. c 28. quin. d 1. ſexti. e corol. 33. ſexti. f 19. primi.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

ISOPERIMETRARVM figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.

Inter figuras Iſoperimetras, quæ plures angulos, ſeu latera continet, illa maior eſt.

SINT duæ figuræ regulares iſoperimetræ ABC, DEF, habeatque plura latera, ſiue angulos figura ABC, quam DEF. Dico ABC, maiorem eſſe, quam DEF. Deſcribatur enim circa figuras circuli, à quorum centris G, H, ducantur ad BC, EF, perpendiculares GI, HK, [a] quæ diuident rectas BC, EF, bifariam.



Quoniam igitur figura ABC, plura habet latera, quã DEF, ſibi iſoperimetra, efficitur, vt latus BC, ſæpius repetitum metiatur ambitum figuræ ABC, quam latus EF, ambitum figuræ DEF. Quare latus BC, minus erit latere EF, ideoque BI, medietas lateris BC, minor, quam EK, medietas lateris EF. Ponatur KL, æqualis ipſi BI, & ducantur rectæ LH, HE, HF, GB, GC, [b] Et quia omnes arcus circuli DEF, ſunt æquales, quòd & rectæ ſubtenſæ æquales ponantur; erit recta EF, ita ſubmultiplex ambitus fi-

a 3. tertij. b 28. tertij.

tus figuræ DEF, vt arcus EF, ſubmultiplex eſt circumferentiæ circuli DEF. Eademq; ratione ita multiplex ambitus figuræ ABC, rectæ BC, ſicut multiplex eſt circumferentia ABC, arcus BC. [c] Vt aũt arcus EE, ad circumferentiam circuli DEF, ita eſt angulus EHF, ad quatuor rectos, Igitur erit quoque vt recta EF, ad ambitũ figuræ DEF, hoc eſt, ad ambitum figuræ ABC, illi æqualẽ, ita angulus EHF, ad quatuor rectos: Vt autẽ ambitus figuræ ABC, ad rectam BC, ita eſt circumferentia circuli ABC, ad arcum BC, [d] hoc eſt, ita quatuor recti ad angulum BGC. Ex æquo igitur, vt recta EF, ad rectã BC, [e] hoc eſt, vt recta EK ad rectam BI, hoc eſt, ad rectã KL, ita angul⁹ EHF, ad angulum BGC, [f] hoc eſt, ita angulus EHK, ad angulum BGI. [g] Eſt autem maior proportio rectę EK, ad rectam KL, quam anguli EHK, ad angulum KHL. [h] Quare maior erit proportio quoque anguli EHK, ad angulum BGI, quam eiuſdem anguli EHK, ad angulum KHL; [i] ideoq; maior erit angulus KHL, quam angulus BGI. Cum igitur anguli HKL, GIB, ſint æquales, vtpote recti, [k] erit reliquus angulus HLK, minor reliquo angulo GBI. Fiat igitur angulus KLM, æqualis angulo GBI; cadetq; LM, extra LH; conuenietq; cum KH, producta vltra H, in puncto M. Quoniam igitur duo anguli B, I, trianguli GBI, æquales ſunt duobus angulis L, K, trianguli MLK, & latera BI, LK, æqualia, [l] erunt rectæ GI, MK, æquales. Recta ergo GI, maior eſt, quam recta HK. Quamobrem rectangulum ſub GI, & dimidio ambitu figuræ ABC, contentũ, maius erit rectangulo contento ſub HK, & dimidio ambitu figurę DEC, qui æqualis ponitur dimidio ambitus figuræ ABC. [m] Quocirca cũ illud rectangulũ oſtenſum ſit æquale figuræ ABC, hoc autem figuræ DEF, æquale; maior quoque erit figura ABC, quam figura DEF. Iſoperimetrarum ergo figurarum regularium maior eſt illa, &c. quod erat oſtendendum.

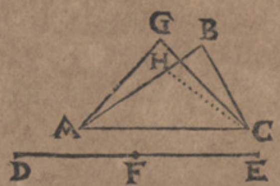
c 2. corol. 33. ſexti. — d 2 corol. 33 ſexti. — e 15. quin. — f 15. quin. — g 5. huius. — h 13. quin. — i 10. quint. — k 32. prim. — l 26. primi. — m 2. huius

PROBL. 1. PROPOS. 7.

PROPOSITO triangulo, cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum priori Iſoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, deſcribere.

Qua arte triangulũ Iſoſceles cõſtituatur Iſoperimetrum cuiuis triangulo non Iſoſceli.

SIT triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, ſint inæqualia, nempe AB, maius, quam BC; oporteatq; ſupra AC, conſtruere triangulum Iſoſceles, atque iſoperimetrum triangulo ABC. Sumatur recta DE, æqualis duobus lateribus AB, BC, ſimul, diuidaturque bifariam in F. [a] Et quoniam latera AB, BC, ſimul maiora ſunt latere AC, erunt quoque DF, FE, ſimul, maiores quam linea AC. Atq; ob id tres lineæ AC, DF, FE, ita ſeſe habebunt, vt quælibet duæ ſint reliqua maiores. [b] Si igitur ex ipſis conficiatur triangulum AGC, effectum erit, quod proponitur. Erunt enim latera AG, GC, & inter ſe æqualia. & ſimul ſumpta æqualia lateribus AB, BC, ſimul ſumptis: Addito igitur communi AC, erunt triangula ABC, AGC, iſoperimetra. Propoſito igitur triangulo cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum, &c. deſcripſimus, quod faciendum erat.



a 16. prim. — b 22. prim.

SCHOLIVM.

CADET autem neceſſario punctum G, extra triangulum ABC: Si namque caderet in latus AB, vt ad punctum H, [a] eſſet ducta recta HC, minor, quam HB BC, ſimul, & ob id triangulum AHC, non eſſet iſoperimetrum triangulo ABC, cuius contrarium ex conſtructione eſt demonſtratum. Multo minus cadet punctum G, intra triangulum ABC. Quare extra cadet, quod eſt propoſitum.

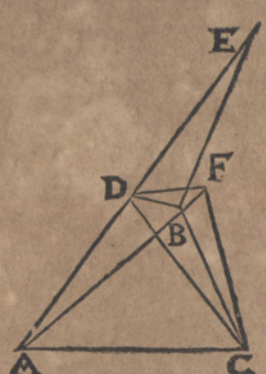
a 20. prim.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

DVORVM triangulorum iſoperimetrorum eandem habentium baſim, quorum vnius duo latera ſint æqualia, alterius vero inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia ſunt.

Iſoſceles triangulũ maius eſt triangulo ſibi Iſoperimetro non Iſoſcele.

ESTO triangulum ABC, cuius latus AB, maius ſit latere BC, [a] conſtituaturque ſuper baſim AC, triangulo ABC, triangulum Iſoperimetrum ADC, habens latera AD, DC, æqualia & inter ſe, & lateribus AB, BC, ſimul ſumptis. Dico triangulum ADC, maius eſſe triangulo ABC, Producatur enim AD, ad partes D, ſitq; DE, æqualis ipſi AD, ſiue ipſi DC. Ducantur quoque rectæ DB, BE. [b] Quoniam igitur AB, BE, maiores ſunt, quam AE, hoc eſt, quam AD, DC, ſimul, hoc eſt, quam AB, BC, ſimul; ablata communi AB, erit BE, maior quam BC. Et quia latera ED, DB, trianguli EDB, æqualia ſunt lateribus CD, DB, trianguli CDB. At vero baſis BF, baſe BC, maior, [c] erit angulus EDB, maior angulo CDB. Quare angulus EDB, maior eſt, quam dimidium anguli EDC: Eſt aũt angulus DAC, dimidiũ anguli EDC; [d] propterea quod anguli DAC, DCA, æquales ſunt, [e] & his ſimul ſumptis æqualis quoque externus angulus E-



a 7. huius. — b 20. prim. — c 25. prim. — d 5. primi. — e 32. prim.

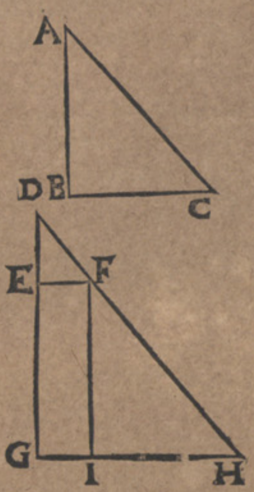
f 23. prim. g 28. pri. h 37. pri.

lus EDC. Maior igitur angulus EDB, angulo DAC.[f] Fiat angulus EDF, æqualis angulo interno DAC; cadetq; DF, recta ſupra rectam DB,[g] æquidiſtabitque rectæ AC. Producatur DF, donec cum AB, protracta conueniat in F, ducaturque recta FC.[h] Quoniam igitur triangula ADC, AFC, æqualia ſunt, triangulum autem AFC, maius eſt triangulo ABC; maius quoque erit triangulum ADC, triangulo ABC. Quam ob rem duorum triangulorum Iſoperimetrorum eandem habentium baſim, &c. quod demonſtrandum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Proprietas duorum triangulorum rectã gulorum ſimilium.

IN ſimilibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, tanquam ab vna linea, deſcriptum, æquale eſt quadratis duobus ſimul, quæ à reliquis homologis lateribus tanquam ex duobus lineis, ita vt quęlibet duo latera homologa conficiant vnam lineam rectam, deſcribuntur.



SINT triangula rectangula ſimilia ABC, DEF, ita vt anguli B, & E, ſint recti, anguli vero, C, & F, inter ſe ęquales; itẽq; anguli, A, & D, inter ſe æquales; homologaq; latera AB, DE; Item BC, EF, & AC, DF. Dico quadratum ex AC, DF, tanquam ex linea vna, deſcriptum, æquale eſſe duobus quadratis, quorum vnum ex AB, DE, tanquam ex vna linea, alterum vero ex BC, EF, tanquam ex vna quoque linea, deſcribitur. Producta namque DE, ad partes E, ſumatur EG, æqualis rectæ AB, & ducatur GH, recta æquidiſtans rectæ EF, donec cum FD, producta conueniat in puncto H; Deinde per F, ducatur recta FI, æquidiſtans rectæ EG. Erit igitur triangulum FIH, æquiangulum triangulo DEF, hoc eſt, triangulo ABC,[a] Nam angulus FIH, æqualis eſt angulo G,[b] & hic æqualis angulo DEF, hoc eſt, angulo B; angulus vero H, æqualis eſt angulo DFE, hoc eſt, angulo C;[c] ac proinde & angulus IFH, angulo A: Sunt autem & latera AB FI, æqualia;[e] Nam recta FI, eſt æqualis rectæ FG, hæc autem rectæ AB, ſumpta fuit æqualis.[d] Igitur & latera BC, IH; item AC, FH, æqualia, inter ſe erunt. Quare recta DH, compoſita erit ex AC, & DF, Recta vero DG, ex AB, & DE. Recta denique GH, ex BC, & EF;[f] quod GI, recta æqualis ſit rectæ EF.[g] Et quoniam quadratum rectæ DH, æquale eſt quadratis rectarum DG, GH, ſimul conſtat verum eſſe, quod proponitur. In ſimilibus igitur triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, &c. quod erat demonſtrandum.

a 29 primi. b 29. prim. c 32. prim. d 34. prim. e 26. prim. f 34. prim. g 47 prim.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

Qua arte conſtituãtur duo triangula iſoſcelia ſimilia, quidem inter ſe: Iſoperimetra vero aliis duobus Iſoſcelibus.

DATIS duobus triangulis Iſoſcelibus, quorum baſes inæquales exiſtant, duoq; latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius; Super eiſdem baſibus duo alia triangula iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia ſumpta, prioribus verò ſimul ſumptis Iſoperimetra ſimul ſumpta, conſtituere.

a 25. primi.

SINT ſuper baſes æquales AB, CD, duo triangula Iſoſcelia AEB, CFD, ſintque quatuor lineæ AE, EB, CF, FD, inter ſe æquales; maior autem ſit baſis AB, baſe CD: quibus poſitis,[a] erit angulus D, maior angulo F, ideoque triangula non ſimilia, cum nec ęquiangula. Oporteat iam ſuper baſes eaſdem AB, CD, conſtituere alia duo triangula iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia, iſoperimetra vero ſimul ſumpta prioribus triangulis ſimul ſumptis. Ponatur recta GH, æqualis quatuor rectis AE, EB, CF, FD,[b] diuidaturque in puncto K, vt eſſet recta compoſita ex AB, & CD, diuiſa in puncto B, hoc eſt, ſit ea proportio GK, ad KH, quæ eſt AB, ad CD. Et quia maior eſt recta AB, quam recta CD, maior quoque erit recta GK, quam recta KH, cum vtrobique ſit proportio maioris inæqualitatis. Diuidatur vtraque GK, KH, bifariam in punctis L, & M. Itaque cum ſit vt GK, ad KH, ita AB, ad CD, erit componendo, vt GH, ad KH, ita AB, CD, ſimul ad CD: Eſt autem GH, minor, quam AB, CD, ſimul,[c] quod & quatuor rectæ AE, EB, CF, FD, quæ æquales ſunt rectæ GH, maiores ſint, quam AB, CD.[d] Igitur & KH, maior erit quam CD: Eademque ratione maior erit GK, quam AB. Quoniam igitur trium rectarum AB, GL LK, duæ reliquę ſunt maiores omnifariam ſumptæ, (Duæ enim GL, LK, maiores ſunt quam AB, quod tota GK, maior ſit, quam AB, vt modo fuit oſtenſum; Manifeſtum autem eſt, AB, GL, maiores eſſe reliqua LK; Itemque AB, LK, reliqua GL, eſſe maiores, propterea quod GK, diuiſa eſt bifariam in puncto L. Idem quoque dices de tribus rectis CD, KM, MH.)[e] conſtituatur ex tribus rectis AB, GL, LK, triangulum ANB, quod erit Iſoſceles, cadetque punctum N, extra triangulum AEB, cum AE, EB, ſimul dimidium conſtituant rectæ GH; at vero AN, NB, ſimul maius efficiant, quam dimidium rectæ



b 19. ſexti. c 20. prim. d 14. quin. e 22. prim.

rectæ GH. [d] Rurſus ex tribus rectis CD, KM, MH, conſtituatur quoque triangulum COD, quod Iſoſceles erit, cadetque punctum O, intra triangulum CFD, eo quod CF, FD, ſimul æquales ſint dimidio rectæ GH; at CO, OD, ſimul minores ſint dimidio rectæ GH. Et quoniam quatuor latera AE, EB, CF, FD, ſimul; Item AN, NB, CO, OD, ſimul æqualia ſunt rectæ GH, erunt priora quatuor ſimul, poſterioribus quatuor ſimul æqualia; additis ergo communibus AB, CD, fient ſex latera AE, EB, BA, CF, FD, DC, ſimul æqualia ſex lateribus AN, NB, BA, CO, OD, DC, ſimul; ideoq; triangula ANB, COD, ſimul iſoperimetra erunt triangulis AEB, CFD, ſimul. Dico iam, quod & ſimilia inter ſe ſunt triangula ANB, COD. Nam quoniam eſt, vt AB, ad CD, ita GK, ad KH, [e] hoc eſt, ita GL, ad KM, hoc eſt, ita AN, ad CO, & NB, ad OD; erit permutando, vt AB, ad AN, ita CD, ad CO; & vt AN, ad NB, ita CO, ad OD. Proportionalia ergo ſunt latera triangulorum ANB, COD, [f] ac proinde æquiangula inter ſe erunt, & idcirco ſimilia. Quare datis duobus triangulis Iſoſcelibus, quorum baſes inæquales exiſtant, &c. conſtituimus. quod faciendum erat.

d 22. pri.
e 15. quin.
f 5. ſexti.

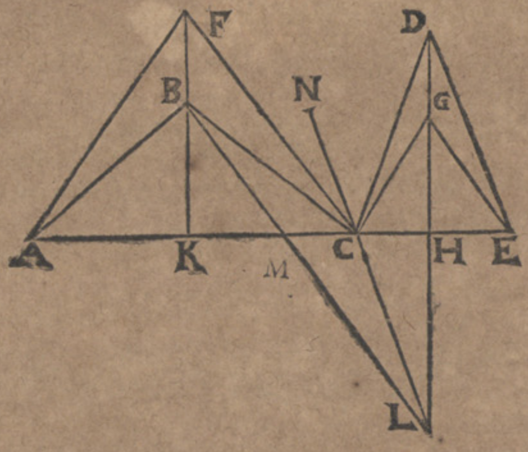
THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVO triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſibus conſtituta, vtraque ſimul maiora ſunt duobus triangulis Iſoſcelibus, vtriſque ſimul, quæ habeant eaſdem baſes cum prioribus, ſintq; diſſimilia quidem inter ſe, at iſoperimetra prioribus duobus, nec non quatuor latera inter ſe habeant æqualia.

Triangula duo Iſoſcelia ſimilia maiora ſunt duobus Iſoſcelibus non ſimilibus, quæ illis ſint iſoperimetra, baſesque habeant eaſdē.

SVPER baſibus inæqualibus AC, CE, ſint duo triangula Iſoſcelia inter ſe non ſimilia ABC, CDE, ita vt quatuor latera AB, BC, CD, DE, inter ſe ſint æqualia. [a] Atque ſuper eiſdem baſibus AC, CE, conſtituãtur alia duo triangula Iſoſcelia AFC, CGE, ſimilia inter ſe, & iſoperimetra ſimul prioribus triangulis ſimul. Dico duo triangula AFC, CGE, ſimul maiora eſſe duobus triangulis ABC, CDE, ſimul. Ponantur enim AC, CE, ſecundum lineam rectam vnam; ſitque AC, baſis maior baſe CE. Deinde ex F, per B, ducatur recta FBK, ſecans rectam AC, in puncto K; Itẽ ex D, per G; punctũ ducatur recta DGH, ſecans rectam CE, in H. Et quia latera AF, FB, triãguli AFB, æqualia ſunt laterib[9] CF, FB, trianguli CFB, & baſis AB, baſi BC, æqualis, [b] erit angul[9] AFB, angulo, CFB, æqualis. Rurſus quia latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſunt lateribus CF, FK, trianguli CFK, & angulus AFK, angulo CFK, æqualis, vt probatum eſt; [c] erunt baſes AK, KC, æquales, & anguli ad K, æquales quoque, hoc eſt, recti. Eadem ratiocinatione concludemus rectam CE, in puncto H, diuidi bifariam, angulosque ad H, eſſe rectos.

a 10. huius
b 8. prim.
c 4. prim.



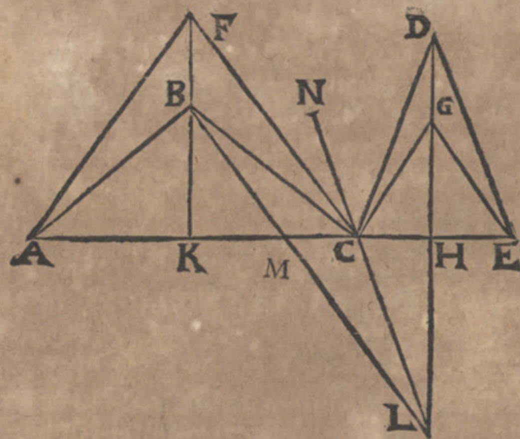
Producatur recta DH, ad partes H, ſumaturque HL, æqualis rectæ DH, & extendatur à puncto L, per punctum C, recta LCN. Quoniam vero latera DH, HC, trianguli DCH, æqualia ſunt lateribus LH, HC, trianguli LCH, & anguli ad H, æquales, vtpote recti; [d] erunt baſes DC, LC, æquales; & anguli DCH, LCH, æquales etiam: Atqui angulus DCH, maior eſt angulo GCH, & angulus GCH, æqualis eſt angulo FAK, propter ſimilitudinem triangulorum GCE, & FAC, hoc eſt, angulo FCA, [e] qui angulo FAC, æqualis eſt. Erit igitur angulus DCH, hoc eſt angulus LCH, qui illi oſtenſus eſt æqualis, hoc eſt, angulus NCK, [f] qui angulo LCH, ad verticẽ eſt æqualis, maior etiam angulo FCA: & ob id CN, recta extra rectam CF, cadet neceſſario; & rectæ LC, CB; propterea comprehendent ad partes K, angulũ BCL. Quare ſi ducatur recta BL, ſecabit ea lineam CK, in aliquo puncto inter puncta, C, & K, quod ſit M. Quoniam vero rectæ AB, BC, CD, DE, ſimul æquales ſunt rectis AF, FC, CG, GE, ſimul, propter triangula iſoperimetra, erunt quoque dimidia earum æqualia inter ſe, nimirum rectæ BC, CD, hoc eſt, BC, CL, ſimul æquales ipſis FC, CG, ſimul. [g] Sunt autem rectæ BC, CL, ſimul maiores recta BL. Igitur & FC, CG, ſimul maiores erunt eadem recta BL: ideoq; quadratum ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcriptum maius erit quadrato BL. [h] Quod autem ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcribitur quadratum, æquale eſt quadrato ex FK, GH, tanquam ex vna linea deſcripto, vna cum quadrato, quod ex KC, CH, tanquam ex vna linea, deſcribitur. [i] Quadratum vero ex LB, deſcriptum æquale eſt quadrato ex BK, LH, hoc eſt, ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto, vna cum quadrato, quod ex KM, MH; tanquam ex vna linea, deſcribitur; quod triangula rectangula BKM, LHM, ſint ſimilia inter ſe. [k] Sunt enim anguli M, ad verticem æquales, & anguli K, H, recti, [l] ideoque & reliqui KBM, HLM, æquales. Igitur quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, deſcriptum, & quadratum ex KC, CH, tanquam ex vna linea, deſcriptum, hoc eſt, quadratum KH, vtraque ſimul maiora ſunt quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto, & quadrato ex KM, MH, tanquam ex vna linea deſcripto, hoc eſt, quadrato KH, vtriſque ſimul. Ablato ergo communi quadrato KH, erit quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, deſcriptum maius quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto; ideoq; maiores erunt rectæ lineæ FK, GH, ſimul rectis BK, DH, ſimul; Ac propterea, demptis communibus BK, GH, erit FB, reliqua maior, quam reliqua DG. Eſt autem & KC, maior quam HC, eo quod tota AC, cui[9] dimidiũ eſt KC, maior

d 4. prim.
e 5. prim.
f 15. primi.
g 20. prim.
h 9. huius.
i 9. huius.
k 15. primi.
l 32. pri.

ior ponitur quam tota CE, cuius dimidium eſt HC. Quapropter rectangulum ſub FB,KC, contentum, maius erit rectangulo ſub DG,HC, contento. Et quoniam triangulum FBC, dimidium eſt rectanguli ſub FB,KC, cōtenti; (Nam ſi ſuper FB, conſtituatur rectangulum altitudinem habens KC, ita vt triangulum, & rectangulum inter eaſdem ſint parallelas; [a] erit triangulum parallelogrammi dimidiū. quod quidem parallelogrammum idem eſt, quod rectangulum ſub FB,KC, contentum, vt conſtat.) Triangulum vero DGC, dimidium eſt rectanguli contenti ſub DG,HC; (Si enim ſuper DG, conſtituatur rectangulum altitudinem habens HC, ita vt triangulum, & rectangulum inter eaſdem ſint parallelas: [b] erit triangulum parallelogrammi dimidium, quod quidem parallelogrammum idem eſt, quod rectangulum ſub DG,HC, cōtentum, vt conſtat.) erit quoq; triangulum FBC, maius triangulo DGC; ac ꝓpterea duplum trianguli FBC, nimirum rectilineum AFCBA, maius erit duplo trianguli DGC, vtpote rectilineo CDEGC. Quocirca, addito communi compoſito ex triangulis ABC,CGE; erunt triangula AFC,CGE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC,CDE, vtriſque ſimul. Duo ergo triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſib⁹ conſtituta, &c. quod oſtendendum erat.

a 41 prim.

b 41. prim.



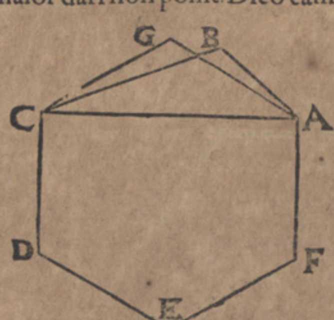
THEOR. 10. PROPOS. 12.

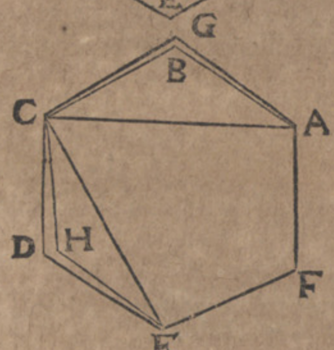
Inter Iſoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima & æquilatera eſt, & æquiangula.

ISOPERIMETRARVM figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula.

ESTO figura quotcunque laterum ABCDEF, maxima inter omnes totidem laterum ſibi Iſoperimetras, ita vt maior dari non poſſit. Dico eam eſſe æquilateram, & æquiangulam. Sit enim, ſi fieri poteſt, primum non æquilatera, ſed ſint latera AB, BC, proxima inæqualia. Ducta igitur recta AC, [a] ſi conſtituatur ſuper AC, triangulum Iſoſceles AGC, quod ſit iſoperimetrum triangulo ABC; erit tota figura AGC,DEF, iſoperimetra figuræ ABCDEF. [b] Et quia triangulum AGC, maius eſt triangulo ABC; ſi addatur commune polygonum ACDEF, erit figura AGCDEF, maior quam figura ABCDEF. quod eſt contrarium hypotheſi. Non ergo inæqualia ſunt latera AB,BC, ſed æqualia. Eademque ratione oſtendemus, latera proxima BC,CD; Item proxima deinceps æqualia eſſe. Maxima igitur figura inter ſibi iſoperimetras æqualia numero latera habentes æquilatera eſt, quod eſt primum.

a 7. huius.
b 8. huius.





SIT deinde, ſi fieri poteſt, figura ABCDEF, æquilatera quidem, vt iam demonſtratum eſt, at non æquiangula, ſed anguli B,D, non proximi inæquales ſint, maiorque angulus B, quam angulus D. Quoniam igitur demōſtratum eſt, figuram maximam eſſe æquilateram, erunt duo triangula ABC,CDE, Iſoſcelia, ita vt duo latera AB, BC, æqualia ſint duobus laterib⁹ CD,DE: Ponitur autem angulus B, maior angulo D; [c] erit recta AC, maior quam recta CE. [d] Si igitur conſtituantur ſuper baſes AC,CE, alia duo triangula Iſoſcelia AGC,CHE, ſimilia inter ſe, & Iſoperimetra triangulis ABC,CDE; [e] erunt triangula AGC,CHE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC,CDE, vtriſque ſimul. Si igitur addatur commune polygonum ACEF; erit figura AGCHEF, maior, quam figura ABCDEF quod cum hypotheſi pugnat, quod hæc omnium maxima ponatur, Non ergo inequales ſunt anguli B,D, ſed æquales. Eademque ratione oſtendem⁹, angulos non proximos C,E, æquales eſſe, & binos alios quoſuis non proximos. Ex quo efficitur, totam figuram æquiangulam eſſe, nempe proximos etiam angulos inter ſe eſſe æquales. Si enim verbi gratia angulus B, non dicatur æqualis eſſe angulo C; cum angulus C, æqualis ſit non proximo angulo E; erit quoque angulus B, angulo E, non æqualis, quod abſurdum eſt. Bini enim anguli non proximi inter ſe æquales ſunt, vt oſtendimus. Maxima ergo figura inter ſibi Iſoperimetras æqualia numero latera habentes non ſolum æquilatera, ſed & æquiangula eſt. Quocirca Iſoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. quod demonſtrandum erat.

c 24 prim.
d 10. huius
e 11. huius

SCHOLIVM.

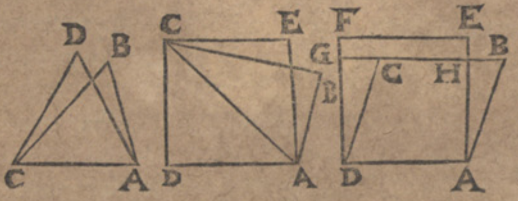
Quæ obſeruanda ſint

CIRCA demonſtrationem prioris partis huius propoſ. obſeruandum eſt, accipienda eſſe duo latera inæqualia

æqualia proxima inter ſe, ita vt angulum conſtituant, nullumque aliud inter ea interponatur, qualia ſunt latera accepta AB, BC, angulum B, efficientia. Hac enim ratione, ducta recta AC, factum erit triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, inæqualia ſunt, vt in demonſtratione aſſumebatur. Neque vero dubitare quis poterit, in figura non æquilatera, qualis ponitur ABCDEF, accipi poſſe duo latera proxima inæqualia. Nam ſi quis dicat latera AB, BC, eſſe æqualia, ſumemus latera AB, AF, quæ ſi dicantur etiam æqualia eſſe, accipiemus AF, FE: Et ſi hæc adhuc æqualia eſſe dicantur, capiemus EF, ED; & ſic deinceps progrediemur, donec ad duo latera proxima inæqualia veniamus, quæ angulum conſtituant. Neceſſario autem ad duo huiuſmodi latera perueniemus: alias figura eſſet æquilatera, quod non conceditur. *In demonſtratione huius prop.*

QVOD vero ad poſterioris partis demonſtrationem attinet, aduertendum eſt, in figuris multilateris accipiendos eſſe duos angulos inæquales non proximos inter ſe, ita vt inter ipſos vnus, vel plures anguli interponantur, quales ſunt anguli accepti B, D, inter quos ponitur angulus C. Hac enim ratione duæ rectæ AC, CE, dictos angulos ſubtendentes ſe mutuo non interſecabunt, conſtituenturque duæ figuræ ABCDEF, AGCHEF, ex additione communis figuræ ACEF, ad triangula ſupra baſes AC, CE, conſtructa: quod non contingeret, ſi duo anguli inæquales proximi inter ſe ſumerentur, vt conſtat. Non eſt autem in dubium vertendum, an tales duo anguli poſſint accipi. In omni enim figura multilatera non æquiangula neceſſario erunt aliqui duo anguli non proximi inter ſe inæquales. Nam in propoſita figura ABCDEF, comparabimus angulum B, cum omnibus non proximis angulis D, E, F, qui neceſſario duo erunt in pentagono, in hexagono vero tres, & ita deinceps. Quod ſi vni alicui eorum fuerit inæqualis, habebimus iam duos angulos non proximos inter ſe inæquales, nempe angulum B, & illum, cui inæqualis eſt: Si vero omnibus dicatur æqualis, erit tunc angulus B, ſaltem alteri proximorum inæqualis, alias figura eſſet æquiangula. Si ergo inæqualis fuerit angulo A, erit angulus A, tam angulo E, quam angulo D, non proximo inæqualis, cum vtriuis horum æqualis ponatur angulus B: Si vero inæqualis fuerit angulo C, erit angulus C, tam angulo E, quam angulo F, non proximo inæqualis, quod vtriuis horum angulus B, ponatur æqualis.

SED quoniam propoſitio hæc demonſtrata tantum eſt in figuris multilateris, vt ex iis conſtat, quæ proxime de duobus angulis nõ proximis inæqualibus diximus: In triangulis enim, & quadrilateris figuris anguli eiuſmodi reperiri non poſſunt, cum in triangulis æquilateris omnes anguli ſint æquales, vt ex coroll. propo. 5. lib. 1. Euclid. patet; in quadrilateris autem figuris omnia latera habentibus æqualia, (quoniam neceſſario ſunt parallelogramma, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus) [a] ſinguli oppoſiti inter ſe ſint æquales: Idcirco totam hanc propoſitionem in triangulis, & quadrilateris figuris ita demonſtrabimus. *a 34. primi.*



Sit primum triangulum ABC, inter ſibi Iſoperimetra triangula maximum. Dico illud æquilaterum eſſe & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſed latera AB, BC, ſunt inæqualia, [b] ſi ſuper baſem AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles ADC, ita vt latera AD, DC, ſimul æqualia ſint lateribus AB, BC, ſimul; erunt triangula ABC, ADC, Iſoperimetra; [c] atque adeo ADC, maius, quam ABC, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilaterum ergo eſt triangulum ABC. Igitur, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Euclid. & æquiangulum eſt, quod eſt propoſitum. *b 7. huius* *c 8. huius.*

DEINDE ſit quadrilaterum ABCD, inter omnia ſibi Iſoperimetra maximum. Dico illud eſſe & æquilaterum, & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſint latera AB, BC, ſi fieri poteſt, inæqualia, ducaturque recta AC. [d] Si igitur ſuper AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles AEC, iſoperimetrum triangulo ABC; [e] erit triangulum AEC, maius triangulo ABC. Addito ergo communi triangulo ACD, erit quadrilaterum AECD, maius quadrilatero ABCD, quod eſt contra hypotheſim, cum ABCD, maximum ponatur. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilatera ergo eſt figura ABCD. *d 7. huius.* *e 8. huius.*

SIT iam quadrilatera figura ABCD, omnium iſoperimetrarum maxima, æquilatera, vt oſtenſum eſt, at non æquiangula, ſed anguli BAD, CDA, inæquales ſint. Quoniam igitur figura ABCD, cum ſit æquilatera, parallelogrammum eſt, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus; neuterque angulorum A, D, rectus eſt; (alias, [f] cum ambo duobus rectis ſint æquales, eſſent ambo recti) ſed vnus acutus, & obtuſus alter: ſi educantur ex A, & D, duæ lineæ perpendiculares AH, DG, occurrentes lateri BC in H, & G; erit quoque AHGD, parallelogrammum. [g] Quia vero latera AB, DC, maiora ſunt lateribus AH, DG, producantur hæc, vt fiant rectæ AE, DF, lateribus AB, DC, æquales, iungaturque recta EF. Quo facto, erit figura AEFD, iſoperimetra parallelogrammo ABCD; cum latera AE, DF, lateribus AB, DC, æqualia ſint, latus vero AD, commune, & latus EF lateri BC, æquale, [h] quod vtrumque æquale ſit lateri oppoſito AD. Cum ergo figura AEFD, maior ſit parallelogrammo AHGD; [i] hoc autem æquale ſit parallelogrammo ABCD; erit quoque figura AEFD, maior parallelogrammo ABCD. Quare cum eidem ſit iſoperimetra, non erit ABCD, figura quadrilatera inter ſibi Iſoperimetras maxima, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæquales ſunt anguli BAD, CDA, ſed æquales: atque adeo cum ABCD, ſit parallelogrammum, [k] erunt anguli oppoſiti B, C, angulis D, A, æquales, propterea que tota figura æquiangula erit, quod eſt propoſitum. *f 29. primi.* *g 19. prim.* *h 34. prim.* *i 35. primi.* *k 34. prim.*

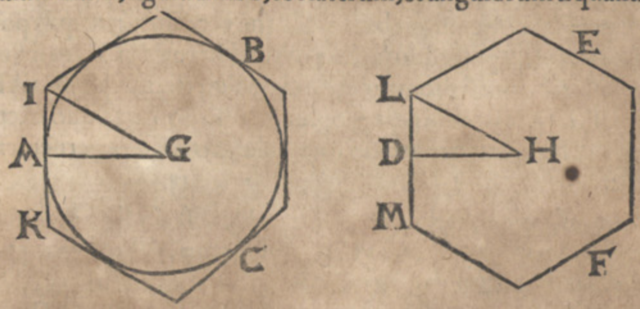
THEOR. 11. PROPOS. 13.

CIRCVLVS omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt.

ESTO circulus ABC, figura autem regularis quotcunque laterum ei iſoperimetra DEF. Dico circulum

Circulus omnium figurarum recti linearum regularium ſibi iſoperimetrarum maximus eſt.

ABC, eſſe maiorem figura DEF. Sit enim G, centrum circuli ABC, & H, centrum figuræ DEF; Deſcribaturque circa circulum ABC, figura BIKC, tot laterum, & angulorum æqualium, quot continet figura DEF, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. docuimus. Deinde ex puncto contactus A, ad centrum G, ducatur recta AG, [a] quæ perpendicularis erit ad IK. Ducatur rurſus HD, ad LM, perpendicularis; [b] Diuidentq; rectæ GA, HD, rectas IK, LM, bifariã, vt conſtat, ſi figuris BIKC,



a 18. tertij.
b 3. tertij.

DEF, circumſcribantur circuli. Ducantur quoque rectæ GI, HL, quæ diuident angulos I, & L, bifariam, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 12. lib. 4. Euclid. Quoniam igitur toti anguli I, & L, ſunt æquales, propter ſimilitudinem figurarum, erunt etiam ipſorum dimidia (videlicet anguli AIG, DLH,) æqualia. Cum ergo & anguli IAG, LDH, ſint æquales, vt pote recti; [c] erunt triangula AIH, DLH, æquiangula. Quia vero ambitus figuræ BIKC, maior eſt (per 1. propoſ. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro) ambitu circuli ABC; Ambitus autem circuli æqualis ponitur ambitui figuræ DEF; erit quoque ambitus figuræ BIKC, maior ambitu figuræ DEF. Cum igitur figuræ ſint regulares, & ſimiles, erit etiam latus IK, latere LM, maius; & ideo IA, dimidium lateris IK, maius quam LD, dimidium lateris LM. [d] Rurſus quoniam eſt, vt IA, ad AG, ita LD, ad DH; Et eſt IA, maior quam LD; [e] erit quoq; AG, maior, quam DH. Quamobrem rectangulum contentum ſub AG, & dimidio ambitu circuli ABC, [f] quod circulo ABC, eſt æquale, maius eſt, quam rectangulum contentum ſub DH, & dimidio ambitu figuræ DEF, hoc eſt, [g] quam area figuræ DEF. Circulus igitur omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt, quod oſtendendum erat.

c 32. primi.
d 4. ſexti.
e 14. quint.
f 4. huius
g 2. huius.

COROLLARIVM.

Circulus omnibus figuris rectilineis ſibi iſoperimetris maior eſt.

EX omnibus iis, quæ demonſtrata ſunt, perſpicuum eſt, circulum abſolute omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximum eſſe.

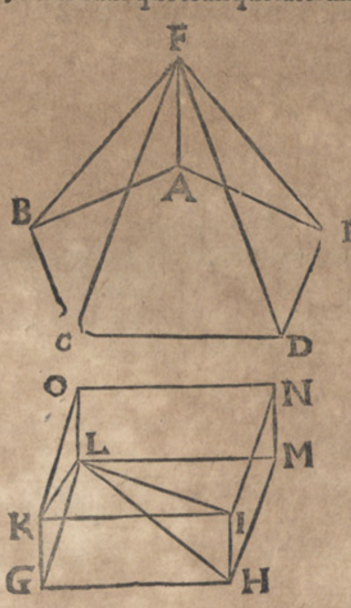
QVONIAM enim ex propoſitione 5. habetur, regularium figurarum iſoperimetrarum eam, quæ plura latera continet, eſſe maiorem: Rurſus ex propoſitione 12. conſtat, inter omnes figuras iſoperimetras æqualia numero latera habentes, eam maximam eſſe, quæ regularis eſt: Ex hac denique 13. propoſitione perſpicuum eſt, circulum omnium figurarum iſoperimetrarum regularium eſſe maximum: Manifeſte concluditur, circulum abſolute ac ſimpliciter omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximum eſſe, quod eſt propoſitum.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

Pyramis qualibet cui parallelepipedo ſit æqualis.

AREA cuiuslibet pyramidis æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub perpendiculari à vertice ad baſim protracta, & tertia parte baſis.

SIT pyramis, cuius baſis quotcunque laterum ABCDE, & vertex F. Solidum autem rectangulum GN, cuius baſis GHIK, æqualis ſit tertiæ parti baſis ABCDE; altitudo vero ſiue perpendicularis GL, æqualis altitudini pyramidis, ſiue perpendiculari à vertice pyramidis ad eius baſim productæ. Dico ſolidum rectangulum GN, æquale eſſe pyramidi ABCDEF. Ducantur enim ab omnibus angulis baſis GHIK, ad aliquod punctum baſis oppoſitæ, nimirũ ad L, lineæ rectæ, ita, vt conſtituatur pyramis GHIKL, eandem habens baſim cum ſolido GN, eandemque altitudinem & cum eodem ſolido GN, & cum pyramide ABCDEF. [a] Quoniam igitur pyramis ABCDEF, tripla eſt pyramidis GHIKL; [b] Et ſolidum GN, triplum quoq; eſt eiuſdem pyramidis GHIKL: [c] erit ſolidum GN, pyramidi ABCDEF, ęquale. Quapropter area cuiuslibet pyramidis ęqualis eſt ſolido rectangulo, &c. quod erat oſtendendum.



a ſchol. 6. duodec.
b coroll. 7. duodec.
c 9. quinti.

THEOR.

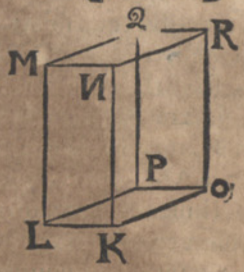
THEOR. 13. PROPOS. 15.

AREA cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, & circa ſphæram aliquam circumſcriptibilis, hoc eſt, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad baſes eius productæ ſunt æquales, æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis.

Corpus quodlibet, in qua ſphæra deſcribi poteſt, cui parallelepipedo æquale ſit.

ESTO corpus planis ſuperficiebus contentum ABCD, circa ſphæram EFGH, cuius centrum I, deſcriptum, in quo ducantur ex I, ad puncta contactuum lineæ rectæ IE, IF, IG, IH, quæ ad baſes ſolidi erunt perpendiculares. Nam ſi verbi gratia per rectam IE, ducatur planum faciens in ſphæra, per propoſ. 1. lib. 1. Theod. circulum EFGH, [a] & in baſi rectam AB; tanget circulus EFGH, rectam AB, in puncto E, propterea quod ſphæra baſim non ſecat, ſed tangit. [b] Igitur IE, ad rectam AB, perpendicularis erit. Eadem ratione, ſi per IE, ducatur aliud planum à priori differens, fiet alius circulus in ſphæra, & alia linea recta in eadem baſi ſecans rectam AB, in E; ad quam etiam IE, perpendicularis erit: [c] Ac propterea IE, ad baſim ſolidi per illas rectas ductam perpendicularis erit. Non aliter oſtendemus rectas IF, IG, IH, ad alias baſes eſſe perpendiculares. Sit quoque ſolidum rectangulum LR, cuius baſis KLMN, ſit æqualis tertiæ parti ambitus corporis ABCD; altitudo vero ſiue perpendicularis LP, æqualis vni perpendicularium ex centro I, ad baſes corporis ABCD, cadentium; quæ omnes inter ſe æquales ſunt ex defin. ſphæræ. Dico, ſolidum LR, corpori ABCD, æquale eſſe. Ducantur enim ex centro I, ad omnes angulos corporis ABCD, rectæ lineæ, vt totum corpus in pyramides, ex quibus componitur, diuidatur: quarũ quidem pyramidum baſes eædem ſunt quæ corporis, vertex autẽ communis centrum I. [d] Quoniam igitur quælibet harum pyramidum æqualis eſt ſolido rectangulo ſub perpendiculari LP, quæ ſingulis perpendicularibus corporis ABCD, æqualis ponitur, & tertia parte ſuæ baſis contento; Si fiant tot ſolida rectangula, quot ſunt pyramides, erunt omnia hæc ſimul æqualia ſolido rectangulo LR. (Si enim rectangulum KLMN, diuidatur in tot rectangula, quot baſes ſunt in ſolido propoſito, ita vt primũ æquale ſit tertiæ parti vnius baſis, & ſecundum tertiæ parti alterius, & ita deinceps, quandoquidẽ totum rectangulum KLMN, æquale ponitur tertiæ parti totius ambitus ſolidi; intelligantur autem ſuper illa rectangula conſtitui parallelepipeda; erunt omnia ſimul æqualia parallelepipedo LR.) [e] Cum ergo ſingula parallelepipeda ſingulis pyramidibus ſint æqualia; erunt quoque omnes pyramides, nempe corpus ABCD, ex illis compoſitum, æquale ſolido rectangulo LR. Quamobrem area cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, &c. quod demonſtrandum erat.





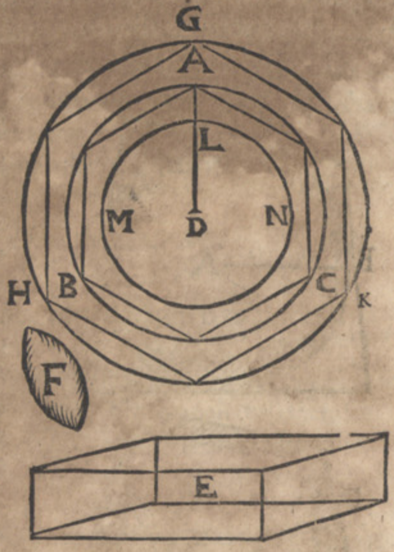
a 3. vndec.
b 18. tertij.
c 4. vnde.
d 14. huius.
e 14. huius.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

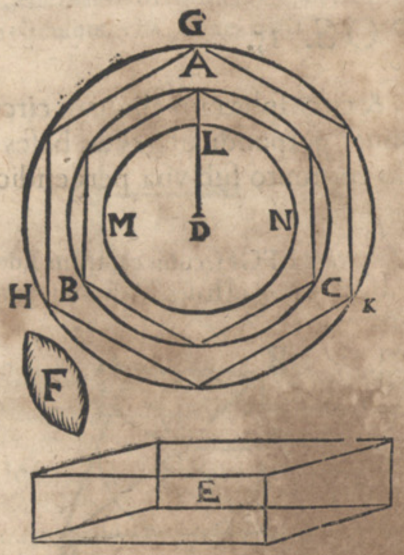
AREA cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.

Sphæra quælibet cui parallelepipedo ſit æqualis.

ESTO ſphæra ABC, cuius centrum D, ſemidiameter AD: Solidum autem rectangulum E, contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC. Dico corpus E, ſphæræ ABC, eſſe æquale. Nam ſi non eſt æquale: ſit, ſi fieri poteſt, primum maius, ſitque exceſſus corporis E, ſupra ſphæram ABC, quantitas F. Intelligatur circa cẽtrum D, deſcripta ſphæra GHK, maior quam ſphæra ABC, ita tamen, vt exceſſus ſphęræ GHK, ſupra ſphæram ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra GHK, ſit vel æqualis ſolido E, quando nimirum ipſa excedit ſphæram ABC, præciſe quantitate F; vel minor, ſi nimirum ipſa excedit ſphæram ABC, minori quantitate, quam F. Neceſſario enim aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit magnitudini E, atq; adeo maior quam ſphæra ABC, vel maior quidem quã ſphæra ABC, minor vero quam magnitudo E, quæ maior ponitur, quam ſphæra ABC. [a] Inſcribatur deinde intra ſphæram GHK, corpus, quod non tangat ſphæram ABC, ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad baſes iſtius corporis eductarum maior ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes angulos dicti corporis ducantur lineæ rectæ, vt totum corpus in pyramides diuidatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis GHK, vertex autem communis centrum D: [b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Atque idcirco ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuslibet pyramidis, minus ipſa pyramide erit. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſub ſingulis perpendicularibus



a 17. duod.
b 14. huius



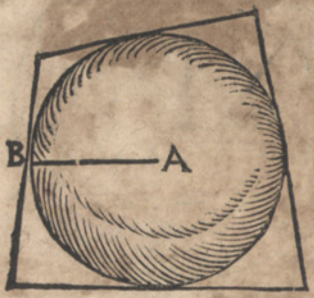
cularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertiis partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus præfati corporis inſcripti intra ſphæram GHK, minus corpore inſcripto. Quoniã vero ambitus corporis inſcripti maior eſt ambitu ſphæræ ABC, vt demonſtrare Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 27. atque adeo & tertia pars ambitus dicti corporis maior tertia parte ambitus ſphæræ ABC, erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, hoc eſt, ſolidum E, multo minus corpore inſcripto intra ſphærã GHK: Poſita eſt autem ſphæra GHK, vel æqualis ſolido E, vel minor. Igitur & ſphæra GHK, minor erit corpore intra ipſam deſcripto, totum parte, quod eſt abſurdum. Quocirca ſolidum E, maius non erit ſphæra ABC.

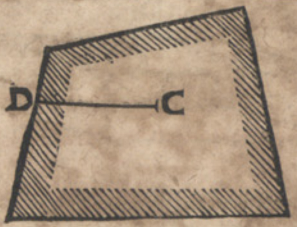
SIT deinde, ſi fieri poteſt, ſolidũ E, minus, quã ſphæra ABC, excedaturq; à ſphæra ABC quantitate F. Intelligatur circa centrum D, ſphæra deſcripta LMN, minor quam ſphæra ABC, ita tamen, vt exceſſus, quo ſphæra LMN, ſuperatur à ſphæra ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra LMN, ſit vel æqualis ſolido E, ſi nimirum ipſa excedatur à ſphæra ABC, quantitate F, vel maior ſolido E, ſi videlicet ſphæra LMN, à ſphæra ABC, ſuperetur minori quantitate, quam F. Neceſſario n. aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit ſolido E, atque adeo minor quam ſphæra ABC, vel minor quidem quã *a 17. duod.* ſphæra ABC, maior vero quam magnitudo E, quæ minor ponitur, quam ſphæra ABC.[a] Deſcribatur deinde intra ſphæram ABC, corpus, quod minime tangat ſphæram LMN; ita vt vnaquæq; perpendicularium ex centro D, ad baſes huius corporis inſcripti cadentium minor ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes eius angulos lineæ extendantur, vt totum corpus in pyramides reſoluatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis *b 14. huius.* ABC, vertex autem communis centrum D;[b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Et ideo ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuſuis pyramidis, maius erit pyramide ipſa. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſunt ſingulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertiis partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis, erit ſolidum rectangulum contentũ ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus dicti corporis ſphæræ ABC, inſcripti maius corpore inſcripto. Cum igitur ambitus ſphæræ ABC, maior ſit ambitu corporis ſibi inſcripti, atque adeo & tertia pars ambitus ſphæræ maior tertia parte ambitus dicti corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub AD, ſemidiametro, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, hoc eſt, ſolidum E, multo maius corpore inſcripto intra ſphæram ABC: Ponebatur autem ſphæra LMN, vel æqualis ſolido E, vel maior. Igitur & ſphæra LMN, maior erit corpore intra ſphæram ABC, deſcripto, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur ſolidum E, minus erit ſphæra ABC. Cum ergo neq; maius ſit oſtenſum, æquale omnino erit: Ac propterea area cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circũſcriptibilibus, quæ planis ſuperficiebus continentur.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, circaque alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, hoc eſt, quorum omnes perpendiculares ad baſes productæ ab aliquo puncto medio ſint æquales, maior eſt.





ESTO ſphæra A, cuius centrum A, & ſemidiameter AB: Solidum autem circa aliquam ſpheram circumſcriptibile ſibi iſoperimetrum C, cuius vna perpendicularium CD. Dico ſphæram A, maiorem eſſe ſolido C. Intelligatur enim circa ſphærã A, corpus deſcriptum ſimile prorſus ſolido C, ita vt ſingula quoque latera contingant ſphæram A, hoc eſt, eius perpendiculares, quarum vna ſit AB, ſint quoque æquales, nempe ſemidiametri ſphæræ A, exiſtentes. Itaque quoniam ambitus corporis circa ſphæram A, maior eſt ambitu ſphæræ A, (per ea, quæ ab Archimede ſunt demonſtrata lib. 1. de ſphæra, & cylindro, propoſit. 27.) erit quoque eiuſdem corporis ambitus maior ambitu corporis C. Quare perpendicularis AB, hoc eſt, ſemidiameter ſphæræ A, maior erit perpendiculari CD. Quamobrem rectangulum ſolidum contentum ſub ſemidiametro AB, & tertia parte ambitus *a 16. huius.* ſphæræ A,[a] quod ſphæræ A, æquale eſt, maius erit, quam rectangulum ſolidum contentum ſub perpendiculari CD, & tertia parte ambitus corporis C,[b] hoc eſt, quam corpus C. Sphæra igitur *b 15. huius.* omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, &c. maior eſt. Quod erat demonſtrandum.

COROL-

COROLLARIVM.

CONSTAT hinc, ſphæram maiorem eſſe quolibet corpore regulari ſibi Iſoperimetro: quippe cum omnes perpendiculares è centro ad baſes corporis regularis inter ſe æquales ſint; propterea quod æquales ſunt ſemidiametro ſphæræ,[c] quæ intra corpus deſcribi poteſt.

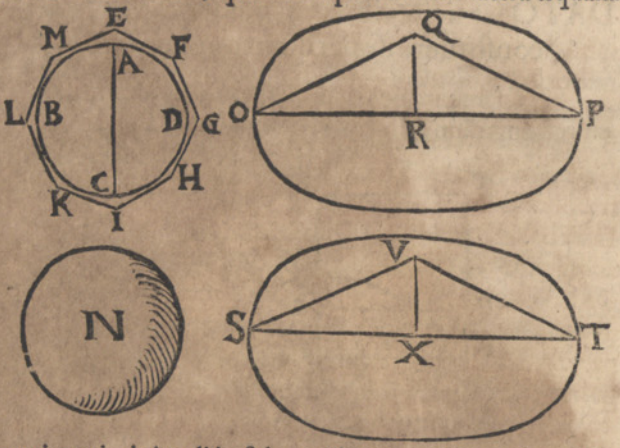
Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro.

c 21. quintidec.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis contineantur, ita vt latera omnia conica ſint æqualia, maior eſt.

ESTO circulus ABCD, cui circumſcribatur figura regularis EFGHIKLM, ita vt numerus laterum à quaternario menſuretur, cuiuſmodi eſt quadratum, figura 8.12.16.20.24. vel 28. laterum, angulorumque æqualium, &c. Ducaturque ex angulo E, per centrum ad angulum I, recta EI. Itaq; ſi circa manentem rectam EI, immobilem circumagatur planum, in quo eſt circulus ABCD, & figura EFGHIKLM, deſcribet circulus ſphæram, figura vero corpus circa ſphæram conicis ſuperficiebus contentum, quarum ſuperficierum latera æqualia ſunt, nempe eadem, quæ figuræ, vt ab Archimede demonſtratur propoſ.22.& 27.lib.1.de ſphæra & cylindro. Sit iam ſphæra N, iſoperimetra corpori EFGHIKLM, circa ſphæram ABCD, deſcripto. Dico ſphæram N, dicto corpore eſſe maiorem. Quoniam enim ambitus ſolidi EFGHIKLM, maior eſt (per propoſ.27.lib.1. Archimedis de ſphæra & cylindro) ambitu ſphæræ ABCD, erit quoque ambitus ſphæræ N, maior ambitu ſphæræ ABCD, ideoque ſemidiameter ſphæræ N, maior erit ſemidiametro ſphæræ ABCD. Et quia ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt (per propoſ.31.lib.1. Archimedis de ſphæra & cylindro) maximi circuli in ſphæra; ſi ſumatur circulus OP, quadruplus circuli maximi in ſphæra N; (quod quidem facile fiet, ſi diameter OP, dupla ſumatur diametri maximi circuli in ſphæra N. [a] Quoniam enim vt circulus OP, ad circulum maximum in ſphæra N, ita quadratum diametri OP, ad quadratum diametri circuli maximi in ſphæra N; [b] Eſt autem quadrati ad quadratum proportio duplicata proportionis laterum homologorũ, erit quoque circulus OP, ad circulum maximum in ſphæra N, in proportione duplicata proportionis diametri OP, ad diametrum circuli maximi in ſphæra N. Cum igitur diametri ponantur habere proportionem duplam habebunt circuli proportionem quadruplam; quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet. 1.2.4.) erit circulus OP, æqualis ſuperficiei ſphæræ N. Accipiatur rurſus circulus ST, æqualis circulo OP. Statuatur deinde ſupra circulum ST, conus rectus STV, axem VX, æqualem habens ſemidiametro ſphæræ N: Item ſupra circulũ OP, alter conus NPQ, cõſtruatur habens axem QR, æqualem ſemidiametro ſphæræ ABCD; eritque maior altitudo coni STV, quam coni OPQ. at baſes æquales erunt. Quare conus STV, maior erit cono OPQ; [c] propterea quod coni æqualium baſium eam inter ſe habẽt proportionem, quam altitudines. Quoniã vero ſphæra N, quadrupla eſt eius coni, qui baſem habet æqualẽ maximo in ſphæra N, circulo, & altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ N, vt demonſtrauit Archimedes lib. 1. de ſphæra & cylindro propoſ.32. Huius autem eiuſdem coni quadruplus eſt conus STV, [d] eo quod coni eandem habẽtes altitudinem proportionem habent quam baſes; [e] erit conus STV, ſphæræ N, æqualis. Eodem pacto, quia baſis coni OPQ, æqualis eſt ambitui corporis EFGHIKLM; quia & æqualis ſuperficiei ſphæræ N, quæ corpori illi iſoperimetra eſt: altitudo vero æqualis ſemidiametro ſphæræ ABCD, erit ſolido EFGHIKLM, æqualis conus OPQ, per ea, quæ Archimedes lib.1. de ſphæra & cylindro propoſ.29. demonſtrauit. Quamobrem & ſphæra N, maior erit ſolido EFGHIKLM, conicis ſuperficiebus contento. Sphæra igitur omnibus corporibus ſibi iſoperimetris & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, &c. maior eſt. Quod demonſtrandum erat.



Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ conicis ſuperficieb. continentur.

a 2. duode.
b 20. ſexti.
c 14. duod.
d 11. duod.
e 9. quinti.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SPHÆRA quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt.

PROPOSITA enim quacunque ſphæra, ſi fiat conus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphæræ, id eſt, quadruplam maximi in ſphęra circuli, altitudinem vero ſemidiametro ſphæræ æqualem: [a] erit ſphæra huic cono æqualis, propterea quod ad conum, cuius baſis eſt maximus in ſphæra circulus, & altitudo ſemidiameter ſphærę, tam ſphæra, ex propoſition.32.lib.1. Archimedis de ſphæra & cylindro, [b] quam prior conus baſem habens quadruplam maximi circuli in ſphæra, hoc eſt, ſuperficiei ſphæræ æqualem, & altitudinem ſemidiametrum ſphæræ, proportionem habet quadruplam. Cum ergo ambitus coni baſem habentis ſuperficiei ſphæræ æqualem maior ſit ambitu ſphæræ, quippe cum ille hunc excedat tota ſuperficie coni, ſecluſa baſi, quæ ambitui ſphæræ ponitur æqualis, liquido conſtat, ſi fiat conus ſphæræ iſoperimeter, hunc eſſe illo cono, ac proinde & ſphæra minorem.

Sphæra maior eſt quolibet cono & cylindro ſibi Iſoperimetro.

a 9. quinti.
b 11. duode.

RVRSVS ſi fiat cylindrus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphæræ, & altitudinem ſemidiametrum ſphæræ; [c] erit hic cylindrus triplus illius coni baſem habentis æqualem eidem ſuperficiei ſphæræ, & altitudinem ſemidiametrum eandem ſphæræ, quem ſphæræ æqualem eſſe proxime oſtendimus: ac proinde & triplus ipſius ſphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri (cylindrus videlicet eandem habens baſem, altitudinem vero tertiã partem altitudinis cylindri illius. [d] cum ille cylindrus ſit huius triplus) æqualis erit ſphæræ. Cum ergo poſterior hic cylindrus habeat ambitum maiorem ambitu ſphæræ, quod ille hunc excedat ambitu totius cylindri, ſecluſa vna baſe; quis non videt, ſi fiat cylindrus ſphæræ Iſoperimeter, hunc eſſe priore illo cylindro, ac proinde & ſphæra minorem? Sphæra ergo quolibet cono, & cylindro ſibi iſoperimetro maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

c 10. duod.

d 14. duod.

SCHOLIVM.

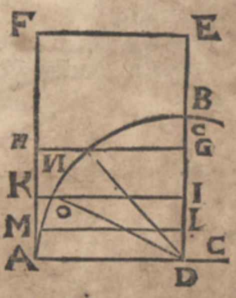
HÆC omnia fere ex Theone Alexandrino in commentariis in Almageſtum Ptolomæi, & ex Pappo Alexandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonſtrauerimus, excerpta ſunt: quæ vero ſequuntur, à nobis inuenta ſunt, ac demonſtrata.

PROBL. 3. PROPOS. 20.

Semicirculo & aliis partibus ſubduplis circuli æqualia rectangula & iſoperimetra conſtituere.

DATO ſemicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæſextæ, &c. rectangulum conſtituere iſoperimetrum & æquale; ſi linea recta periphæriæ detur æqualis.

SIT ſemicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars ſextadecima AOD, &c. conſtruatur rectangulum AE, contentum ſub ſemidiametro AD, & ſub recta AF, quæ quartæ parti periphæriæ æqualis ſit; Item rectangulum AG, ſub ſemidiametro AD, & ſub AH, octaua parte peripheriæ. Item rectangulum AI, ſub ſemidiametro AD, & ſub AK, parte decimaſexta peripheriæ. Item rectangulum AL, ſub ſemidiametro AD, & ſub AM, parte trigeſima ſecunda peripheriæ. Erit igitur ex iis, quæ lib. 4. cap. 7. ad finem Num. 1. oſtendimus, AE, ſemicirculo ABC; & AG, Quadranti ABD; & AI, octauæ parti AND: & AL, parti ſextædecimæ AOD, æquale, &c. Dico hæc eadem rectangula eſſe iſoperimetra prædictis circuli partibus, ſingula ſingulis, quod quidem perſpicuum eſt ex conſtructione. Nam AD, EF, æqualia ſunt diametro AC, & AF, DE, ſemicircumferentiæ ABC, nimirum duabus quartis partibus circumferentiæ. Item AD, GH, æqualia ſunt ſemidiametris AD, DB, & AH, DG, duabus partibus octauis, hoc eſt, quartæ parti circumferentiæ AB. Item AD, IK, duabus ſemidiametris AD, DN, & AK, DI, duabus ſextis decimis id eſt, octauæ parti circumferentiæ AN. Item AD, LM, duabus ſemidiametris AD, DO, & AM, DL, duabus partibus trigeſimis ſecundis, hoc eſt, parti decimæſextæ AO; Atque ita deinceps, ſi tam peripheria AO, quam recta AM, continue ſubdiuidatur. Dato ergo ſemicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum Iſoperimetrum, & æquale conſtituimus, quod faciendum erat.



HOC problema, quod ad ſemicirculum, ac Quadrantem attinet, aduertit etiam nuper R. P. Odo Malcotius Mathematicus ingenioſus, cum problema Mathematicum per ſuos auditores exhiberet in Collegio Romano: quamuis illud inſtar Theorematis propoſuerit.

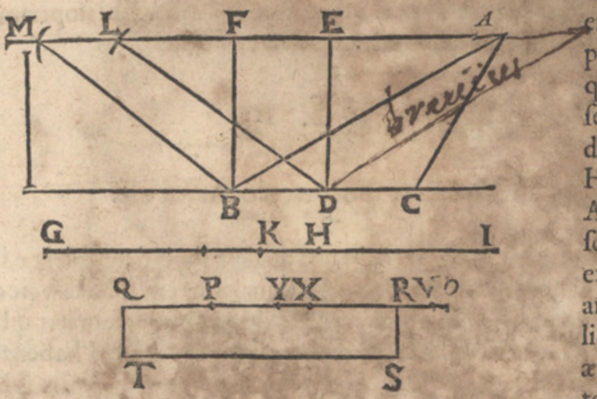
PROBL. 4. PROPOS. 21.

Parallelogrammum dato triangulo æquale & Iſoperimetrum cõſtituere.

DATO triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque iſoperimetrum conſtituere.

a coroll. 19. primi.

SIT datum triangulum qualecunque ABC. Per A, ducatur AM, baſi BC, parallela. Et quia, ſi neuter angulorum B, C, rectus eſt, [a] vtrumque latus AB, AC maius eſt perpendiculari ex A, vel B, C, D, in oppoſitam parallelam demiſſa: ſi vero alter angulorum rectus eſt, hoc eſt, alterutrum laterum perpendiculare eſt ad dictas parallelas; vtrumque latus AB, AC, ſimul maius eſt, quam duplum prædictæ perpendicularis; ideoque ſemiſſis aggregati ex vtroque latere maior perpendiculari eadem; id eſt, ſi accipiatur GH, lateri AB, & HI, lateri AC, æqualis, vt tota GI, ſummæ laterum AB, AC, æqualis ſit, diuidaturque GI, bifariam in K, ſemiſſis GK, maior erit perpendiculari DE. Si igitur ex D, medio puncto baſis BC, ad interuallum GK, arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam AM, in aliquo puncto, vt in L. Sumpta autem LM, ipſi BD, æquali, ducantur rectæ DL, BM, [b] quæ parallelæ inter ſe erunt; ideoque parallelogrammum erit DM, [c] triangulo ABC, æquale. Dico hoc idem triangulo eſſe iſoperimetrum, quod perſpicuum eſt ex conſtructione: quippe cum DL, BM, vtraq; æqualis ſit ipſi GK, hoc eſt, ſemiſſi laterum AB, AC, ac proinde ambæ DL, BM, ſimul æquales ambobus lateribus AB, BD, AC, ſimul, rectæ autem DL, LM, ſimul æquales baſi BC. Conſtructum ergo eſt parallelogrammum DM, non rectangulum æquale, & iſoperimetrum triangulo ABC.



b 35. primi.

c ſchol. 41. primi.

QVOD

QVOD ſi optes rectangulum eidem triangulo ABC, æquale, & iſoperimetrum, ita agendum erit. Erectis perpendicularibus BF, DE, [d] erit rectangulum BE, triangulo æquale, ſed non iſoperimetrum; [e] quod BF, DE, minores ſint lateribus AB, AC, ſed BD, EF, baſi BC, æquales: ac proinde ambitus rectanguli BE, ambitu trianguli ABC, minor; ideoque ſi producantur BF, DE, ad æqualitatem ſemiſſis laterum AB, AC, fiet quidem rectangulum triangulo ABC, iſoperimetrum, ſed triangulo maius, cum ſuperet rectangulum BE. [f] Inuenta autem inter BF, BD, media proportionali N; [g] erit quadratum rectæ N, rectangulo BE, ideoque & triangulo ABC, æquale. [h] Quia vero BF, BD, ſimul maiores ſunt, quam dupla rectæ N; [i] eſtque BM, maior quam BF, erunt BM, BD, ſimul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo QP, ipſi BD, & PO, ipſi BM, æquali, vt tota QO, duabus BD, BM, ſimul ſit æqualis; erit quoque QO, maior quam dupla rectæ N. [k] Secetur ergo QO, in R, ita vt N, ſit inter ſegmenta QR, RO, media proportionalis, perficiaturque rectangulum QS, ſub ſegmentis QR, RO, comprehenſum, [l] quod quadrato rectæ N, hoc eſt, rectangulo BE, vel triangulo ABC, æquale erit. Dico idem eſſe triangulo ABC, iſoperimetrum. Quoniam enim QR, RS, ſimul, id eſt, recta QO, æquales ſunt rectis BD, BM, ſimul, ex conſtructione; erunt reliquæ ST, TQ, reliquis LM, LD, æquales; ideoque rectangulum QS, parallelogrammo BL, ac proinde & triangulo ABC, (cui parallelogrammum BK, iſoperimetrum eſt oſtenſum) erit iſoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunq; parallelogrammum, &c. conſtituimus, quod faciendum erat.

d ſchol. 41. primi. e coroll. 19. primi. f 13. ſexti. g 17. ſexti. h ſchol. 25. quinti. i 19. primi. k ſchol. 13. ſexti. l 17. ſexti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum ſub QV, VO, adhuc iſoperimetrum triangulo ABC, ſed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y, (diuiſa QO, bifariam in Y,) erit adhuc rectangulum ſub QX, XO, iſoperimetrum triangulo ABC, ſed maius. Quadratum denique rectæ QY, iſoperimetrum quoque eſt triangulo ABC, & maius, quæ omnia ita demonſtrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, iſoperimetra eſſe triangulo ABC, hoc eſt, rectangulo QS, patet, cum bina latera circa angulum rectum æqualia ſemper ſint rectæ QO, hoc eſt, binis lateribus rectanguli QS. Eadem vero eſſe inæqualia triangulo ABC, ſic oſtendo. [m] Quoniam quadrata QV, VO, maiora ſunt quadratis QR, RO, ſimul: [n] Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo ſub QV, VO, bis, quam hæc duo, vna cum rectangulo ſub QR, RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum ſub QV, VO, bis minus rectangulo ſub QR, RO, bis, ideoq; & rectangulum ſub QV, VO, ſemel rectangulo ſub QR, RO, ſemel minus erit. Non aliter oſtendemus, rectangulum ſub QR, RO, minus eſſe rectangulo ſub QX, XO, hoc eſt, rectangulum ſub QX, XO, maius eſſe rectangulo ſub QR, RO. Denique [o] quoniam rectangulum ſub QX, XO, vna cum quadrato XY, æquale eſt quadrato YO, vel QY, erit quadratum QY, maius rectangulo ſub QX, XO, ideoq; multo maius rectangulo ſub QR, RO, id eſt, triangulo ABC, quæ omnia demonſtranda erant.

m lemma 42. decimi. n 4. ſecun. o 6. ſecund.

EX quo conſtat, quadratum QY, ex ſemiſſe rectæ QO, deſcriptum maximum eſſe omnium rectangulorum ſub quibuſcunque ſegmentis rectæ QO, comprehenſorum, quod etiam ex propoſ. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non eſſe ſemiſſe dimidiati ambitus dati rectilinei.

Rectangulum datæ figuræ iſoperimetrũ & æquale conſtituere.

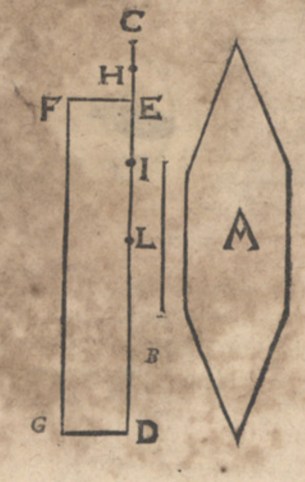
SIT hexagonum datum A, æquilaterum quidem, ſed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis [a] inuentum maius non ſit ſemiſſe dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta CD, æquali ſemiſſi ambitus hexagoni, erit B, recta non maior ſemiſſe ipſius CD, ſed vel æqualis, vel minor. [b] Secta autem CD, in E, ita vt B, ſit media proportionalis inter ſegmenta DE, EC, fiat rectangulum EG, contentum ſub ſegmentis DE, EC. Dico rectangulum EG, æquale eſſe, & iſoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres DE, B, EC, continue proportionales ſunt; [c] erit rectangulum EG, quadrato B, id eſt, hexagono A, æquale. Et quia duo latera DE, EF, æqualia ſunt rectæ CD, hoc eſt, ſemiſſi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG, GD, alteri ſemiſſi: erit totum rectangulum EG, hexagono A. iſoperimetrum. Dato ergo rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituimus: quod erat faciendum.

a 14. ſecun. b ſchol. 13. ſexti. c 16. ſexti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi B, latus quadrati foret maius ſemiſſe medii ambitus rectilinei A, hoc eſt, maius recta CD, non poſſet CD, ita ſecari, vt B, eſſet medio loco proportionalis inter ſegmenta, vt liquido conſtat.

IAM vero ſi ſumatur punctum H, inter C, & E, vtcunq; erit rectangulum ſub DH, HC, adhuc iſoperimetrum figuræ A, ſed tamen minus. Si vero accipiatur punctum I, vtcunqne inter E, & L, punctum medium rectæ CD; erit adhuc rectangulum ſub DI, IC, figuræ A, iſoperimetrum, maius tamen. Sic etiam quadratum ſemiſſis DL, erit iſoperimetrum eidem figuræ & maius; quæ omnia demonſtrabũtur, vt in ſcholio præcedentis problematis dictum eſt.



APPENDIX.

DE circulo per lineas quadrando.

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & contra ex doctrina Archimedis.

1 LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonſtratum eſt, circulum figurarum omnium ſibi iſoperimetrarum eſſe maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum conſtrui poſſit æquale, & viciſſim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. c. 7. copioſe traditum ſit, quo pacto ex inuẽtis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus ſit, hoc eſt, qua ratione area circuli, ſiue capacitas tum ex diametro, tum ex circumferentia cognita ſit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, latus eſt quadrati, quod circulo æquale eſt. Sic è contrario cap. 8. eiuſdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex data circuli area indaganda ſit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc eſt, propoſito quadrato, inſtar areæ circuli alicuius, quomodo circulus deſcribendus ſit illi quadrato æqualis. Inuenta enim diametro per prædictam regulam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illius diametri erit is, qui quæritur. Viſum eſt autem appendicem hanc libro huic ſeptimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragoniſmo, ſiue quadratura, non parum affinis ſit de iſoperimetris figuris diſputationi.

Circuli quadratura per numeros ſecundum Arabes falſa.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Ioſephus Scaliger in ſuis Cyclometricis elementis veram eſſe credit, omnino reiicienda eſt, cum ſit extra limites Archimedis, per quos conſtat, proportionem circumferentiæ ad diametrum minorem debere eſſe tripla ſeſquiſeptima, maiorem vero tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas, quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim, proportionem circumferentiæ ad diametrum eſſe potentia decuplam: adeo vt ſi quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametri ſit 1. quod falſum eſt. Nam cum radix quadrata numeri 10. ſit maior quam $3\frac{1}{7}$. quod huius radicis quadratum ſit tantum $9\frac{43}{49}$. Radix autem vnitatis ſit 1. eſſet maior proportio circũferentiæ ad diametrũ, quam tripla ſeſquiſeptima: cum tamen ſecundum Archimedem ſit minor. Item quia poſita diametro 7. circumferentia minor eſt, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur eſt proportio quadrati circumferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa.

SIMILI modo reiicienda eſt ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui exiſtimat, diuiſa diametro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis eſſe 10. adeo vt diameter quadrati circulo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falſum eſt. Nam cum quadratum diametri 10. ſit 100. [a] duplumque quadrati, cuius diameter eſt 10. & quod circulo diametri 8. dicitur æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. minor autem, quam vera, $50\frac{13}{72}$. vt cap. 7. lib. 4. Numer. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{13}{72}$. atque adeo multo maior, quam 50. Eſt igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

a ſchol. 47. primi.

Falſa quadratura circuli per lineas Campano aſcripta.

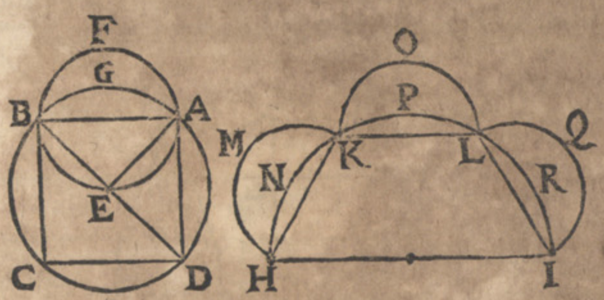
2 IAM vero, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperitis vera eſſe videtur, & quam ſciolus, neſcio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typiſq; mandauit. Eſt autem talis. Linea recta circumferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiuſmodi linea inueniatur, non docet) ſecetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum conſtituatur, quod ſciolus ille circulo dicit eſſe æquale, quæ res omnino Geometra indigna eſt, & plane ridicula. Si enim quadratum illud circulo eſt Iſoperimetrum; [b] circulus autem omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum capaciſſimus eſt, quis non videt, quadratum illud circulo minus eſſe?

b 13. huius.

Quadratura Hyppocratis Chij.

3 DE Tetragoniſmo etiam Hyppocratis Chij nihil dicerem, niſi in eius demonſtratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propoſitam non attingat. Ita enim progreditur. Sit quadrandus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua deſcribatur quadratum ABCD, [c] circa quod circulus deſcribatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE, ſecet in E. Ducta ergo recta AE, [d] erit angulus AEB, in ſemicirculo rectus, [e] ideoque perpendicularis AE, diuidet baſem BD, trianguli Iſoſcelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. [f] Et quia quadratum diametri BD, duplum eſt quadrati diametri AB; [g] eſtque vt quadratum BD, ad quadratum AB, ita circulus ABCD, ad circulum AFBE, erit quoque circulus circuli duplus; & ſemicirculus BAD, ſemicirculi AFB; ideoque ſemiſſis ſemicirculi BAD: id eſt, quadrans ABE, (eſt enim ABE, quadrans, ob angulum rectum in centro E,) ſemicirculo AFB, æqualis. Dempto igitur communi ſegmento AGB, reliquum triangulum AEB, reliquæ Lunulæ AFBGA, æquale erit: ac proinde ſi triangulo fiat quadratum æquale, erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata eſt Lunula AFBGA.

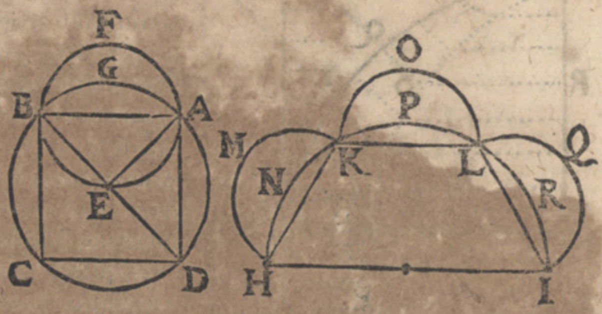
c 9. quinti. d 31. tertij. e ſchol. 26. primi.



f ſchol. 27. primi. g 2. duodec.

DEIN-

DEINDE ſit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam ſemicirculo deſcripto, aptentur in eo tres rectæ ſemidiametro huius circuli, hoc eſt, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes ſemiſſem hexagoni: [a] cum latus hexagoni ſit ſemidiametro æquale. Deſcriptis autē circa illas tres rectas ſemicirculis HMK, KOL, LQI, qui ſemicirculo AFB, æquales ſunt, propter diametros æquales; [b] quoniam quadratum rectæ HI, quadrati rectæ HK, quadruplum eſt, quod latus lateris ſit duplum: [c] erit quoq; circulus diametri HI, circuli diametri HK, quadruplus, & ſemicirculus HKLI, ſemicirculis HMK, KOL, LQI, AFB, æqualis erit: demptiſq; ſegmentis communibus HNK, KPL, LRI, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRKQ vna cum ſemicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum eſt, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc eſt, [d] inquiratur exceſſus trapezii ſuper tria illa quadrata; erit exceſſus hic rectilinea figura ſemicirculo AFB, æqualis. [e] Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum ſemicirculo AFB, æquale; & quadratum ex illius quadrati diametro deſcriptum toti circulo AFBE, æquale. [f] quod tam quadratum quadrati duplum ſit, quam circulus ſemicirculi. Quadratus ergo circulus eſt.



a coroll 15. quarti.
b ſchol. 4. ſecundi.
c 2. duode.
d ſchol. 45. primi.
e 14. ſecun.
f ſchol. 45. primi.

HÆC eſt quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, vere quadrauerit, vitioſa autē, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à ſe eſſe arbitratur, quod verum non eſt. Solum enim ex eius demonſtratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria eſt quarta pars peripheriæ alicuius circuli, ſuperior autem ſemicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars eſt circumferentiæ ABCD, & AFB, ſemiſſis peripheriæ AFBE. At eiuſmodi non ſunt tres aliæ Lunulæ, quippe cum earum peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, ſint ſextæ partes totius circumferentiæ, quamuis peripheriæ ſuperiores ſint ſemicirculi, vt in illa: quæ nondum ſunt quadratæ. Quod ſi inuenta eſſet ars quadrandi huiuſmodi Lunulas, veriſſime quoq; quadraretur circulus, ſine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ æqualis, quæ ſane res foret præclara.

Fallacia quadraturæ Hippocratis.
Quid deſideretur in Hippocratis quadratura.

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli eſſe poſſibilem, cum ſicut Lunula AGBF, quadrata eſt, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari poſſe, nihil obſtet, quamuis adhuc non ſit quoquam quadrata. Et certe, vt quidam recte affirmat, quod hic oſtenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars eſt circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto ſciri poſſe, etiam non inueſtigata quantitate peripheriæ circuli, cum ſolum deſit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquanto dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

4 MVLTA quoque hic dicenda eſſent de falſis aliorum quadraturis, ſed quia hæ vel ſe ipſas produnt, cum in progreſſu earum facile appareat, aliquid deeſſe ad conſtituendum circulo æquale quadratum, cuiuſmodi eſt quadratura Iacobi Falconis Equitis Hiſpani, qui ſine inuentione lineæ rectæ, quæ peripheriæ ſit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab aliis iam dudum ſunt cōfutatæ, nimirum Nicolai Cuſani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontii Finaei Tetragoniſmus tum ab eodem Buteone, tum à Petro Nonio Luſitano in libello de Erratis Orontii: quorum vterque variis viis lineam rectam circumferentiæ æqualem ſe inueniſſe putauit, nihil omnino dicendum mihi eſſe ſtatuo, ne fruſtra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem ſolum hoc loco eam quadraturam ſubiiciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem lib. 6. Euclid. conſcripſi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (ſic enim eam appellare lubet) lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometrice inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea deſideretur, accuratior tamen eſt omnibus aliis, quas hactenus videre potui; ita vt practice à ſcopo aberrare non poſſimus. Vt autem clare atque ordinate procedam, abſoluam totum negotium paucis quibuſdam propoſitionibus.

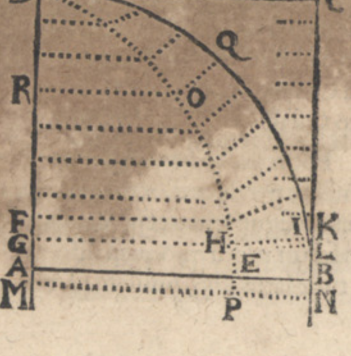
Cur de falſis aliorum quadraturis hic nihil dicatur.
Quæ non quadratura per lineas hic explicetur.

I.

QVADRATRICEM lineam deſcribere.

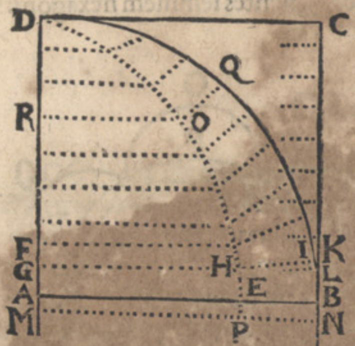
DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor eſt Pappus Alexandrinus in 4. lib. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eiſdem eſt appellata: à nobis vero eadem de cauſa quadratrix dicetur. Quamquam autem prædicti auctores conentur huiuſmodi lineam deſcribere per duos motus imaginarios duarum rectarum ſe ſe interſecantium, qua in re principium (vt philoſophi loquuntur) petunt, propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ deſcribi non poſſit: nos tamen eam ſine illis motibus Geometrice delineabimus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in deſcriptionibus conicarum ſectionum fieri ſolet.

5 SIT ergo in quadrato ABCD, deſcriptus Quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter AD, æqualiter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus quadrati ſupremum CD, deorſum verſus æquabiliter quoque: ita vt, quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu deſcendens ad latus AB, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo ſit lateri AB, parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat, ſecabunt ſe mutuo continue ſemidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorſum lata, in punctis,



Quadratricis deſcriptio.

ctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent: hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt linea inflexa DE. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorũ vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc ſit ea proportio, & quæ per hanc lineam inueſtiganda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumq; AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuiſio erit, ſi & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, ſecetur primum bifariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuiſiones, eo accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum DB, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.



DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter diſtantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa DE, ſecans ſemidiametrum AB, in E.

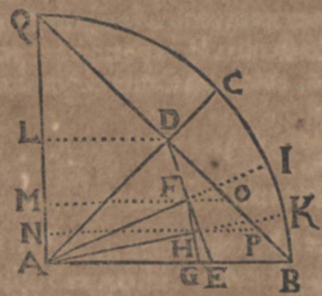
6 SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometrice non poteſt, cum ibi omnis ſectio rectarum ceſſet: vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus: vtemur hoc artificio: Infimã partem AF, lateris AD, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus bifariam continue, donec infima particula ſit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus DB, bifariam continue ſecabimus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, quot in parte AF, factæ ſunt, vt particula BK, talis pars ſit totius arcus DB, qualis pars eſt AG, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abſcindemus BL, BN, AM, ducemuſque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ ſecet GL, in H, puncto, quod accuratiſſime notetur (adhibito videlicet Lemmate Probl. 1. lib. 2. vt concurſus H, quam exquiſitiſſime reperiatur) ſumemus ipſi GH, æqualem MP. Si n. Quadratricem vſque ad H, deſcriptam continuabimus æquabili, atq; vniformi extenſione vſque ad P, ſecabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter ſe diſtantiam efficitur, vt ferme ſint æquales, licet Geometrice loquendo recta AE, ſemper maior ſit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter ſe diſtent: ſed exceſſus ille circino deprehendi non poteſt: adeo vt arcus circuli ex A, per H, P, deſcriptus verum punctum E, quod ad ſenſum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ, namque GL, AB, MN, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior ſit. Itaque ſi tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo quadratrix linea ſemidiametrum AB, ſecat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi exiſtit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquiſite & ſumma adhibita diligentia inuenta ſint.

Latus baſis & centrum Quadratricis.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis: & rectam AE, eiuſdem baſem: ac deniq; punctum A, centrum eiuſdem.

7 VERVM puncta Quadratricis prope baſem certius inueniemus (ſine interſectionibus linearum, quę ibi valde obliquæ ſunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, ſecetur in D, bifariam, quod fiet, ſi ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. [a] Hæc enim rectam BQ, ſecabit bifariam. Deinde rectæ AD, ſumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, ſecetur bifariam in F, quod etiam fiet, ſi ex A, ad I, punctnm medium arcus BC, ducatur AI. [b] Hæc enim chordam BC, (ſi duceretur) ſecaret bifariam: [c] ac proinde & recta DE, [d] quæ chordæ BC, eſt parallela: propterea quod latera AB, AC, in triangulo ABC, proportionaliter ſecantur in D, E: quippe cum tam AB, AC, quã AE, AD, æquales ſint. Rurſus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaq; FG, ſecetur bifariam in H, quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atq; hoc modo, ſi rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et ſic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipſi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas ſectiones, vt in priori figura. [e] Eſt enim AD, ad DB, perpendicularis [f] & AF, ad DE, & DH, ad FG, &c.

a ſchol. 27. tertij.
b ſchol. 27. tertij.
c ſchol. 4. ſexti.
d 2. ſexti.

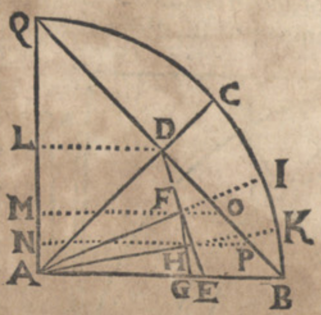


e 3. tertij.
f ſchol. 26. primi.
g 2. ſexti.
h 2. ſexti.
i 2. ſexti.

OMNIA vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. eſſe in Quadratrice, ita oſtendo. Ductis DL, FM, HN, ipſi AB, parallelis ſecantibus BD, in O, P; [g] erit vt BD, ad, DQ, ita AL, ad LQ, ideoque & AQ, ſecta erit in L, bifariã. Sectus autem eſt & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt oſtenſum eſt, punctum D, eſt in Quadratrice. Rurſus quia DE, ſecta eſt bifariam in F, [h] erit quoq; DB, ſecta bifariam in O, [i] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD; ita eſt AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt oſtendimus, ſecabunt ſeſe, AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio eſt de aliis punctis hac arte inuentis.

8 ESSE porro lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometrice deſcriptam, eandem, quam Dinoſtratus, & Nicomedes per duos illos motus imaginarios deſcribi concipiebant, perſpicuum eſt. Nam ſi ſemidiameter AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus DC, deorſum fertur motu quoque vniformi: fit vt quando ſemidiameter AD, pertranſiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, ſimilem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non eſſent vniformes

formes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam ſemidiameter AD, quam latus DC, perueniret. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emiſſæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ abſcindant ſemper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes ſimiles, ex conſtructione: liquido conſtat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice inuenta, à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre



HÆC igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis Geometrica quodammodo, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Appollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen errori magis ſint obnoxiæ, quam noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ, quibus in Quadratricis deſcriptione opus non eſt. Quare niſi quis totam conicarum ſectionum doctrinam, quam tanto ingenii acumine Apollonius Pergaeus perſecutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reiicere velit, tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem in Geometria peritum facturum exiſtimo, cum ſectiones conicas ad demonſtrationes adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vſus eſt in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipſe multa præclare de iiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habent in re Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur, hanc deſcriptionem noſtram Quadratricis lineæ eſſe quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutiſſime inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt libro 6. propoſ. 15. diximus.

HABET linea hæc Quadratrix multas, & inſignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. demonſtrauimus, quas hoc loco repetere ſuperuacaneum eſt. Solum igitur eius vſum in quadrãdis circulis hic exponemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamſi nullum aliud Quadratricis punctum inuentum eſſet quod quidem vltimum punctum licet Geometrice, ac præciſe non reperiatur: tamẽ ſi artificiũ poſterioris figuræ adhibeatur, nõ aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt ſupra diximus. Quãdo namq; deprehenſum fuerit, vltimam perpendicularem AH, æqualem eſſe præcedenti vltimæ lineæ translatæ AG, ita vt nulla differentia inter illas per circinum diſcernatur: ſumi poterit citra errorem notabilem vltimum illud punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Sin minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artificio, quo AF, AH, ductæ ſunt, donec inter vltimam, & poſtremo loco inuentam rectam in ſemidiametro AB, nullum appareat diſcrimen, cuius quidem rei operatio ipſa optimus erit magiſter.

COROLLARIVM.

9 EX deſcriptione Quadratricis colligitur, ſi ex centro A, ducatur recta vtcunque AQ, ſecans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita eſſe arcum BD, ad arcum BQ, vt eſt ſemidiameter AD, ad rectam AR, ducta prius OR, ipſi AB, parallela:[a] ac proinde & ad rectam quæ ex O, ad AB, demittitur perpendicularis. Quia enim eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius ſemidiametri DA, quippe cum in deſcriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, continet: quandoquidem rectæ AQ, RO, ſeſe interſecant in O, puncto Quadratricis. Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus DQ, toti arcui DB, quam recta DR, toti lateri DA, ſit incommenſurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta DR, non eſt talis pars, ſiue commenſurabilis, ſiue incommenſurabilis totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DQ, totius arcus DB; ſi cogitetur talis pars lateris DA, minor quam DR, vel maior, ſecabit parallela ex eius puncto extremo ducta rectam AQ, vel ſupra O, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt; ac proinde ea non tranſibit per O, quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quia inquam eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius lateris DA;[b] erit quoque reliquus arcus QB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars eſt reliqua recta RA, totius lateris DA: quod eadem ſit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutando eadẽ totius DB, ad totam DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, ita totum latus DA, ad rectam RA, hoc eſt, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demiſſam,[c] quæ ipſi RA, æqualis eſt.



a 34. prim.
b 19. quint.
c 34. prim.

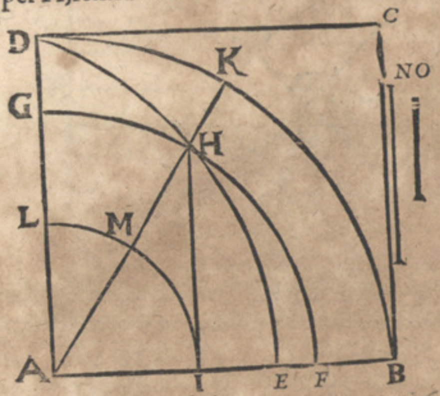
II.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit, erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis quadratricis continue proportionales.

HÆC eſt eximia, atque inſignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ſupra. Dico arcum BD, ſemidiametrum AD, & Quadratricis baſem AE, continue eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, ſit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF, maiorem ipſa AE, minoremue, ſitq;

a 15.quint. b 15. quint. c 11.quint. d 9.quinti. e ſchol.33. ſexti. f 11.quinti. g 14. quin. h 3.tertij. i ſchol. 27. tertij.

primum AF, maior, quam AE. Deſcripto ex centro A, Quadrante FG, per F, ſecante quadratricem in H, ducatur per H, ſemidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam AD, vt AD, hoc eſt, vt AB, ad AF, eſtque vt AB, ſemidiameter ad ſemidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim ſit, vt lib. 4 cap. 7. propoſ.1. demonſtrauimus, diameter ad diametrum, vt circumferentia ad circumferentiam; [a] erit quoq; ſemidiameter AB, ad ſemidiametrum AF, vt eadem citcumferētia ad eandem circumferentiam: [b] ac proinde etiam, vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc eſt, vt arcus BD, ad arcū FG,) [c] Erit quoq; arcus BD, ad rectā AD, vt idē arcus BD, ad arcū FG; [d] ac propterea æquales erunt recta AD, & arcus FG. Quia vero ex præcedenti cor. eſt, vt arcus BD, ad arcū BK, ita recta AD, ad rectā HI, & vt arcus BD, ad arcū BK, ita eſt arcus FG, ad arcū FH, [e] ꝙ arcus BD, BK, arcubus FG, FH, ſimiles ſint; [f] erit quoq; recta AD, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cū ergo oſtenſa ſit recta AD, arcui FG, æqualis: [g] erit quoq; recta HI, arcui FH, æqualis, quod eſt abſurdū. Eſt enim recta HI, minor arcu FH, cum ea ſit ſemiſſis chordæ ſubtendentis arcum duplum arcus FH: [h] (Nam recta AF, ſecat eam chordam bifariam; [i] ac proinde & arcum) chorda autem ſemper ſuo arcu minor ſit. Non ergo eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem baſe AE, Quadratricis.



k 14.quint. l 2. coroll. 36.tertij. m ſcho.27. tertij. n 4. vel 8. primi. o 26. tertij.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad AI, minorem baſe AE. Deſcripto igitur ex centro A, per I, Quadrante IL, exigatur ex I, ad AE, perpendicularis IH, ſecans Quadratricē in H, puncto, per quod ſemidiameter ducatur AK, ſecans arcum IL, in M. Oſtendemus ergo, vt prius, arcum IL, rectæ AD, æqualem eſſe. Item ita eſſe arcum BD, ad arcum BK, hoc eſt, arcum IL, ad arcum IM, vt eſt recta AD, ad rectam HI. Quare cum arcus IL, oſtenſus ſit æqualis rectæ AD; [k] erit quoque arcus IM, æqualis rectæ HI, quod eſt abſurdum. Eſt enim recta HI, maior arcu IM. Nam ſi ex H, duceretur verſus G, alia recta tangēs circulum IL, ſicut HI, eundem tangit in I, [l] eſſent hæ duæ tangentes æquales, arcuſque inter eas interceptus ſecaretur bifariam in M, [m] propterea quod angulus ab eis comprehenſus bifariam diuideretur à recta AH, [n] ac proinde & angulus in centro A, ſi ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: [o] ideoque arcus, quibus inſiſtunt, æquales forent. Igitur cum, vt lib.8. propoſ.1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes ſimul maiores ſint arcu ab eis comprehenſo, erit & earum ſemiſſis HI, maior ſemiſſe IM, illius arcus. Non eſt ergo arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad rectam minorem baſe AE, Quadratricis; Sed neq; vt AD, ad maiorem, ſicut oſtenſum eſt. Igitur vt AD, ad ipſam baſem AE. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM I.

Rectam circumferentiæ circuli æqualem reperire. p 11.quint. q 9.quinti.

HINC facile rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, ac proinde & ſemicircumferentiæ, immo & toti circumferentiæ æqualem.

QVONIAM eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad baſem Quadratricis AE; erit conuertendo quoq; AE, ad AD, vt AD, ad arcum BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [p] erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq; proportio ſit eadem, quæ AE, ad AD, [q] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et ſi duplicetur, fiet recta æqualis ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli: Si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, ſi baſis Quadratricis AE, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli, eius latus AD, quartæ parti circumferentiæ illius circuli eſſe æquale. Et lineam lateris AD, duplam æqualem eſſe ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli: Et lineam quadruplam lateris toti circumferentiæ eſſe æqualem.

r 15.quint. s 14.quint.

CVM enim, vt lib.4.cap.7.propoſ.1.oſtendimus, diametri circulorum circumferentiis ſint proportionales [r] erunt quoque ſemidiametri circumferentiis, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt AD, ad AE, hoc eſt, vt ſupradicta tertia proportionalis ad AD, ita quadrans BD, ſemidiametri AD, ad Quadrantem ſemidiametri AE. Cum ergo tertia illa proportionalis æqualis ſit oſtenſa Quadranti BD; [s] erit quoque recta AD, quadranti ſemidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipſius AD, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

COROLLARIVM III.

EX his quoque infertur, ſi duæ rectæ N, O, in præcedenti figura eandem proportionem habeant, quam AD, AE, minor autem O, ſtatuatur ſemidiameter circuli alicuius, maiorem N, æqualem eſſe arcui Quadrantis illius circuli.

CVM

CVM enim ſit AD,ad AE,vt N,ad O;erit permutando AD,ad N,vt AE,ad O. Vt autem AE,ad O,ita eſt Quadrans ſemidiametri AE,ad Quadrantem ſemidiametri O,vt lib.4.cap.7.propoſ.1.demonſtrauimus. [a] Igitur erit quoque AD,ad N,vt Quadrans ſemidiametri AE,ad Quadrantem ſemidiametri O. Cum ergo AD, æqualis ſit oſtenſa Quadranti ſemidiametri AE;[b] erit quoque N,æqualis Quadranti ſemidiametri O. quod eſt propoſitum.

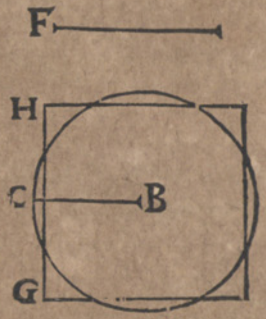
a 11. quin.
b 14. quin.

III.

DATO circulo quadratum æquale conſtituere.

Quadratum circulo æquale exhibere.

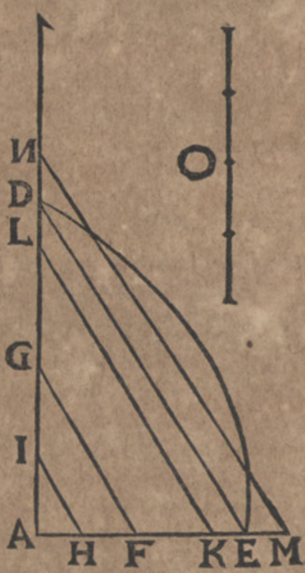
SIT quadrandus circulus ad interuallum ſemidiametri BC,deſcriptus. Tribus rectis AE, baſi Quadratricis; AD,lateri eiuſdem præcedentis figuræ, & rectæ BC, inuenta quarta proportionali F;erit er coroll.3. antecedenti recta F, quadranti circuli dati æqualis, atque eius dupla ſemicircumferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter ſemidiametrum BC, & duplam ipſius F,media proportionali GH:Dico quadratũ ex GH,deſcriptum ęquale eſſe circulo ad interuallũ BC,deſcripto.[a] Quoniam n.rectangulum ſub BC, ſemidiametro, & ſub ſemicircumferentia circuli,id eſt,ſub dupla rectę F,inuentæ,ęquale eſt circulo:[b] Prędicto autem rectangulo æquale eſt quadratum lateris GH; erit quoq; quadratum lateris GH,circulo ſemidiametri BC,æquale.



a 4. Iſoperimetrorum
b 17. ſext.

VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli,atque idcirco & ſemicircumferentiæ,vel toti circumferentiæ,conſtruenda erit figura eiuſmodi. Fiat angulus rectus DAE,rectaq; AD,ęqualis ſit diametro Quadrantis,ex quo Quadratrix deſcripta eſt;& AE, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A,noua Quadratrix deſcribatur DE, cuius latus AD,& baſis AE. Ducta namque recta DE, conſtructa erit figura aptiſſima ad rectam circumferentiæ dati circuli æqualem inueniendã. Si enim circuli quadrandi ſemidiametro abſcindatur æqualis AF,ducaturq; FG,ipſi DE,parallela;erit ex coroll. 3. antecedẽti AG,ęqualis quartę parti circũferentię dati circuli,cuius ſemidiameter nimirum eſt AF, (quemadmodum AD, quartæ parti circumferentiæ circuli ſemidiametri AE, æqualis eſt, vt ex coroll. 2. præcedenti conſtat)[c] propterea quod AF,AG,eandem habent proportionem,quam AE,AD. Eadem ratione, ductis HI,KL,MN, eidem DE, parallelis, erunt AI,AL,AN, æquales quartis partibus circumferentiarũ circulorum ex ſemidiametris AH,AK,AM,deſcriptorũ. Hæ aũt rectę duplicatę ſemicircumferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta æqualis quartæ parti circumferentiæ cuiuſuis circuli, ſi eius ſemidiametro ex recta AE, æqualem lineam abſcindemus, ab eiuſq; extremo rectæ DE,parallelam ducemus,&c.

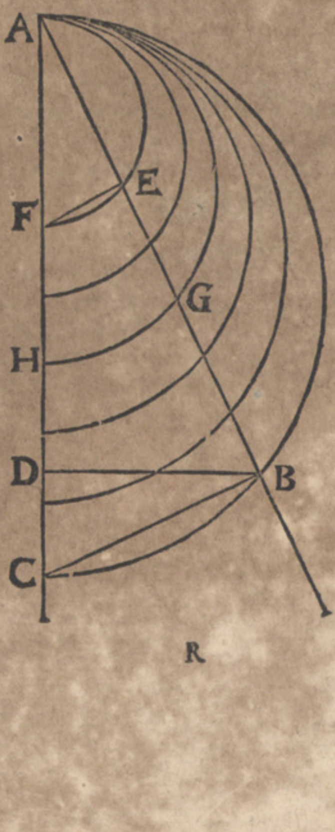
Facilis inuentio rectæ æqualis circumferentiæ.



c 4. ſexti.

VT quoq; ſine vllo labore dato cuicunq; circulo quadratũ æquale exhibeamus, vtendũ erit hoc artificio. Inuento ſemel latere quadrati alicui circulo ęqualis,vt paulo ante docuimus,conſtruemus figuram ad quadrandos alios circulos quoſcunq; accommodatiſſimam, hoc modo. Detur circulus ABC, diametri AC,ſitque AB, media proportionalis inter ſemidiametrum, & rectam ſemicircumferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura,ita vt quadratum rectæ AB, circulo diametri AC, ſit æquale: [d] accommodetur AB, in circulo,quæ certius applicabitur, ſi forte circinus ex A, ad interuallum datæ AB,deſcriptus nimis oblique peripheriam ABC ſecet in B, hoc modo. Duabus rectis,nimirum diametro AC,& lateri AB,quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis AD.Perpendicularis namq; DB,cadet in punctum B,in quod latus inuentum duci debet: [e] propterea quod tres rectæ AC,AB,AD, ſunt continue proportionales: quemadmodum recta AC, latus quadrati inuentum, & AD,continuam ſeruant proportionem, ex conſtructione.Liquet autem inter AC,AD, vnam tantum poſſe eſſe mediam proportionalem.Hac figura extructa,dicto citi⁹ quemcunq; circulum quadrabimus. Si namq; diametro dati circuli rectam ęqualem abſcindemus AF,circa quam ſemicirculus deſcribatur,reſecabit is ex recta AB,latus AE, cuius quadratum circulo dato eſt æquale. Quia enim angulus externus AEF,interno ABC,æqualis eſt: [f] quod vterque in ſemicirculo rectus ſit;[g] erunt EF,BC,parallelæ;Ideoq; triangula AEF,ABC,æquiangula. [h] Igitur erit CA,ad AB,vt FA,ad AE; Et permutando CA,ad FA,vt

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.



d 1. quar.
e coroll. 8. ſexti.
f 31. tertij.
g 28. prim.
h 4. ſexti.

R AB,ad

i 21. *ſexti.* AB, ad AE. [i] Ideoq; erit quoque quadratum ex AC, ad quadratum ex AF: [k] hoc eſt, vt circulus diametri AC, ad
k 2. *duod.* circulum diametri AF, vt quadratum ex AB, ad quadratum ex AE. Eſt autem circulus diametri AC, quadrato ex
l 14. *quin.* AB, per conſtructionem, æquale. [l] Igitur & circulus diametri AF, quadrato ex AE, æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ AG, circulo diametri AH, erit æquale. Et ſic de cæteris.

Facilis inuētio quadrati circulo æqualis ex Archimede. IAM vero quoniam lib. 4. cap. 6. propoſ. 3. ex Archimede demonſtrauimus, quadratum diametri ad circulum habere ferme proportionem, quam 14. ad 11. ſi quis volet ſecundum hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale; diuidenda erit recta AC, in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D, (ita vt AD, contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vſque ad circumferentiam circa AC, deſcriptam. Recta enim ducta AB, latus erit quadrati circulo diametri AC, æqualis. [m] Cum enim tres rectæ AC, AB, AD,
m *corol. 8. ſexti.* ſint continue proportionales; [n] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, vt AC, ad AD; videlicet vt 14. ad
n *corol. 20. ſexti.* 11. Cum ergo etiam ſit, vt diximus, quadratum diametri ad circulum, vt 14. ad 11. ferme: [o] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, vt ad circulum diametri AC. [p] Igitur quadratum ex AB, circulo diametri AC, æquale erit.
o 11. *quin.* Quod ſi ſecundum varias diametros deſcribantur circuli per A, tranſeuntes, abſcindent quoq; ij circuli ex recta
p 9. *quint.* AB, latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale, ſiue quadratricem noſtram adhibeas, ſiue demonſtrata ab Archimede ſequaris.

IV.

DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis eſt deſcribendus. In proxima figura ex recta AB, abſcindatur recta AE, dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB, perpendicularis EF, ſecans AC, in F. Eritque circulus diametri AF, quadrato lateris AE, æqualis, vt ex proxime demonſtratis liquet.

COROLLARIVM.

a 14. *ſecun.* EX his, quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ [a] deſcribamus quadratum æquale, & huic quidrato circulum æqualem
b 25. *ſexti.* per hanc 4. propoſ. conſtituamus; erit idem hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

RVRSVS ſi per propoſitionem 3. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato [b] conſtituamus figuram rectilineam æqualem, & ſimilem alteri datæ figuræ rectilineæ; erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis, quod eſt propoſitum.

V.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

IN ſecunda figura propoſ. 3. ſit rectæ O, exhibenda æqualis circumferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis AD, recta æqualis AI, ac per I, ipſi DE, agatur parallela IH. Eritq; circumferentia circuli ex diametro AH, deſcripti æqualis datæ rectæ O, propterea quod quarta pars eius circumferentiæ æqualis eſt rectæ AI, vt oſtenſum eſt; ac proinde tota circumferentia æqualis erit quadruplæ rectę AI, hoc eſt, ęqualis rectæ O, cuius quarta pars poſita eſt recta AI. Datæ ergo rectæ circumferentiam æqualem reperimus. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER VIII.

Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonſtrans.

VT extremam manum Geometriæ huic noſtræ practicæ imponamus, concludemus eam variis nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris aliis, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonſtratis. Qua in re exemplum illuſtre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conſcripſit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter inſtitutum noſtrum exiſtimare quis debet: cum per eiuſmodi demonſtrationes Geometricas ſtudioſo Lectori via multiplex aperiatur ad inueſtigandas ſimiles ſpeculationes in rebus Geometricis: quippe cum in iis ad exercendum ingenium ampliſsimum campum habeat. Eſt & alia cauſa, quæ me ad hunc librum octauum conſcribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non ſine magno labore peruestigata pereant, cum ad nullam Geometriæ partem magis proprie pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præſertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perſcribendum auctores mihi, atque ſuaſores fuerunt.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

FIGVRA regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

HÆC eſt prima propoſitio Archimedis in lib. 1. de ſphæra & Cylindro: quam demonſtrat, hoc aſſumpto principio.

Si duæ lineæ in plano eoſdem habeant terminos, & in eaſdem partes cauæ ſint, comprehendens comprehenſa maior eſt. quod quidem principium eſſe verum, ex eo euidenter intelligi poteſt, quod ex eo non ſolum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonſtrarint, quæ vt veriſſima, ab omnibus recepta ſunt; neque vnquam ex illo abſurdi aliquid conſecutum eſt, aut contra id quiſquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus eſt. Hoc ergo poſito principio, facilis eſt demonſtratio Archimedis. Sit namque figura regularis ABCDEF, deſcripta circa circulum, cuius centrum N, tangens eum in punctis G, H, I, K, L M. Quoniã igitur per præmiſſum principium rectæ AG, AM, maiores ſunt arcu GM: Item BG, BH, maiores arcu GH, & ſic de reliquis; erunt omnes rectę ſimul conficientes totum ambitum figuræ, maiores omnibus arcubus ſimul conficientibus totam circuli peripheriam, quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

CARDANVS in libro quinto de proportionibus propoſ. 201. conatur demonſtrare, duas rectas circulum contingentes, cuiuſinodi ſunt AG, AM, maiores eſſe arcu intercepto GM, (quod Archimedes ex ſuo aſſumpto principio deduxit) præmiſſis tribus Lemmatibus, & vno principio, quorum primum eſt hoc.

LEMMA I.

SI fuerint quatuor quantitates, & minor ſit exceſſus inter primam & ſecundam, quam inter tertiam & quartam; ſitque prima non minor, quam tertia, maior vero quam ſecunda. Item tertia maior quam quarta: Erit minor proportio primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.

SINT quatuor quantitates A, BC, D, EF; ſitque GB, exceſſus inter primam A, & ſecundam BC, minor exceſſu HE, inter tertiam D, & quartam EF; Item prima A, non ſit minor, quam tertia D: maior vero quam ſecunda BC: Ac denique tertia D; maior ſit quam quarta EF; Dico minorem eſſe proportionem primæ A, ad ſecundam BC, quam tertiæ D, ad quartam EF.



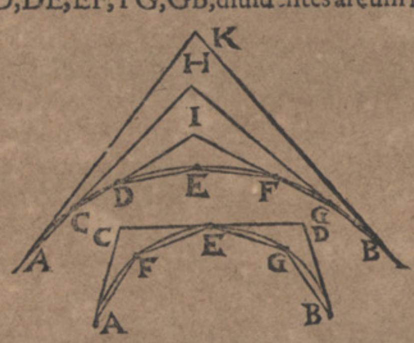
Cum enim A, non minor ſit, quam D: at GB, minor, quam HE, [a] erit maior proportio A, ad GB, quam ad HE: Eſt autem A, (ſi eſt æqualis ipſi D) ad HE, vt D, ad HE; vel maior eſt proportio A, (ſi maior eſt quam D,) ad HE. quam D, ad HE. Igitur maior eſt proportio A, ad GB, quam D, ad HE. Si igitur fiat vt D, ad HE, ita A, ad GI, habebit quoque A, ad GB, maiorem proportionem, quam ad GI; [b] ac proinde erit GI, maior quam GB; ideoque IC, minor, quam BC. [c] Maior ergo erit proportio A, ad IC, quam ad BC. Et quoniam GC, ipſi A, æqualis eſt, ad GI, vt HF, ipſi D, æqualis, ad HE; Erit quoq; per conuerſionem rationis GC, hoc eſt, A, ad IC, vt HF hoc eſt, vt D, ad EF. Cum ergo oſtenſum ſit maiorem eſſe proportionem A, ad IC, quam ad BC; erit quoq; maior proportio D, ad EF, quam A, ad BC, hoc eſt, A, ad BC, minorem proportionem habebit, quam D, ad EF. quod eſt propoſitum.

a 8. quint.
b 10. quint.
c 8. quint.

LEMMA II.

SI circuli arcum duæ rectæ tangant in vno puncto coeuntes; & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipſum in partes totidem æquales. Erunt duæ illæ tangentes omnibus hiſce chordis ſimul maiores.

TANGANT arcum AB, duæ rectæ AK, BK, coeuntes in K, aptenturque quotlibet rectæ in eo æquales AC, CD, DE, EF, FG, GB, diuidentes arcum in totidem partes æquales. Dico rectas AK, BK, ſimul maiores eſſe omnibus illis rectis ſubtenſis ſimul.



Productis enim rectis AC, BG, donec coeant in H; Item productis rectis CD, GF, donec concurrant in I, & ſic deinceps, ſi plures rectæ fuerint: [a] Erunt rectæ DI, FI, maiores rectis DE, FE. Additis ergo æqualibus DC, FG; erũt etiam rectæ CI, GI, maiores rectis CD, DE; EF, FG, ſimul. [b] Sed CH, GH, maiores ſunt rectis CI, GI. Igitur multo maiores erunt CH, GH, rectis CD, DE, EF, FG; additiſq; æqualibus AC, BG, maiores erunt AH, BH, ſimul quam AC, CD, DE, EF, FG, GB ſimul. [c] Sunt autem & AK, BK, maiores, quam AH, BH. Igitur multo maiores erunt AK BK, ſimul, quam AC, CD, DE, EF, FG, GB, ſimul. quod erat demonſtrandum.

a 21. prim.
b 21. prim.
c 21. prim.

LEMMA III.

SI circuli arcum tres rectæ tangant in duobus punctis coeuntes, ita vt contactuum punctum medium diuidat arcum bifariam: In eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter ſe æquales, Erunt tres illæ tangentes omnibus his ſimul ſumptis maiores.

IN antecedente figura arcum AB, tangant tres rectæ AC, CD, DB, conuenientes in duobus punctis C, D, ſecantes ipſum bifariam in E. Accommodenturq; in eodem arcu quotlibet rectæ æquales, & numero pares AF, FE, EG, GB. Dico tres AC, CD, DB, ſimul ſumptas eſſe maiores rectis AF, FE, EG, GB, ſimul ſumptis. Quoniam enim per Lemma præcedens AC, CE, maiores ſunt rectis AF, FE: Item BD, DE, maiores rectis BG, GE, Erunt quoque AC, CD, DB, ſimul maiores rectis AF, FE, EG, GB, ſimul. quod oſtendendum erat.

HÆC ergo ſunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus adiungit hoc poſtulatum, ſiue principium. Cum arcus quilibet maior ſit quotcunque rectis in eo ſubtenſis ſimul ſumptis, & quo plures ſubtenſę fuerint, eo minori exceſſu arcus illas ſuperet: fieri poteſt, vt tot ſubtenſæ duci poſſint, ita vt exceſſus, quo arcus illas ſuperet, minor ſit quauis recta propoſita. Hoc principium videtur eſſe manifeſtum, cum tam paruus arcus poſſit accipi, vt eius chorda illi fere æqualis ſit; adeo vt ſenſus nullam percipere poſſit inter arcum, & chordam differentiam. A poſteriori tamen illud confirmari poteſt per numeros. Poſita enim proportione circumferentiæ ad diametrum ferme 3141592б. ad 10000000. vt lib. 4. cap. 7. Num. 5. ex ꝓbatis auctoribus retulimus, deprehendemus, ſi arcus propoſitus continue ſecetur bifariam per rectas ſubtenſas, ſemper à præcedenti exceſſu plus dimidio auferri; [a] ac proinde tandem relinqui exceſſum omniquantitate minorẽ. Nam arcus verbi gratia graduum 4. erit 698131. & eius chorda ex tabula ſinuũ eruta 697990. ita vt arcus chordam ſuperet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096. quæ ſuperatur ab eodem arcu gr. 4. numero hoc 35. qui minor eſt ſemiſſe præcedentis exceſſus 141. ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rurſus ſumma quatuor chordarum gradus 1. erit 698120. quam idem arcus 4. graduum ſuperat hoc numero 11. qui etiam minor eſt ſemiſſe proximi exceſſus 35. Item ſumma 8. chordarum, quarum quælibet 30. minutis debetur, erit 698128. exceſſus autem inter eam, & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque eſt, quam ſemiſſis proximi exceſſus 11. & ſic deinceps. Scio confirmationem hanc propoſiti principij non eſſe demonſtratiuam, cum proportio circumferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonſtrare conamur, nimirum figuram circulo circumſcriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli: eam tamen probabilẽ eſſe, nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (ſi illa proportio longe à vero abeſſet) exceſſus illos paulatim ita minui, vt ſemper minor numerus ſemiſſe præcedentis exceſſus relinquatur; adeo vt tandem nulla fere differentia inter arcum, & ſummam chordarum ſubtenſarum reperiatur.

Principiũ Cardani.

a 1. decim.

HIS præmiſſis, tangant duæ rectæ AB, AL, arcum BCL. Dico eas eſſe maiores arcu. Sint enim, ſi fieri poteſt, non maiores, ac proinde arcꝰ BCL, ſit vel æqualis rectis AB, AL, vel maior. Secto ergo arcu bifariam in C. ducatur DCE, tangens arcum in C. Diuiſis quoq; arcubus BC, CL, bifariam in G, F, iungantur rectæ BG, GC, CF, FL. [b] Et quia AD, AE, maiores ſunt quam DE; additis DL, EB, communibus, quæ ęquales ſunt; (Nam iunctis rectis NA, NB, NL, ex centro N; quoniam tria latera trianguli ABN, tribus lateribus trianguli ALN, æqualia ſunt; [c] erunt tam anguli ad N, quam ad A, æquales; [d] ideoq; arcus CB, CL, æquales erunt; ac proinde recta NA, per cõtactum C, tranſibit, [e] eritq; ad DE, perpendicularis. Cum igitur duo anguli DAC, DCA, duobus angulis EAC, ECA, æquales ſint, & latus adiacẽs AC, commune; [f] erunt latera AD, AE, æqualia: proptereaq; & reliquæ DL, EB, æquales erunt, cum tangentes AL, AB, æquales ſint) erunt AL, AB, maiores tribus LD, DE, EB. Sit ergo exceſſus H. Rurſus quia arcus BL, maior eſt rectis BG, GC, CF, FL, ſit exceſſus I, qui minor ſit exceſſu H. Si namq; minor non eſt, diuidemus arcus LF, FC, CG, GB, bifariam, & hos rurſus bifariam, &c. connectemuſq; rectas, donec fiat exceſſus minor exceſſu H, per ſuperiꝰ principiũ Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas ſuperat ſecundam, videlicet rectas LF, FC, CG, GB, ſimul exceſſu I; Et tertia quantitas, nimirum ſumma rectarum AL, AB, ſuperat quartam, id eſt, ſummam rectarum LD, DE, EB, exceſſu H: Eſtque exceſſus I, minor exceſſu H; Et prima quantitas, hoc eſt, arcꝰ BL, ponitur non minor, quam tertia ex AB, AL, conflata, item tertia AB, AL, maior, quam quarta LD, DE, EB: erit per 1. Lemma, minor proportio arcus BL, primę quantitatis ad ſecundam LF, FC, CG, GB, quam tertię quantitatis AL, AB, ad quartam LD, DE, EB; [g] Et permutando minor erit proportio arcus LB, ad AL, AB, ſimul, quam rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad rectas LD, DE, EB, ſimul. Sit ergo vt compoſita ex LF, FC, CG, GB, ad compoſitam ex LD, DE, EB, ita arcus BK, ad rectas AL, AB, ſimul: Eritq; propterea minor etiam proportio arcus BL, ad AL, AB, ſimul, quam arcus BL, ad arcum BK, [h] ideoque arcus BK, maior erit arcu BL. Cum ergo eadem ſit proportio rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad LD, DE, EB, ſimul, quæ arcus BK, ad AL, AB, ſimul: ſintq; per 3. Lemma, rectæ LF, FC, CG, GB, ſimul minores, quam LD, DE, EB, ſimul; erit quoque arcus BK, minor, quam AL, AB, ſimul. Multo ergo minor erit arcus BL, duabus AL, AB, ſimul. Quare rectæ tangentes AL, AB, ſimul maiores ſunt arcu BL, quod erat oſtendendum.



Demõſtratio Card.

b 20. prim.

c 8. primi.
d 26. tertij.
e 18. tertij.
f 26. prim.

g ſchol. 27. quinti.

h 10. quin.

EST autem hæc demonſtratio Cardani admirabilis, & non abſimilis illi, qua Euclid. in propoſ. 12. lib. 9. vtitur. In vtraque enim infertur concluſio demonſtratione affirmatiua ex eius oppoſito, vt patet.

ATTVLI hanc demonſtrationem Cardani, non quod vere Geometrica ſit, niſi principium illud ſuum admittatur, ſed quod ingenioſa ſit & acuta. Sine tamen hac demonſtratione concedendum erit, ambitum figurę circumſcriptæ eſſe maiorem peripheria circuli propter demonſtrationem Archimedis, cum nihil vnquam in contrarium à quoquam ſit allatum, vt ſupra diximus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

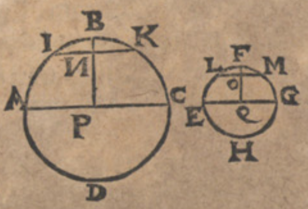
CIRCVLORVM diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

HOC demonſtrauimns nos in lib. 4. cap. 7. num. 3. propoſ. 1. idem autem hic aliter demonſtrabimus ex Pappo, hoc modo. Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum [a] Quoniam enim eſt circulus ad circulum, vt quadratum diametri

a 2. duod.

 metri

b 15. quin.



metri ad quadratum diametri. [b] Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita eſt quadruplum circuli ad quadruplum circuli. Igitur erit quoque quadruplum circuli ABCD, ad quadruplum circuli EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG. Sed rectangulum ſub diametro AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, ſit æqualis, comprehenſum, quadruplum eſt circuli ABCD; & rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, quadruplum circuli EFGH, ex coroll. propoſ. 2. cap. 5. Num. 1. lib. 5. Igitur erit rectangulum ſub diametro AC, & circumferentia ABCD, contentum, ad rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, comprehenſum, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex EG; Et permutando erit rectangulum ſub diametro AC, & circumferentia ABCD, ad quadratum ex AC, vt rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, ad quadratum ex EG. [c] Eſt aūt rectangulum ſub AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, ſit æqualis, ad quadratum ex AC, vt recta circumferentiæ æqualis ad AC: propterea quod rectangulum, & quadratum eandem habent altitudinem AC. Eodemq; modo eſt rectangulum ſub EG, & recta, quæ circumferentiæ EFGH, ſit æqualis, ad quadratum ex EG, vt recta circumferentiæ æqualis ad EG. Igitur erit, vt circumferentia ABCD, ad diametrum AC, ita circumferentia EFGH, ad diametrum EG: Et permutando circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum. quod demonſtrandum erat.

c 1. ſexti.

SCHOLIVM.

SVNT qui putent, fruſtra à Pappo hoc theorema demonſtrari, cum videatur eſſe per ſe notum, ita eſſe circumferentiam cuiuſuis circuli ad ſuam diametrum, vt eſt circumferentia alterius circuli ad ſuam diametrum: ac proinde permutando eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum. Qua in re mirum in modum decipiuntur. Cum enim à Ptolemeo (quod & à nobis propoſ. 10. Sinuum factum eſt) demonſtretur, maiorem eſſe proportionem maioris arcus ad minorem eiuſdem circuli, quam chordæ ad chordam, (quod etiam de arcubus, & chordis in circulis inæqualibus verum eſt, niſi arcus illi ſimiles ſint, vt in ſequenti Theoremate oſtendemus) quis ſine demonſtratione concederet, eandem eſſe proportionem circumferentiæ ad circumferentiam, quæ eſt diametri ad diametrum? Quod ſi demonſtratum eſſet, ita eſſe arcum cuiuſuis circuli ad ſimilem arcum alterius circuli, vt eſt chorda ad chordam, tum demum conſtaret, ita eſſe circumferentiam ad circumferentiam, [a] ac proinde & ſemicircumferentiam ad ſemicircumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum: propterea quod arcus ſemicirculorum ſimiles ſunt, quorum chordæ ſunt diametri. Verum hoc demonſtrari non poteſt, niſi prius demonſtretur, ita eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrnm, vt in Theoremate ſequenti conſtabit. Merito ergo, & non ſine cauſa, theorema præcedens à Pappo fuit demonſtratum.

a 15. quin.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

ARCVS cuiuſuis circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, quando quadrans eſt ad quadrantem, vt ſemiſſis arcus ad ſemiſſem arcus, ſimiles ſunt.

IN figura præcedentis propoſ. ducantur ad diametros perpendiculares PB, QF, ex centris P, Q, diuidentes ſemicirculos in binos quadrantes: ſintque arcus BI, BK, æquales, quibus ſimiles capiantur FL, FM; adeo vt toti arcus IK, LM, ſimiles ſint, quorum chordæ IK, LM, bifariam ſectæ ſint à ſemidiametris in N, O. Dico eandem eſſe proportionem arcus IBK, ad arcum LFM, quæ eſt chordæ IK, ad chordam LM, &c. [a] Quoniam enim eſt circumferentia ABD, ad circumferentiam EFH, [b] hoc eſt, quadrans AB, ad quadrantem EF, vt diameter AC, ad diametrum EG; hoc eſt, vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. [c] Eſt autem, vt Quadrans AB, ad quadrantem EF, ita arcus IB, ad arcum LF, cum ſimiles ponantur. Igitur erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Cum ergo ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, ita ſe habeat PB, ſinus totus ad QF, ſinum totum, quemadmodum ſinus IN, ad ſinum LO. erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt ſinus IN, ad ſinum LO, [d] id eſt, duplus arcus IK, ad duplum arcum LM, vt chorda IK, ipſius IN, dupla, ad chordam LM, ipſius LO, duplam. quod eſt propoſitum.

a 2 huius.
b 15. quin.
c 15. quin.
d 15. quin.

VERVM ſit iam arcus IK, ad arcum LM, vt chorda IK, ad chordam LM. Dico arcus ſimiles eſſe. Facta enim eadem conſtructione, [e] erit quoque arcus IB, ad arcum LF, ſemiſſis ad ſemiſſem, vt IN, ad LO, ſemiſſis ad ſemiſſem. [f] Vt autem IB, ad LF, ita eſt quadrans AB, ad quadrantem EF, ex hypotheſi; [g] Et vt quadrans ad quadrantem, ita eſt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Igitur erit quoque ſinus IN, ad ſinum LO, vt ſinus totus PB, ad ſinum totum QF. Atque idcirco ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, arcus IB, LF, ſimiles erunt; ac proinde & eorum dupli IBK, LFM, ſimiles erunt. quod erat demonſtrandum.

e 15. quin.
f ſchol. 33. ſexti.
g 2. huius.

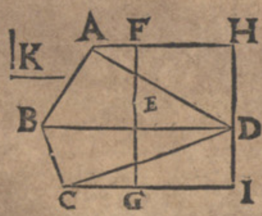
COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, ſi arcus IBK, LFM, non ſint ſimiles, eos non habere eandem cum chordis proportionem. Si namque eandem haberent, ipſi ſimiles eſſent, vt in ſecunda parte huius propoſ. fuit oſtenſum, quod eſt abſurdum, çum ponantur non ſimiles.

PROBL. 1. PROPOS. 4.

DATO quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.



SIT quadrilaterum quodcunque ABCD, & datus angulus K. Ducta diametro BD, eaque diuiſa bifariam in E, ducatur per E, recta FG, faciens in E, angulum FED, dato angulo K, æqualem. Deinde ducta per D, ipſi FG, parallela HI, & per A, C, duabus AH, CI, ipſi BD, parallelis ſecantibus FG, HI, in F, H, G, I, conſtitutum erit parallelogrammum FI, in dato angulo G, [a] qui æqualis eſt angulo, FED, internus externo, hoc eſt, angulo K. Dico idem parallelogrammum quadrilatero dato ABCD, æquale eſſe. [b] Quia enim parallelogrammum FD, triangulo ABD, & parallelogrammum EI, triangulo CBD, æquale eſt; erit totum parallelogrammum FI, toti quadrilatero ABCD, æquale, quod eſt propoſitum.

a 29. prim.
b ſchol. 41. primi.

PROBL. 2. PROPOS. 5.

DATO rectangulo ſupra datam rectam æquale rectangulum facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.



SIT rectangulum ABCD, cui ſupra datam rectam conſtituendum eſt rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum AB, capiatur BE, æqualis datæ rectæ, ſiue ea ſit maior latere AB, ſiue minor: atque ex E, per C, recta ducatur ſecans AD, productam in F, compleaturque rectangulum AH, & rectę BC, DC, producantur vſque ad G, I. [a] Erit igitur complementum CH, complemento CA, æquale. Cum igitur latus CI, ſit lateri BE, id eſt, datæ rectæ æquale: factum erit, quod proponitur.

a 43. prim.

ALITER.

DATÆ rectæ BE, & duobus lateribus AB, BC, dati rectanguli, [a] inueniatur quarta proportionalis CG. [b] Nam rectangulum ſub BE, prima, & CG, quarta comprehenſum, rectangulum videlicet CH, æquale erit dato rectangulo AC, ſub ſecunda AB, & tertia BC, comprehenſo, quod eſt propoſitum.

a 17. ſexti.
b 16. ſexti.

PROBL. *3.* PROPOS. *6.*

DATO rectilineo æquale rectangulum facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.

HOC per duas præcedentes propoſ. facile expedietur. Nam ſi figura rectilinea in triangula reſoluatur, conſtituent quælibet duo commune latus habentia trapezium, cuius latus commune eſt diameter. [a] Igitur ſi ſingulis trapezijs ſingula rectangula fiant æqualia, atque etiam vltimo triangulo, ſi forte numerus triangulorum eſt impar. Deinde, ſi, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, vni lateri primi rectanguli, & duobus lateribus ſecundi, [b] inueniatur quarta proportionalis; [c] erit rectangulum ſub aſſumpto latere in primo rectangulo, & quarta proportionali, ſecundo rectangulo æquale. Quocirca ſi alterum latus prope aſſumptum in primo rectangulo producatur, & ex producto abſcindatur recta æqualis quartæ proportionali, compleaturque totum rectangulum; habebitur rectangulum ex duob⁹ compoſitum æquale duobus primis trapezijs. Et ſi eidem lateri, ac duobus tertij rectanguli reperiatur rurſum quarta proportionalis, & huic quartæ ſumatur in priori latere producto recta æqualis, conficietur eodem pacto rectangulum ex tribus conflatum æquale tribus trapezijs, &c.

a 4. huius.
b 12. ſexti.
c 16 ſexti.

[d] VLTIMO porro triangulo, ſi quod fuerit, conſtituetur rectangulum æquale ſupra ſemiſſem baſis, in eadem altitudine cum triangulo.

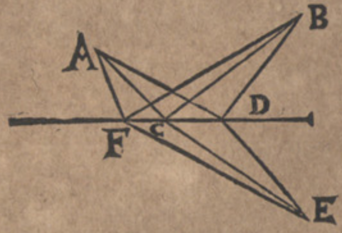
d ſchol. 41. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SI ex duobus punctis ad vnum punctum cuiuſuis lineæ rectę, quæ communis ſectio ſit plani per duo illa puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur, facientes cum illa duos angulos æquales: Erunt duæ hæ rectę breuiores quibuſcunque aliis duabus rectis, quæ ex eiſdem duobus punctis ad aliud punctum eiuſdem lineę rectæ ducuntur.

EX duobus punctis A,B,ad C,punctum in recta CD,ita vt planum per CD,ductum tranſeat reuolutum per A,B,ducantur duæ rectæ A C, B C, facientes angulos ACF, BCD, æquales: & ex eiſdem punctis A, B, ducantur primum ad aliud punctum D,ad dextram ipſius C,aliæ duæ rectæ AD,BD. Dico AC,BC, eſſe breuiores,quam AD,BD. Producta enim A C, verſus C, fiat CE, ipſi C B, æqualis, iungaturque DE. Et quia angulus A C F, angulo B C D, ponitur æqualis, [a] eſtque angulus ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis, erit quoque angulus BCD,angulo ECD, æqualis. Cum ergo & duo latera BC, CD,duobus lateribus E C, CD, æqualia ſint: [b] erit baſis DB, baſi DE,æqualis; ac proinde AD,DB,ſimul ipſis AD,DE,ſimul æquales erunt. [c] Sunt autem A D, D E, maiores quam AE,hoc eſt quam AC, CB; quod C B, CE, poſitæ ſint æquales. Igitur & AD,BD, maiores erunt, quam A C, B C. quod eſt propoſitum.

a 15 prim.
b 4. prim.
c 20. prim.



DVCANTVR deinde ex punctis A, B, ad aliud punctum F,ad ſiniſtram ipſius C, aliæ duæ rectæ AF,BF. Dico rurſus AC,BC, breuiores eſſe, quam AF, BF. Producta enim rurſum AC,ſumptaque CE, ipſi CB, æquali, iungatur EF. Et quoniam anguli ACF,BCD,æquales ponuntur; [d] eſtque ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis;erunt quoque anguli BCD,ECD, æquales: ac proinde & ex duobus rectis reliqui BCF, ECF, æquales erunt,Cum ergo & duo latera BC,CF, duobus lateribus EC,CF, æqualia ſint; [e] erit quoque baſis B F, baſi EF, æqualis: Ac proinde AF,FE,ipſis AF,BF, æquales erunt. [f] Sunt autem AF,FE,maiores, quam AE, hoc eſt, quam AC, BC,ꝙ BC,CE,poſitæ ſint æquales.Igitur & AF,BF,maiores erũt, quã AC, CB. quod eſt propoſitũ.

d 15. prim.
e 4. primi.
f 20. prim.

SCHOLIVM.

QVIA ergo Natura non impedita agit per lineas breuiſſimas; fit, vt radius Solis, vel viſualis cadens ex A,in planum terſum D F, ita vt reflectatur ad punctum B, cadat neceſſario in punctum C,vbi angulus A C F, (quem Perſpectiui angulum incidentiæ dicunt.) æqualis efficitur angulo B C D, quem reflexionis appellant. Nam ſi radius caderet in D, vel F, reflecteretur que ad B, non ageret Natura per lineas breuiſſimas; cum tam AD,BD,quam AF, BF, longiores ſint, quam AC,BC,vt demonſtrauimus. quod eſt abſurdum. Atque ita demonſtratum eſt,quod Perſpectiui aſſumunt,angulum ſcilicet incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis.

PROBL. 4. PROPOS. 8.

SI quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates poſt tres operationes imperatas reliquæ ſint, coniicere.

IVBE conceptum numerum per quemcunque numerum,vt per 2. vel 3. vel 4. vel 10. &c. multiplicari, & producto adde tu quemlibet numerum à numero multiplicante numeratum. Deinde iube ex parte aliquota ſummæ totius à multiplicante numero denominata auferri ſimilem partem aliquotam numeri producti ex multiplicante in numerum conceptum, hoc eſt, ipſum numerum conceptum. Ita enim reliquus numerus erit ſimilis pars aliquota numeri,quem adiunxiſti. Cum ergo numerus adiunctus tibi notus ſit,habeatque partem aliquotam à numero multiplicante denominatam, ac proinde tibi cognitam: dices reliquas vnitates illam partem aliquotam conficere. Exempli gratia. Concipiat aliquis numerum 4. iube multiplicari per 6. fiunt 24. iube addi numerum 30. à multiplicante 6. numeratum, fiunt 54. Ex ſexta parte huius ſummæ denominata à multiplicante numero 6. id eſt, ex 9. fac detrahi partem quoque ſextam prioris numeri producti 24. nimirum 4. videlicet ipſum numerum conceptum. Ita namque remanet ſexta pars numeri adiuncti 30. nimirum 5. quod in hunc modum demonſtratur.

A	B	C	F
4	24	54	30
	D	E	G
	4.	9.	5.

SIT conceptus numerus A, quo ducto verbi gratia in 6. gignatur B, & addito F,fiat ſumma C. Ex E,parte aliquota ſummæ C, denominata à 6. detrahatur D, pars aliquota prioris producti B,denominata quoque à 6. hoc eſt,ipſemet numerus conceptus A, reliquuſque fiat numerus G, quem dico partem eſſe aliquotam numeri adiuncti F, à numero quoque 6. denominatam. Quoniam enim ita eſt multiplex totus C, totius E, vt ablatus B,ex C, ipſius D, ex E, ablati, quippe cum ponatur E, talis pars ipſius C, qualis D, ipſius B,denominata videlicet à 6. [a] Igitur erit quoque reliquus FC. detracto nimirum producto B,ex ſumma C.) ita multiplex reliqui G,(dempto ſcilicet D,ex E,) vt totus C,totius E. quod erat demonſtrandum.

a ſchol. 7. ſeptimi.

EST

EST autem iucundum, hoc idem coniici poſſe inter plures. Nam ſi plures concipiant mente numeros, ſinguli videlicet ſingulos, nullo eorum conſcio, quem quiſque numerum conceperit; & iubeas quemlibet ſuum numerum multiplicare per quemuis numerum à te electum; deinde addere numerum à tuo electo numeratum, quicunq; ille ſit; ac poſtremo ex parte aliquota ſummæ, cuius denominator eſt numerus à te electus, auferre ſimilem partem ex productis ſingulorum, hoc eſt, ipſos conceptos numeros: reliquus numerus cuiuſq; erit ſimilis pars numeri adiecti,

QVOD ſi malueris diuerſos numeros, dic vt ſecundus ſuum reſiduum duplicet, & tertius triplicet, &c. Ita enim coniicies, primi reſiduum eſſe illam partem aliquotam numeri adiecti: ſecundum vero habere duplum illius, & tertium triplum, &c. Vbi vides eos reſiduum illud per quoſcunque numeros poſſe multiplicare, dummodo memor ſis in coniiciendis numeris, per quos factæ ſint multiplicationes.

PROBL. 5. PROPOS. 9.

DATVM numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.

QVAMVIS problema hoc videatur fere impoſſibile: (qui enim fieri poteſt, dicet aliquis, vt quilibet numerus quadratus diuidi poſſit in quotlibet numeros, qui omnes ſint quadrati?) ſolutio tamen eius non eſt difficilis. Sit igitur quadratus numerus datus 36. diuidendus in 5. numeros quadratos. Per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. Euclid. ſcripſimus, reperiantur tres numeri, quorum maioris quadratus reliquorum quadratis ſit æqualis, nimirum 5. 4. 3. Deinde dic: ſi 5. dant 4. quid dabunt 6. quadrata videlicet radix dati quadrati? Item ſi 5. dant 3. quid dabunt 6? Inueniesque $\frac{24}{5}$. & $\frac{18}{5}$. hoc eſt, $4\frac{4}{5}$. & $3\frac{3}{5}$. radices duorum quadratorum quadrato 36. dato æqualium. Nam cum ita ſe habeat radix 6. ad inuentos duos numeros, vt 5. ad 4. & 3. ex conſtructione: fiet ex lateribus 6. $4\frac{4}{5}$. $3\frac{3}{5}$. triangulum rectangulum, ſimile nimirum triangulo rectangulo ex lateribus 5. 4. 3. constructo. [a] Igitur quadrati ex $4\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. æquales erunt quadrato radicis 6. dato. Rurſus ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $3\frac{3}{5}$. ad aliud; (ſumendo minorem radicem inuentam, ne coincidamus cum aliqua præcedente radice iam inuenta) inuenientur alij duo numeri, quorum quadrati æquales ſint quadrato radicis $3\frac{3}{5}$. nimirum $2\frac{22}{25}$. & $2\frac{4}{25}$. Atque ita iam (relicta radice $3\frac{3}{5}$.) inuentæ erunt tres radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $2\frac{4}{25}$. quarum quadrati æquales erunt quadrato 36. propoſito. Eodem modo ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $2\frac{4}{25}$. ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. Quare (relicta radice $2\frac{4}{25}$. cuius loco duas inuenimus) inuentæ iam erunt quatuor radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. quarum numeri quadrati quadrato 36. æquales erunt. Denique ſi rurſus fiat vt 5. ad 4. & ad 3. ita $1\frac{37}{125}$. minor radix inuenta ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. Quocirca (relicta radice $1\frac{37}{125}$. pro qua duas proximas inuenimus) inuentæ erunt quinque radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. $1\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. quarum quadrati numeri $23\frac{1}{25}$. $8\frac{184}{625}$. $2\frac{15406}{15625}$. $1\frac{29279}{390625}$. & $\frac{236196}{390625}$. conficiunt datum quadratum 36. Atque in hunc modum plures quadrati inueniri poterunt æquales numero 36. ſi nimirum fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita vltima radix inuenta $\frac{486}{625}$. quæ minima eſt, ad aliud, &c.

[a] *47. pri.*

THEOR. 5. PROPOS. 10.

PROPOSITIS duabus minutijs inæqualibus; minutia, cuius numerator ex illarum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem eſt minore, minor vero maiore.

SINT duæ minutiæ inæquales, maior $\frac{3}{5}$. & minor $\frac{4}{7}$. Iungantur tam numeratores, quam denominatores, vt fiat minutia $\frac{7}{12}$. Dico hanc maiorem eſſe, quam $\frac{4}{7}$. & minorem quam $\frac{3}{5}$. Quoniã enim maior eſt minutia $\frac{3}{5}$. quam $\frac{4}{7}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. maior proportio 3. ad 5. quam 4. ad 7. [a] Et permutando, maior 3. ad 4. quam 5. ad 7. [b] Igitur & componendo, maior 3. 4. ſimul, hoc eſt, 7. ad 4. quam 5. 7. ſimul, id eſt, quam 12. ad 7. [c] Et permutando, maior 7. ad 12. quam 4. ad 7. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. maior erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{4}{7}$. quod eſt primum.

$\frac{3}{5}$.	$\frac{4}{7}$.	$\frac{7}{12}$.

[a] *27. quin.* [b] *28. quin.* [c] *27. quin.*

DEINDE quia minor eſt $\frac{4}{7}$. quam $\frac{3}{5}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. minor proportio 4. ad 7. quam 3. ad 5. [d] & permutando, minor 4. ad 3. quam 7. ad 5. [e] Igitur & componendo minor 4. 3. ſimul, id eſt, 7. ad 3. quam 7. 5. ſimul, hoc eſt, quam 12. ad 5. [f] Et permutando, minor 7. ad 12. quam 3. ad 5. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Euclid. minor erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{3}{5}$. quod eſt ſecundum.

[d] *27. quin.* [e] *28. quin.* [f] *27. quin.*

THEOR. 6. PROPOS. 11.

SI duo numeri inter ſe primi non ſint ambo quadrati, aut cubi; neque eorum æque multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et ſi eorum æque multiplices aliqui ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi erunt quadrati, aut cubi.

SINT enim A, B, numeri inter ſe primi, & non ambo quadrati, vel cubi, quamuis vnus eorum quadratus ſit, vel cubus, ſintque eorum æque multiplices C, D. Dico neq; hos eſſe ambos quadratos, aut cubos. Sint enim, ſi fieri poteſt, ambo quadrati, vel cubi. Et quoniam idem numerus multiplicans A, & B, fecit C, & D, quod hi illorum ſint æque multiplices: [a] erit A, ad B, vt C, ad D. [b] Cadit autem inter C, & D, vnus medius proportionalis, aut duo. [c] Igitur & inter A, B, vnus cadet medius proportionalis, aut duo.

A	B
4.	11.
C	D
12.	33.

[a] *17. ſept.* [b] *11. & 12. octaui.* [c] *8. octa.*

Cum

d 1. octaui. Cum ergo extremi A,B, ponantur inter ſe primi; [d] erunt omnes tres, vel quatuor proportionales, minimi in ſua
e coroll. 2. proportione: [e] Ac proinde A,B, ambo quadrati erunt, vel cubi, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo C,D,
octaui. ambo quadrati ſunt, aut cubi. quod erat oſtendendum.

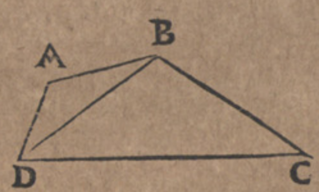
SED ſint iam C,D, ipſorum A, B, inter ſe primorum æque multiplices, & ambo quadrati, vel cubi. Dico etiam A, B, ambos eſſe quadratos, vel cubos. Si enim non ſunt; neque ipſi C, D, erunt ambo quadrati, vel cubi, vt demonſtratum eſt. quod cum hypotheſi pugnat.

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi tam Numerator, quam Denominator alicuius minutiæ fuerit quadratus, aut cubus: tám Numeratorem quoque, quam Denominatorem eiuſdem minutiæ ad minimos reductæ terminos, eſſe quadratum, vel cubum; cum minimi termini ſint numeri inter ſe primi, habeantq; eandem proportionem, quam Numerator, ac Denominator prioris minutiæ: quippe cum minutiæ ſint æquales. Item ſi vterq; numerus minutiæ cuiuſpiam in minimis terminis non ſit quadratus, aut cubus, neque vtrumq; numerum alterius minutiæ æquiualentis eſſe quadratum, aut cubum.

THEOR. 7. PROPOS. 12.

IN omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere.



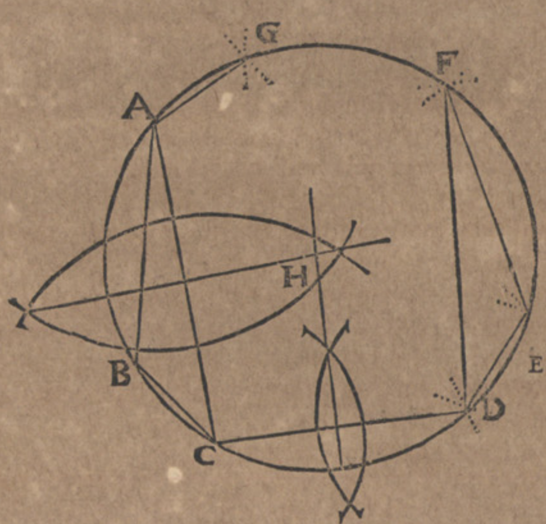
SIT quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, nimirum DA, AB, BC, ſimul ſumpta eſſe maiora reliquo latere DC. Ducta enim diametro BD; [a] erunt rectæ BD, BC, maiores quam DC; Sed eadem ratione AB, AD, maiores ſunt quam BD. Maiores erunt ergo tres AD, AB, BC, quam duæ BD, BC; ac proinde multo maiores, quam DC. Idemque demonſtrabitur ſimili modo de quibuſcunque alijs tribus lateribus, vt conſtat. In omni ergo quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere. quod erat demonſtrandum.

a 20. pri.

PROBL. 6. PROPOS. 13.

DATIS tribus punctis, per quæ circulus deſcribendus ſit, inuenire alia puncta, per quæ idem circulus tranſire debeat.

SOLENT interdum tria data puncta tam parum inter ſe diſtare, aut fere in recta linea iacere, vt non facile eorum centrum inueniri poſſit, propterea quod rectæ ſecantes lineas illa puncta connectentes bifariam, & ad angulos rectos, nimis oblique ſe in centro interſecant. Vt igitur magis exquiſite centrũ reperiatur, inueſtiganda erunt alia duo puncta, vel plura, per quæ idem circulus incedere debeat, hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Iunctis rectis A B, A C, BC, conſtituatur ſupra baſem B C, triangulum B C D, triangulo ABC, æquilaterum, ita vt angulus D, vergat in eam partem, verſus quam circumferentia deſcribenda tranſire debet: lateraque æqualia non ab eodem puncto exeant, hoc eſt, latus C D, lateri B A, & latus BD, lateri CA, ſit æquale. Quod quidem fiet, ſi ex C, arcus delineetur ad interuallum BA quem alius arcus ex B, ad interuallum CA, delineatus ſecet in D. [a] Erit enim angulus D, angulo A, æqualis: [b] ac proinde circulus per tria puncta A, B, C, deſcriptus tranſibit quoque per quartũ punctum D. Eadem ratione, ſi ſuper baſem CD, triangulum conſtruatur CDE, triangulo BCD, æquilaterum ordine prædicto, ita vt latus DE, lateri CB, & latus CE, lateri BD, æquale ſit, inuentum erit aliud punctum E, per quod circumferentia incedat. Atque eadem arte reperietur aliud punctum F, per triangulum DEF, triangulo EDC, æquilaterum, &c. Eodem modo ex altera parte reperietur aliud punctum G, per triangulum ABG, triangulo ABC, æquilaterum, & ſic deinceps. Si igitur eligantur tria puncta, ita vt rectæ ea connectentes conſtituant quaſi angulũ rectum, qualia ſunt tria puncta A, C, D, & ex proximis A, C, ad quodcunq; idem interuallum bini arcus deſcribantur, & ex proximis C, D, bini alij; ac per interſectiones horum arcuum rectæ lineæ emittantur, ſecabunt ſe ſe in centro H, &c. Aptiſſima quoq; eſſent tria puncta G, B, D, quamuis angulus DBG, acutus ſit. Item tria puncta G, B, E, & C, E, F, &c.



a 8. primi.
b ſchol. 21. tertij.

PROBL. 7. PROPOS. 14.

DATO exceſſu diametri Quadrati ſupra latus: Item dato exceſſu diametri Rhombi ſupra latus, vel lateris ſupra diametrum (quando illud maius eſt) vna cum vno Rhombi angulo: Dato præterea exceſſu diametri Rectanguli ſupra vtrumlibet laterũ inæqualium, vna cum

cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vna cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato denique exceſſu diametri Rhomboidis ſupra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriuſuis inæqualium laterum ſupra diametrum (quando illud maius eſt) vna cum vno angulo Rhomboidis, & inſuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel inſuper cum proportione duorum laterum inæqualium; Quadratum ipſum, Rhombum, Rectangulum, & Rhomboides conſtituere.

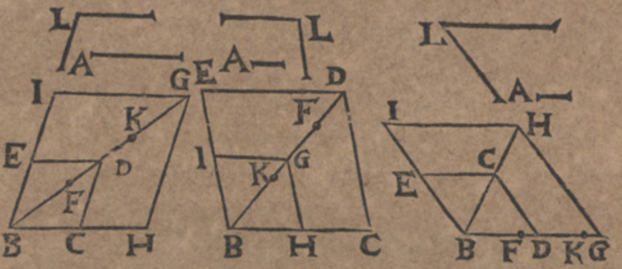
HOC problema, quod ad quadratum attinet, alio modo ad finem lib. 2. Euclid. abſoluimus. Sit A, datus exceſſus diametri quadrati cuiuſpiam ſupra latus. Fiat quodcunque quadratum BCDE, cuius diameter BD, excedat latus exceſſu DF; qui ſi æqualis fuerit dato exceſſui A; factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [a] fiat vt DF, ad datum exceſſum A, ita diameter BD, ad BG, perficiaturq; quadratum HI; quod dico eſſe id, quod quæritur. Sumpta enim recta GK, ipſi A, æquali, quoniam eſt per conſtructionem, vt tota BD, ad totam BG, ita DF, ablata ad A, hoc eſt, ad GK, ablatam; [b] erit quoque vt tota BD, ad totam BG, ita reliqua BF, ad reliquam BK. Et permutando, vt BD, ad BF, ita BG, ad BK. [c] Eſt autem vt BD, ad BF, ita BD, ad BC, (quod BF, BC, æquales ſint; cum DF, ponatur exceſſus diametri BD, ſupra latus BC.) [d] Et vt BD, ad BC. ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH; [e] Ac proinde BK, BH, æquales erunt. Diameter ergo BG, ſuperat latus BH, hoc eſt, BK, recta GK, quæ dato exceſſui A, æqualis eſt. Quod eſt propoſitum.



a 12. ſexti. b 19. quin. c 7. quin. d 4. ſexti. e 9. quin.

SIT deinde A, exceſſus diametri in Rhombo aliquo ſupra latus, vna cum angulo L, datus. Fiat Rhombus quicunque BCDE, habens angulum C, æqualem dato angulo L, vt in primo Rhombo, vel angulum B, vt in ſecundo. Siue ergo diameter opponi debeat dato angulo C, vt in primo Rhombo, ſiue datum angulum B, ſecare, vt in ſecundo, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [f] fiat vt DF, ad exceſſum datum A, ita diameter BD, ad BG, compleaturque Rhombus HI, quem dico eſſe eum, qui quæritur. Abſciſſa enim recta GK, exceſſui dato A, æquali, adhibenda eſt eadem omnino demonſtratio, quæ in quadrato facta eſt.

f 12. ſexti.



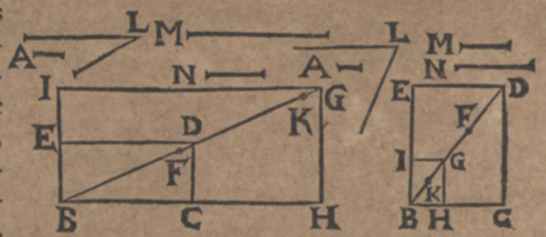
QVOD ſi diameter latere Rhombi minor fuerit, ſit datus exceſſus A, lateris in aliquo Rhombo ſupra diametrum, vna cũ angulo L. Conſtruatur Rhombus quantuſcunque BDCE, habens angulum D, æqualem dato angulo L, vt in tertio Rhombo. Et quia vt latus ſuperet diametrum, ducenda eſt diameter per angulos obtuſos, [g] (quod diameter per acutos angulos ducta ſemper maior eſt Rhombi latere) ducatur diameter BC, quam latus BD, excedat recta DF, quæ ſi æqualis fuerit exceſſui dato A, factũ erit, quod iubetur: Si vero inæqualis: fiat vt DF, ad exceſſum A, ita BD, latus ad BG, cõpleaturq; Rhombus GI, circa eandem diametrum, quem dico eſſe quæſitum. Abſciſſa namq; recta GK, æquali exceſſui A: fiet demõſtratio, vt in quadrato, vt perſpicuum eſt, ſi loco diametrorum BD, BG, in quadrato ſumantur hic latera BD, BG.

g 19. pri.

TVNC autem latus Rhombi maius erit diametro (vt hoc etiam obiter moneamus) cum ſemiſſis anguli obtuſi maior fuerit angulo acuto eiuſdem Rhombi. Nam ſi in tertio Rhombo angulus CBD, qui ſemiſſis eſt anguli obtuſi B, vt in ſchol. propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus, maior ſit angulo acuto D; [h] erit latus BD, hoc eſt, CD, maius diametro BC, in triangulo BCD. Quando autem ſemiſſis anguli obtuſi fuerit minor angulo acuto, vt in Rhombo ſecundo; [i] erit diameter latere maior in triangulo BCD.

h 19. pri. i 19. pri.

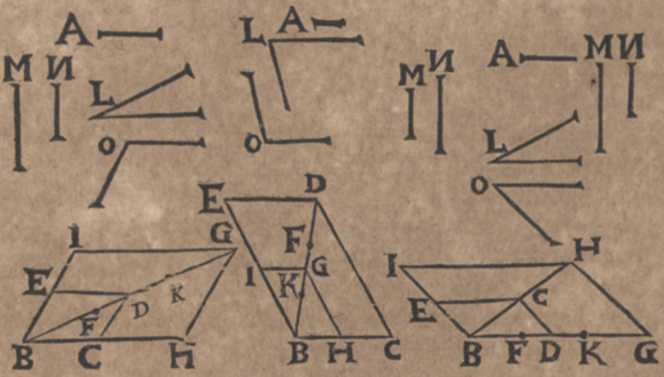
TERTIO ſit datus exceſſus A, diametri rectanguli alicuius ſupra alterum laterum inæqualium, vna cum angulo L, quem diameter cum eo latere conſtituit, vel vna cum proportione M, ad N, quam illud latus ad alterum habet. Si ergo angulus L, eſt ſemirecto minor, vel certe proportio M ad N, maioris inæqualitatis, vt in priori rectangulo, erit A, exceſſus diametri ſupra maius latus: Si vero angulus L, eſt maior ſemirecto, vel proportio M, ad N, minoris inæqualitatis, erit A, exceſſus diametri ſupra minus latus. Conſtituatur ergo angulus CBD, angulo L, æqualis, fiatque rectangulum BCDE, circa aſſumptam diametrum BD. Vel fiat BC, quantacunque ad CD, perpendicularem, vt M, ad N: completoque rectangulo CE, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ ſi fuerit æqualis dato exceſſui A, conſtructum erit rectangulum CE, quod quæritur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad exceſſum datum A, ita BD, ad BG, compleaturque rectangulum HI, quod erit quæſitum. Abſciſſa enim recta GK, æquali exceſſui A, demonſtrabitur propoſitum, vt in quadrato.



QVARTO & vltimo ſit in aliquo Rhomboide datus exceſſus A, diametri ſupra vtrumuis inæqualium laterum, vna cum angulo Rhomboidis O, & inſuper cũ angulo L, quem diameter cũ latere, cuius exceſſus ſumptus eſt, efficit, vel inſuper cũ proportione M, ad N, quam latus illud ad alterũ latus habet. Conſtituatur angulus BCD, in prima figura, vel CBE, in ſecunda, dato angulo O, æqualis. Deinde ſiue diameter dato angulo C, opponi debeat, vt in prima figura, ſiue datũ angulum CBE, ſecare, vt in ſecũda, fiat ad B, angulus CBD, angulo L, dato æqualis, ſecetq; CD, rectã BD, in D: vel fiat vt M, ad N, ita BC, ad CD; ac Rhõboides compleatur CE, cuius diame-

diameter latus B C, excedat recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur. Si vero inæqualis, fiat vt D F, ad exceſſum A, ita B D, ad B G, compleaturque Rhomboides H I, circa eandem diametrum B D, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi reſecetur G K, exceſſui A, æqualis, adhibenda eſt eadem demonſtratio, quæ in præcedentibus.

QVOD ſi diameter Rhomboidis cuiuſpiam minor fuerit latere maiore, vt in tertia figura. Sit datus exceſſus A, lateris maioris in aliquo Rhomboide ſupra diametrum, vna cum angulo O, Rhomboidis, & inſuper cum angulo L, quem diameter cum illo latere maiore efficere debet, vel inſuper cum proportione M, ad N, quam maius latus ad minus habet. Conſtituatur angulus BDC, dato angulo O, æqualis: Et ſi eſt acutus, fiat in B, angulus D B C, angulo L, æqualis, (ſi datus angulus Rhomboidis foret obtuſus, nimirum DBE, conſtituendus eſſet angulus D B C, in ipſo angulo dato) ſecetque recta BC, rectam DC, in C; vel fiat vt M, ad N, ita B D, ad D C; ac Rhomboides compleatur D E, cuius latus BD, diametrũ B C, ſuperet recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factũ erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, fiat vt DF, ad A, ita BD, ad B G, perficiaturque Rhomboides GI, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi capiatur GK, æqualis ipſi A, demonſtrabitur propoſitum, vt ſupra in quadrato, ſi loco diametrorum BD, BG, quadrati, accipiantur hic latera BD, BG, vt perſpicuum eſt,



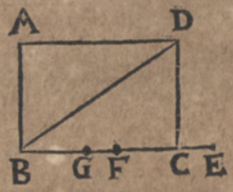
TVNC autem latus maius diametrum excedet, quando angulus, quem diameter cum minore latere efficit, maior eſt acuto angulo Rhomboidis. Nam ſi in tertia figura angulus BCD, maior eſt angulo D: [c] erit recta B D, maior, quam B C.

c 19. prim.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

IN rectangulo parallelogrammo, ſumptis exceſſibus, quibus diameter duo latera ſuperat; Rectangulum ſub differentia exceſſuum, & minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat.

SIT rectangulũ AC, cuius diametro BD, æqualis ſit recta BE, vt exceſſus minor, quo diameter maius latus BC, ſuperat, ſit CE; Sumpta aũt BF, æquali minori lateri CD, vt EF, exceſſus ſit, quo diameter BD, vel illi çqualis BE, minus latus CD, vel illi æqualem BF, ſuperat: ac proinde CF, ſit differentia exceſſuum EC, EF. [a] Et quia latera BC, CD, maiora ſunt latere BD, hoc eſt, recta BE, dempta communi BC, erit reliqua CD, maior quam reliqua CE; ideoq; & BF, æqualis ipſi CD, maior erit, quam CE. Abſciſſa ergo FG, ipſi CE, æquali, erit BG, exceſſus, quo minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. Dico rectangulum bis ſumptum ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minore exceſſu, vna cum quadrato minoris exceſſus CE, bis ſumpto, æquale eſſe quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. [b] Quoniam enim quadratum rectæ BE, æquale eſt quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulo bis ſub BC, CE, hoc eſt, rectangulo ſemel ſumpto ſub BC, & recta ipſius CE, dupla. [c] Eſt autem rectangulum ſub BC, & dupla ipſius CE, æquale rectãgulis ſub BF, & dupla ipſius CE, æquale rectãgulis ſub BF, & dupla ipſius CE, & ſub FC, & dupla ipſius CE; hoc eſt rectangulo ſub BF, & CE, bis vna cum rectangulo ſub FC, & CE, bis; Erit quadratum rectæ BE, ſiue rectæ BD, æquale quoque quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis ſub B F, C E, bis & ſub F C, C E, bis; Ac proinde & quadrata rectarum B C, C D, [d] quæ quadrato rectæ BD, æqualia ſunt, æqualia erunt quadratis rectarum BC, CE, vna cũ rectangulis ſub B F, C E, bis & ſub F C, C E, bis. Ablato ergo communi quadrato rectæ BC, erit reliquum quadratum rectæ CD, hoc eſt, rectæ BF, æquale reliquis rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadrato rectæ CE. Addito igitur communi quadrato rectæ FG, erunt quadrata rectarum BF, FG, æqualia rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. [e] Sed quadrata rectarum BF, FG, æqualia ſunt rectangulo ſub BF, FG, bis, vna cum quadrato rectæ BG. Igitur rectangulũ quoq; ſub BF, FG, hoc eſt, ſub BF, CE, bis, vna cum quadrato rectæ BG, æquale erit rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. Ablato ergo communi rectangulo ſub BF, CE, bis ſumpto; erit reliquum quadratum BG, æquale reliquo rectangulo ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarũ CE, FG: hoc eſt, rectangulũ ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus CE, bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. quod erat demonſtrandum.



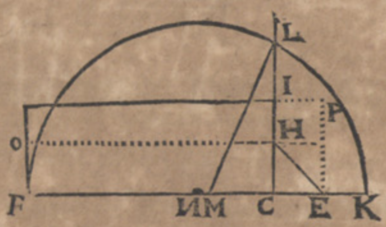
a 20. prim. b 4. ſecun. c 1. ſecund. d 47. prim e 7. ſecun.

PROBL. 8. PROPOS. 16.

DATIS duobus exceſsibus, quibus diameter rectanguli vtrumque latus ſuperat, vtrumque latus, & diametrum inuenire.

SIT

SIT datus exceſſus FE, diametri ſupra latus minus, & CE, ſupra maius, ita vt differentia exceſſuum ſit FC. Ex C, educatur ad FE, perpendicularis CL, capianturque CH, HI, EK, minori exceſſui CE, æquales, ita vt totæ CI, CK, æquales ſint, vtpote ipſius CE, duplæ, perficiaturque parallelogrammum FI. Diuiſa deinde FK, bifariam in N, deſcribatur ex N, per F, & K, ſemicirculus FLK, ſecans CL, in L. Ducta denique HE, ſumatur illi æqualis CM, iungaturque recta LM. Dico LM, differentiam eſſe inter minus latus quæſitum, & minorem exceſſum datum CE, ita vt CE, addita ad LM, efficiat minus latus; cui ſi addatur FC, differentia datorũ exceſſuum, fiat maius latus. (Eſt enim differentia exceſſuum diametri ſupra vtrũq; latus rectanguli æqualis exceſſui maioris lateris ſupra minus: Vt in figura præcedentis ꝓpoſ. patet; vbi diameter eſt BD, vel BE; exceſſus maior FE, quo diameter minus latus BF, ſuperat; exceſſus minor CE; quo eadem diameter maius latus BC, ſuperat: eſtq; FC, differentia exceſſuum, exceſſus, quo maius latus BC, ſuperat minus BF,) Ac tandem maiori lateri inuento adijciatur minor exceſſus CE, vt diameter habeatur, quę omnia ita demonſtrabuntur.



Per præcedentem, rectangulum ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minori exceſſu bis ſumptum, hoc eſt, rectangulum FI, vna cum quadrato rectæ CE, bis etiam ſumpto, hoc eſt, vna cum quadrato rectæ HE, vel CM, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus quæſitũ, minorem exceſſum CE, ſuperat. Cum ergo quadratum rectæ CL, æquale ſit rectangulo FI, vt ex demonſtratione vltimæ propoſ. lib. 2. Eucl. conſtat; erunt quoque quadrata rectarum CL, CM, æqualia quadrato eiuſdem rectæ, qua minus latus quæſitum ſuperat minorẽ exceſſum CE, [a] Ac proinde cum quadratis rectarũ CL, CM, ſit æquale quadratũ rectæ LM: erit quoq; quadratum rectæ LM, æquale quadrato rectæ, qua minus latus quæſitum minorẽ exceſſum CE, ſuperat. Eſt ergo LM, exceſſus minoris lateris quæſiti ſupra minorẽ exceſſum CE. Ideoque recta ex LM, CE, conflata erit minus latus quæſitũ: cui ſi addatur FC, differentia exceſſuũ, fiet maius latus quæſitum: cui ſi tandẽ minor exceſſus CE, adijciatur, conflabitur diameter quæſita, quę omnia demonſtranda erant

[a] 47. primi

COROLLARIVM.

ITAQVE recta LM, cuius quadratum æquale eſt rectangulo FI, ſub FC, differentia exceſſuum, & dupla minoris exceſſus CE, comprehenſo, vna cum duplo quadrati exceſſus minoris CE, addita minori exceſſui CE, efficit minus latus quæſitum, &c.

IMMO quia quadratũ rectæ, CL, rectangulo FI, ſub FC, differentia exceſſuum, & CK, duplo minoris exceſſus CE, comprehẽſo æquale eſt, vt in demõſtratione dictum eſt, & rectangulum CP, duplũ eſt quadrati exceſſus minoris CE, hoc eſt, quadrato rectæ CM, æquale: erit quadratũ rectæ LM, toti rectangulo FP, ſub maiori exceſſu FE, & EP, dupla minoris exceſſus CE, contento æquale; [a] ideoque LM, media proportionalis erit inter maiorem exceſſum, ac duplum minoris exceſſus. Quocirca ſi inter maiorem exceſſum, & duplum minoris exceſſus ſumatur media proportionalis LM, habebitur rurſus differentia inter minus lat⁹, & minorẽ exceſſum, &c.

[a] 17. ſexti.

SCHOLIVM.

HOC problema, vna cum antecedente Theoremate in Gallia, vnde mihi tranſmiſſum eſt, ab ingenioſo quodam Geometra demonſtratũ fuit, cuius nomen, ſi mihi eſſet cognitũ, hic libenter aſcriberẽ. Idẽ tamen problema ad finẽ lib. 2. Eucl. ex Marino Ghetaldo Patritio Raguſino aliter quoq; demonſtraui⁹ non infeliciter.

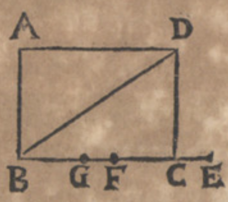
PROBL. 9. PROPOS. 17.

DATO exceſſu diametri rectanguli ſupra maius latus, &, exceſſu maioris lateris ſuprâ minus: vtrumq; latus, ac diametrum inuenire.

QVONIAM, vt in pręcedenti problem. dictum eſt, exceſſus maioris lateris ſupra minus, ęqualis eſt differentiæ inter exceſſus diametri ſupra vtrumq; latus: ſit vt exceſſus diametri ſupra maius lat⁹, addit⁹ ad exceſſum maioris lateris ſupra minus, conficiat exceſſum diametri ſupra minus latus. Quare cum cogniti ſint exceſſus diametri ſupra vtrumq; latus, reliqua cognoſcentur, vt in præmiſſo problemate traditum eſt.

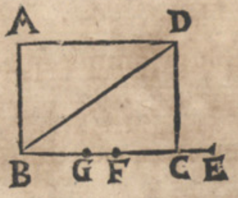
PROBL. 10. PROPOS. 18.

SECTA linea recta vtcunque, adiungere ei verſus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quâdratum totius rectæ compoſitæ æquale ſit quadrato rectę adiunctę; vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conflatur.



IN figura propoſ. 15. ſit recta EF, ſecta in C, vtcunq;, oporteatq; ei verſus F, adiungere rectam, ita vt quadratum totius compoſitę ſit ęquale quadrato adiunctæ, vna cum quadrato rectæ ex ſegmento FC, & adiuncta compoſitæ. Statuantur FE, EC, exceſſus, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumq; latus ſuperat. Atque ex propoſ. 16. inueniatur minus latus BF. Dico rectam BF, ipſi EF, adiunctam efficere, quod proponitur. Fiat enim rectangulum AC, ſub BC,

S &CD,

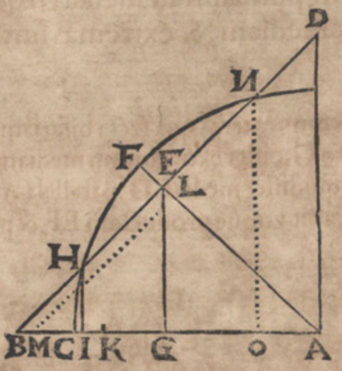


& CD, ipſi B F, æquali comprehenſum. Et quia FC, differentia exceſſuum addita minori lateri inuento B F, facit maius latus, vt propoſ. 16. dictum eſt, erit B E, diametro B D, æqualis, quandoquidem excedit minus latus BF, vel C D, recta E F, & maius recta E C. a Quoniam vero quadratum rectæ B E,
a 47. pri. hoc eſt, diametri BD, æquale eſt quadrato rectæ CD, id eſt, adiunctæ BF, vna cum quadrato rectæ B C, compoſitæ ex adiuncta B F, & proximo ſegmento FC, liquido conſtat id, quod proponitur.

PROBL. 11. PROPOS. 19.

DATIS duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore deſcripti non ſuperet: maiorem ita ſecare in duas partes inæquales, vt earum quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia.

SINT datæ duæ rectæ AB, maior, & AC, minor, ita vt AB, non ſit maior diametro quadrati ex A C, deſcripti. Erigatur perpendicularis AD, maiori AB, æqualis: Et ducta recta BD, ſecetur bifariam in E, iungaturque
a ſchol. 26. primi. recta AE, a quæ ad BD, perpendicularis erit: diuidetque angulum rectum A, bifariam in duos ſemirectos:
b 2. coroll. 32. primi. b Sunt autem & B, D, ſemirecti. c Igitur latera E A, E B, æqualia ſunt; ac proinde A B, diameter erit quadrati
c 6. primi. rectæ AE. Et quoniam AB, ponitur non maior diametro quadrati minoris AC, non erit AC, minor quam AE, ſed vel maior, vel æqualis. Si namque minor eſſet AC, quam AE, ſumpta ipſi æquali AL, ductaque LM, ipſi EB, parallela, eſſet A M, diameter quadrati minoris A L, ideoque maior A B, ſuperaret diametrum quadrati ex minore deſcripti. quod non ponitur. Sit ergo primum AC, maior quam AE, productaque AE, vt A F, ipſi A C, ſit æqualis, deſcribatur ex A, per C, F, circulus ſecans BD, in H, N, demittaturque HI, ad AB, perpendicularis. Dico maiorem A B, ita eſſe ſectam in I, vt quadrata rectarum A I, IB, æqualia ſint quadrato minoris A C. Quoniam enim angulus I, rectus eſt, & B, ſemirectus: erit quoque H, in triangulo BHI, ſemire-
d 6. primi. ctus; d ideoque latera BI, HI, æqualia erunt. e Cum ergo ducta re-
e 47. pri. cta A H, quadrata rectarum A I, I H, quadrato rectæ A H, æqualia ſint: erunt quoque quadrata ſegmentorum A I, I B, æqualia quadrato rectæ A H, hoc eſt, quadrato rectæ A C. quod eſt propoſitum.



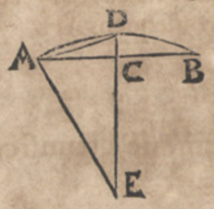
SIT deinde minor linea data A K, æqualis ipſi AE, ita vt maior AB, diametro quadrati ex minore A E, deſcripti æqualis ſit. Demittatur perpendicularis EG, f quæ & ba-
f ſchol. 26. primi. ſem AB, & angulum rectum E, diuidet bifariam in ſemirectos. Dico A B, ita eſſe ſectam in G, vt quadrata ſegmentorum æqualium AG, GB, æqualia ſint quadrato minoris A K, vel AE. g Erunt enim rurſus latera E G,
g 6. primi. GB, æqualia, ob ſemirectos angulos æquales B, & E, in triangulo BEG. h Cum ergo quadrata rectarum A G,
h 47. pri. GE, æqualia ſint quadrato rectæ A E, erunt quoque quadrata ſegmentorum A G, G B, æqualia quadrato AE, vel minoris lineæ A K. quod eſt propoſitum.

SI ex altera ſectione N, demittatur perpendicularis NO, erit AB, ſecta in O, vt in I, ita vt etiam quadrata
i 2. ſexti. ſegmentorum BO, OA, æqualia ſint quadrato minoris AC, vel AH. i Cum enim rectæ BD, BA, ſectæ ſint pro-
k 3. tertij. portionaliter in H, I, & N, O, ſintque æquales BH, ND; k (propterea quod perpendicularis A E, ſecat H N, bifariam. Ablatis ergo æqualibus E H, E N, ex æqualibus E B, E D, reliquæ BH, DN, æquales erunt) erunt quoque BI, AO, æquales; nec non BO, AC, &c.

PROBL. 12. PROPOS. 20.

DATA chorda alicuius arcus, vna cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vſque educitur: quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter circuli complectitur, inuenire.

SIT data chorda A B, palmorum 74. & perpendicularis C D, ex medio puncto C, educta palmorum 10. Iuncta recta AD; quoniam in triangulo rectangulo ACD, latera AC, CD, nota ſunt quod CD, ſit 10. & AC,
a 8 triãg. rectil. 37. ſemiſſis nimirum chordæ A B, 74. a Si fiat, vt CD, 10. ad ſinum totum 100000. ita A C, 37. ad aliud; inuenietur A C, 370000. tangens anguli ADC; ac proinde ipſe angulus erit grad. 74. min. 53. fere. Et ſi concipiatur duci AE, ad centrum E, erit quo-
b 5. primi. que angulus DAE grad. 74. min. 53. fere; b quippe cum anguli ADE, DAE, æquales ſint. Quod ſi vtriuſque ſumma grad. 149. min. 46. fere, detrahatur ex duobus rectis, hoc eſt, ex grad. 180. reliquus fiet tertius angulus E, in centro grad. 30. min. 14. fere, ac totidem grad. erit arcus AD; ideoque eius duplus ADB, grad. 60. min. 28. ferme.



c 35. tert. c QVIA vero quadratum ex A C, æquale eſt rectangulo ſub C D, & reliqua parte diametri: ſi AC, 37. palm. ducatur in ſe, & productus numerus 1369. diuidatur per CD, palm. 10. prodibit reliqua pars diametri palm. $136\frac{9}{10}$. ac proinde addita CD palm. 10. tota diameter erit pal. $146\frac{9}{10}$. & ſemidiameter pal. $73\frac{9}{20}$. Si igitur fiat vt 7. ad 22. ita $146\frac{9}{10}$. palmi ad aliud; reperietur per 1. regulam Num. 2. cap. 7. lib. 4. huius, circumferentia circuli palm. $430\frac{9}{35}$. Ergo ſi rurſus fiat, vt tota circumferentia grad, 360. ad palmos $430\frac{9}{35}$. ita arcus ADB, grad. 60. min. 28. ad aliud, inuenietur hic arcus pal. $72\frac{54513}{189000}$. hoc eſt, $72\frac{10}{35}$. paulo amplius.

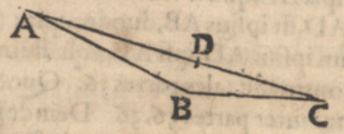
THEOR

THEOR. 9. PROPOS. 21.

IN omni triangulo quadratum maximi lateris minus eſt, quam duplum ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum.

IN triangulo ABC, maximum latus ſit A C, & angulus oppoſitus B, obtuſus. Si namque rectus eſſet, vel acutus; [a] eſſet quadratum rectæ A C, vel æquale duobus quadratis rectarũ AB, BC; [b] vel minus: ac proinde multo minus duplo, ſummæ quadratorum AB, BC. Ex maiore latere AC, dematur AD, recta æqualis lateri AB. [c] Et quia duo latera AB, BC, maiora ſunt latere AC; erit reliqua CD, minor latere B C; ac proinde duo quadrata AD, DC, minora duobus quadratis AB, BC. Eſt autem quadratum AC, minus duplo quadratorũ AD, DC: [d] propterea quod æquale eſt duobus quadratis AD, DC, vna cum rectangulo bis ſub A D, D C, quod quidem rectangulum bis, minus eſt duobus quadratis AD, DC, ex Lemmate propoſ. 39. lib. 10. Euclid. Multo ergo minus erit quadratum AC, duplo quadratorum AB, BC. quod erat demonſtrandum.

a 47. pri. b 13. ſecun. c 20. pri. d 4. ſecun.



PROBL. 13. PROPOS. 22.

DATIS tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, niſi quando extremæ à media æqualiter diſtant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, ſi omnes tres in vno puncto conueniant; ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint inter ſe æqualia, vel datam habeant proportionem.

SINT tres rectæ AB, CD, EF. Ducatur vtcunque recta BF, ſecans omnes tres, quæ ſecta bifariam in G; ſi quidem punctum G, cadet in mediam, factum erit, quod iubetur. Si vero G, cadet extra lineam mediam CD, agatur per G, alteri extremarum, nimirum ipſi E F, dummodo ei non æquidiſtet media CD) parallela AG, ſecans mediam in C. Cum enim CD, ponatur non æquidiſtare ipſi EF, ſecabit vtique productam EF, & proinde eius quoque parallelam A G. Quod ſi C D, ipſi EF, æquidiſtaret, ducenda eſſet per G, ipſi AB, parallela. Poſtremo ex B, puncto ductæ rectæ B F, ſumpto in extrema A B, cui non æquidiſtat A G, ducatur per C, vbi parallela AG, mediam CD, ſecat, recta B C, ſecans E F, in E. Dico rectas BC, CE, æquales eſſe. Cum enim in triangulo BEF, recta CG, ſit baſi EF, parallela: [a] erit vt BG, ad GF, ita BC, ad CE; Sed BG, ipſi GF, per conſtructionem, æqualis eſt. Igitur & BC, ipſi CE, æqualis erit.



a 2. ſexti.

QVOD ſi per G, agatur ipſi AB, parallela G I, ſecans mediam CD, in I; erit ducta FIK, ſecta quoque bifariam in I: propterea quod in triangulo FBK, recta GI, baſi BK, æquidiſtat; [b] ideoque ſicut BF, in G, diuiſa eſt bifariam, ita quoque FK, in I, bifariam ſecabitur. b 2. ſexti.

EX his patet, cur media linea non debeat vtrique extremæ æquidiſtare, ſed vel neutri, vel alteri tantum. Nam ſi vtrique æquidiſtaret, [c] recta per G, ducta parallela alterutri extremarum, æquidiſtaret quoque mediæ, ac proinde eam non ſecaret. Quod ſi neutri æquidiſtet, duci poterit per G, parallela vtrilibet extremarum. Si vero vni extremarum æquidiſtet, ducenda erit per G, alteri parallela. c 30. pri.

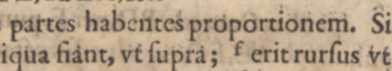
IAM vero ſi tres datæ rectæ coeant in eodem puncto productæ, vt in H, facilius erit problema, etiamſi in media linea detur punctum C, per quod duci debeat linea. Ducta enim per datum punctum C, in media, alterutri extremarum, vt ipſi HF, parallela C A, ſecante alteram extremam in A; & ipſi H A, æqualis capiatur AB, ſecabitur ducta BCE, in C, bifariam: [d] quippe cum ſit BC, ad CE, vt recta BA, ad rectam AH, &c. Sic etiam ſi detur punctum I, in media; ducta per I, alterutri extremarum, vt ipſi H B, parallela LI, ſumptaque ipſi HL, æquali LF, ſecabitur ducta FIK, in I, bifariam; [e] propterea quod eſt FI, ad IK, vt FL, ad LH, &c. d 2. ſexti. e 2. ſexti.

EADEM ratione ducemus lineam, quæ à media ſecetur in duas partes habentes proportionem. Si namque ducta B F, vtcunque ſecetur in datam proportionem in G, & reliqua fiant, vt ſupra; [f] erit rurſus vt FG, ad GB, ita EC, ad CB; vel vt BG, ad GF, ita BC, ad CE, prout videlicet proportio data eſt FG, ad GB, vel BG, ad GF. Sic etiam ſi tres rectæ datæ coeant in H; ducta GA, ipſi EF, parallela, fiatq; HA, ad AB, vt antecedens datæ proportionis ad conſeques: ſi ducatur BCE, [g] erit EC, ad CB, vt HA, ad AB. Et ſi fiat HA, ad AB, vt conſequens datæ proportionis ad antecedens, erit rurſus BC, ad CE, vt BA, antecedens ad conſequens AH. f 2. ſexti. g 2. ſexti.

PROBL. 14. PROPOS. 23.

CVIVSLIBET lineæ, quamuis minimæ, exhibere multiplicem quamcumque, etiamſi circino ipſa non accipiatur.

SIT ſumenda verbi gratia lineolę AB, tripla. Extenſo circino quantumlibet ex A, ad C, ſumãtur ipſi AC, duæ æquales C F, F D, vt tota AD, ipſius AC, ſit tripla. Item ipſi C B, ſumantur tres æquales DG, GH, HE. Dico AE, eſſe ipſius AB, triplam. Quoniam enim tam multiplex eſt tota A D, totius A C, quam multiplex eſt ablata DE, ablatæ CB, nimirum tripla: erit quoque ita multiplex reliqua E A, reliquæ AB, vt tota totius, videlicet tripla. quod eſt propoſitum.



PROBL. 15. PROPOS. 24.

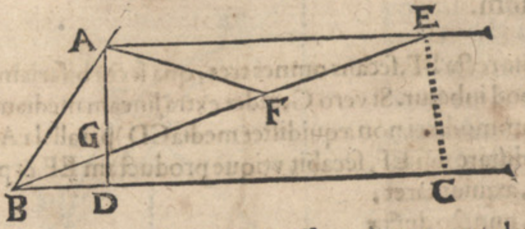
EX qualibet lineola, quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas.

IN figura præcedentis propoſ. ſit ex lineola AB, detrahenda tertia pars. Per præcedentem ſumatur ipſius AB, tripla AE, quæ ſi videbitur nimis exigua, multiplicetur, vt libet. In exemplo quadruplicata eſt vſque ad D; ita vt AD, ſit ipſius AB, duodecupla: (quod ſcietur, ſi numerus partium AE, nimirum 3. ducatur in numerum partium ipſius AD, ipſi AE, æqualium, nimirum in 4.) ac proinde ſi AB, diuiſa eſſe intelligatur in 3. partes, tota AD, continebit tales partes 36. Quocirca ſi in inſtrumento partium lib. 1. cap. 1. conſtructo, interuallum AD, ſtatuatur inter partes 36. 36. Deinde interuallum inter 35. 35. (nimirum tota AD, vna parte minus) transferatur ex D, ad I, erit AI, tertia pars ipſius AB, hoc eſt, pars trigeſima ſexta totius AD. Cum ergo AB, contineat tres trigeſimas ſextas partes totius AD, erit AI, ipſius AB, pars tertia. quod eſt propoſitum.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

ANGVLVM datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

PROBLEMA hoc veteres Geometras diu, multumque exagitauit, neque ab vllo ad hanc vſque diem Geometrice eſt ſolutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud ſoluere conatus eſt per deſcriptionem hyperboles. Nos idem abſoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propoſ. 15. huius ex Nicomede deſcripſimus, hoc modo. Sit datus angulus acutus ABC: Demiſſa autem ex quouis puncto A, ad BC, perpendiculari AD, ſumatur ipſius AB, dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, deſcribatur linea Conchoideos CE, ſecans rectam AE, ipſi BC, ductam parallelam in E, ducaturque recta BE. Dico angulum CBE, eſſe tertiam partem dati anguli ABC; hoc eſt, angulum ABE, duplum eſſe anguli CBE, adeo vt diuiſio anguli ABE, bifariam, totus angulus ABC, ſectus ſit in tres partes æquales. Quoniam enim ex deſcriptione Conchoideos, recta GE, ipſi DC, æqualis eſt; ac proinde ipſius AB, dupla: ſi ſecetur bifariam in E, erit vtraq; ſemiſſis ipſi AB, æqualis. [a] Quia vero circulus ex F, circa GE, deſcriptus tranſit per angulum rectum GAE, erit quoque ducta FA, vtrique ſemiſſi FE, FG, ideoq; & ipſi AB, æqualis. [b] Igitur tam anguli FAE, FEA, quam AFB, ABF, æquales erunt. [c] Eſt autem externus AFB, duobus internis FAE, FEA, æqualis: ideoque ipſius FEA, duplus. Igitur & ABF, & eiuſdem FEA, [d] hoc eſt, alterni CBE, duplus erit.



a ſchol. 31. tertij. b 5. primi. c 32. primi. d 29. pri.

SI angulus datus rectus eſt, diuidetur in tres æquales angulos, vt in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. tradidimus.

SI vero eſt obtuſus, ſecabimus eum bifariam, & ſemiſſem alterutram in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius ſemiſſis efficient propoſiti anguli obtuſi tertiam partem, vt perſpicuum eſt.

PROBL. 17. PROPOS. 26.

SI per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum æquale duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum comprehenſis.

IN rectangulo BD, per E, punctum diametri AC, ductæ ſint FG, HI, lateribus parallelæ. Dico rectangulum ſub AE, EC, æquale eſſe rectangulis ſub AF, FB, & ſub BI, IC. [a] Quoniam enim quadratum ex AC, æquale eſt quadratis ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC. [b] Sunt autem quadrata ex AB, BC, quadrato ex AC, æqualia; erunt quoque duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quadratis ex AB, BC. [c] Sed quadratum ex AB, æquale eſt quadratis duobus ex AF, FB, vna cum rectangulo bis ſub AF, FB; Et quadratum ex BC, æquale eſt duobus quadratis ex BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub BI, IC. Igitur duo quadrata ex AE, EC, æqualia erunt quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC. [d] Cum ergo quadratum ex AE, quadratis ex AF, FE, hoc eſt, ex AF, BI: & quadratum ex EC, quadratis ex EI, IC, hoc eſt, ex FB, IC: æquale ſit; Erunt quatuor quadrata ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC; Ablatiſque vtrobique prædictis quatuor quadratis communibus, erit reliquum rectangulum bis ſub AE, EC, reliquis rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub BI, IC, æquale. Ideoque rectangulum ſemel ſub AE, EC, rectangulis ſemel ſub AF, FB, & ſub BI, IC, erit æquale. quod erat demonſtrandum.



a 4. ſecun. b 47. pri. c 4. ſecun. d 47. pri.

COROL-

COROLLARIVM.

ITAQVE in quadrato, vt in poſteriori figura, rectangulum ſub ſegmentis diametri AE, EC, comprehenſum, æquale eſt duobus complementis DE, BE, quippe cum complementa ſub ſegmentis laterum comprehendantur.

PROBL. 18. PROPOS. 27.

DATO centro Ellipſis in linea in infinitum producta, vna cum duobus punctis ad eaſdem partes axis, vel centri, per quæ tranſire dicatur Ellipſis: vtrumque axis maioris extremum inuenire.

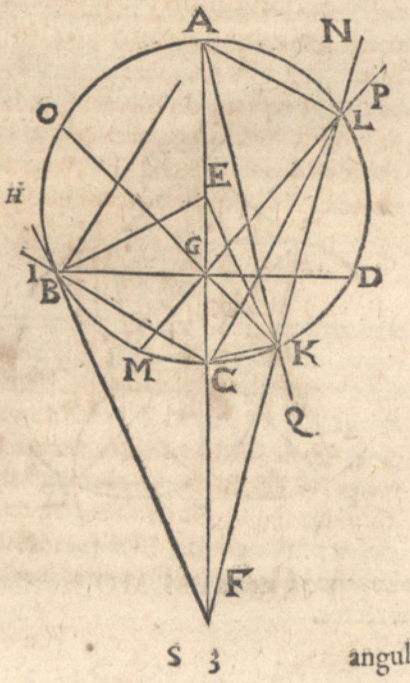
HOC problema conicum eſt, & acutum. Sit A, centrum, id eſt, punctum medium alicuius Ellipſis in linea axis maioris BC, quantacunque: Et duo puncta in eadem Ellipſi D, E, verſus eandem partem, hoc eſt, ſiue ſupra centrum A, ſiue infra; è quibus ad BC, perpendiculares ducantur DF, EG: Eritque DF, minor quam EG, quod perpendicularis remotior à centro minor ſemper ſit, quam propinquior. Ducta igitur recta ED, ſecabit lineam axis in B. Secta autem AB, bifariam in H, deſcribatur ex H, circa AB, ſemicirculus AKB. Diuiſa quoque FG, inter ductas perpendiculares bifariam in I, ducatur IK, ad AB, perpendicularis ſecans circumferentiam in K, & rectam BE, in L. Ducta quoque recta BK, ſecante perpendiculares DF, EG, in M, N, iungantur rectæ AM, AK, AN. [a] Et quoniam eſt, vt FI, ad IG, æqualem, ita MK, ad KN, erit quoque MK, ipſi KN, æqualis. Igitur duo latera AK, KM, duobus lateribus AK, KN, æqualia erunt. Cum ergo & angulos æquales comprehendant, vtpote rectos, [b] quod angulus AKB, in ſemirculo rectus ſit; [c] erũt baſes AM, AN, æquales. Circulus igitur ex A, per N, deſcriptus tranſibit per M, ſecabitq; BC, in O, & C. Dico OC, eſſe axem Ellipſis maiorem. [d] Cum enim ſit, vt MD, ad DF, ita NE, ad EG, tranſibit neceſſario Ellipſis, quæ per O, D, C, deſcribitur, (poſſe autem Ellipſim deſcribi circa OC, tamquam axem maiorem, per punctum D, conſtat ex ijs, quæ ad finem ſcholij propoſ. 8. lib. 1. Gnomonices, & in ſcholio Lemmatis 50. lib. 1. Aſtrolabij ſcripſimus) per punctum E, ex ſcholio Lemmatis 51. Aſtrolabij: Ac proinde Ellipſis per data puncta D, E, circa centrum A, deſcripta tranſibit per O, C: ita vt ab Ellipſi per O, D, C, deſcripta non differat. Alioquin Ellipſis Ellipſim in 8. punctis ſecaret, nimirum in D, E, & alijs duobus reſpondentibus ex altera parte axis: deinde in alijs 4. infra centrum reſpondentibus: quod eſt abſurdum, [e] quippe cum Ellipſis Ellipſim in 4. tantum punctis ſecet.



a 2. ſexti.
b 31. tert.
c 4. primi.
d ſchol. 4.
e 25 quar. Apollonij.

THEOR. 10. PROPOS. 28.

SI in circuli diametro producta punctum ſumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur; à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta chorda perpendiculari comprehenſum bifariam. Item ſi ab eodẽ puncto in diametro producta aſſumpto recta ducatur circulum ſecans, & ab alterutro ſectionis puncto ad interſectionem diametri cum prædicta chorda perpẽdiculari recta iungatur; Recta ex eodem ſectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremũ ducta ſecabit quoq; angulum à linea ſecante, & illa alia, quæ per interſectionem diametri cum prędicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam.



IN circulo ABCD, cuius centrũ E, producta ſit diameter AC, ad F, & ex F, ducatur primum recta FH, tangens circulum in B, atque ex B, ducatur chorda BD, ſecans diametrum in G, ad rectos angulos, iunganturq; ad extrema diametri rectæ BC, BA. Dico tam angulos CBF, CBG, quam (producta FB, ad H,) angulos ABH, ABG, eſſe æquales. [a] Quoniam enim angulus CBF, angulo BAC, in alterno ſegmento æqualis eſt. [b] & angulus CBD, eidem angulo BAC, æqualis, ob arcus æquales CB, CD; [c] (vel etiam angulus CBG, angulo BAC, æqualis eſt; quod BG, in triangulo rectangulo ABC, ad baſem AC, perpendicularis ſit) erunt anguli CBF, CBG, inter ſe quoque æquales. Producta autem CB, ad I, ſi ex rectis angulis ABC, ABI, tollantur æquales CBG, HBI,) [d] cũ enim CBF, æqualis ſit angulo HBI, ad verticem: & angulus CBG, angulo CBF, oſtenſus æqualis; erit quoque

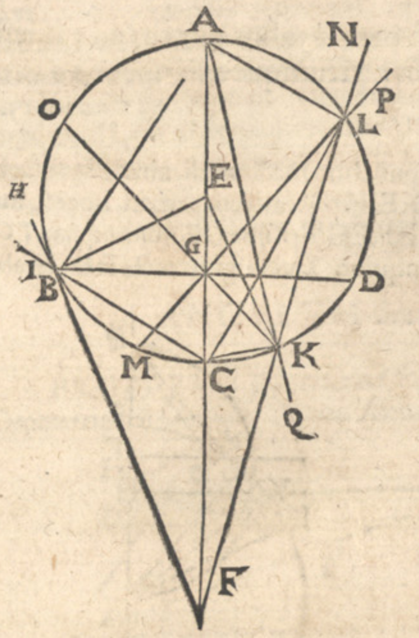
a 32. tert.
b 27 tert.
c 8. ſexti.
d 15 pri.

angulus

angulus C B G, angulo H B I, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli A B G, A B H, inter ſe æquales. quod eſt primum.

DEINDE ducatur recta FN, ſecans circulum in K, L, ductiſque rectis KGO, LGM, per G, iungantur tam rectæ KC, KA, quã LC, LA, ad extrema diametri. Dico rurſus tam angulos CLF, CLG, quã ALG, ALN: Item tam CKF, CKG, quã AKG, AKL, eſſe æquales. Ductis n. ex centro rectis EB, EK; [e] erit angulus EBF, rectus: [f] Igitur erit FB, media proportionalis inter EF, FG: [g] Ideoque rectangulum ſub E F, F G, quadrato ex FB, æquale erit: [h] Eſt autem eidem quadrato æquale quoque rectangulum ſub L F, FK. Igitur rectangulum ſub EF, FG, rectangulo ſub LF, FK, æquale erit: [i] Ac proinde erit vt EF, prima ad FK, ſecundam, ita LF, tertia ad FG, quartam. Quare cum triangula E F K, L F G, habeant latera circa communem angulum F, proportionalia; [k] erunt anguli FEK, FLG, homologis lateribus FK, FG, oppoſiti æquales. [l] Eſt autem angulus FEK, in centro anguli C L K, ad circumferentiam, (cum habeant eandem baſem CK,) duplus. Igitur & angulus F L G, eiuſdem anguli CLK, duplus erit; Ac proinde angulus FLG, ſectus erit bifariam à recta LC, hoc eſt, anguli CLF, CLG, æquales erunt. Producta autem C L, ad P, ſi ex rectis angulis A L C, A L P, demantur æquales anguli C L G, PLN, (Cum enim C L F, oſtenſus ſit æqualis angulo CLG, [m] & CLF, æqualis ſit angulo PLN, ad verticem, erit quoque CLG, eidem angulo PLN, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ALG, ALN, æquales. Rurſus quia anguli CLK, CLM, oſteſi ſunt æquales; [n] erunt arcus CK, CM, æquales. [o] Igitur anguli CGK, CGM: [p] Ideoque & anguli AGO, AGL, ad verticem æquales erunt; [q] Ac proinde arcus etiam A O, A L, æquales erunt: [r] ideoque & anguli A K O, A K L, erunt æquales. Producta autem A K, ad Q, ſi ex rectis angulis C K A, C K Q, auferantur æquales AKG, FKQ, (Cum enim angulus AKG, angulo AKL, oſtenſus ſit æqualis: [s] hic autem angulo F K Q, ad verticem ſit æqualis; erit quoque angulus A K G, angulo FKQ, æqualis.) erunt etiam reliqui anguli CKG, CKF, inter ſe æquales. Quæ omnia demonſtranda erunt.

e 18. tert.
f coroll. 8. ſexti.
g 17. ſexti.
h 36. tert.
i 16. ſexti.
k 6. ſexti.
l 20. tertij.
m 15. pri.
n 26. tert.
o ſchol. 29. tertij.
p 15. pri.
q ſchol. 29. tertij.
r 27. tert.
s 15. primi.



SCHOLIVM.

HOC Theorema valde vtile eſt ad deſcriptionem paralleli cuiuſuis circuli maximi per datum punctum in Aſtrolabio, vt ex propoſ. 18. lib. 2. Aſtrolabij perſpicuum eſt: cum multa ibi demonſtrari poſſint per hoc Theorema, ſine ijs, quæ ex Aſtrolabij deſcriptione pendent.

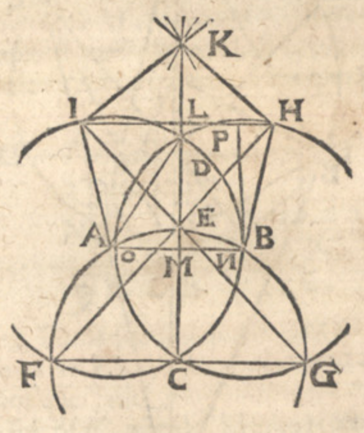
THEOR. 11. PROPOS. 29.

DESCRIPTIONEM Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes fere Architecti, atque artifices approbant, falſam eſſe, demonſtrare.

PRAXIS hæc eſt. Sit data recta AB. Ex centris A, B, & interuallo eodem AB, deſcribantur duo circuli ſeſe interſecantes in C, D. Ducta autem CD, quantacunque, deſcribatur eodem interuallo AB, ex C, per A, B, circulus rectam C D, in E, & priores circulos ſecans in F, G. Item ducantur ex F, G, per E, rectæ ſecantes priores circulos in H, I. Denique eodem interuallo ex H, I, duo arcus deſcripti ſeſe interſecent in K, iunganturque rectæ AI, IK, KH, HB. Putat ergo Durerus, pentagonum ABHKI, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. quod falſum eſt. Nam æquilaterum quidem eſt, ex deſcriptione, non autem æquiangulum. quod vt manifeſtum fiat, demonſtranda ſunt prius nonnulla.

1. ARCVS tres FA, AB, BG, ſextæ partes circuli ſunt, quod rectæ eos ſubtendentes ſemidiametri ſint circuli FABG, ex conſtructione. Igitur FABG, ſemicirculus eſt, cuius diameter FG; [a] ideoq; angulus FEG, in ſemicirculo rectus: [b] Et diameter FG, rectæ AB, parallela, ob arcus AF, BG, æquales. Et quoniam, vt conſtat ex demonſtratione praxis ſcholij propoſ. 10. & 11. lib. 1. Euclid. recta CD, ſecat rectam AB, bifariam in M, & ad angulos rectos; [c] ſecabit eadem parallelam quoque FG, ad angulos rectos in C. [d] Eadem quoque CD, ſecabit arcum AB, bifariam in E, ac propterea toti arcus EF, EG, æquales erunt, videlicet quadrantes; [e] ideoque rectæ EF, EG, latera ſunt quadrati in circulo FABG, deſcripti, eiuſque diameter FG. [f] Igitur anguli F, G, ſemirecti erunt: ac proinde cum anguli ad C, recti ſint, [g] erunt quoque OEM, NEM, ſemirecti; ideoque & EOM, ENM, ſemirecti. [h] Ac proinde tam latera EM, MO, quam EM, MN, æqualia: atque idcirco & O M, N M, inter ſe æqualia erunt; nec non & totæ O B, N A, æquales erunt. [i] Immo & E O, E N, erunt æquales, quod latera E M, M O, lateribus E M, M N, æqualia ſint, comprehendantque angulos æquales, vtpote rectos.

a 31. tertij.
b ſchol. 27 tertij.
c 29. pri.
d ſchol. 27 tertij.
e 6. quar.
f ſchol. 34. primi.
g 32. pri.
h 6. pri.
i 4. primi.



2. DEIN-

2 DEINDE quia latera AN,AI,lateribus BO,BH,æqualia ſunt;ſuntq; anguli N,O,ſemirecti ęquales, & vterque reliquorum angulorum I,H,minor recto; [k] quod vterq; minor ſit ſemirecto ad O,& N;propterea quod tam latus AN,minus eſt latere AI, quam latus BO,latere BH: erunt per ea, quæ ad finem lib. 1. Euclid. demonſtrauimus, tam baſes NI,OH,quam anguli A, B,& I,H,æquales. Igitur duo anguli AB, in pentagono æquales inter ſe ſunt.

[k] 19. prim.

3 RVRSVS demptis OE,NE,æqualibus ex æqualibus OH,NI,reliquæ rectæ EH, EI, æquales ſunt: [l] erunt anguli EIH,EHI,æquales,ac proinde ſemirecti,cum HEI,ſit rectus: [m] Sunt autem & anguli H,I,in Iſoſcele KIH,æquales.Igitur toti anguli H,I,in pentagono æquales ſunt.

[l] 5. prim. [m] 5. prim.

4 POSTREMO cum latera EL,EI,lateribus EL,EH,ſint æqualia,contineantq; angulos æquales ſemirectos;[n] erunt & baſes LI,LH,æquales,& anguli ad L,ideoque recti.Ex quo efficitur,[o] rectas AB,HI,eſſe parallelas:[p] quod etiam conſtat ex eo,quod alterni anguli INA,NIH,ęquales ſint;nimirum ſemirecti.Hinc etiam ſequitur,rectam CDL,productam cadere in angulū K,diuidereq; eum bifariam.Si enim dicatur non cadere in K,[q] diuidet perpendicularis ex K,ad HI,demiſſa baſem Iſoſcelis KIH,bifariam in alio puncto quā in L,quod eſt abſurdum.Quia ergo latera KI,KL,lateribus KH,KL,æqualia ſunt,& baſis IL,baſi HL, oſtenſa æqualis: [r] erunt anguli ad K,æquales.

[n] 4. prim. [o] 28. pri. [p] 27. pri. [q] ſchol.26. primi. [r] 8. primi.

HIS ita præmiſſis,demonſtrabimus iam pentagonum ABHKI,non eſſe æquiangulum, hoc modo.[s] Omnes 5.anguli in pentagono quolibet,ſiue ſit ęquilaterum,& ęquiangulum,ſiue non,æquales ſunt 6.rectis,hoc eſt,gr.540. quibus diuiſis per 5.efficitur vnus angulus pentagoni æquilateri,& æquianguli grad.108.At vterlibet duorum angulorum A,B,in pentagono Dureri maior eſt, quam grad.108. & vterlibet duorum H, I,minor, & angulꝰ K,maior quolibet reliquorum 4.vt oſtendemus.Igitur pentagonum Dureri non eſt æquiangulum.Hoc autem ita fiet perſpicuum.

[s] ſchol.32. primi.

QVONIAM poſito ſinu toto AB,10000000.eius ſemiſſis BM,ſinus videlicet grad. 30. eſt 5000000. cui ſi addatur MO,id eſt,ME,ſinus verſus grad.30.nimirum 1339746.fiet tota BO,6339746.Quia ergo in triangulo BHO,duo latera dantur BH,10000000.& BO,6339746.vna cum angulo O.grad.45.nec non cum ſpecie anguli H,qui ſupra oſtenſus fuit recto minor:[t] Si fiat,

[t] 1.triang. rectil.

Vt latus BH, 10000000.	*ad 7071068.ſinum anguli O,grad.45.*	*Ita latus BO, 6339746.*	*ad aliud,*

inuenietur ſinus anguli BHO, $4482877\frac{1}{2}$.ferme, qui in tabula ſinuum offeret ipſum angulum grad.26.min.38. cui ſi addatur angulus BOH.grad.45.fiet ſumma angulorum H, O,grad.71.min.38.quę ſumma dempta ex duobus rectis,id eſt,ex grad.180.relinquet angulum OBH,grad.108.min.22. Igitur vterque angulus A,B,in pentagono maior eſt vero angulo pentagoni grad.108.

DEINDE ducta BP,ad HI, perpendiculari, ſi iterum ſtatuatur BH, ſinus totus 10000000. erit HP, 3150970.anguli HBP,grad.18.min.22.qui relinquitur,ſi rectus angulus ABP,grad.90. detrahatur ex angulo ABH, inuento grad.108. min.22.Si igitur addatur PL,5000000.[u] cum ſit æqualis ipſi BM,ſemiſſi ſinus totius,fiet tota HL, ſinus anguli HKL,8150970. Ac propterea angulus ipſe erit grad.54.min.36. qui duplicatus dabit totum angulum HKI, grad.109. min.12. maiorem vero angulo pentagoni grad.108.

[u] 34.prim

IAM vero ſi ſumma trium angulorum A,B,K,inuentorum,nimirum gr. 325.min.56, auferatur ex grad.540.ſumma omnium 5. angulorum pentagoni, reliqua fiet ſumma angulorum H,I, gra. 214.min.4.Ac proinde vterque erit grad.107.min.2.minor vero angulo pentagoni grad.108. Non ergo æquiangulum eſt Dureri pentagonum,ſed ſolum æquilaterum. Omnes tamen 5. anguli conficiunt ſummam grad. 540.ſicut in pentagono æquilatero,atque æquiangulo, vt hæc formula indicat.

Angulus	A	Grad.	108.	min.	22
	B	Grad.	108	min.	22
	H	Grad.	107	min.	2
	I	Grad.	107	min.	2
	K	Grad.	109	min.	12
Summa			540	min.	0

SCHOLIVM.

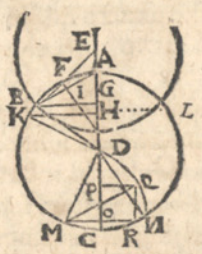
SVNT alij nonnulli,qui ad interuallum cuiuſuis rectæ AB, deſcriptis ex centris A, B,duobus circulis ſe interſecantibus in C,D,vt in ſuperiori figura,ducunt rectam AD,affirmantq; AD, latus eſſe pentagoni in circulo,cuius ſemidiameter DM,inſcripti,ſed toto cœlo aberrant. Eſt enim AD, minus latere pentagoni circuli prædicti.[a] Nam quia latus pentagoni poteſt & latus hexagoni,& latus decagoni circuli eiuſdem: [b] Poteſt autem AD,rectas DM, MA; [c] & DM,latus eſt hexagoni in circulo, cuius ſemidiameter DM,eſſet AM,latus decagoni in eodem circulo.quod falſum eſt. Quoniam enim latus decagoni maiꝰ eſt ſemiſſe lateris pentagoni,quod duo latera decagoni ſupra latus Pentagoni conſtituant Iſoſceles,[d] in quo duo latera maiora ſunt latere pentagoni:Erit AM, ſemiſſis ipſius AB, vel AD, minor latere decagoni. Igitur AD, minor eſt latere pentagoni;[e] quando, quidem latus pentagoni poteſt & latus hexagoni DM, & latus decagoni,quod maius eſt, quam AM, ſemiſſis ipſius AD,vt diximus.

[a] 10.tertijdecimi. [b] 47. primi. [c] coroll.15. quarti. [d] 20.prim. [e] 10.tertijdecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non recte à quibuſdam tradi, demonſtrare.

CAROLVS Marianus Cremonenſis totum vnum libellum edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE, æqualis quartæ parti ſemidiametri AD, ita vt AE, quinta pars ſit rectæ DE. Deſcripto autem ex E, ad interuallum ſemidiametri AD, circulo ſecante datum circulum in B, iungatur recta AB, quam dicit eſſe latus heptagoni, quod falſum eſſe, ita oſtendemus. Si AB, eſſet verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali ſemidiametro DB, (quod fiet, ſi ex B, ad interuallum ſemidiametri recta DE, ſecetur in E,) ſecante arcum AB, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus ADB, bifariam, quod tamen in eius deſcriptione non contingit, vt demonſtrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus eſt heptagoni. Ductis enim rectis DB, DF, ſi AB, eſt ſeptima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, (a qui æquales ſunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. b Ergo reliqui DAB, DBA, ſimul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterq; ipſorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. c Cum ergo DAB, æqualis ſit duobus E, & ABE, continebunt etiam hi ſimul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, ſolus $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. d Et quia ADF, duplus eſt ipſius ABE, propter eandem baſem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id eſt, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum eſt, continebit quoque BDF, $\frac{1}{7}$, duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF.



a 5. primi. *b 32. prim.* *c 32. prim.* *d 20. tertij.*

SED iam AB, ſit inuenta per conſtructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipſi DB. Si ergo AB, eſſet verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F, quod verum non eſt. Poſita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. e Cum ergo ſit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, ſectus ſit bifariam) erit componendo, ſumma ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum ſub BE, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. erit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum ſub CE, 9 & EA, 1. erit 9. quod eſt abſurdum; f cum hæc rectangula ſint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, interſectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum ſub BE, EF, æquale non eſt rectangulo ſub CE, EA, ſed minus: Ac proinde non recte illa ratione latus heptagoni inuenitur.

e 3. ſexti. *f 1. corol 36. tertij.*

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (ſumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque ſextam partem circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH, dicitque KH, ſemiſſem illius lateris eſſe latus heptagoni. quod ſimiliter falſum eſt. Nam KH, omnino æqualis eſt rectę AB, quam proxime demonſtrauimus non eſſe latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. g Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, bifariam: Ac proinde poſita DK, vel DA, 4. erit DH, 2. Quocirca ſi detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, h reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus eſſe quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, eſt 16. hoc eſt, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, ſecat in Iſoſcele EBD, baſem ED, bifariã. Cum ergo ED, ſit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum eſt $\frac{25}{4}$.) i erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, eſt $\frac{9}{4}$. quod recta AG, ſit $1\frac{1}{2}$. k Igitur quadratum AB; erit $\frac{48}{4}$. id eſt, 12. quod eſt propoſitum.

g ſchol. 26. primi. *h 47. pri.* *i 47. prim.* *k 47. prim*

FRANCISCVS Fluſſas Candalla vir nobiliſſimus, ac doctiſſimus conatus eſt conſtruere triangulum Iſoſceles habens vtrumuis angulorum æqualium ad baſem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipſius in dato circulo heptagonum inſcribatur, vt in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo ſcribit. Sit triangulum æquilaterũ DMN, in quo perpendicularis DO, ad baſem ſecetur bifariam in P. Deſcripto deinde ex M, per N, D, circulo, quem ſecet perpendicularis PQ, in Q iungãtur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Iſoſcele MNQ, vtrũlibet angulorum N, Q, triplum eſſe anguli M. quod falſum eſſe, hinc intelligi poteſt. Demiſſa perpẽdiculari QR, pro ſinu arcus QN, vel anguli M, poſito ſinu toto MQ, vel MN, 10000000. l Quoniam latus DN, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis DO, ſi fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud reperietur quadratum DO, 75000000000000. m quod cum ſit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipſumque latus QR, erit 4330127. vero minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula ſinuum (adhibita parte proportionali) reſpondent grad. 25. min. 39. ſec. 32. pro arcu QN, vel angulo NMQ. quo ablato ex duobus rectis, ſiue ex grad. 180. reliqua erit ſumma angulorum æqualium ad baſem QN, gra. 154. min. 20. ſec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. ſec. 14. qui maior eſt, quam triplus anguli NMQ, grad. 25. min. 39. ſec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. ſec. 36. Falſum ergo eſt, quod Candalla nititur probare. Paralogiſmos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non eſt huius loci manifeſtare: ſatis nobis eſt, indicaſſe eos non rectè deſcripſiſſe heptagonum æquilaterum, & æquiangulum.

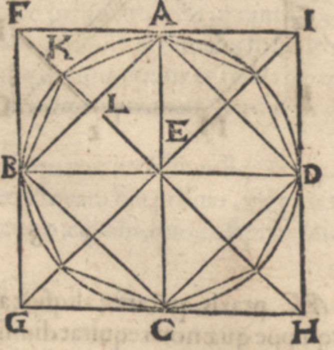
l 12. quarti decimi. *m ſchol. 4. ſecundi.*

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inſcriptum medio loco proportio-

portionale eſt inter quadratum eidem circulo circumſcriptum, & quadratum inſcriptum.

HOC Theorema eſt Orontij, quod facile ita demonſtrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duę diametri AC, BD, ſecantes ſeſe in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6. lib. 4. Euclid. conſtat. Ducatur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circulo circumſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI,[a] ſecabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro ſunt omnes æquales,[b] nimirum ſemirecti:[c] ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniā enim triangula AEF, EAI, æquiangula ſunt, quod rectos habeant angulos, & ſemirectos:[d] Erit EF, ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſt nāq; EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL; hoc eſt, ad EL,[e] quod AL, EL, ſint æquales, propter angulos ſemirectos AE, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, cōtinue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, cōtinue erūt proportionalia:[f] cum baſibus EF; EK, EL, ſint proportionalia;[g] Ac proinde & eorum octupla continue erunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

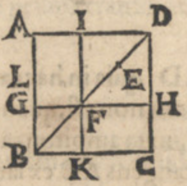


a 17 tertij. b ſchol. 34. primi. c ſchol. 27. tertij. d 4. ſexti. e 6. primi. f 1. ſexti. g 15. quin.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur, ſi latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel ſi idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

EX diametro BD, quadrati ABCD, abſcindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vſque ad F, ita vt EF, ſit ipſi DE, æqualis: vel (quod idem eſt) reliqua DE, ſiue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc eſt, ex BE, auferatur. Dico DE, vel EF, latus eſſe quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipſis AD, AB;[a] erunt GK, HI, circa diametrū quadrata. Dico rectam EF, vel DE, æqualem eſſe lateri BG, quadrati GK, cuius diameter BF, reliqua fuit poſt detractionem DE, bis ex diametro BD.[b] Quoniam enim quadratum ex DF, duplum eſt quadrati ex IF, ſiue ex AG,[c] & quadruplum quadrati ex EF; ſi quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF.[d] Eſt autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum.[e] Igitur erit recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia ſunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipſi BF, æqualis, ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis ſit. Erit igitur quoque AG, ad AL, vt BF, ſiue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG.[f] Quocirca AL, ſiue EF, & BG, æquales ſunt, quod erat oſtendendum.



a coroll. 4. ſecundi. b ſchol. 47. primi. c ſchol. 4. ſecundi. d ſchol. 46 primi. e 22. ſext. f 9. quint.

PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemve conſtituere.

SIT ad altitudinem datam AB, conſtruendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Deſcripto ex AB, quadrato ABCD, ductiſque diametris AC, BD, ſe in E, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos; abſcindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL, CM, CN, iunganturque rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ AH, AK; BG, BM; CL, CI; DF, DN, relinquuntur poſt detractionem rectæ AE, ex laterib⁹ æqualibus quadrati ABCD, ipſe inter ſe æquales erunt; ideoque & earum quadrata erunt æqualia.[a] Cum ergo quadratum ex KH, æquale ſit quadratis ex AH, AK, ipſum duplum erit tam quadrati ex AH, quam quadrati ex AK. Quia vero AB, diameter eſt quadrati ex AE, deſcripti, abſciſſaq; eſt recta BK, lateri AE, æqualis;[b] erit reliqua AK, a 47. prim. b 32. huius



AK, latus quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur poſt detractionem ipſius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, ſemel. [c] Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter ſe erunt; ideoque & rectæ KH; KG, æquales erunt. Eadem ratione oſtẽdemus, eandem GK, æqualem eſſe rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML; & ſic de cæteris. Æquilaterum ergo eſt octogonum. [d] Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales ſunt duobus rectis; [e] ſuntque anguli acuti verſus angulos quadrati omnes inter ſe æquales: [f] immo ſemirecti, quod KH, GM, &c. ſint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. deſcriptorum: Erunt reliqui anguli obtuſi in octogono æquales; ideoq; octogonum æquiangulum etiam eſt, quod eſt propoſitum.

c ſchol. 47. primi.
d 13. prim.
e 4. prim.
f ſchol. 34. primi.

SCHOLIVM.

HÆC praxis, quã ante aliquot annos à quodam architecto ſine demonſtratione tamen accepi, pulcherrima eſt: quippe quæ non requirat diuiſionem circuli in octo partes æquales, & deſcribat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonſtrarem, oportuit prius demonſtrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propoſitum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. ſphæræ Ioan. de Sacro boſco propoſui rationem, qua Franciſcus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inueſtigare docuit, quæ talis eſt. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editiſſimus aliquis mons, (ipſe in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium cenſuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. Vel potius vt in ſcholio problem. 7. ac 9. tradidimus. Deinde ex A, vertice montis menſuretur totum illud ſpacium pelagi, ſeu terræ, (vbi tamen montes non ſint) quod inde conſpicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ ſuperficiem contingat in C. Hoc autem fiet per ea, quæ in problematibus citatis tradita ſunt. Ex his poſtea explorat magnitudinem lineæ tangentis AC; [a] propterea quod eius quadrato æqualia ſunt quadrata AB, BC, (ſumpto ſpacio BC, pro linea recta) [b] cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub AD, AB, quo diuiſo per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua ſi dematur altitudo mont. AB, nota relinquetur diameter terræ BD. [c] Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.



a 47. prim.
b 36. tertij.
c corol. 2. de Dimẽſ. circuli lib. 4. huius.

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terreſtris aſſumitur, arcum BC, à linea recta non differre, quod verum non eſt, quando mons tam altus eſt, vt ſpacium 200. vel 300. milliariorum cerni poſſit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolemæo poſitum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non recte linea tangens AC ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons eſt ad angulos rectos. Redigemus rationem hanc ad meliorẽ formam multis vijs, hoc modo. Deprehenſo angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius viſualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certiſſime fiet, cum per dioptram conſpicitur Sol, aut alia ſtella, quando oritur, vel occidit. Deprehenſo, inquam, angulo A, inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulo ante citata. [d] Et recta AE, ex duabus AB BE. Si enim ad AE, adijcietur BE, hoc eſt, EC, [e] quæ ipſi BE, æqualis eſt, nota fiet tota tangens AC, ex qua, vt ſupra dictum eſt, & diameter terræ BD, & circumferentia inueſtigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, [f] reperietur tam latus BE, [g] quam baſis AE, ſine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis &c.

d 47. prim.
e 2 coroll. 36. tertij
f 4. triang. rectil.
g 5. triang. rectil.
h 18. tertij.
i 4. prim.

VEL ſic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, [h] quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia vero ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia ſunt, comprehenduntq; angulos æquales, nempe rectos: [i] erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus ſit, vt proxime diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam ſemiſſis ipſius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AB, [k] reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atq; eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoſcetur ſemidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc eſt, in partibus altitudinis montis AB; ideoq; & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod eſt propoſitum.

k 4. triãg. rectil.

DENIQVE hoc etiam modo idẽ aſſequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius viſualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, eius complementũ. Ergo huius anguli ſecans AF, cognita erit in partibus ſinus totius FC. Ex qua ſecante, ſi dematur ſinus totus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus ſinus totius BF. Si igitur fiat vt altitudo montis AB, nota in partib[9] ſinus toti[9] ad eandẽ AB, notam in data menſura, ita ſinus totus BF, ad aliud; ꝓueniet ſemidiameter BF, nota in partib[9] altitudinis mõtis, &c.

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac viciſsim Cylindro Priſma æquale, & Cono æqualem Pyramidem conſtituere.

SI baſi priſmatis, vel pyramidis conſtruatur circulus æqualis, per ea quæ ad finem lib. 7. ſcripſimus: Et ſuper hunc circulum extruatur cylindrus vel conus eiuſdem altitudinis cum priſmate, vel pyramide; erit cylindrus priſmati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam baſes, quam altitudines æquales ſint: producatur autem priſma, & Cylindrus ex baſe in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte baſis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifeſtum eſt, cylindrum priſmati, & conum pyramidi eſſe æqualem.

SI viciſſim baſi cylindri, vel coni conſtituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & ſuper hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat priſma, vel pyramis eiuſdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit priſma cylindro, & pyramis cono æqualis, quod eſt propoſitum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine. Et viciſsim dato cono vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.

[a] SI tam baſis cylindri, quam priſmatis tripletur, & ſuper triplicatam extruatur conus, vel pyramis eiuſdem altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur.[b] Cum enim cylindrus triplus ſit coni eandem cum illo baſem & altitudinem habentis:[c] Item priſma triplum pyramidis eandem cum illo baſem, atque altitudinem habentis:[d] Sit autem & conus extructus eiuſdem illius coni triplus; nec non & pyramis conſtructa eiuſdem illius pyramidis tripla.[e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis conſtructa priſmati, quod eſt propoſitum.

[f] SI viciſſim baſes coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & ſuper tertias has partes cylindrus erigatur, & priſma: Erit tam cylindrus dato cono, quam priſma datæ pyramidi æquale.[g] Quoniam n. tam conus datus, quam cylindrus extructus, triplus eſt coni eandem baſem, altitudinemque habentis cum cylindro extructo.[h] Item tam data pyramis, quam priſma extructum, triplum eſt pyramidis eandem habentis baſem, atque altitudinem cum priſmate extructo.[i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam priſma conſtructum datæ pyramidis æquale, quod eſt propoſitum.

a 16. ſexti. huius.
b 10. duodecimi.
c coroll. 7. duodec.
d 11. & 6. duodec.
e 9. quint.
f 16. ſexti huius.
g 11. & 10. duodec.
h 6. & 7. duodec.
i 9. quint.

COROLLARIVM I.

QVIA igitur[a] omne priſma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in priſma, & conus in pyramidem:[b] Item cylindrus in conum, & priſma in pyramidem: Et contra conus in cylindrum, & pyramis in priſma conuerti poteſt; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam priſma tranſmutari poſſit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut priſma æquale.

a 35 huius
b 36. huius

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifeſte colligitur, omnem cylindrum, ac priſma; ſimiliter & conum, ac pyramidem conuerti poſſe in parallelepipedum rectangulum, cuius baſis ſit quadrata.[a] Nam conuerſo cylindro, aut cono, vel pyramide in priſma qualecunque, ſi baſi priſmatis fiat quadratum æquale, & ſupra illud erigatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis;[b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & propoſito cylindro, vel cono, aut pyramidi.

a 35. & 36. huius.
b 2. corol 7. duod.

PROBL. 23. PROPOS. 37.

DATVM cylindrum, vel priſma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum, reuocare.

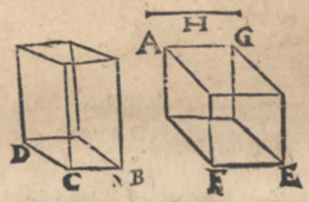
IN proportione, quam data altitudo ad altitudinem propoſiti ſolidi habet,[a] augeatur vel minuatur baſis eiuſdem ſolidi dati. Nam ſolidum ſupra hanc baſem auctam, vel diminutam ſecundum datam altitudinem conſtructum, erit id, quod quæritur.[b] Erit enim æquale dato ſolido: quippe cum altitudines cum baſibus reciprocæ ſint. Quod ſi baſi conſtructi ſolidi fiat æqualis baſis quotcunque angulorum & ſupra eam conſtituatur ſolidum ſub data altitudine; erit hoc etiam ſolidum ſolido propoſito æquale.

a 16. ſexti. huius.
b 15. & 9. duodec.

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem deſcribere.

SI pa-



a 14. ſecun. SI parallelepipedum non habet baſem quadratam,[a] fiat eius baſi quadratum æquale BCD, ſupra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiuſdem altitudinis A, B, cum parallelepipedo dato, [b] quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem conſtruemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF, H: ita vt ſit BC, ad EF, quemadmodum EF, ad H, & H, ad AB. Et ſuper EF, propinquiorem lateri BC, conſtruatur cubus EFG, [c] qui parallelepipedo ABCD, æqualis erit.

b 2. corol. 7. duod.

c lemma 18 ſexti huius. Quod ſi forte accidat, tres dimenſiones parallelepipedi dati, cuius baſis quadrata non ſit, eſſe continue proportionales; [d] erit cubus ex media deſcriptus parallelepipedo æqualis.

d 36. vnd.

COROLLARIVM.

a 2. coroll. 36. huius. [a] CVM igitur omnis cylindrus, omne priſma, conus, ac pyramis in rectangulum parallelepipedum poſſit commutari, liquido conſtat, cuilibet ſolido eiuſmodi, cubum poſſe conſtrui æqualem.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB, ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale.[a] Altitudini AB, & lateri cubi EF, reperiatur tertia ꝓportionalis BC. Et fiat rectangulum BD, comprehenſum ſub tertia proportionali BC, & recta CD, lateri cubi EF, æquali; erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD, continetur ſub tribus rectis AB, CD, BC, hoc eſt, ſub AB, EF, BC, continue proportionalibus; [b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF, deſcripto. quod eſt propoſitum.

a 11. ſexti.

b 36. vnd.

SIT deinde data baſis BD, quæ ſi non eſt parallelogrammũ, [c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionẽ habet baſis data BD, ad baſem cubi dati, eam habeat latus cubi EF, ad rectam AB. (quod fiet, ſi ſupra latus cubi EF, fiat rectangulũ ęquale baſi BD, & ſuper alterum latus huius rectanguli aliud rectangulum ęquale quadrato lateris cubi EF, [d] Nam tunc erit, vt primum rectangulum, id eſt, baſis BD, ad ſecundum rectangulum, id eſt, ad quadratum; vel baſem cubi, ita primi rectanguli baſis, videlicet EF, ad baſem ſecundi rectãguli.) Nam ſi ſupra baſem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, [e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia: quippe cum baſes, & altitudines ſint reciprocæ, ex conſtructione, quod eſt propoſitum.

c 45. prim.

d 1. ſexti.

e 34. vnde.

COROLLARIVM.

a corol. 38. huius. [a] QVONIAM igitur cuilibet cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi parallelepipedum rectangulũ cõſtrui poteſt ęquale: [b] ſi huic parallelepipedo fiat cubus ęqualis; [b] & huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel baſe data æquale: commutatus erit cylindrus, priſma, conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis.

b 38. huius

c 39. huius

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

QVONIAM per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, Cylindrus rectus cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo diametro eiuſdem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram: [a] Habet autẽ idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis, cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri ſphærę, proportionem quoque ſeſquialteram; [b] erit poſterior hic cylindrus ſphæræ æqualis. Si igitur huic cylindro [c] fiat cubus æqualis; erit idem hic cubus datæ ſphæræ æqualis, quod eſt propoſitum.

a 14. vnd.

b 9. quint.

c corol. 38. huius.

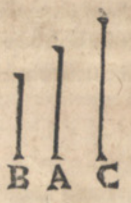
VEL quia per eandem propoſ. 32. Archimedis, ſphæra quadrupla eſt coni, cuiꝰ baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo ſemidiametro ſphæræ æqualis: [d] Eſt autem eiuſdem coni quadruplus etiam conus eiuſdem altitudinis, baſem habẽs circuli maximi in ſphæra quadruplam, hoc eſt, baſem habens circulum, cuius ſemidiameter æqualis diametro maximi circuli; [e] erit poſterior hic conus ſphæræ æqualis. [f] Si igitur huic cono fiat cubus æqualis, erit hic idem cubus ſphæræ datæ æqualis, quod eſt propoſitum.

d 11. duod.

e 9. quint.

f corol. 38. huius.

g 40. huius



SIT viciſſim cubo lateris A, conſtruenda ſphęra æqualis: [g] Sphæræ diametri A, fiat æqualis cubus lateris B, atq; duabus rectis B, A, inueniatur tertia proportionalis C. Dico ſphæram diametri C, æqualem eſſe dato cubo lateris A. [h] Nam vt cubus lateris B, ad cubum lateris A; ita eſt cubus lateris A, ad cubum lateris C. Vt autem cubꝰ lateris A, ad cubum lateris C; ita eſt ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri C; [i] quod vtraq; proportio triplicata ſit ꝓportionis A, ad C. Igitur erit quoq;, vt cubus lateris B, ad cubũ lateris A, ita ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri C, Eſt autem cubus lateris B, per conſtructionem, æqualis ſphærę diametri A. [k] Igitur & cubus lateris A, æqualis eſt ſphærę diametri C, quod eſt propoſitum.

h ſchol. 37 vndec.

i 33. vnd. & 18. duo.

k 14. quin.

COROL-

COROLLARIVM. I.

QVIA vero [a] ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunque laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinem cubi, [b] ſolidum hoc cubo eſt æquale, fit vt ſphæræ datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum; [c] ſi nimirũ prius conſtruatur cubus æqualis: deinde huic cubo ſolidum rectangulũ æquale, vt proxime dictum eſt. [d] Item quia cuicunque priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis; ſi cubo, qui ſphæræ eſt æqualis, tanquam priſmati, fiat pyramis æqualis; erit quoq; eadem pyramis ſphæræ æqualis [e] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cylindrus extruatur ſphæræ æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualem, & cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; conſtitutus erit conus quoque datæ ſphæræ æqualis.

VICISSIM [f] quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: [g] Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, erit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunq; angulorum.

a 25 ſexti. b 2. coroll. 7. duodec. c 40. huius d 36. huius e 36. huius f 37. huius g 40. huius

COROLLARIVM. II.

QVIN etiam colligitur, poſſe ſphæram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo quidem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro vero, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi [a] fiat Parallelepipedum æquale: [b] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphæra æqualis; erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro, & Dodecaedro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2. Eucl. vel potius per ea, quæ lib. 4. huius Geometriæ cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat pyramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductæ, hoc eſt, altitudini vnius pyramidis ex ijs, in quas corpus diuiditur è centro: [c] Erit hęc pyramis corpori regulari ęqualis; [d] quippe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidē corporis regularis, quam omnes pyramides corporis regularis ad vnam pyramidē, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidũ corporis, ad vnam baſem; propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobiq, octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duodecupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulo ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

a 2. coroll. 36. huius. b 38. huius c 9. quin. d 6. duod.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

SI ſupra baſem ſuperiorem primi cubi, [a] conſtruatur parallelepipedum rectangulũ ſecundo cubo æquale, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et ſupra huius parallelepipedi baſem ſuperiorem aliud parallelepipedum æquale tertio cubo, & ſic deinceps, ſi plures adſint cubi, conſtructum erit parallelepipedum propoſitis cubis æquale. Huic ergo [b] ſi fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 39. huius b 38. huius

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris ſolidis non cubis, conſtruetur cubus æqualis: [a] ſi nimirum reuocentur ad vnum parallelepipedum, &c.

a 37. huius

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinq; elegeris, æquale conſtruere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia conſtruendum ſit æquale Dodecaedrum. [a] Fiat quotcunque Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis propoſ. dicta ſunt, fiat ęqualis cubus, cuius latus C. [b] Et tribus lateribus C, A, B, reperiatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum ſupra latus D, conſtructum, æquale eſſe dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonſtratione propoſ. 37. lib. 11. Euclid. patet, ita eſt cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Eſt autem per cōſtructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [c] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris D, æqualis, quod eſt propoſitum.

C. A. B. D.

a 17. tertij decimi. b 12. ſexti. c 14 quin.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA baſem maioris cubi [a] conſtruatur parallelepipedum cubo minori ęquale. Et ex latere cubi maioris abſcindatur recta æqualis altitudini conſtructi parallelepipedi. Si n. per punctũ abſciſſionis ducatur planũ

a 39 huius

baſibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo conſtructo æquale, cum habeat eandem baſem & altitudinem cum illo hoc eſt, minori cubo æquale. [a] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

a 38. huius

SCHOLIVM.

a 1. & 2. coroll. 36. huius. b 38. huius

IDEM fieri poteſt in alijs figuris ſolidis; [a] ſi prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non ſunt parallelepipeda. [b] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus ſphæris, ſphæram vnam æqualem conſtituere.

a 40. huius b 41. huius c 40. huius

SPHÆRIS propoſitis [a] conſtruantur cubi æquales: [b] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam ſphæris datis erit æqualis. [c] Si igitur huic cubo extruatur ſphæra æqualis; factum erit, quod iubetur.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori ſphæra minorem ſphæram detrahere, reſiduoq; ſphæram æqualem exhibere.

a 40. huius b 43. huius c 40. huius

[a] VTRAQVE ſphæra in cubum reuocetur. [b] Detracto deinde minore ex maiore, [c] ſi reſiduo ſphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum, aut parallelepipedum, ſecundum proportionem datam ſecare.

a 32. vnde b 1. ſexti.

SI namque vnum latus in baſe cubi, aut parallelepipedi ſecetur ſecundum datam proportionem, & per punctum ſectionis ducatur planum duabus baſibus erectis ſolidi parallelum, diuidẽs ipſum ſolidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. [a] Habent enim proportionem inter ſe eandem, quam baſes. [b] Cum ergo baſes habeant eandem proportionem, quam ſegmenta lateris ſecundam datam proportionem diuiſi; conſtat id, quod propoſitum eſt.

SCHOLIVM.

a ſchol. 14. duodec. b 14. duod.

NON aliter priſma quodlibet, aut cylindrus ſecundum datam proportionem ſecabitur, ſi altitudo in datam ſecetur proportionem, & per punctum ſectionis planum ducatur baſibus parallelum. Hoc enim ſecabit [a] tam priſma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere.

a 15. primi. b ſchol. 13. tertij.



LIBET miſcellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere, quo artifices ope circini deſcribere ſolent figuram ouatam Ellipſi ſimilem, ita vt nullibi anguli appareant: cum non raro eiuſmodi figura à Geometris in ſuis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. noſtræ Gnomonicæ in ſcholio propoſ. 8. qua ratione vera Ellipſis, quæ conica ſectio eſt, deſcribenda ſit: Sed hic ſimilem figuram ex ſegmentis circulorum conſtantem deſcribendam proponimus. Ita ergo, vt ex varijs ſcriptoribus colligitur, agemus. Conſtruantur duo triangula æquilatera, vel Iſoſcelia ſupra baſem communem AC, in diuerſas partes ABC, ADC. (Æquilatera venuſtiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productiſque lateribus, deſcribantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vſque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus deſcribantur, [b] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non ſecabunt, conſtitutaq; erit figura ouata.

BENE autem vides, ex eiſdem centris A, B, C, D, deſcribi poſſe varias figuras, prout arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

QVOD ſi triangula conſtituta ſint Iſoſcelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri baſe AC, vel minora. In figura noſtra ſunt minora.

POTES

POTES etiam,ſi placet,primo loco ex centris B,D,deſcribere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum,pro latitudine figuræ deſcribendæ:deinde ex centris A,C,minores arcus delineare EFG,HIK.

QVIN etiam ſine conſtructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD,ad angulos rectos ſe ſecantibus in N; ſumptiſq; æqualibus NA,NC, quantiſcunq; pro longitudine figuræ, deſcribantur ex A,C,arcus circulorum EFG,HIK,parui,aut magni, prout deſideras extremitates figuræ ſecundum longitudinem habere anguſtiores, latioreſue.Deinde acceptis alijs duabus rectis ęqualib⁹ NB,ND,quantiſcunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo anguſtior figura euadet:& quo minus remota, eo latior.Sed vſus magiſter optimus facile docebit, quantæ debeant eſſe rectæ NB,ND,) ducantur ex B, D, per centra A,C,rectæ ſecantes priores arcus in E,K,&c.Nam ſi ex B,D,per puncta EK,&c.alij duo arcus deſcribantur,perfecta erit figura Ellipſi ſimilis.

VT autem videas,venuſtiores figuras deſcribi,ſi triangula ABC,ADC;ſint æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus ſeruari ſolet,deſcripſimus hic duas figuras.In minori eſt latus BA, rectæ AE, duplum,in maiori vero æquale,&c.

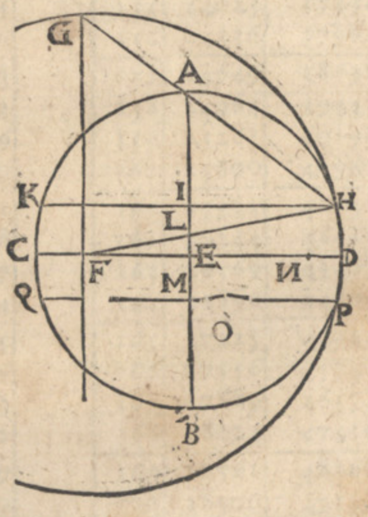
Area figuræ ouatæ hic deſcripta.

IAM vero area figurę ouatę,beneficio trianguli æquilateri deſcriptæ , quam artifices non raro expetũt,facile inuenietur,hoc modo. Sector BEK, eſt ſexta pars circuli , cuius ſemidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli ęquilateri BEK,quod eſt in maiori figura duplum lateris AB, aſſumpti ad libitum:in minori vero ſeſquialterum eſt eiuſdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli,vt lib.4.cap. 7.docuimus, ſi ex eius ſexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK,cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib.4.cap.2. Num.5. tradita ſunt:reliquum fiet ſegmentum EK, ac proinde &GH,notũ. Item ſector AGE, eſt pars tertia circuli, cuius ſemidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri aſſumpto AB,vel ſemiſſis ipſius.Si igitur ex tertia parte areæ illius circuli auferatur area Iſoſcelis AGE, quæ reperietur per ea,quæ lib.4.cap.2. Num.4.ſcripſimus:remanebit ſegmentum GFE, notum,ideoque & ſegmentum HIK. Quocirca ſi quatuor ſegmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK,



cognita erit area totius figuræ.Cognoſcetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap.1. lib.4. cum latus EK, chorda ſit ſextæ partis circuli,hoc eſt,ſemidiametro æquale:at EF, ſit ſinus grad.60. id eſt, ſemiſſis chordæ grad. 120.

VERVM quia hac ratione deſcribi nequit figura ad datam longitudinem,latitudinemque; (quoniam ſi longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta ſit futura latitudo:propterea quod arcus ex B, D, deſcripti raro tranſeunt per electa puncta latitudinis: Si vero eligatur latitudo LM,in prima figura, ignorabitur futura longitudo:quippe cum arcus ex A,C,deſcripti raro etiam per electa puncta longitudinis tranſeãt:vt perſpicuum eſt.) docebimus cum Ioan. Baptiſta Benedicto, quo pacto, data tam longitudine,quam latitudine figura Ellipſi ſimilis deſeribenda ſit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ ſe bifariam,& ad rectos angulos ſecent in E. Ex latitudine CD,abſcindatur recta DF,quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F,&A, extremum longitudinis. Hoc enim niſi fiat,deſcribi non poterit figura ouata. Deinde centro F,& interuallo FD,deſcribatur circulus DG, qui neceſſario vltra punctum A, tranſibit, quippe cum ſemidiameter FD,maior poſita ſit interuallo FA.Ducta autem FG , longitudini AB, parallela ſecante circulum deſcriptum in G;ducatur ex G,per A, recta ſecans eundem circulum in H,puncto,è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF,ſecans AB, longitudinem in L; eruntque FG,FH,æquales è centro F,ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, ſimilia ſunt; [b] erit vt GF, ad FH,ita AL,ad LH. Cum ergo GF, ipſi FH, ſit æqualis; erit quoque AL, ipſi LH, æqualis. Circulus ergo AH,ex L; per A, deſcriptus tranſibit per H,[c] ibique priorem circulum DG,tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipſi EI, & EM,ipſi EL,ducaturque POQ per O rectæ CD,parallela,atque ex M,centro,interuallo autem LH,vel MP, circulus PBQ,deſcribatur,tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique ſumpta EN, ipſi EF, æquali, deſcribatur ex N,ad interuallum FD,prioris circuli circulus KCQ,tanget hic circulos HAK,PBQ,in K,Q, perfectaque erit figura ouata.



a coroll. 4. ſexti.
b 4. ſexti.
c ſchol. 13. tertij.

SED quia,vt dictum eſt,conſtatq; ex deſcriptione,niſi latitudo CD,tanta ſit, vt ex ea abſcindi poſſit recta DF, maior interuallo FA,figura hac ratione deſcribi nequit:adeo vt longitudo,ac latitudo ad libitum aſſumi non poſſint;inſtituetur operatio alio modo,ſumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent ſe in prima figura longitudo,latitudoq; FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & ſumantur rectæ FA,IC, æquales, & minores ſemiſſe latitudinis LN; deſcribanturque ex A, & C,per F,& I, circuli EFG,HIK.

Sumpta deinde MO, ſemidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, ſecet recta PB, ſecans LM, etiam productum, ſi opus eſt, in B. ducaturque BA, vſque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB æqualia ſunt, anguloſq; continent rectos, id eſt, æquales:[a] erunt baſes OB, AB, æquales; additiſque æqualibus OM, AE, (ſumpta namq; fuit MO, æqualis ſemidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Deſcriptus ergo circulus ex B, per M, tranſibit per E, [b]ibique circellum GFE tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget. Si igitur ſumpta ND, ipſi NB, æquali, deſcribatur ex D, per L, circulus tangens eoſdem priores circellos in G, H, abſoluta erit figura.

a 4. prim.

b ſchol. 13. tertij.

QVO autem ſemidiameter FA, ſumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrũ B, reperietur, vt liquet.

SCHOLIVM.

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorum, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vſq; ad 1000. producuntur: propterea quod huiuſce tabulæ multiplex, & inſignis eſt vſus cum in alijs rebus Mathematicis, tum vero maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt poſt tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras nõ ſuperantibus: propterea quod ſi extenderetur vſque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda eſſet. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile poſſit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctiſſimus Maginus in ſua tabula Tetragonica vſque ad radicem. 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORVM, & Cuborum, quorum radices maiores non ſunt, quam 1000.

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
1	1	1	61	3721	226981	121	14641	1771561
2	4	8	62	3844	238328	122	14884	1815848
3	9	27	63	3969	250047	123	15129	1860867
4	16	64	64	4096	262144	124	15376	1906624
5	25	125	65	4225	274625	125	15625	1953125
6	36	216	66	4356	287496	126	15876	2000376
7	49	343	67	4489	300763	127	16129	2048383
8	64	512	68	4624	314432	128	16384	2097152
9	81	729	69	4761	328509	129	16641	2146689
10	100	1000	70	4900	343000	130	16900	2197000
11	121	1331	71	5041	357911	131	17161	2248091
12	144	1728	72	5184	373248	132	17424	2299968
13	169	2197	73	5329	389017	133	17689	2352637
14	196	2744	74	5476	405224	134	17956	2406104
15	225	3375	75	5625	421875	135	18225	2460375
16	256	4096	76	5776	438976	136	18496	2515456
17	289	4913	77	5929	456533	137	18769	2571353
18	324	5832	78	6084	474552	138	19044	2628072
19	361	6859	79	6241	493039	139	19321	2685619
20	400	8000	80	6400	512000	140	19600	2744000
21	441	9261	81	6561	531441	141	19881	2803221
22	484	10648	82	6724	551368	142	20164	2863288
23	529	12167	83	6889	571787	143	20449	2924207
24	576	13824	84	7056	592704	144	20736	2985984
25	625	15625	85	7225	614125	145	21025	3048625
26	676	17576	86	7396	636056	146	21316	3112136
27	729	19683	87	7569	658503	147	21609	3176523
28	784	21952	88	7744	681472	148	21904	3241792
29	841	24389	89	7921	704969	149	22201	3307949
30	900	27000	90	8100	729000	150	22500	3375000
31	961	29791	91	8281	753571	151	22801	3442951
32	1024	32768	92	8464	778688	152	23104	3511808
33	1089	35937	93	8649	804357	153	23409	3581577
34	1156	39304	94	8836	830584	154	23716	3652264
35	1225	42875	95	9025	857375	155	24025	3723875
36	1296	46656	96	9216	884736	156	24336	3796416
37	1369	50653	97	9409	912673	157	24649	3869893
38	1444	54872	98	9604	941192	158	24964	3944312
39	1521	59319	99	9801	970299	159	25281	4019679
40	1600	64000	100	10000	1000000	160	25600	4096000
41	1681	68921	101	10201	1030301	161	25921	4173281
42	1764	74088	102	10404	1061208	162	26244	4251528
43	1849	79507	103	10609	1092727	163	26569	4330747
44	1936	85184	104	10816	1124864	164	26896	4410944
45	2025	91125	105	11025	1157625	165	27225	4492125
46	2116	97336	106	11236	1191016	166	27556	4574296
47	2209	103823	107	11449	1225043	167	27889	4657463
48	2304	110592	108	11664	1259712	168	28224	4741632
49	2401	117649	109	11881	1295029	169	28561	4826809
50	2500	125000	110	12100	1331000	170	28900	4913000
51	2601	132651	111	12321	1367631	171	29241	5000211
52	2704	140608	112	12544	1404928	172	29584	5088448
53	2809	148877	113	12769	1442897	173	29929	5177717
54	2916	157464	114	12996	1481544	174	30276	5268024
55	3025	166375	115	13225	1520875	175	30625	5359375
56	3136	175616	116	13456	1560896	176	30976	5451776
57	3249	185193	117	13689	1601613	177	31329	5545233
58	3364	195112	118	13924	1643032	178	31684	5639752
59	3481	205379	119	14161	1685159	179	32041	5735339
60	3600	216000	120	14400	1728000	180	32400	5832000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
181	32761	5929741	241	58081	13997521	301	90601	27270901
182	33124	6028568	242	58564	14172488	302	91204	27543608
183	33489	6128487	243	59049	14348907	303	91809	27818127
184	33856	6229504	244	59536	14526784	304	92416	28094464
185	34225	6331625	245	60025	14706125	305	93025	28372625
186	34596	6434856	246	60516	14886936	306	93636	28652616
187	34969	6539203	247	61009	15069223	307	94249	28934443
188	35344	6644672	248	61504	15252992	308	94864	29218112
189	35721	6751269	249	62001	15438249	309	95481	29503629
190	36100	6859000	250	62500	15625000	310	96100	29791000
191	36481	6967871	251	63001	15813251	311	96721	30080231
192	36864	7077888	252	63504	16003008	312	97344	30371328
193	37249	7189057	253	64009	16194277	313	97969	30664297
194	37636	7301384	254	64516	16387064	314	98596	30959144
195	38025	7414875	255	65025	16581375	315	99225	31255875
196	38416	7529536	256	65536	16777216	316	99856	31554496
197	38809	7645373	257	66049	16974593	317	100489	32855013
198	39204	7762392	258	66564	17173512	318	101124	32157432
199	39601	7880599	259	67081	17373979	319	101761	32461759
200	40000	8000000	260	67600	17576000	320	102400	32768000
201	40401	8120601	261	68121	17779581	321	103041	33076161
202	40804	8242408	262	68644	17984728	322	103684	33386248
203	41209	8365427	263	69169	18191447	323	104329	33698267
204	41616	8489664	264	69696	18399744	324	104976	34012224
205	42025	8615125	265	70225	18609625	325	105625	34328125
206	42436	8741816	266	70756	18821096	326	106276	34645976
207	42849	8869743	267	71289	19034163	327	106929	34965783
208	43264	8998912	268	71824	19248832	328	107584	35287552
209	43681	9129329	269	72361	19465109	329	108241	35611289
210	44100	9261000	270	72900	19683000	330	108900	35937000
211	44521	9393931	271	73441	19902511	331	106561	36264691
212	44944	9528128	272	73984	20123648	332	110224	36594368
213	45369	9663597	273	74529	20346417	333	110889	36926037
214	45796	9800344	274	75076	20570824	334	111556	37259704
215	46225	9938375	275	75625	20796875	335	112225	37595375
216	46656	10077696	276	76176	21024576	336	112896	37933056
217	47089	10218313	277	76729	21253933	337	113569	38272753
218	47524	10360232	278	77284	21484952	338	114244	38614472
219	47961	10503459	279	77841	21717639	339	114921	38958219
220	48400	10648000	280	78400	21952000	340	115600	39304000
221	48841	10793861	281	78961	22188041	341	116281	39651821
222	49284	10941048	282	79524	22425768	342	116964	40001688
223	49729	11089567	283	80089	22665187	343	117649	40353607
224	50176	11239424	284	80656	22906304	344	118336	40707584
225	50625	11390625	285	81225	23149125	345	119025	41063625
226	51076	11543176	286	81796	23393656	346	119716	41421736
227	51529	11697083	287	82369	23639903	347	120409	41781923
228	51984	11852352	288	82944	23887872	348	121104	42144192
229	52441	12008989	289	83521	24137569	349	121801	42508549
230	52900	12167000	290	84100	24389000	350	122500	42875000
231	53361	12326391	291	84681	24642171	351	123201	43243551
232	53824	12487168	292	85264	24897088	352	123904	43614208
233	54289	12649337	293	85849	25153757	353	124609	43986977
234	54756	12812904	294	86436	25412184	354	125316	44361864
235	55225	12977875	295	87025	25672375	355	126025	44738875
236	55696	13144256	296	87616	25934336	356	126736	45118016
237	56169	13312053	297	88209	26198073	357	127449	45499293
238	56644	13481272	298	88804	26463592	358	128164	45882712
239	57121	13651919	299	89401	26730899	359	128881	46268279
240	57600	13824000	300	90000	27000000	360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
361	130321	47045881	421	177241	74618461	481	231361	111284641
362	131044	47437928	422	178084	75151448	482	232324	111980168
363	131769	47832147	423	178929	75686967	483	233289	112678587
364	132496	48228544	424	179776	76225024	484	234256	113379904
365	133225	48627125	425	180625	76765625	485	235225	114084125
366	133956	49027896	426	181476	77308776	486	236196	114791256
367	134689	49430863	427	182329	77854483	487	237169	115501303
368	135424	49836032	428	183184	78402752	488	238144	116214272
369	136161	50243409	429	184041	78953589	489	239121	116930169
370	136900	50653000	430	184900	79507000	490	240100	117649000
371	137641	51064811	431	185761	80062991	491	241081	118370771
372	138384	51478848	432	186624	80621568	492	242064	119095488
373	139129	51895117	433	187489	81182737	493	243049	119823157
374	139876	52313624	434	188356	81746504	494	244036	120553784
375	140625	52734375	435	189225	82312875	495	245025	121287375
376	141376	53157376	436	190096	82881856	496	247016	122023936
377	142129	53582633	437	190969	83453453	497	247009	122763473
378	142884	54010152	438	191844	84027672	498	248004	123505992
379	143641	54439939	439	192721	84604519	499	249001	124251499
380	144400	54872000	440	193600	85184000	500	250000	125000000
381	145161	55306341	441	194481	85766121	501	251001	125751501
382	145924	55742968	442	195364	86350888	502	252004	126506008
383	146689	56181887	443	196249	86938307	503	253009	127263527
384	147456	56623104	444	197136	87528384	504	254016	128024064
385	148225	57066625	445	198025	88121125	505	255025	128787625
386	148996	57512456	446	198916	88716536	506	256036	129554216
387	149769	57960603	447	199809	89314623	507	257049	130323843
388	150544	58411072	448	200704	89915392	508	258064	131096512
389	151321	58863869	449	201601	90518849	509	259081	131872229
390	152100	59319000	450	202500	91125000	510	260100	132651000
391	152881	59776471	451	203401	91733851	511	261121	133432831
392	153664	60236288	452	204304	92345408	512	262144	134217728
393	154449	60698457	453	205209	92959677	513	263169	135005697
394	155236	61162984	454	206116	93576664	514	264196	135796744
395	156025	61629875	455	207025	94196375	515	265225	136590875
396	156816	62099136	456	207936	94818816	516	266256	137388096
397	157609	62570773	457	208849	95443993	517	267289	138188413
398	158404	63044792	458	209764	96071912	518	268324	138991832
399	159201	63521199	459	210681	96702579	519	269361	139798359
400	160000	64000000	460	211600	97336000	520	270400	140608000
401	160801	64481201	461	212521	97972181	521	271441	141420761
402	161604	64964808	462	213444	98611128	522	272484	142236648
403	162409	65450827	463	214369	99252847	523	273529	143055667
404	163216	65939264	464	215296	99897344	524	274576	143877824
405	164025	66430125	465	216225	100544625	525	275625	144703125
406	164836	66923416	466	217156	101194696	526	276676	145531576
407	165649	67419143	467	218089	101847563	527	277729	146363183
408	166464	67917312	468	219024	102503232	528	278784	147197952
409	167281	68417929	469	219961	103161709	529	279841	148035889
410	168100	68921000	470	220900	103823000	530	280900	148877000
411	168921	69426531	471	221841	104487111	531	281961	149721291
412	169744	69934528	472	222783	105154048	532	283024	150568768
413	170569	70444997	473	223729	105823817	533	284089	151419437
414	171396	70957944	474	224676	106496424	534	285156	152273304
415	172225	71473375	475	225625	107171875	535	286225	153130375
416	173056	71991296	476	226576	107850176	536	287296	153990656
417	173889	72511713	477	227529	108531333	537	288369	154854153
418	174724	73034632	478	228484	109215352	538	289444	155720872
419	175561	73560059	479	229441	109902239	539	290521	156590819
420	176400	74088000	480	230400	110592000	540	291600	157464000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi
541	292681	158340421
542	293764	159220088
543	294849	160103007
544	295936	160989184
545	297025	161878625
546	298116	162771336
547	299209	163667323
548	300304	164566592
549	301401	165469149
550	302500	166375000
551	303601	167284151
552	304704	168196608
553	305809	169112377
554	306916	170031464
555	308025	170953875
556	309136	171879616
557	310249	172808693
558	311364	173741112
559	312481	174676879
560	313600	175616000
561	314721	176558481
562	315844	177504328
563	316969	178453547
564	318096	179406144
565	319225	180362125
566	320356	181321496
567	321489	182284263
568	322624	183250432
569	323761	184220009
570	324900	185193000
571	326041	186169411
572	327184	187149248
573	328329	188132517
574	329476	189119224
575	330625	190109375
576	331776	191102976
577	332929	192100033
578	334084	193100552
579	335241	194104539
580	336400	195112000
581	337561	196122941
582	338724	197137368
585	339889	198155287
584	341056	199176704
585	342225	200201625
586	343396	201230056
587	344569	202262003
588	345744	203297472
589	346921	204336469
590	348100	205379000
591	349281	206425071
592	350464	207474688
593	351649	208527857
594	352836	209584584
595	354025	210644875
596	355216	211708736
597	356409	212776173
598	357604	213847192
599	358801	214921799
600	360000	216000000

Radices	Quadrati.	Cubi
601	361201	217081801
602	362404	218167208
603	363609	219256227
604	364816	220348864
605	366025	221445125
606	367236	222545016
607	368449	223648543
608	369664	224755712
609	370881	225866529
610	372100	226981000
611	373321	228099131
612	374544	229220928
613	375769	230346397
614	376996	231475544
615	378225	232608375
616	379456	233744896
617	380689	234885113
618	381924	236029032
619	383161	237176659
620	384400	238328000
621	385641	239483061
622	386884	240641848
623	388129	241804367
624	389376	242970624
625	390625	244140625
626	391876	245314376
627	393129	246491883
628	394384	247673152
629	395641	248858189
630	396900	250047000
631	398161	251239591
632	399424	252435968
633	400689	253636137
634	401956	254840104
635	403225	256047875
636	404496	257259456
637	405769	258474853
638	407044	259694072
639	408321	260917119
640	409600	262144000
641	410881	263374721
642	412164	264609288
643	413449	265847707
644	414736	267089984
645	416025	268336125
646	417316	269586136
647	418609	270840023
648	419904	272097792
649	421201	273359449
650	422500	274625000
651	423801	275894451
652	425104	277167808
653	426409	278445077
654	427716	279726264
655	429025	281011375
656	430336	282300416
657	431649	283593393
658	432964	284890312
659	434281	286191179
660	435600	287496000

Radices	Quadrati.	Cubi
661	436921	288804781
662	438244	290117528
663	439569	291434247
664	440896	292754944
665	442225	294079625
666	443556	295408296
667	444889	296740963
668	446224	298077632
669	447561	299418309
670	448900	300763000
671	450241	302111711
672	451584	303464448
673	452929	304821217
674	454276	306182024
675	455625	307546875
676	456976	308915776
677	458329	310288733
678	459684	311665752
679	461041	313046839
680	462400	314432000
681	463761	315821241
682	465124	317214568
683	466489	318611987
684	467856	320013504
685	469225	321419125
686	470596	322828856
687	471969	324242703
688	473344	325660672
689	474721	327082769
690	476100	328509000
691	477481	329939371
692	478864	331373888
693	480249	332812557
694	481636	334255384
695	483025	335702375
696	484416	337153536
697	485809	338608873
698	487204	340068392
699	488601	341532099
700	490000	343000000
701	491401	344472101
702	492804	345948408
703	494209	347428927
704	495616	348913664
705	497025	350402625
706	498436	351895816
707	499849	353393243
708	501264	354894912
709	502681	356400829
710	504100	357911000
711	505521	359425431
712	506944	360944128
713	508369	362467097
714	509796	363994344
715	511225	365525875
716	512656	367061696
717	514089	368601813
718	515524	370146232
719	516961	371694959
720	518400	373248000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
721	519841	374805361	781	609961	476379541	841	707281	594823321
722	521284	376367048	782	611524	478211768	842	708964	596947688
723	522729	377933067	783	613089	480048687	843	710649	599077107
724	524176	379503424	784	614656	481890304	844	712336	601211584
725	525625	381078125	785	616225	483736625	845	714025	603351125
726	527076	382657176	786	617796	485587656	846	715716	605495736
727	528529	384240583	787	619369	487443403	847	717409	607645423
728	529984	385828352	788	620944	489303872	848	719104	609800192
729	531441	387420489	789	622521	491169069	849	720801	611960049
730	532900	389017000	790	624100	493039000	850	722500	614125000
731	534361	390617891	791	625681	494913671	851	724201	616295051
732	535824	392223168	792	627264	496793088	852	725904	618470208
733	537289	393832837	793	628849	498677257	853	727609	620650477
734	538756	395446904	794	630436	500566184	854	729316	622835864
735	540225	397065375	795	632025	502459875	855	731025	625026375
736	541696	398688256	796	633616	504358336	856	732736	627222016
737	543169	400315553	797	635209	506261573	857	734449	629422793
738	544644	401947272	798	636804	508169592	858	736164	631628712
739	546121	403583419	799	638401	510082399	859	737881	633839779
740	547600	405224000	800	640000	512000000	860	739600	636056000
741	549081	406869021	801	641601	513922401	861	741321	638277381
742	550564	408518488	802	643204	515849608	862	743044	640503928
743	552049	410172407	803	644809	517781627	863	744769	642735647
744	553536	411830784	804	646416	519718464	864	746496	644972544
745	555025	413493625	805	648025	521660125	865	748225	647214625
746	556516	415160936	806	649636	523606616	866	749956	649461896
747	558009	416832723	807	651249	525557943	867	751689	651714363
748	559504	418508992	808	652864	527514112	868	753424	653972032
749	561001	420189749	809	654481	529475129	869	755161	656234909
750	562500	421875000	810	656100	531441000	870	756900	658503000
751	564001	423564751	811	657721	533411731	871	758641	660776311
752	565504	425259008	812	659344	535387328	872	760384	663054848
753	567009	426957777	813	660969	537367797	873	762129	665338617
754	568516	428661064	814	662596	539353144	874	763876	667627624
755	570025	430368875	815	664225	541343375	875	765625	669921875
756	571536	432081216	816	665856	543338496	876	767376	672221376
757	573049	433798093	817	667489	545338513	877	769129	674526133
758	574564	435519512	818	669124	547343432	878	770884	676836152
759	576081	437245479	819	670761	549353259	879	772641	679151439
760	577600	438976000	820	672400	551368000	880	774400	681472000
761	579121	440711081	821	674041	553387661	881	776161	683797841
762	580644	442450728	822	675684	555412248	882	777924	686128968
763	582169	444194947	823	677329	557441767	883	779689	688465387
764	583696	445943744	824	678976	559476224	884	781456	690807104
765	585225	447697125	825	680625	561515625	885	783225	693154125
766	586756	449455096	826	682276	563559976	886	784996	695506456
767	588289	451217663	827	683929	565609283	887	786769	697864103
768	589824	452984832	828	685584	567663552	888	788544	700227072
769	591361	454756609	829	687241	569722789	889	790321	702595369
770	592900	436533000	830	688900	571787000	890	792100	704969000
771	594441	458314011	831	690561	573856191	891	793881	707347971
772	595984	460099648	832	692224	575930368	892	795664	709732288
773	597529	461889917	833	693889	578009537	893	797449	712121957
774	590076	463684824	834	695556	580093704	894	799236	714516984
775	600625	465484375	835	697225	582182875	895	801025	716917375
776	602176	467288576	836	698896	584277056	896	802816	719323136
777	603729	469097433	837	700569	586376253	897	804609	721734273
778	605284	470910952	838	702244	588480472	898	806404	724150792
779	606841	472729139	839	703921	590589719	899	808201	726572699
780	608400	474552000	840	705600	592704000	900	810000	729000000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadratus.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi	Radices	Quadrati.	Cubi
901	811801	731432701	935	874225	817400375	969	938961	909853209
902	813604	733870808	936	876096	820025856	970	940900	912673000
903	815409	736314327	937	877969	822656953	971	942841	915498611
904	817216	738763264	938	879844	825293672	972	944784	918330048
905	819025	741217625	939	881721	827936019	973	946729	921167317
906	820836	743677416	940	883600	830584000	974	948676	924010424
907	822649	746142643	941	885481	833237621	975	950625	926859375
908	824464	748613312	942	887364	835896888	976	952576	929714176
909	826281	751089429	943	889249	838561807	977	954529	932574833
910	828100	753571000	944	891136	841232384	978	956484	935441352
911	829921	756058031	945	893025	843908625	979	958441	938313739
912	831744	758550528	946	894916	846590536	980	960400	941192000
913	833569	761048497	947	896809	849278213	981	962361	944076141
914	835396	763551944	948	898704	851971392	982	964324	946966168
915	837225	766060875	949	900601	854670349	683	966289	949862087
916	839056	768575296	950	902500	857375000	984	968256	952763904
917	840889	771095213	951	904401	860085351	985	970225	955671625
918	842724	773620632	952	906304	862801408	986	972196	958585256
919	844561	776151559	953	908209	865523177	987	974169	961504803
920	846400	778688000	954	910116	868250664	988	976144	964430272
921	848241	781229961	955	912025	870983875	989	978121	967361669
922	850084	783777448	956	913936	873722816	990	980100	970299000
923	851929	786330467	957	915849	876467493	991	982081	973242271
924	853776	788889024	958	917764	879217912	992	984064	976191488
925	855625	791453125	959	919681	881974079	993	986049	979146657
926	857476	794022776	960	921600	884736000	994	988036	982107784
927	859329	796597983	961	923521	887503681	995	990025	985074875
928	861184	799178752	962	925444	890277128	996	992016	988047936
929	863041	801765089	963	927369	893056347	997	994009	991026973
930	864900	804357000	964	929296	895841344	998	996004	994011992
931	866761	806954491	965	931225	898632125	999	998001	997002999
932	868624	809557568	966	933156	901428696	1000	1000000	1000000000
933	870489	812166237	967	935089	904231063			
934	872356	814780504	968	937024	907039232			

DE DIF-

DE DIFFERENTIIS QVADRATORVM ET Cuborum, & de continuatione tabulæ eorundem.

QVONIAM quadrati numeri creantur per continuam additionem numerorum imparium, vt Arithmetici demonſtrant: fit vt differentia inter quemlibet quadratum, & proxime inſequentem ſit dupla radicis minoris; addita inſuper vnitate. Itaque duobus modis tabula quadratorum componi poteſt, & continuari. Vno modo ſi omnes numeri impares ordine ponantur, initio ſumpto ab 1. Nam 1. dat primum quadratum 1. Et ex 1.& 3. fit ſecundus 4. cui ſi addatur ſequens impar 5. fit tertius 9. & ſi addatur impar ſequens 7. fit quartus quadratus 16. atque ita deinceps. Habet autem quilibet quadratus radicem tot vnitatum, quot numeri impares ipſum conficiunt. Vt quia ſolus impar 1. dat primum quadratum 1. propterea eius radix eſt 1. Deinde quia duo impares 1.& 3. conficiunt ſecundum quadratum 4. erit eius radix 2. Sic quia duodecim numeri impares 1. 3. 5 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. componunt quadratum 144. erit eius radix 12. & ſic de cæteris. Atque in hunc modum ſi ſemper ſequens numerus impar adiiciatur ad quadratum præcedentem, conflatur ſequens numerus quadratus, continuabiturque tabula in infinitum: ſi tamẽ prius ſeries numerorum imparium continuetur. Radices ſerie numerorum naturali progrediuntur.

Differentia quadratorũ.

Compoſitio tabulæ quadratorum.

Numeri impares	Quadrati.	Radices
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12

ALIO modo condi poterit tabula quadratorum, & in infinitum continuari, ſine numerorum imparium ſerie, ſi omnes radices ponantur ordine, vt in tabula vides. Cum enim primus quadratus ſit 1. cuius radix 1. ſi hæc radix duplicata, addita inſuper 1. addatur primo quadrato 1. fit ſecundus 4. cuius radix 2. Hæc duplicata, & inſuper addita 1. ſi adiiciatur ſecundo quadrato 4. fit tertius 9. cuius radix 3. quæ duplicata, & inſuper addita 1. facit 7. Si igitur addantur 7. ad quadratum 9. fit quartus quadratus 16. & ſic in infinitum.

NVMERI autem cubi gignuntur quoque ex additione numerorum imparium, hoc modo. Deſcripta ſerie imparium numerorum ab 1. incipientium, primus 1. dat primum cubum 1. cuius radix 1. Duo deinde ſequentes 3 5. coaceruati præbent ſecundum cubum 8. cuius radix 2. Tres inſequentes 7. 9. 11. exhibent tertium cubum 27. cuius radix 3. Atque eundem in modum ſequẽtes quatuor impares conficient quartum cubum, & inſequentes quinque quintum, & ſic deinceps in infinitum. Quilibet autem cubus radicem habet tot vnitatum quot impares numeri coaceruati ipſum componunt.

Generatio cuborum.

Numeri impares	Cubi	Radices
1	1	1
3		
5	8	2
7		
9		
11	27	3
13		
15		
17		
19	64	4
21		
23		
25		
27		
29	125	5

PRODVCITVR quoque cubus cuiuſcunque radicis, ſi ea radix in ſuum quadratum ducatur. Vt cubus radicis 16. eſt 4096. genitus ex radice 16. multiplicata in 256. quadratum eiuſdem radicis.

VERVM quia permoleſtum eſt, tam ſeriem numeroruum imparium in tot terminis continuare, vt ex eorum additione omnes cubi generentur, vt dictum eſt, quam radices omnes per ſuos quadratos multiplicare: obſeruauit Ioan. Baptiſta Villalpandus noſtræ Societatis ſacerdos Theologus, ac Mathematicus egregius, cuius eruditionis in rebus Mathematicis ſpecimen præclarum extat in apparatu Vrbis, ac Templi Hieroſolymitani, præſertim vero in multiplici duarum mediarum proportionalium inter duas rectas inuentione; obſeruauit inquam pulcherrimam proprietatem cuborum numerorum, per quam differentiæ cuborum ordine ſine magna difficultate reperiuntur, quæ poſtea ordine ad cubos præcedentes additæ conficiunt cubos inſequentes. Res autem ſic ſe habet. In columna ſiniſtra ſcribatur progreſſio Arithmetica, quæ à 6. incipiat, & per 6. progrediatur. In ſecunda columna reponantur numeri, qui ex numeris primæ columnæ componuntur hac arte. Iuxta 6. ponatur 1. Deinde 7. qui numerus ex 1.& 6. conflatur. Poſt hæc numerus 19. ex 7. & 12. coaceruatus. Atque ita deinceps quilibet bini numeri primæ, ac ſecundæ columnæ ſimul additi confi-

Differentiæ cuborũ quomodo reperiantur.

Conſtructio tabulæ cuborum.

conficient numerum inferiorem in ſecunda columna. In tertia deinde columna collocentur omnes cubi, qui per continuam additionem numerorum ſecundæ columnæ, quæ quidem differentias cuborum continet, colliguntur hac ratione. Primus cubus eſt 1. cui ſi addas ſequentem differentiam 7. facies ſecundum cubum 8. & addendam differentiam ſequentem 19. conflabis tertium cubum 27. & ita deinceps. Semper enim in tabella

Progreſſio ſenarij	Differẽtiæ cuborum	Cubi	Radices
6	1	1	1
12	7	8	2
18	19	27	3
24	37	64	4
30	61	125	5
36	91	216	6
42	127	343	7
48	169	512	8
54	217	729	9
60	271	1000	10
66	331	1331	11
72	397	1728	12
78	469	2197	13
84	547	2744	14
90	631	3375	15
96	721	4096	16

appoſita iuxta quemlibet cubum ponitur differentia, qua à præcedenti cubo differt. In quarta denique columna ſcribantur ordine cuborum radices.

EÆDEM differentiæ cuborum in ſecunda columna deſcriptæ inuenientur quoque hoc modo. Radicis propoſitæ quadratum triplicetur, addaturque radix triplicata, atque inſuper 1. Conflatus enim numerus erit differentia, qua cubus propoſitæ radicis ab inſequenti cubo differt. Vt ſi deſideretur differentia inter cubum 216. radicis 6. & cubum proxime maiorem. Quadratum radicis 6. eſt 36. triplum eius eſt 108. cui ſi addatur triplũ radicis, videlicet 18. & inſuper vnitas, conflabitur differẽtia 127. quæſita. Atq; hoc modo, ſi continuentur differentiæ cuborũ ope progreſſionis ſenarij, extendetur tabula cuborum, quantum libuerit. Sunt autem, vt vides, numeri progreſſionis ſenarij ſextupli radicum cuborum, ſinguli ſingularum. Vt 60. ſextuplus eſt radicis 10.

QVIA vero diximus, cubos gigni ex additione numerorũ imparium, nimirũ primum eſſe 1. ſecundum ex duobus ſequentibus 3. 5. confici, & tertium ex tribus ſequentibus 7. 9. 11. &c. ita vt quilibet ex tot imparibus coaceruetur, quot vnitates in eius radice continentur; ſi curioſus quiſpiam noſſe deſideret, (quod ſcire non iniucundum eſt) quinam ſint illi numeri impares propoſitum cubum componentes, hoc eſt, à quonam impari illi impares incipiant, & in quo deſinant, conſequetur id hoc artificio. Radix propoſiti cubi, ſi impar eſt, multiplicetur per ſemiſſem numeri proxime minoris, & duplo producti addatur 1. Numerus enim conflatus erit primus imparium quæſitorum. Quod ſi radix fuerit par, ducatur eius ſemiſſis in numerum proxime minorem radice, & duplo producti adiiciatur 1. Rurſus enim primus imparium, qui quæruntur, conficietur. Exempli gratia. Propoſitus ſit cubus 125. cuius radix 5. ac proinde ex quinque numeris imparibus coaceruatus. Duco radicem 5. quia eſt impar, in 2. ſemiſſem numeri 4. proxime minoris, efficioque 10. duplico. fiunt 20. & addito 1. fit primus imparium 21. Ergo quinque impares quæſiti ſunt. 21. 23. 25. 27. 29. qui in vnam ſummam collecti conſtituunt cubum 125. Rurſus datus ſit cubus 1728. cuius radix 12. ideoque ex 12. imparibus numeris coagmentatus, Semiſſem radicis, quia par eſt, nimirum 6. duco in 11. numerum proxime minorem radice, numerumque productum 66. duplico, addoque 1. Numerus enim compoſitus 133. erit primus 12. imparium, quos quærimus. Ergo omnes 12. erunt hi. 133. 135 137. 139. 141. 143. 145. 147. 149. 151. 153. 155. conficientes cubum 1728.

Qui numeri impares datum cubum componant.

REGVLA hæc ſic demonſtratur. Quando radix impar per ſemiſſem numeri ꝓxime minoris multiplicatur, vel ſemiſſis radicis paris per numerũ proxime minorem radice, producitur ſumma terminorũ ſeriei naturalis numerorum ab 1. vſque ad numerum proxime minorẽ radice, vt in progreſſione Arithmetica diximus, hoc eſt, numerus terminorum imparium, qui primum imparem quæſitum præcedunt in ſerie numerorũ imparium; cum primus ſit vnus, deinde ſequantur duo, poſtea tres, &c. Igitur ea ſumma indicat, quotũ locũ occupet impar numerus imparẽ quæſitum antecedens: quia vero is locus duplicat⁹, dempta 1. ex duplo, exhibet vltimum illum imparem, ſi ad eundem duplicatum addatur 1. efficietur primus imparium quæſitorum. Verbi gratia, ſi quæratur primus ſeptem imparium, qui conficiunt cubum 343. cuius radix 7. quærimus prius ſummam 6. terminorum ſeriei naturalis, quæ eſt 21. quod fit, ſi ad 6. addo 1. & ſummam 7. id eſt, radicem imparem, ducam in 3. ſemiſſem 6. terminorũ. Igitur impar numerus præcedens primum quæſitum ponitur in 21. loco. Duplico, addoq; 1. fit primus impar quæſitus 43. Sunt ergo ſeptem quæſiti, 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. qui conſtituunt cubum 343.

ALIO

ALIO modo reperietur primus imparium, & vltimus, & quidem faciliori, hac videlicet arte. Ex quadrato radicis auferatur numerus proxime minor radice, idemque numerus ad eundem quadratum addatur. Reliquus enim numerus erit primus imparium quæſitus, & conflatus, poſtremus. Vt data radice 11. ſi ex eius quadrato 121. dematur numerus 10. proxime minor radice, ſupererit numerus 111. primus imparium. Et ſi ad eundem quadratum 121. adiiciatur idem numerus 10. efficietur vltimus imparium 131. ita vt 11. numeri impares ſint hi 111. 113. 115. 117. 119. 121. 123. 125. 127. 129. 131. qui in vnam ſummam collecti efficiunt cubum 1331. radicis 11. Sic etiam data radice 10. ſi ex eius quadrato 100. tollatur numerus 9. remanebit primus imparium 91. Et ſi ad eundem quadratum 100. addatur idem numerus 9. conficietur vltimus imparium 109. eruntque 10 numeri impares hi 91. 93. 95. 97. 99. 101. 103. 105. 107. 109. quorum ſumma 1000. dabit cubum radicis 10.

RATIO huius regulæ eſt hæc: In numero imparium, qui requiruntur, cōtinetur differentia imparium, videlicet binarius, toties, quoties vnitas eſt in numero, qui proxime minor eſt data radice, vt perſpicuum eſt. Et quoniam quando radix eſt impar, numerus impar in medio loco numerorum imparium eſt quadratus radicis, quem præcedit ſemiſſis differentiarum vſque ad primum imparem, hoc eſt, numerus proxime minor radice eademque ſemiſſis illum inſequitur. Quam ob rem, ſi ex illo quadrato dematur numerus proxime minor radice, id eſt, ſemiſſis differentiarum, reliquus fiet primus impar quæſitus. Et ſi idem numerus proxime minor radice ad illum quadratum adiiciatur, conflabitur vltimus numerus impar. Quando vero radix eſt par, cadit eius quadratus inter duos impares, qui medium locum occupant, quem quadratum præcedit ſemiſſis quoque differentiarum vſque ad primum imparem, hoc eſt, numerus proxime minor radice, &c.

HINC etiam facile reperiemus quotumcunque imparium numerorum, vt quartum, vel nonum, &c. Si enim differentiam imparium, nimirum 2. ducemus in numerum proxime minorem impare quæſito, & producto primum imparem adiiciemus, conflabitur quæſitus numerus impar. Vt ſi in exemplo poſteriore decem imparium quæratur ſeptimus impar, ducemus 2. in 6. & productum 12. ad primum 91. adiiciemus, procreabimuſq; ſeptimum imparem 103. & ſic de cæteris.

SED vt certi ſimus, quādo radix eſt magna, num primus imparium recte ſit inuentus, ne cogamur omnes impares continuare, quod laborioſum eſt, inueſtigabimus vltimum ex primo (niſi ex ſecunda regula iam inuentus ſit) deinde ſummam omnium, hoc modo. Differentiam progreſſionis numerorum imparium, nimirum 2. ducemus in numerum terminorum, minus vno, productumque primo inuento addemus: Conflatus enim numerus erit poſtremus imparium quæſitorum. Si igitur ad hunc apponamus primum, & ſummæ ſemiſſem in numerum terminorum, id eſt, in radicem cubi propoſiti ducamus, producetur propoſitus cubus, ſi primus imparium recte inuentus eſt. Vt in proximo cubo 343. cuius radix 7. ſi ad 43. primum imparem inuentū addamus 12. numerum ſcilicet productum ex 2. in radicem 7. minus vno, fit ſeptimus numerus impar quæſitus 55 ad quem ſi apponatur primus 43. fiunt 98. Et ſi huius numeri ſemiſſis 49. ducatur in radicem 7. producetur cubus 343. &c.

ALIA etiam ratione perfacili eoſdem numeros impares datum cubum componentes reperiemus hoc modo. Sit datus cubus 117649. cuius radix 49. ac proinde reperiendi 49. numeri impares, quorum ſumma ſit 117649. Ponamus primum imparem eſſe 1 ℞. id eſt, 1. Radicem (vt in Algebra fieri ſolet.) Et quia differentia numerorum imparium eſt 2. erit ſecundus impar 1 ℞. † 2. hoc eſt, 1 ℞. plus 2. tertius 1 ℞ † 4. Et ne cogamur continuare omnes 49. terminos, ducemus differentiam 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, & ad productum 96. addemus primum, quem poſuimus eſſe 1. ℞. Ita enim fiet vltimus terminus quæſitus 1. ℞. † 96. cui ſi addamus primum, videlicet 1 ℞. fit ſumma 2 ℞. † 96. cuius ſemiſſis 1 ℞. † 48 ducta in 49. numerum terminorum, facit numerū 49. ℞. † 2352. qui æquatur cubo propoſito 117649. Ablatis ergo vtrinque 2355. remanebunt 49. ℞. æquales num. 112297. quo diuiſo per 49. fit Quotiens 2353. pro primo impari quæſito, quod vt probemus, ducemus differētiam imparium, nimirum 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, productumq; 96. primo 2353. addemus, vt conficiamus vltimum terminum 2449. Deinde primum huic adiiciemus, & ſummæ 4802. ſemiſſem 2401. in 49. numerum terminorum ducemus, procreabiturque numerus 117649. qui dato cubo æqualis eſt. Recte ergo primus impar inuentus eſt.

VSVS PRÆCEDENTIS TABVLÆ QVADRATORUM, & cuborum in radicibus extrahendis.

INTER alias vtilitates habet ſuperior tabula quadratorum, & cuborum egregium vſum in radicibus quadratis, & cubicis extrahendis; quippe cum per eam ſtatim expediantur tria prima puncta ad ſiniſtram, ſimulque tres figuræ radicis inueniantur: quod vno, aut altero exemplo planum fiet.

SIT primum extrahenda radix quadrata ex appoſito numero. Primum quæro inter quadratos numerum

1 1 7 6 8 9 0 1 4 5 (3 4 3 0 5.

117689. trium punctorum, quem quia non inuenio, capio proxime minorem quadratum 117649. eiuſque radicem 343. in Quotiente pono. Inuento autem quadrato ſubtracto ex numero 117689. trium punctorum, remanent 40. Ergo ſequens punctum erit 4001. quo (relicta figura 1.) diuiſo per 686. duplum radicis inuentæ, reperitur Quotiens 0. eritque vltimum punctum 400145. quo (relicta etiam figura 5.) diuiſo per 6860. duplum radicis inuentæ, inuenitur Quotiens 5. Eſt ergo tota radix $34305\frac{57120}{68611}$.

SIT deinde ex appoſito numero extrahenda radix cubica. Primum inter cubos quæro numerū 4250954.

4 2 5 0 9 5 4 9 6 1 3 0 7 (1 6 1 9 9

trium primorum punctorum, quem quia non reperio, accipio cubum proxime minorem 4173281. cum ſua radice 161. qui cubus ex tribus punctis ſubtractus relinquit 77673. ita vt ſequens punctum ſit 77673961.

PARO ergo diuiſorem, vt lib.6. ad finem propoſ.19. docuimus, multiplicando radicis inuentæ quadratum ex eadem tabula excerptum, nimirum 25921. per 300. qui erit 7776300. per quem ſi meum punctum diuido, reperio Quotientem 9. & facta operatione remanent 7295302 adeo vt vltimum punctum ſit 7295302307.

DENIQVE paro nouum diuiſorem, multiplicando radicis 1619 inuentæ quadratum 2621161. per 300. qui érit 786348300. per quem ſi vltimum meum punctum diuido, inuenio Quotientem 9. Facta autem operatione, remanent 214232708. abſolutaque eſt extractio.

NEQVE vero negligendum videtur non inutile compendium in extractione cubica, quod eſt eiuſmodi. Quando nouus diuiſor parandus eſt, ne cogamur totius radicis inuentæ quadratum ſupputare, diuidemus radicem inuentam in duas partes, ita vt vna pars ſit vltima figura Quotientis inuenta, nimirum inuenta quarta figura 9. in dato exemplo, partiemur in radicem inuentam 1619. in 1610. & 9. quas partes bis ſcribemus, vt in apposita formula vides. Si igitur ſingulas partes in ſingulas partes ducemus, producetur quadratus quæſitus radicis 1619. vt ad propoſ.1. lib.2. Eucl. demonſtrauimus. Verbi gratia quia præcedens quadratum numeri 161. fuit 25921. appoſitis duabus ciſris, habebimus productum 2592100. ex 1610. in 1610. cui ſi addemus 14490. bis numerum videlicet productum ex 1610. in 9. vel ex 9. in 1610. & inſuper 81. productũ ex 9. in 9. conficiemus 2621161. quadratum radicis inuentæ 1619. Eadem ratione ſi huius numeri 16199. quadratum deſideremus, diuidemus eum in 16190. 9. bis, vt in hac formula vides. Deinde quia iam quadratum habuimus 2621161 numeri 1619. appoſitis duabus cifris, habebimus 262116100. quadratum numeri 16190. cui ſi addemus 145710. bis, productum videlicet ex 16190. in 9. vel ex 9. in 16190. & inſuper 81 productum ex 9. in 9. efficiemus 262497601. quadratum numeri 16199. & ſic de cæteris. Hoc ergo compendium reddet faciliorem cubicæ radicis extractionem, cum ſemper præcedentis radicis inuentæ quadratum habeamus, & appoſitis duabus cifris, quadratum conficiamus eiuſdem radicis, appoſita ei vna cifra, &c.

1610.	9
1610.	9

16190.	9.
16190.	9.

BENE autem vides, ſi tabula ſuperior extenderetur, vt haberentur quadrati, & cubi radicum 4. aut 5. figurarum, multo faciliorem effici extractionem radicum. Sed quia tabula excreſceret hac ratione in immenſum, contenti fuimus tabula, in qua radices habent 3. figuras ad ſummum, cum eam quilibet ex iis, quæ diximus, extendere poſſit, & continuare.

FINIS LIBRI OCTAVI.

INDEX

INDEX
RERVM AC VERBORVM, QVÆ IN HAC GEOMETRIA PRACTICA CONTINENTVR, in ordinem Alphabeticum digeſtus.

A.

ACCLIVEM diſtantiam montis, à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam nō viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 91

Accliuem montis aſcenſum à loco menſoris, vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit prope verum, beneficio quadrantis notum efficere. 60

Aceruus tritici, quo pacto menſuretur. 133

Ædificij cuiuſcumque ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 62

Ædificij cuiuſuis ad perpēdiculū erecti, vel putei profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 92

Æquilateri trianguli area. 100

Agri, campiue, aut vrbis, vel regionis ſitum in plano deſcribere. 99

Agro propoſito figuram ſimilem in charta deſcribere. 112

Alberti Dureri quadratura circuli per numeros falſa eſt. 188

Aliquotæ partes ſimiles plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137

Altera parte longioris area. 103

Altimetra ſcala quid. 64

Altitudinem, ad cuius baſem pateat acceſſus beneficio ſpeculi plani, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere. 97

Altitudinem, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 90

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, per eius diſtantiam ab oculo menſoris, beneficio quadrati conijcere. 76

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data ſit, neq; inuenta, per duas ſtationes in plano factas, auxilio quadrati patefacere. 76

Altitudinē cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 58

Altitudinem cuiuſque rei erectæ, ex eius vmbra, quam Sole lucente proijcit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere. 95

Altitudinem inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere. 98

Altitudinem inacceſſibilem, quando neque diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neque è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis apparet, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere. 57

Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint; ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantem explorare. ibid.

Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſior, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare 89

Altitudinem inacceſſibilem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoque ipſam eruere, etiamſi extremus eius terminus non cernatur. 45

Altitudinem maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari. 89

Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris vertex cernatur, per quadratum efficere notam. ibid.

Altitudinem maiorem ex minori cognita, per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines colligere. 57

Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit, per quadrantem perſcrutari. 58

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni

cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari. 90
Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere. ibid.
Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope quadrantis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoq; inter altitudines duas eruere. 59
Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per quadrantem explorare. Atq; hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines conijcere. ibid.
Altitudinem montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à turris baſe, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare. 48
Altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici: vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam. 99
Altitudinem montis metiri per quadrantem. 45.46
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis vel turris, vſque ad ſignum viſum cognoſcere. 48
Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 51
Altitudinem per vnicam ſtationem metiri per quadrantem, quando diſtantia nota eſt. 46
Altitudo pyramidum, in quas corpora regularia è centris reſoluuntur 135. & ſeqq.
Altitudinem propoſitam ſingulari quodam modo inueſtigare. 77. & 78
Altitudinem propoſitam, eiuſq; diſtantiam ab oculo menſoris, vna cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, venari ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiam ſi ſolum faſtigium rei erectæ cernatur. 79
Altitudinem propoſitam, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſint, per duas ſtationes in aliqua haſta erecta factas, per quadratum indagare. 78
Altitudo quando maior ſit, quam diſtantia, & quando æqualis, & quando minor. 100
Altitudinem Solis, vel ſtellæ cuiuſuis per quadratum obſeruare. 66
Altitudinem turris, aut alterius rei per baculũ indagare. 94
Altitudinem turris vel montis ex eius ſummitate per vnicam ſtationem ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſque ad turrem, vel montis perpendiculum. 82
Altitudinem turris ex eius vertice per vnicam ſtationem per quadrantem metiri, ſi diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſque ad baſem turris nota ſit. 51
Altitudinem turris, aut montis, ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in Horizonte cernitur. 81
Altitudinem turris, vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 82
Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inueſtigare. 94
Altitudinis maioris portionem ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 90
Altitudinis maioris portionem ex minori altitudine, & minoris portionem ex maiori, per quadrantem cognoſcere. 59
Altitudinis minoris portionem ex minore altitudine, & maioris portionem ex minore, per quadratum elicere. ibid.
Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri. 213
Anguli quantitas, quem latera inſtrumenti partium continent, quo pacto cognoſcatur. 9
Angulorum, & linearum quarundam mechanicam menſurationem admittendam eſſe. 111
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reperire. 41
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito, (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari. ibid.
Angulos omnes tres trianguli obliquanguli ex omnibus tribus lateribus perueſtigare. 42
Angulum acutum trianguli rectanguli ex baſe, & vno latere inquirere. 40
Angulum acutum trianguli rectanguli ex vtroq; latere reddere cognitum. ibid.
Angulum rectilineũ datũ in tres æquales angulos diuidere. 218
Angulus incidentiæ cur angulo reflexionis ſit æqualis. 200
Angulus obſeruationis quis. 43
Angulus, quẽ filum cum proximo quadrati latere facit, quãdo offerat altitudinem Solis, vel ſtellæ, & quando complementum altitudinis. 66
Arabum quadratura circuli per numeros falſa eſt. 188
Arcus circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eſt, vt chorda ad chordam, & contra. 198
Arcus datorum grad. ac Min. quo pacto ex circulo quouis ope inſtrumenti partium abſcindantur. 8
Area altera parte longioris. 103
Area campi, intra quem lacus, vel ſilua exiſtat. 113
Area campi, quando in triangula reſolui non poteſt. 112
Area circuli accuratior. 126
Area circuli cui triangulo rectangulo ſit æqualis, ſecundum Archimedem. 118
Area circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemiſſe circumferentiæ circuli. 178
Area circuli tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 125
Area Conoidis Hyperbolici. 144
Area Conoidis parabolici. 144
Area corporis planis ſuperficiebus contenti & circa ſphæram circumſcriptibilis, cui ſolido rectangulo ſit æqualis. 183
Area corporum omnino irregularium, quæ. 145
Area cuiuslibet portionis ſphæræ. 142
Area cuiuſuis figuræ pulchra inuentio. 113
Area cuiuslibet trianguli cui rectangulo ſit æqualis. 174
Area datæ Ellipſis. 129
Area datæ parabolæ. ibid.
Area doliorum. 145
Area figuræ lenticularis. 127
Area figuræ quadrilateræ omnino irregularis. 112
Area figuræ ex variis circulorum ſegmentis coagmentatæ. 127
Area figuræ regularis, cuius latus eſt vnitas, quo pacto inueniatur. 117
Area figuræ regularis, cui rectangulo æqualis ſit. 175
Area figuræ regularis, quo pacto ex area alterius figuræ ſimilis cognita eruatur. 116
Area figuræ regularis, cui triangulo rectãgulo ſit æqualis. 175
Areæ figurarum regularium à triangulo vſque ad Dodecagonum, quando latus eſt vnitas. 117
Area fruſti pyramidis, & coni. 132
Area fruſti ſphæræ. 144
Aream circuli vera maiorem ex diametro inueſtigare. 125

Aream

Aream circuli veræ maiorem, ex circumferentia concludere. 116
Aream circuli vera minorem, ex diametro colligere. 125
Aream circuli vera minorem, ex circumferentia inferre. 126
Areã figuræ Ellipſi ſimilis, quæ circino deſcribitur, inquirere. 219
Area multilateræ figuræ Irregularis quæ. 112
Area parallelogrammorum. 111
Area parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum. 130
Area portionum ſphæroidis. 144
Area pyramidis cui ſolido rectangulo ſit æqualis. 182
Area pyramidum, & conorum. 131
Area quadrati. 103
Area quadrilaterorum non rectangulorum. 111
Area quinq; corporum regularium quæ. 133.135
Area rectangulorum. 103
Area regularium figurarum. 114
Area Rhombi, & Rhomboidis. 111
Area ſectoris circuli. 127
Area ſemicirculi, quadrantis, octauæ partis, &c. 125
Area ſegmentorum circuli. 127
Area ſegmentorum ſphæræ. 141
Area ſphæræ vera minor, ex diametro circuli maximi. ibid.
Area ſphæræ vera maior, ex circũferentia maximi circuli. ibi.
Area ſphæræ vera minor, ex circumferẽtia circuli maximi. ibi.
Area ſphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. ibid.
Area ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & tertia parte ſuperficiei conuexæ. ib. & ſeq.
Area ſphæræ, & ſuperficies eiuſdem conuexa. 137.139
Area, vel ſoliditas ſectoris ſphæræ. 142
Area, vel ſoliditas hemiſphærij. ibid.
Area ſphæroidis. 144
Area trapezij nulla habentis latera parallela. 112
Area trapezij habentis duo latera parallela. 111
Area triangulorum. 103.107
Area trianguli rectanguli. 109
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 110
Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectũ, & latere quod recto angulo opponitur. ibid.
Area trianguli rectanguli, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. ibid.
Area trianguli Iſoſcelis. 109
Area trianguli æquilateri. ibid.
Area trianguli obliquanguli, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. 111
Area trianguli obliquanguli, ex vno latere, ac duob. angulis. 111
Area vaſis excauati. 133
Arundinis, vel baculi beneficio diſtantiam propoſitã metiri. 72
Aſcenſum accliuem montis à loco menſoris vſq; ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrantis efficere cognitum. 61

B.

Baculi beneficio diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignũ aliquod in plano Horizontis metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt. 93
Baculi beneficio turrim, aut alterius rei altitudinẽ metiri. 94
Baculi, aut arundinis beneficio diſtãtiam propoſitã metiri. 72
Baſem trianguli rectanguli ex vno latere, & vno angulo acuto inueſtigare. 39
Baſem trianguli rectanguli ex vtroque latere perſcrutari. 40
Baſis quadratricis, ſemidiameter quadrantis, & quadrans ſunt continue proportionales. 191

C.

Campano aſcripta circuli quadratura per lineas falſa eſt. 188
Campi, agriue, aut vrbis, vel regionis ſitum in plano deſcribere. 99
Campi area, quando in triangula reſolui non poteſt. 112
Campi, intra quem lacus, vel ſilua exiſtat, area. 113
Campo propoſito figuram in charta ſimilem deſcribere. 112
Centeſimæ, vel milleſimæ partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 7
Chorda alicuius arcus data, vna cum perpendiculari ex medio eius puncto ad arcum educta, quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter cõplectitur, inuenire. 206
Circuli pulcherrima proprietas. 209
Circuli quadraturam eſſe poſſibilem. 189
Circuli quadratura per Hyppocratem Chium falſa eſt. 188.189
Circuli quadratura per lineas Campano aſcripta falſa eſt. 188
Circuli quadratura per numeros ſecundũ Arabes falſa eſt. ib.
Circuli quadratura per numeros ex Alberto Durero falſa eſt. ibid.
Circuli quadratura per lineas. ibid.
Circuli area tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 125
Circuli areã accuratior. 126
Circuli aream vera maiorem, ex diametro inueſtigare. 125
Circuli aream vera minorem, ex diametro colligere. ibid.
Circuli aream vera minorem, ex circumferentia inferre. 126
Circuli aream verã maiorẽ, ex circumferentia concludere. ib.
Circuli area cui triangulo rectangulo ſit æqualis, ſecundum Archimedis doctrinam. 118
Circuli area æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemiſſe circumferentiæ circuli. 176
Circuli dimenſio ex Archimede. 118
Circuli diameter quam proportionem habeat ad peripheriam ſecundum Archimedem. 120
Circuli diameter in numeris, ex dato arcu. 128
Circuli diameter ex data peripheria, & peripheria ex data diametro accuratior. 126
Circuli diametrum vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 124
Circuli diametrũ vera minorem ex data peripheria inueſtigare. ibid.
Circuli diameter ducta in $3\frac{1}{7}$ gignit numerum maiorem circircumferentia. 122
Circuli peripheria, ac diameter, ex eius area. 128
Circuli peripheria ex data diametro, & diameter ex data peripheria accuratior. 126
Circuli peripheria quam proportionem habeat ad diametrũ, ſecundum Archimedem. 120
Circuli peripheria diuiſa per $3\frac{1}{7}$ facit numerum minorem diametro. 122
Circuli peripheriã vera maiorẽ, ex data diametro reperire. 123
Circuli peripheriã vera minorẽ, ex data diametro elicere. ibi.
Circuli parti octauæ, decimæ ſextæ, &c. rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 186
Circuli ſectoris area. 127
Circulo figuram rectilineam æqualem, & alteri ſimilem cõſtituere. 194
Circulo dato quadratum æquale conſtituere. 193
Circulo quadratum æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. ibid.
Circulorum peripheriæ inter ſe ſunt, vt diametri. 124.197
Circulorum duorum, vel figurarum ſimilium proportio, ex datis diametris circumferentiisue, vel duobus lateribus homologis. 128
Circulorũ diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ. 124.197
Circulum quadrato æqualem deſcribere. 194
Circulum, vel figuram planam rectilineam, in data proportione augere vel minuere. 164
Circulum cuilibet figuræ rectilineæ æqualẽ deſcribere. 194
Circulum per tria puncta deſcribere, inuentis nimirum alijs punctis, per quæ tranſire debet. 202
Circulum pluribus circulis, quorum diametri, vel circumfe-

rentiæ data ſint, æqualem: Et figuram ſimilem pluribus, figuris ſimilibus quarum latera homologa data ſint, æqualem deſcribere. 128
Circulus ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proxime, ſecundum Archimedem. 123
Circulus ad quadratum circumferentiæ maiorem proportionem habet, quam 7. ad 88. minorem vero, quam 71. ad 892. 125
Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt. 174
Circulus omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximus eſt. 182
Circulus ad quadratum diametri maiorem proportionem habet quam 223. ad 284. minorem vero, quam 11. ad 14. 124
Circumferentiæ circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 126
Compendium pulchrum in longitudinibus metiendis per quadratum ſtabile. 70
Conchoideos lineæ deſcriptio, eiuſq; duæ proprietates inſignes 162
Coni, & cylindri ſuperficies conuexa. 146
Conoicæ ſuperficiei proportio ad ſuam baſem. ibid.
Conoidis Hyperbolici ſoliditas. 145
Cono, cylindro, priſmati, ac pyramidi cubũ æqualẽ efficere. 216
Cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma ſub eadẽ altitudine: Et cõtra cylindro, vel priſmati æqualem conum aut pyramidem ſub eadem altitudine conſtituere. 215
Conoidis parabolici ſoliditas. 144
Conorum, ac pyramidum area. 131
Conſtructio tabulæ Gnomonicæ facillima, eiuſq; vſus. 66
Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis, & ſecundis. ibid.
Conſtructio & vſus tabulæ pro minutis, & ſec. cognoſcendis ex quadrante. 14
Conſtructio quadrantis ad min. & ſec. cognoſcenda. 11
Conſtructio quadrati Geometrici. 64
Conſtructio pinnacidiorum pro radio viſuali. 11
Conſtructio regulæ loco fili cum perpendiculo. ibid.
Conſtructio inſtrumenti partium. 5. 9
Conum, ac pyramidem in cylindrum, & priſma: Item priſma, & cylindrum in conum, ac pyramidem tranſmutare. 215
Conum, cylindrum, priſma, ac pyramidem inæqualem ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum reuocare. ibid.
Conum, cylindrum, priſma ac pyramidem in parallelepipedum æquale datæ altitudinis vel baſis commutare. ibid.
Conum datæ ſphæræ conſtituere æqualem. 217
Conum pyramidi, & cylindrum priſmati æqualem: Ac viciſsim pyramidem cono æqualem, & priſma cylindro æquale conſtituere. 215
Conum, pyramidem, priſma & cylindrum in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.
Corpori regulari ſphæram æqualem exhibere. 217
Corporum quinq; regularium ſuperficies conuexæ. 135
Corporum quinq; regularium area quæ. 133. 135
Corporum omnino irregularium area. 145
Corpus regulare quoduis dato cubo æquale conſtituere. 217
Corpus planis ſuperficiebus contentum, & circa ſphæram circumſcriptibile, cui ſolido rectangulo ſit æquale. 183
Cubicam, & quadratam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Cubicæ radicis extractio. 168
Cubicæ & quadratæ radicis extractio. 168
Cubicæ & quadratæ radicis extractio ex data minutia. 172
Cubo dato corpus regulare quodcunq; æquale conſtituere. 217
Cubo dato parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem, æquale conſtituere. 216
Cuborum differentia quo pacto reperiantur. 227
Cuborum, & quadratorum tabula vſq; ad radicem. 1000. 221
Cuborum generatio. 227
Cubum cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi æqualem conſtruere. 216
Cubum datæ ſphæræ æqualem: Et ſphæram dato cubo æqualem efficere. ibidem.
Cubum datum, aut parallelepipedum in datam proportionem ſecare. 218
Cubum duobus, aut pluribus cubis æqualem conſtruere. 217
Cubum minorem ex maiori detrahere reſiduumque in cubum conuertere. ibidem.
Cubum parallelepipedo rectangulo æqualem conſtruere. 216
Cubum ſolidis quotlibet æqualem conſtituere. 217
Cubus alterutrius mediarum proportionalium inter duas rectas, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato extremæ prope mediam aſſumptã & altera extrema comprehenſo. 165
Cubus diametri ſphæræ ad ſphærã, maiorem proportionem habt, quam 21. ad 11. minorẽ vero, quam 426. ad 223. 139
Cubus circunferentiæ maximi circuli in ſphæra ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 298374. ad 5041. minorem autem, quam 2904. ad 49. 138
Cylindri, & coni ſuperficies conuexa. 146
Cylindrica ſuperficies, demptis baſibus. ibidem.
Cylindrorum, priſmatum, ac parallelepipedorum area. 130
Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine; Et viciſsim cono, vel pyramidi æqualem cylindrũ, aut priſma eiuſdẽ altitudinis conſtituere. 215
Cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi cubum æqualem conſtituere. 216
Cylindrum datæ ſphæræ conſtituere æqualem. ibid.
Cylindrum, ac priſma in pyramidem, & conum: Item conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale tranſmutare. 215
Cylindrum, aut priſma datum in proportionem datam diuidere. 218
Cylindrum, conum, priſma, ac pyramidem in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 216
Cylindrum, priſma, conum, ac pyramidem cuiuſcunq; altitudinis, inæqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunq; angulorum conuertere. 215
Cylindrum priſmati, & conum pyramidi æqualem: Et viciſſim priſma cylindro æquale, & pyramidem cono æqualem conſtruere. ibid.
Cylindrum, priſma, conum, & pyramidem in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.

D.

Decimæ partes milleſimarum, quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7
Decimæ, vel centeſimæ partes quotcunque, quo pacto ex quauis parte recta in partes æquales diuiſa per circinum auferantur. 35
Declinationem cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabij, per inſtrumentum partium inuenire. 9
Diameter circuli, ac peripheria, ex eius area. 128
Diameter circuli in numeris, ex dato arcu. ibid.
Diametri circuli ad circumferentiam proportio accuratior, quæ. 126
Diameter circuli ducta in $3\frac{1}{7}$. facit numerum maiorem circumferentia. 122
Diametrum circuli vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 124
Diametrum circuli vera minorem, ex data circumferentia inueſtigare. 123
Diameter circuli quam proportionem habeat ad peripheriam ſecundum Archimedem. 120
Diameter circuli ex data peripheria, & peripheriam ex data diametro accuratior. 126

Dia-

Diametri circulorum inter ſe ſunt, vt circumferẽtiæ. 124. 197
Differentiæ cuborum quo pacto reperiantur. 227
Differentiæ quadratorum. ibid.
Differentia ſtationum quid. 43
Difficultas in extractionibus radicum quæ ſit, & quo pacto ſuperetur. 169
Dimenſiones quo modo ſine numerorum ſupputatione fiant. 45. 48. 50. 51.
Dimenſio altitudinis quo pacto fiat, ſine reductione vmbræ verſæ ad rectam, quando in vna ſtatione vmbra recta, & verſa in altera ſecatur. 78
Dimenſiones diſtantiarum eodem modo fiunt in quadrato ſtabili, ac pendulo. 73
Dimenſio diſtantiæ quo modo fiat ſine reductione vmbrarum rectarum ad verſas, quando in vtraq; ſtatione latus vmbræ rectæ ſecatur. 74
Dimenſio diſtantiæ quo modo fiat ſine reductione vmbræ rectæ ad verſam, quando in vna ſtatione vmbra recta & in altera verſa ſecatur. 75
Dimenſio circuli ex Archimede. 118 (80
Dioptræ portio intra quadratũ ſtabile quo pacto reperiatur.
Diſtantiam ab oculo vel pede menſoris ad quoduis punctum in HoriZonte notatum, per vnicam ſtationem, per quadrantem metiri. 53
Diſtantiam accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio quadrantis. 61
Diſtantiam accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 91
Diſtantiam à ſummitate turris, vel muri vſq; ad ſignum aliquod in HoriZonte poſitum, licet ad illud acceſſus non pateat, per quadratum eruere, vbicunq; menſor exiſtat. 88
Diſtantiam horiZontalem inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ad perpendiculum ſit ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris (vbicunq; exiſtat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine, vel etiam in HoriZonte notatum per quadratum exquirere, per vnicam etiam ſtationem. 86. 88
Diſtantiam inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum per quadrantem metiri. 53
Diſtantiam in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas per quadrantem tam pendulum, quam ſtabilem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere. 47. 49
Diſtantiam à baſe turris ad ſignum propoſitum in Horizonte, ex ſummitate turris, vel ex aliqua eius feneſtra, per quadratum cognoſcere. 83
Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem metiri. 52
Diſtantiam inter ſignum quodpiam in HoriZonte poſitum, & ſummitatem turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere. 56
Diſtantiam inter te, & ſignum quodcunque in plano HoriZontis poſitum, per quadratum perueſtigare. 71. 72
Diſtantiam in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, per ſimpliciſsimum quoddam inſtrumentum indagare. 96
Diſtantiam in plano per duas ſtationes in eodem plano factas per quadratum metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. 73
Diſtantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, per ſimpliciſsimum quoddam inſtrumentum reperire. 96
Diſtantiam in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 95
Diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſsit, ex altitudinis faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, per quadratũ comprehẽdere. 84
Diſtantiam in plano Horizontis, quæ non ſit valde magna, facillimo quodam modo dimetiri. 95
Diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt. 93
Diſtantiam inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad HoriZontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri. 88
Diſtantiam per vnicam ſtationem metiri per quadrantem, quando altitudo nota eſt. 48
Diſtantiam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt diſtantia, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 54
Doliorum capacitas. 97

E.

Ellipſis centro dato in linea axis, vna cum duobus punctis Ellipſis, vtrumq; axis vtriuſque extremum reperire. 209.
Ellipſis datæ area. 129
Ellipſi ſimilẽ figurã, quã ouatã dicunt, circino deſcribere. 218
Examen extractionis radicum. 168
Extrahere radicem cuiuſuis generis ex dato numero. 166

F.

Facilis inuentio lineæ rectæ cuius circumferentiæ æqualis, ex propria figura. 193
Facilis inuentio quadrati circulo æqualis. ibid.
Figura regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 195. 196
Figuræ numeri, ex quo radix extrahitur, quo modo per puncta ſignentur. 166
Figuræ rectilineæ cuilibet circulum æqualem deſcribere. 194
Figuræ regularis area, cui triangulo rectangulo ſit æqualis. 175
Figuræ regularis area, cui rectangulo æqualis ſit. 174
Figuram Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere. 218
Figuram rectilineam circulo æqualem, & alteri ſimilem conſtituere. 194
Figuram rectilineam in quotuis partes æquales per rectam datæ rectæ parallelam diſtribuere. 157
Figuram ſolidam quamcumq; ex iis, de quibus Euclid. in Stereometria agit augere vel minuere in data proportione. 164
Figuram rectilineam ex dato angulo, vel punctum in latere, in quotuis partes æquales partiri. 154
Figuram planam rectilineam, vel circulum, in data proportione augere, vel minuere. 164
Figuram ſimilem pluribus figuris ſimilibus, quarum latera homologa data ſint æqualem. Et circulum pluribus circulis quorum diametri, circumferentiæue datæ ſint, æqualem deſcribere. 128
Figurarũ duarum ſimilium, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiisue. ibid.
Figurarum Iſoperimetrarum latera numero æqualia habentium, maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. 180
Figurarum regularium Iſoperimetrarum maior eſt illa, quæ

plures continet angulos pluraue latera. 176
Figuris rectilineis regularibus circulus, cui iſoperimetræ ſunt, maior eſt. 182
Filum perpendiculi ſecans vmbram rectam facit angulum complementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 66
Fractionem magnam ad minorem fere æquiualentem reducere. 116
Fractionis inter duas mediæ facilis inuentio. ibid.
Fruſti marmoris regularis ſoliditas. 133
Fruſti pyramidis, & coni area. 132
Fruſti ſphæræ ſoliditas. 144

G.

Genera radicum innumera. 186
Generatio cuborum. 227
Generatio quadratorum. ibid.
Geodæſia, ac Geometria quid. 147
Geometria, & Geodæſia quid. ibid.
Geometrici quadrati conſtructio. 65
Gnomonicæ tabula. 68
Gnomonicæ tabulæ facillima conſtructio, eiuſq; vſus. 66
Gnomon, ſeu latus quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbram rectam, ac verſam. 65
Gradus ac Min. in dato arcu quot contineantur, per inſtrumentum partium cognoſcere. 8
Gradus, ac Min. quotlibet, quo pacto ex circulo quouis, ope inſtrumenti partium, abſcindantur. 8

H.

Hemiſpherij conuexa ſuperficies. 142
Hemiſphærij ſoliditas. 143
Heptagoni latus non recte à Carolo Mariano, Alberto Durero, Franciſco Fluſſate inueniri. 212
Hyperbolici Conoidis ſoliditas. 145
Hypotenuſæ inuentio per quadrantem. 45.47.49.& 51.

I.

Impares numeros quemlibet cubum componentes inuenire. 228
Imperata pars quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentum partium. 8
Inacceſſibilem altitudinem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare. 89
Inecceſſibilem altitudinem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere, poſſimus, aut recedere vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantem explorare. 56
Inacceſſibilem altitudinem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoq; ipſam eruere, etiamſi extremus eius terminus non cernatur. 46
Inacceſſibilem altitudinem, quando neq; diſtantia à loco mẽſoris ad eius baſem nota eſt, neq; è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neq; denique baſis apparet, per quadrantem notam reddere. Atq; hinc obiter ipſam quoq; diſtantiam elicere. 57
Inacceſſibilem altitudinem beneficio ſpeculi plani, vnà cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis cognoſcere. 98
Inacceſſibilem diſtantiam per quadrantem tam pendulum quam ſtabilem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atq; hinc altitudinem quoq; ipſam elicere. 43.45
Incidentiæ angulus cur angulo reflexionis ſit æqualis. 200
Inſtrumenta menſurandi varia 42
Inſtrumenti, quod Italis Squadra Zoppa dicitur, conſtructio, & vſus. 100
Inſtrumentum partium quid, & quo pacto conſtruatur. 5
Inſtrumentum partium quo pacto aliter conſtituatur. 10
Inſtrumentum pro librationibus aptiſſimum. 101
Interuallum, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant & ipſum interuallum productum ad pedes mẽſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Interuallum è directo menſoris poſitum cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, niſi menſor ad dextram, vel ſiniſtram accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Interuallum in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam lignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ad perpendiculum ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Interuallum in Horizonte, inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, per ſimpliciſſimum quoddam inſtrumentum indagare. 96
Interuallum in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 94
Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum, per quadrantem metiri. 53
Interuallum inter duo ſigna, vel puncta in quolicet plano ſiue recto ad Horizontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri. 88
Interuallum, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo interuallum eſt, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 54
Interuallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadratum metiri. 88
Interuallum inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus interualli videri poteſt. 93
Iyteruallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem efficere notum. 53
Ioſephus Scaliger perperam Archimedem de Dimenſione circuli reprehendit. 119
Irregularium omnino corporum area. 145
Iſoperimetræ figuræ quæ, & tractatio de eis inſtituta. 174
Iſoperimetrarum figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos pluraue latera. 176
Iſoperimetrarum figurarum latera numero habentium æqualia, maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. 180
Iſoperimetrorum triangulorum eandem habentium baſem, maius eſt illud, quod duo latera habet æqualia. 177
Iſoſcelis trianguli area. 109
Iſoſcelia duo triãgula ſimilia baſium inæqualium, ſimul maiora ſunt duobus Iſoſcelibus ſimul ſupra eaſdem baſes, quæ quidem inter ſe ſint diſſimilia, prioribus vera Iſoperimetra, habeantque quatuor latera inter ſe æqualia. 179
Iſoſcelibus duobus triangulis datis, quorum baſes inæquales ſint, & duo latera vnius duobus alterius æqualia: ſuper eiſdem baſibus duo triangula Iſoſcelia ſimilia, & prioribus ſimul ſumptis Iſoperimetra conſtituere. 178

Late-

L.

Latera duo trianguli obliquanguli, ex tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, inuenire. 40
Latera tria in quadrilatero maiora ſunt quarto latere. 202
Lateris trianguli obliquanguli ſegmenta à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoſcere. 40
Laterum proportiones ex datis angulis cuiuſuis trianguli patefacere. 39
Latus figuræ regularis, quo pacto ex eius area deprehendatur. 117
Latus figuræ regularis quo pacto ex ſemidiametro circuli circumſcripti cognoſcatur. 115
Latus polygoni propoſiti quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 8
Latus quadratricis æquale eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt baſis quadratricis. 192
Latus trianguli rectanguli ex baſe, & alterutro angulorum acutorum, notum efficere. 39
Latus trianguli rectanguli, ex baſe, & altero cognoſcere. ibid.
Latus trianguli rectanguli ex altero latere & alterutro angulo acuto eruere. ibid.
Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere. 40
Latus trianguli obliquanguli ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, addiſcere. ibid.
Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito, (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere. 42
Lenticularis figuræ area. 127
Librare ſpatium terræ inæquale, pro ducendis aquis: aut etiam, ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere. 101
Linea recta diuiſa in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope inſtrumenti partium cognoſcere. 6
Linea recta in quotuis partes æquales diuiſa, quot decimæ, vel centeſimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur, per circinum deprehendere. 34
Lineæ ſuperficies, ac ſolida, penes quid menſurentur. 103
Lineæ rectæ ſub dimenſionem cadentes quæ ſint. 43
Lineæ duæ, vna recta, & altera inflexa, nunquam concurrentes, licet in infinitum producantur, & ſemper magis vna ad alteram accedat. 163
Lineam quadratricem deſcribere. 189
Lineam rectam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa linea recta producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Lineam rectam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris quarum vna ad perpendiculum ſit ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ſit ignota, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Lineam rectam datam per inſtrumentum partium diuidere, vt alia recta diuiſa eſt. 53
Lineam rectam è directo menſoris poſitam, cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, niſi ad dextram vel ſiniſtram menſor accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Lineam rectam in Horizonte per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, neq; altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularē recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremū appareat. 84
Lineam rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 191
Lineam rectam in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neq; è loco menſoris eam dimetiri: dūmodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 58
Lineam rectam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt linea, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 54
Lineam rectam trauſuerſam in Horizonte, cuius vtrummque extremum videri poteſt, per quadrantem metiri. 89
Lineam rectam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inſpici poteſt, per quadrantem notā efficere. 55
Linearum quarundam, & angulorum mechanicam menſurationem admittendam eſſe. 111
Longitudinem tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 55
Longitudinem trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigij ſupra Horizontem, per quadratum metiri. 100
Longitudinem rectæ è directo menſoris poſitæ, cuius vtrumque extremum vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere. 56
Longitudinem vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quādo proiectæ altitudo eſt cognita, ope quadrati adipiſci. 96
Longitudinem lineæ rectæ, quando menſor in vno eius extremo, vel in altitudine aliqua nota, quæ perpendicularis ſit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem comprehendere. 54
Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris quarum vna ſit ſub alia ad perpendiculum, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Longitudinem in Horizonte extenſam per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat. 84
Longitudinem in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neq; accedere liceat, neq; è loco menſoris eam dimetiri, neq; vlla adſit altitudo: dummodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 85
Longitudinem, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 54
Longitudinem aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto videatur, per inſtrumentum ſimpliciſſimum cognoſcere. 97

M.

Magnitudinum quatuor proprietas quædam. 196
Magnitudinibus in partes proportionales ſectis, ſi in ſingulis vna pars iterum ſecetur proportionaliter, erunt ibidem totæ etiam ſectæ proportionaliter. 148
Marmoris regularis ſoliditas. 13
Mechanica menſuratio in nonnullis lineis, & angulis admittenda eſt. 111
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 163

Medias duas proportionales inter duas datas, ex Diocle, prope verum inquirere. 162
Medias duas proportionales inter datas duas, ex Herone, & Apollonio Pergæo, prope verum, inuenire. 160
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Phylone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 161
Medium numerum proportionalem, vel duos medios inter datos duos numeros comperire. 165
Menſorum ratio communis in area cuiuſuis figuræ, vel agri inueſtiganda. 112
Menſurandi varia inſtrumenta. 42
Menſuræ linearum, ſuperficierum, ac ſolidorum penes quid ſumantur. 103
Milleſimarum decimæ partes quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7
Milleſimæ partes quomodo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Milleſimæ, vel centeſimæ partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 6
Minuta quotlibet quo pacto ex gradu quouis abſcindantur per circinum. 34
Minuta ac ſecunda quo pacto per circinum in quauis particula gradus deprehendantur. 33
Minuta, & ſecunda quo pacto ex quadrante conſtructo reperiantur. 14
Minutia, cuius Numerator ex duarum minutiarum Numeratoribus, & Denominator ex denominatoribus conflatur maior eſt minore & maiore minor. 163
Minutiæ inter duas mediæ facilis inuentio. 116
Minutiam magnam ad minorem fere æquiualentem reducere. ibid.
Montis altitudinem metiri per quadrantem. 47. 48
Montis, vel turris altitudinem ex eius ſummitate per vnicam ſtationem ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in HoriZonte viſi vſq; ad perpendiculum montis, aut turris. 82
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per quadrantẽ metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 52
Montis, aut turris altitudinem ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis HoriZonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in HoriZonte cernitur. 81
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam, factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris, vſq; ad ſignum viſum cognoſcere. 50
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à montis perpendiculo, vel turris baſe ad ſignum illud inueſtigare. 48
Montis vel turris altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Montis, vel turris altitudinem ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in HoriZonte videri poteſt. 82
Multilateræ figuræ irregularis area quæ. 112
Muri cuiuſq; ſoliditas. 133

N.

Normæ beneficio altitudinem turris, aut alterius rei inueſtigare. 94
Normæ beneficio diſtantiam in plano HoriZontis inter menſorem, & ſignum quoduis, percipere. ibid.
Numeri particulares pro ſingulis radicum ſpeciebus, quo modo reperiantur. 167
Numeros impares datum cubũ componentes reperire. 228
Numerum aliquo concipiente, quot ei vnitates remaneant poſt tres operationes imperatas, conijcere. 200

O.

Obliquanguli trianguli area, ex vno latere, ac duobus angulis. 111
Obliquanguli trianguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. ibid.
Obliquangulorum quadrilaterorum area. ibid.
Obliquangulorum triangulorum rectilineorũ problemata. 40
Obſeruationis angulus quis. 44
Ouatam figuram Ellipſi ſimilem circino deſcribere. 218
Octogonum regulare ad datam altitudinem latitudinemue conſtituere. 215
Octogonum regulare circulo inſcriptum medium proportionale eſt inter quadratum circulo circumſcriptũ, & quadratum eidem inſcriptum. ibid.

P.

Parabolici Conoidis ſoliditas. 144
Parabolæ datæ area. 129
Parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, (ſi ſint quatuor lineæ continue proportionales) & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumptæ eſt propinquior. 165
Parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum area. 130. 131
Parallelepipedo rectangulo cubum æqualem exhibere. 216
Parallelepipedum, aut cubum in datam proportionem diuidere. 218
Parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem dato cubo æquale conſtituere. 216
Parallelogrammum datum in quotcunq; partes æquales diuidere per rectas duobus lateribus oppoſitis parallelas. 160
parallelogrammum datum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam biſariã ſecare. ibid.
Parallelogrammum in dato angulo æquale dato quadrilatero conſtituere. 199
Pars imperata quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentum partium. 8
Partes aliquotæ ſimiles plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137
Partes decimæ milleſimarum quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 7.
Partes centeſimæ, vel milleſimæ in quauis recta linea, quo pacto ope inſtrumenti partium capiantur. 6
Partes quotcunque decimæ, vel centeſimæ, &c. quo pacto ex quauis parte rectæ in partes æquales diuiſæ per circinum auferantur. 35
Partes milleſimæ, quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Particula quælibet vnius partis centeſimæ inſtrumenti partium, quot partes decimas vnius centeſimæ, vel quot milleſimas totius lateris inſtrumenti complectatur, quo pacto cognoſcatur. 7

Par-

Partium inſtrumentum quid, & quo pacto conſtruatur. 3
Partium inſtrumentum, quo pacto aliter conſtruatur. 10
Pendulus quadrans quid. 14
Pentagonum regulare non recte conſtrui ab Alberto Durero, & aliis. 210
Peripheria circuli ex data diametro; & diameter ex data peripheria, accuratior. 128
Peripheria circuli, ac diameter, ex eius area. ibid.
Peripheria circuli quam proportionem habeat ad diametrum ſecundum Archimedem. 120
Peripheria circuli diuiſa per $3\frac{1}{7}$. *gignit numerum maiorem diametro,* 122
Peripheria circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 126.
Peripheria circulorum inter ſe ſunt, vt diametri. 124.176
Peripheriam circuli vera maiorem, ex data diametro reperire. 123
Peripheriam datæ rectæ æqualem reperire. 194
Peripheriam circuli vera minorē, ex data diametro elicere. ib.
Perpendicularem in latus quodcunq; trianguli ex angulo oppoſito cadentem, ex omnibus tribus lateribus efficere notam. 42
Perpendicularis quæ ſegmenta faciat in latere trianguli obliquanguli. 40
Perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiſſa, in quodnam punctum ſemidiametri cadat, per inſtrumentum partium cognoſcere. 9
Perpendicularis in triangulo quãdo eſt numerus ſurdus, quid agendum. 109
Perpendicularis in triangulo æquilatero quo pacto cognoſcatur. 114
Perpendicularis è centro figuræ regularis, quo pacto cognoſcatur. ibid.
Perpendiculi filum ſecans vmbram rectam facit angulũ complementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 64
Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruenda ſint. 13
Pinnacidia quo pacto in quadrante ſint affigenda. ibid.
Polygoni propoſiti latus quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 8
Portionem altitudinis maioris ex minori altitudine, & minoris portionem, ex maiori, per quadrantem cognoſcere. 59
Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 90
Portionis ſphæræ ſuperficies conuexa. 142
Portionis ſphæræ ſoliditas. 243
Portionum ſphæroidis ſoliditas. 144
Primi inter ſe numeri ſi ambo non ſint quadrati, aut cubi; neque vlli eorum æque multiplices quadrati erunt aut cubi. Et ſi duorum numerorũ æque multiplices ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi quadrati erunt, aut cubi. 201
Priſma, ac cylindrum in conum, & pyramidem: Item, conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale transmutare. 215
Priſma, conum, cylindrum, ac pyramidem inæqualem ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum conuertere. ibid.
Priſma, cylindrum, conum, ac pyramidem in parallelepipedũ ſupra baſem quadratam conuertere. ibid.
Priſmati, cono, cylindro, ac pyramidi cubum æqualem conſtruere. 216
Priſmati cuicunq; cylindrum æqualem, & pyramidi conum æqualem: Ac viciſſim cylindro priſma æquale, & cono æqualem pyramidem conſtruere. 215
Priſmati dato ſphæram æqualem conſtruere. 217
Priſma, pyramidem, cylindrum, & conum in parallelepipedũ rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 217
Priſma, vel cylindrum datum in datam proportionem diuidere. 218
Priſmati, aut cylindro æqualem pyramidem vel conum ſub eadem altitudine: Et cõtra pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum conſtituere eiuſdem altitudinis. 214
Priſmatum parallelepipedorum, & cylindrorum area. 130.131
Probatio extractionis radicum. 167
Problemata 3.4.5.6.& 7. libri 3. quo pacto per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis abſoluantur. 79
Problemata triangulorum rectilineorum rectangulorum. 39
Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 149
Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſcunq; ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 60
Profunditatem vallis, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiuſq; terminus, vel aliquod in valle ſignum conſpici poſſit, per quadrantem ſcrutari. 61
Profunditatem vallis, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignũ conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere. 97
Propinquam radicem veræ, in numeris non quadratis non cubis, non ZenſiZenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 170
Proportionalem numerum medium, vel duos medios, inter datos duos numeros reperire. 165
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Diocle; prope verum inueſtigare. 161
Proportionales duas medias inrer duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 163
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Philone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 161
Proportionales duas medias inter datas duas rectas, prope verum, ex Herone, & Apollonio Pergæo inuenire. 160.161
Proportionales laterum ex datis angulis cuiuſuis trianguli patefacere. 25
Proportionalis tertia, & quarta quo pacto per inſtrumẽtum partium reperiatur. 9
Proprietas pulchra quadrati. 213
Proprietas circuli pulcherrima. 209
Proprietas quædam quatuor magnitudinum. 196
Proprietas pulchra Quadratricis. 191
Punctum, in quo duæ rectæ ad inuicem inclinatæ concurrant, inuenire. 46
Punctum declinationis cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabij per inſtrumentum partium inuenire. 9
Putei, vel ædificij cuiuſcunq; ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 60
Putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus in fundo, vel ſignũ aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 92
Pyramidem, conum, cylindrum, ac priſma inæquale ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorum reuocare. 215
Pyramidem, priſma, conum, & cylindrum in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 216
Pyramidem datæ ſphæræ æqualem extruere. 217
Pyramidem, priſma, cylindrum, & conum in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. 215
Pyramidi, cono, cylindro, ac priſmati cubum æqualem efficere. 216.
Pyramidi conum æqualem, & priſmati cylindrum æqualem, Et contra cono pyramidem æqualem, & cylindro priſma æquale conſtruere. 215

Pyra-

Pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum eiuſdem altitudinis: Et viciſſim cylindro, vel priſmati æqualem conum vel pyramidem ſub eadem altitudine conſtituere. ibid.
Pyramidum, & conorum area. 131
Pyramis cui ſolido rectangulo æqualis ſit. 182

Q.

QVadrans pendulus quid. 14
Quadrans ſtabilis quid. ibid.
Quadrans, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continue ſunt proportionales. 191
Quadrantis lib. 1. cap. 2. constructi vſus in minutis, & ſecundis exquirendis, 14
Quadranti circuli rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 186
Quadrantis conſtructio ad Min. & Sec. cognoſcendã. 10
Quadrati area. 100
Quadratæ radicis extractio. 168
Quadratæ, & cubicæ radicis extractio ex data minutia. 172
Quadratam & cubicam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Quadrati Geometrici conſtructio. 64
Quadrati pulchra proprietas. 213
Quadratorum differentiæ. 227
Quadratorum, & cuborum tabula vſq; ad radicem 1000. 221
Quadratorum generatio. 227
Quadratum, altera parte longius, Rhombum, ac Rhomboides, ex exceſſu diametri ſupra latus, &c. deſcribere. 203
Quadratum numerũ in quotlibet quadratos diſtribuere. 201
Quadrilateri tria latera maiora ſunt quarto latere. 202
Quadrato circulum æqualem deſcribere. 194
Quadratricis latus æquale eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt baſis quadratricis. 192
Quadratricis baſis, ſemidiameter quadrantis, & quadrans ſunt continue proportionales. 191
Quadratricis pulchra proprietas. ibid.
Quadratricem lineam deſcribere. 195
Quadratum pendulum, ac ſtabile, quo modo vſurpetur. 63
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ita eſt ad ſuperficiem ſphæræ, vt circumferentia circuli maximi ad diametrum. 137
Quadratum circulo æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. 193
Quadratum dato circulo æquale conſtituere. 193
Quadratum diametri circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiẽ ſphæræ, maiorem proportionem habet quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 138
Quadratũ datæ figuræ æquale, quo pacto facile cõſtruatur. 113
Quadratum diametri circuli ad circulum proportionem habet, quam 14. ad 11. proxime ſecundum Archimedem. 124
Quadratum diametri circuli ad circulum habet maiorẽ proportionem quam 14. ad 11. minorem vero, quam 284. ad 223. 125
Quadratum circumferentiæ circuli ad circulum habet maiorem proportionem, quam 892. ad 71. minorem vero, quam 88. ad 7. ibid.
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem conuexam ſphæræ, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 138
Quadratum maximi lateris trianguli minus eſt, quam duplũ ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum. 207
Quadratura circuli per numeros ſecundũ Arabes falſa eſt. 187
Quadratura circuli per lineas Campano aſcripta falſa eſt. ibi.
Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa eſt. ibid.
Quadratura circuli per lineas. 186
Quadratura circuli per Hyppocratẽ Chium falſa eſt. 188. 189
Quadraturam circuli eſſe poſſibilem. 189
Quadrilateri omnino irregularis area. 112
Quadrilatero æquale parallelogrammum facile conſtruere in dato angulo. 199
Quadrilaterorum non rectangulorum area. 111
Quantitas anguli, quem latera inſtrumenti partium continent, quo pacto cognoſcatur. 9
Quarta & tertia proportionalis, quo pacto per inſtrumenmentum partium reperiatur. ibid.

R.

RAdicis cubicæ extrahendæ regula propria. 170
Radicis cubicæ extractio. 168
Radicis quadratæ, & cubicæ extractiu ex data minutia. 172
Radicis quadratæ extractio. 167
Radicis ſurdeſolidæ extractio. 169
Radicem cuiuslibet generis extrahere ex dato numero. 166
Radicem cuiuſq; generis ex data minutia extrahere. 171
Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometrice inuenire. 173
Radicem veræ propinquam in numeris non quadratis, non cubis, non Zenſizenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 170
Radicum infinitæ ſpecies. 166
Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur. 110
Radix quælibet extrahenda quot figuras habere poſſit. 167
Recta linea in quotuis partes æquales, diuiſa, quot decimæ, vel centeſimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur, per circinum deprehendere. 34
Recta ducta ex angulo acuto trianguli rectanguli in oppoſitũ latus, maior eſt proportio huius lateris ad eius ſegmentum prope rectum angulum, quam illius anguli acuti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitam. 176
Recta linea diuiſa in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope inſtrumenti partium, cognoſcere. 6
Recta data, quamuis minima, partem, vel partes imperatas ex ea auferre. 208
Recta connectens duos angulos oppoſitos in duobus triangulis æqualibus latus commune habentibus, & in diuerſas partes vergentibus, à communi latere bifariam diuiditur. 157
Recta cuius circumferentiæ æqualis, quo pacto facile reperiatur ex propria figura. 193
Rectæ duæ tangentes circulum, & in vno puncto coeuntes, maiores ſunt omnib. chordis interceptum arcum diuidentibus in quotcunq; partes æquales. 196
Rectæ lineæ adiungere rectam, ita vt quadratum totius compoſitæ æquale ſit quadrato rectæ adiunctæ, vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conſtatur. 191
Rectæ tres circulum tangentes, & in duobus punctis coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis arcus duos interceptos in partes æquales ſecantibus. 196
Rectæ lineæ circumferentiam æqualem reperire. 194
Rectæ quamuis minimæ exhibere multiplicem quamcumque, etiamſi circino ipſa non accipiatur. 207
Rectæ lineæ ſub dimenſionem cadentes quæ ſint. 43
Rectam lineam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 55
Rectam lineam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadratum metiri. 88
Rectam lineam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa recta linea producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 43
Rectam lineam in Horizonte per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre

videre non poteſt, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpẽdicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterũ extremũ appareat. 84
Rectam lineam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt recta, perpendiculari exiſtens alterum extremũ videre poteſt, per quadrantem metiri. 43
Rectam lineam è directo menſoris poſitam, cuius vtrumque extremum, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram menſor accedat, per quadrantem comprehendere. 56
Rectam lineam in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumque extremũ appareat. 85
Rectam lineam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ad perpendiculum ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ſit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 55
Rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 191
Rectam lineam datam per inſtrumentum partium diuidere, vt alia recta diuiſa eſt. 8
Rectanguli trianguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 110
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. ibid.
Rectangulorum duorum triangulorum ſimilium proprietas quædam. 178
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & latere, quod recto angulo opponitur. 110
Rectanguli trianguli area. 109
Rectangulo dato ſupra datam rectam æquale rectangulũ facile conſtruere. 107
Rectangulum, cuius duo exceſſus dantur, quibus diameter vtrumque latus ſuperat, conſtituere. 205
Rectangulum dato rectilineo æquale facile conſtruere. 200
Rectangulum, in quo exceſſus diametri ſupra maius latus, & maioris lateris ſupra minus datur, conſtituere. 206
Rectangulum ſub differentia exceſſuum, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus ſuperat, & minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat. 204
Rectangulum ſub ſegmentis diametri alicuius rectanguli (ductis per idem punctum diametri parallelis) comprehẽſum, æquale eſt duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum inæqualium comprehenſis. 208
Rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ æquale. 137
Rectangulorum area. 103
Rectangulorum triangulorum rectilineorum problemata. 39
Rectarum duarum proportionem habentium, quã latus quadratricis ad baſem, maior æqualis eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt minor recta. 193
Rectilineam figuram planam, vel circulum in data proportione augere, vel minuere. 164
Rectilineum angulum in tres æquales angulos diuidere. 171
Rectis tribus datis in vno plano non parallelis, rectam ducere, etiam per datum interdum punctum in media, ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint æquales, vel datam habeant proportionem. 169
Rectilineis duobus inæqualib. datis, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale 150
Rectilineo cuilibet æquale rectangulum facile conſtruere. 199
Rectilineo dato æquale quadrilaterum inter duas rectas ſuper datam rectam per lineam parallelam conſtituere. 148
Rectilineo in triangula reſoluto ex vno aliquo puncto, rectas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire. 151
Rectilineo dato parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. 241
Rectilineum datum per rectam à quouis angulo, vel puncto lateris, in datam proportionem ſecare. 152
Rectilineum datum ex angulo, vel puncto dato in latere, in quotuis partes æquales diſtribuere. 154
Rectilineum datum in quotuis partes æquales per rectam datæ rectæ parallelam diſtribuere. 157
Rectilineum datum per rectam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere. 154
Rectilineorum triangulorum obliquangulorũ problemata. 40
Rectilineorum triangulorum rectangulorum problemata. 39
Regionis, aut vrbis, vel campi ſitum in plano deſcribere. 99
Rectis duabus datis, quarum maior diametrum quadrati minoris non ſuperet: maiorem ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia. 206
Reflexionis angulus cur angulo incidentiæ ſit æqualis. 200
Regula communis menſorum in area cuiuſuis figuræ, vel agri inueſtiganda. 113
Regula propria extractionis radicis cubicæ. 170
Regula vnica ad omnes rectas dimetiendas, quando rerum extrema videntur. 101
Regulæ conſtructio loco fili cum perpendiculo. 13
Regulare corpus quodlibet dato cubo æquale conſtituere. 217
Regulari corpori ſphæram æqualem exhibere. ibid.
Regularis figuræ area, cui rectangulo æqualis ſit. 175
Regularis figuræ area, cui triangulo rectangulo ſit æqualis. ib.
Regularis figura circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 195. 196.
Regularibus figuris rectilineis circulus, cui iſoperimetræ ſunt, maior eſt. 223
Regularium figurarum Iſoperimetrarum maior eſt illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera. 176
Regularium figurarum areæ à triangulo vſque ad Dodecagonum, quando latus eſt vnitas. 117
Regularium figurarum area. 114
Regularium quinque corporum ſuperficies conuexa. 135
Regularium quinque corporum area quæ. 133. 135
Rhomboidis, ac Rhombi area. 156
Rhombi ac Rhomboidis area. ibid.
Rhombum, ac Rhomboides, ex exceſſu diametri ſupra latus, &c. deſcribere. 203

S.

Saccus tritici, quo pacto menſuretur. 133
Saxi regularis ſoliditas. ibid.
Scala altimetra quid. 54
Secãtes ac ſinus quo pacto in inſtrumento partium capiãtur. 7
Sectoris circuli area. 127
Sectoris ſphæræ ſoliditas. 143
Segmenta lateris trianguli obliquanguli à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoſcere. 40
Semicirculo, quadranti, octauæ parti circuli, &c, rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 241
Semidiametri circuli inuentio ex latere figuræ regularis inſcriptæ. 115
Similem figuram pluribus figuris ſimilibus, quarum latera homologa data ſint, æqualem: Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferentiæue datæ ſint, æqualẽ deſcribere. 128
Similium duorum triangulorum rectangulorum proprietas quædam. 178
Similium duarum figurarum, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiisue. 128

Simi-

Similes partes aliquotæ plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 137
Sinus totus quando tam paruus eſt, vt in inſtrumentum partium transferri nequeat, quid agendum. 9
Sinu toto poſito 10000. quo pacto in inſtrumento partiũ Tangentes ſumantur. 7
Sinu toto poſito 100. quo pacto Tangentes per inſtrumentum partium capiantur. 6
Sinus ac ſecantes quo pacto in inſtrumento partium capiantur. 7
Solidam figuram quamcunq; ex iis, de quibus Euclid. in Stereometria agit ſecundum proportionem datam augere, vel minuere. 164
Solida, vel corpora præcipua, quorum areæ iuueſtigantur, quæ 130
Solida, ſuperficies, ac lineæ, penes quid menſurentur. 103
Soliditas cuiuſuis portionis ſphæræ. 143
Soliditas ſphæræ. 139
Soliditas ſphæræ vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 142
Soliditas ſphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. ibi.
Soliditas ſphæræ vera minor, ex diametro maximi circuli. ibi.
Soliditas ſphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi. ibid.
Soliditas ſphæroidis. 144
Soliditas, vel area hemiſphærij. 143
Soliditas portionum ſphæroidis. 144
Soliditas ſectoris ſphæræ. 143
Soliditas muri cuiuſque. 133
Soliditas fruſti regularis marmoris. ibid.
Soliditas fruſti ſphæræ. 147
Soliditas Conoidis Hyperbolici. 145
Soliditas Conoidis parabolici. 144
Soliditas vaſis excauati. 132
Solidum planis ſuperficiebus contentum, & circa ſphæram circumſcriptibile, cui ſolido rectangulo ſit æquale. 183
Solidorum quinque regularium area quæ. 178.179
Solidorum quinq; regularium ſuperficies conuexa. 179
Solidorum omnino irregularium area. 145
Solidum minus ex maiori detrahere, reſiduumque in cubum transformare. 217
Solidum rectangulum ſupra baſem quotcunque angulorum datæ ſphæræ æqualem conſtruere. ibid.
Solis, vel ſtellæ cuiuſuis altitudinem per quadratum obſeruare. 66
Spatium terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiã, ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere. 101
Spatium inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum, per quadrantem metiri. 53
Species radicum infinita. 166
Speculi plani beneficio altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici: Vel portionem ſuperiorem alicuius turris, metiri. 99
Speculi plani beneficio altitudinem, ad cuius baſem pateat acceſſus, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis, deprehendere. 97
Speculi plani beneficio altitudinem inacceſſibilem, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere. 98
Sphæra ad cubum circumferentiæ maximi circuli, maiorem proportionem habet, quam 49. ad 2904. minorem vero, quam 5041. ad 298374. 138
Sphæra quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt 141
Sphæra æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & tertia parte ſuperficiei conuexæ. 183
Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro 184
Sphæra omnibus corporib. ſibi iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, circaq; alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, maior eſt. ibid.
Sphæra omnibus corporibus ſibi iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficieb. conicis contineantur, maior eſt. 185
Sphæræ area, vel ſoliditas, ex diametro maximi circuli. 143
Sphæræ datæ conum efficere æqualem. 217
Sphæræ datæ cylindrum æqualem exhibere. ibid.
Sphæræ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram efficere 216
Sphæræ datæ pyramidem conſtituere æqualem. 217
Sphæræ datæ ſolidum rectangulum æquale ſupra baſem quotcunq; angulorum conſtituere. ibid.
Sphæræ ſuperficies vera minor, ex circũferentia maximi circuli. 142
Sphæræ ſupficies vera minor, ex diametro circuli maximi. ibi.
Sphæræ ſuperficies vera maior, ex diametro circuli maximi. i.
Sphæræ area, ſeu ſoliditas vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 143
Sphæræ area, ſeu ſoliditas maior, quam vera, ex circumferentia maximi circuli. ibid.
Spæræ area. ſiue ſoliditas, ex diametro maximi circuli. ibid.
Sphæræ ſoliditas. 139
Sphæra ad cubum diametri ſphæræ: maiorem proportionem habet, quam 223. ad 426. minorem vero, quam 11. ad 21. ibi.
Sphæræ ſuperficies conuexa cui rectangulo ſit æqualis. 137
Sphæræ ſuperficies conuexa ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 138
Sphæræ ſegmentorum area. 142
Sphæræ ſuperficies ad quadratum circumferentiæ circuli maximi eſt, vt diameter ad circũferentiã circuli maximi. 137
Sphæræ ſuperficies vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 141
Sphæræ portionis ſuperficies conuexa. 144
Sphæræ portionis ſoliditas. 143
Sphæræ area, eiuſdemq; ſuperficies conuexa. 137.139
Sphæræ ſuperficies ad quadratum diametri ſphæræ, vel circuli maximi maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 138
Sphærã duabus, aut pluribus ſphæris æqualem deſcribere. 218
Sphærã dato corpori regulari æqualem conſtituere. 217
Sphæram dato priſmati æqualem conſtruere. ibid.
Sphæram minorem ex maiori detrahere, reſiduoq; æqualem ſphæram exhibere. 218
Sphæroidis portionum ſoliditas. 144
Sphæroidis area, vel ſoliditas. ibid.
Sphæram, vel figuram ſolidam in data proportione augere, vel minuere. 164
Squadra Zoppa apud Italos quid, eiuſque vſus. 101
Stabilis quadrans quid. 14
Stationum differentia quid. 44
Stellæ cuiuſuis, vel Solis altitudinẽ p quadratũ obſeruare. 66
Superficies conuexa quinq; corporum regularium. 135.
Superficiei conicæ proportio ad ſuam baſem: 146
Superficies conuexa ſphæræ, eiuſdemq; area. 137. 140
Superficies conuexa hemiſphærij. 142
Superficies conuexa ſphæræ ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22, minorem vero quam 71. ad 223. 138
Superficies, lineæ, ac ſolida, penes quid menſurentur. 103
Superficies conuexa ſphæræ cui rectangulo ſit æqualis. 137
Superficies ſphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi 141
Superficies ſphæræ vera maior, ex diametro maximi circuli. ibid.
Superficies ſphæræ vera minor, ex circumferentia circuli maximi. ibid.

Super-

Superficies ſphæræ veræ maior, ex diametro maximi circuli. i.
Superficies ſphæræ veræ minor, ex circumferentia circuli maximi. ibid.
Superficies ſphæræ veræ maior, ex diametro maximi circuli. i.
Superficies ſphæræ ad quadratum circumferētiæ circuli maximi eſt, vt diameter ad circūferentiā circuli maximi. 137
Superficies conuexa portionis ſphæræ. 142
Superficies ſphæræ ad quadratum diametri circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero quam 22. ad 7. 138
Superficies conuexa coni, & cylindri recti. 146.
Superficies cylindrica, demptis baſibus. ibid.
Superficies fruſti coni, demptis baſibus. ibid.
Surdeſolidæ radicis extractio. 168

T.

Tabula continens latera figurarum regularium à triangulo vſque ad figuram 80. laterum, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000. 115
Tabula mirifica ad depromendos numeros pro ſingulis radicum ſpeciebus. 166
Tabulæ conſtructio & vſus pro minutis, & ſec. ex quadrante cognoſcendis. 16
Tabula gnomonica. 68
Tabulæ gnomonicæ facillima conſtructio, eiuſque vſus. 66
Tabulæ pro minutis ad plures quadrantes extenſio ſine regula aurea. 16
Tabula pro minutis, & ſecundis ex quadrante inueſtigādis. 17
Tabula quadratorum, & cuborum vſq; ad radicem 1000. 220
Tabella pro min. & ſec. cognoſcendis ex quadrāte cōſtructo. 15
Tangens quando ſuperat ſinum totum, quid agendum, vt per vnicam translationem per inſtrumentum partium punctum quæſitum reperiatur. 9
Tangentes, poſito ſinu toto 10000. quo pacto in inſtrumento partium ſumantur. 7
Tangentes quo modo inueniantur ope inſtrumenti partium, poſito ſinu toto 1000. 7
Tangentes tres in duob. punctis coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis duos arcus interceptos in partes æquales ſecantibus. 196
Tangentes duæ in vno puncto coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis arcum interceptum in quotcunq; partes æquales diuidentibus. 195
Tangentes quo modo accipiantur reſpectu ſinus totius 100. ope inſtrumenti partium. 6
Tangentes quo pacto ſumantur, quando inſtrumentum partium continet 1000. partes. 6
Tangente aliqua inuenta in latere inſtrumenti partium, quo pacto eadem reperiatur reſpectu dati ſinus totius. 7
Tangentes perexiguæ quo pacto in inſtrumento partium ſumantur. 7
Terræ ambitum ex edito aliquo monte metiri. 214
Tertia & quarta proportionalis, quo pacto per inſtrumentum partium reperiatur. 9
Trabis longitudinem ad HoriZontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigij ſupra HoriZontem, per quadratum metiri. 101
TrapeZij habentis duo latera parallela, area. 111
TrapeZii irregularis facilis dimenſio. 114
TrapeZii nulla latera habentis parallela, area. 157
Triangula duo Iſoſcelia ſimilia baſium inæqualiū, ſimul maiora ſunt duobus Iſoſcelibus ſimul ſuper eaſdem baſes, quæ quidem inter ſe ſint diſsimilia, prioribus vero Iſoperimetra habeantq; quatuor latera inter ſe æqualia. 179
Trianguli Iſoſcelis area. 109
Trianguli obliquāguli area, ex vno latere, ac duob. angulis. 111
Arianguli obliquanguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. ibid.
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectū & latere, quod recto angulo opponitur. 110
Trianguli pulchra proprietas, ſi in eo ducatur vni lateri parallela, &c. 158
Triangulis duobus Iſoſcelibus datis, quorum baſes ſint inæquales, & duo latera vnius duobus alterius æqualia: ſuper eiſdem baſibus duo triangula Iſoſcela ſimilia, & prioribus ſimul ſumptis Iſoperimetra conſtituere. 178
Trianguli æquilateri area. 109
Trianguli cuiuslibet area cui rectangulo ſit æqualis. 174
Trianguli rectanguli area. 109
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 111
Trianguli rectanguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 110
Arianguli inſignis proprietas, ſi in eo à duobus angulis ad media puncta oppoſitorum laterum rectæ ducantur, &c. 158
Triangulo duorum laterum inæqualium ſupra tertium latus triangulum conſtituere priori Iſoperimetrum duorum æqualium laterum. 177
Triangulo parallelogrammum æquale, & Iſoperimetrum cōſtituere. 186
Triangulorum rectilineorum rectangulorum problemata. 39
Triangulorum duorum rectangulorum ſimilium proprietas quædam. 178
Triangulorum Iſoperimetrorum eandem habentium baſem, maius erit illud, quod duo latera habet æqualia. 177
Triangulorum rectilineorum obliquangulorū problemata. 40
Triangulum datū ex dato puncto in latere in quotlibet partes æquales diuidere. 159
Triangulum datum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet partes æquales diſtribuere. ibid.
Triangulum datum per rectam ex puncto extra triangulum dato in duas partes æquales partiri. 160
Triangulum totum ad triangulum abſciſſum per rectam, eſt, vt rectangulum ſub duobus laterib. ſectis ad rectangulum ſub duobus lateribus trianguli abſciſſi comprehenſum. 292
Tritici aceruus, quo pacto menſuretur. 133
Tritici ſaccus, quo pacto menſuretur. ibid.
Turris, aut montis altitudinem, ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis HoriZonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in HoriZonte cernitur. 81
Turris, aut alterius rei altitudinem per baculū indagare. 94
Turris, aut alterius rei altitudinem, per Normam inueſtigare. ibid.
Turris, vel montis altitudinem ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 82
Turris altitudinem ex eius vertice per vnicam ſtationem per quadrantem metiri, ſi diſtantia ſigni in HoriZonte viſi vſque ad baſem turris nota ſit. 51
Turris, vel montis altitudinem, ex eius ſummitate per vnicā ſtationem, ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni viſi in HoriZonte vſq; ad turrem, vel montis perpendiculum. 82
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris poſitum notum ſit. 52
Turris, vel montis altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna, vel etiam inter ſignum quodpiam, ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 85
Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte appareat, per quadrantem dimeriri.

Atque hinc ipſam [illegible]*am à turris baſe, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare.* 48

Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam, factas, è quibus ſignum aliquod in HoriZonte videri poßit, per quadrantem metiri. Atq; hinc diſtantiam quoque à perpendiculo turris, vel montis, vſque ad ſignum viſum cognoſcere. 50

Turrium duarum ſummitatibus viſis, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vna cum ipſarum altitudinibus, ac diſtantiis à menſore, per quadratum conijcere. 101

V.

VAllis profunditatem, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiusq; terminus, vel aliquod in valle ſignum conſpici poßit, per quadrantem ſcrutari. 63

Vallis profunditatem, eiuſdemq; deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poßit, per quadratum cognoſcere. 92

Varia inſtrumenta menſurandi. 42

Vaſis excauati ſoliditas. 133

Vaſis excauati capacitas. ibid.

Vmbra recta, ac verſa quo pacto in quadrato Geometrico cognoſcenda ſit. 65

Vmbræ longitudinem ab altitudine, Sole lucente, proiectæ, quando altitudo eſt cognita, ope quadrati adipiſci. 96

Vmbra recta ac verſa in quadrato quæ & in quot partes à Geometris vtraque ſecetur. 66

Vmbra recta ac verſa in quot partes in hoc opere diuidatur. ibid.

Vmbræ rectæ ad verſam reductio, & contra. 95

Vrbis, vel campi, aut regionis ſitum in plano deſcribere. 100

Vſus & constructio tabulæ pro minutis & ſec. cognoſcendis ex quadrante. 15

Vſus quadrantis constructi in minutis, & ſecundis exquirendis. 13

Vſus tabulæ quadratorum, & cuborum in extrahendis radicibus quadratis & cubicis. 14

FINIS.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV,

EPITOME ARITHMETICÆ PRACTICAE.

BENEVOLO LECTORI.

CVM omnis me Mathematicarum rerum cognitio delectat, tum verò ex Arithmeticæ tractatione incredibilem capio voluptatem; idq; non ſolum ob eximiam quandam eius dignitatem, ſed etiam, quòd ſine Arithmetica, vt ego quidem exiſtimo, nulla ſcientia, vt Plato audet dicere, neque ipſa hominum ſocietas poßit conſiſtere. *In Epinomide.* Plurima enim in mutuis commerciis, conuentisq;, quibus ferè hæc hominum coniunctio continetur, tempora incidunt, vt rationes accepti, & expenſi reddendæ, repoſcendæve ſint, tabulæ conficiendæ, numerus æqualiter, vel inæqualiter, certa quadam proportione ſeruata, in plures partes diuidendus, ſumma ſubducenda; quibus in rebus circumuenire, & circumueniri, æque turpe, & pernicioſum eſt: Itaque audacius illud quidem, ſed tamen verè dixit Plato, prudentiam, atque adeo humanitatem omnem è mundo eos tollere, qui Arithmeticam è vita tollant; *In Epinomide, & in 7. de Repub.* cum ſine ea neq; publicæ, neque priuatæ res conſtare poßint. Iam vero cæteræ diſciplinæ ſic Arithmetica nituntur, vt hæc non videatur concidere poſſe, quin illæ caſu eodem labefactatæ corruant. Neque enim aut Aſtrologus, aut Geometra theoremata in vulgus probabit ſua, vt non ſolum veritatem, ſed etiam voluptatem habeant cum vtilitate coniunctam, qui vniuerſam numerorum naturam animo penitus comprehenſam non habuerit: quod ſi tantillum in rationibus putandis lapſus fuerit, iam cæterarum rerum ingentem ruinam videas. Atque idcirco princeps ingenij Plato hanc veſtibulum, & aditum ad reliquas doctrinas voluit eſſe, *In 7. de Repub.* non ea ſolum cauſa, quod illæ ſine numeris nullæ ſint, verum etiam quod numerorum tractatione nitescit animus, & præparatur ad reliquos doctrinæ ſatus recipiendos. Huius ego præſtantißimæ ſcientiæ pulchritudine captus, olim dederam me ad totam numerorum naturam inueſtigandam, vt cum illam animo, ſcientiaq; comprehendiſſem, tum demum literis eam illuſtrarem, atq; Arithmeticæ præcepta, Algebræq; documenta, (rem ita non omnibus cognitam) quibus in vita præclarius vix aliquid reperias, ad certa quædam capita, & faciliores demonſtrationes reuocarem, vt cuiuis aperta, & prompta eſſent. Res erat præclara illa quidem, ſed multi laboris, atque temporis. Itaque interea dum opus illud à me limatur politius, cœpi, quæ ex multorum libris diſperſa collegeram, ſeparatim ad meum vſum in commētariolum referre, vt videlicet ad manus mihi eſſent, meisq; auditoribus explicarem: qui enim hactenus Arithmeticam tractarunt, ij aut multitudine præceptorum rem perturbarunt, aut breuitate obſcurarunt, ſic, vt (in quo tamen de nullius exiſtimatione detractum velim) quē in hac ſcientia magiſtrum, & ducem tyrones ſequantur, vix inueniant. Is libellus cum imprudenti mihi excidiſſet, & in manus hominum veniſſet, ſummis precibus contenderunt à me viri graues, vt eum cum plurimis communicarem, quòd fore dicerent, vt is vtilißimus accideret cum cæteris ſtudioſis, tum vero iis, qui noſtras ſcholas frequentant: quorum vtilitati nolle conſultum, non eſſe eius, qui ſua, ſuaq; omnia Dei gloriæ, omniumq; commodis conſecraſſet. Horum ego precibus, & auctoritate inductus, hunc libellum typis mandare conſtitui, quem tu videlicet, Lector, eo animo ſuſcipias velim, quo damus: atq; eo tantiſper vtere, dum maius illud Arithmemeticæ opus in lucem exeat, quod propediem, Deo iuuante, fore ſperamus. Vale.

NVME-

NVMERATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT I.

NVMERATIO eſt cuiuſuis numeri propoſiti per proprios characteres, ac figuras deſcriptio, atque expreſſio. *Numeratio quid.*

VTVNTVR autem Arithmetici decem characteribus, ſiue figuris ad omnium numerorum deſcriptionem, videlicet. *Decem figuræ numerorum.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

quarum priores nouem dicuntur ſignificatiuæ. Quælibet enim illarum tot vnitates ſignificat, quotum ipſa locum in appoſita ſerie occupat, vt hæc figura 6 ſignificat ſex vnitates: quia ſexto loco poſita eſt: atque ita de cæteris. Decima autem figura, & vltima nihil per ſe ſignificat, diciturque cifra; auget tamen ſignificationem, ac valorem aliarum figurarum, vt ex ſequentibus perſpicuum fiet.

IN quolibet numero, qui pluribus figuris ſcribitur tot dicuntur eſſe loca, quot ſunt figuræ ſiue ſignificatiuæ, ſiue non ſignificatiuæ: primusque locus, ſeu prima figura eſt, quæ extrema eſt verſus dexteram; ſecundus vero locus, ſeu ſecunda figura eſt illa, quæ proxime primam conſequitur verſus ſiniſtram, atque ita deinceps: adeo vt ille locus, ſeu figura dicatur vltima, quæ primam ſedem ad ſiniſtram occupat. vt hic 4352. prima figura eſt 2. & vltima 4. Si tamen ſingulæ figuræ ſingulos numeros repræſentent, hoc modo. 4. 3. 5. 2. prima figura erit 4 vltima vero 2. Cur autem ordo locorum, figurarumve in quolibet numero progrediatur à dextra verſus ſiniſtram, cauſa hæc eſt: quoniam à Phœnicibus inuenta eſſe dicitur Arithmetica, qui ſcribere ſolent à dextra ſiniſtram verſus, more Hebræorum, Arabum, & Chaldæorum.

Quot loca ſint in quolibet numero. *Prima figura, & vltima in quouis numero quæ ſit.* *Ordo locorum in quouis numero cur à dextra ſiniſtram verſus procedat.*

QVÆLIBET figura in primo loco poſita ſeipſam ſimpliciter repræſentat, in ſecundo decies ſeipſam ſignificat, in tertio centies, in quarto millies, in quinto decies millies, in ſexto centies millies, in ſeptimo millies millies, atque hoc pacto in infinitum: ita vt loca ordine ſeſe ſuperent in decupla proportione, vt ſecundus primum, tertius ſecundum, quartus tertium; &c. vt hic 34567. prima figura 7. ſignificat tantum ſeptem vnitates: ſecunda 6. ſignificat ſexaginta, nempe decies 6. tertia 5. quingentas, id eſt, centies 5. quarta 4. quatuor millia vnitatum, hoc eſt, millies 4. quinta 3. triginta millia vnitatum, ſiue decies millies 3. Itaque totus ille numerus ita proferendus erit. Triginta quatuor millia, quingenta, & ſexaginta ſeptem. Eodemque modo quicunque alius numerus exprimi poterit, ſi diligenter notetur, quoties quęlibet figura ſeipſam ſignificat in varijs locis poſita.

Quid quælibet figura in dato numero ſignificet. *Figuræ in quouis numero ſe ordine ſuperant in decupla proportione.*

CÆTERVM vt facilior reddatur numeratio, diſtribuendus erit numerus in membra, hoc modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur punctum: Deinde procedendo verſus ſiniſtram, & omiſſis duabus figuris, ſupra ſequentem figuram quarto loco poſitam aliud punctum ſtatuatur: Et ſic deinceps, omiſſis ſemper duabus figuris ſine punctis, ſupra ſequentem figuram punctum ſcribatur. vt hic factum eſſe vides.

42329089562800

Quælibet enim figura ſub quocunque puncto cum duabus antecedentibus verſus ſiniſtram conſtituit vnum membrum, ita vt ſingula membra ternis figuris conſtent, vltimo membro verſus ſiniſtram excepto, quod aliquando vnicam figuram habere poteſt, illam nimirum, quæ ſub puncto collocatur; quemadmodum in propoſito exemplo in quinque membra diſtributo contingeret, ſi vltima hęc figura 4. tolleretur: aliquando verò duas, vt in dato exemplo.

Quid obſeruandū ſit, vt datus numerus exprimatur.

ITAQVE vt quicunque numerus enuncietur, ſatis eſt, ſi quotlibet membrum ſeorſum exprimatur, cuius prima figura vnitates ſignificat, ſecunda denas vnitatum, & tertia centenas. Sed poſt pronuntiationem cuiuſuis membri apponenda eſt hæc vox [Mille] toties, quot membra ſequuntur illud, quod enunciatur, ita tamen, vt primum ea vox ponatur in recto pluralis numeri, deinde vero ſemper dicatur [Millies] vt mox audies;

ILLVD porro membrum, quod vltimum eſt verſus ſiniſtram, primum eſt in enunciatione, & quod

primum eſt ad partem dexteram, in enunciatione eſt vltimum. Numerus ergo paulò ante propoſitus ita pronunciabitur. PRIMVM membrum 42.ſic. Quadraginta duo millia, millies, millies, millies, ita vt vox [mille] quater audiatur, propter quatuor membra, quæ hoc, quod enunciatur, ſubſequuntur.

SECVNDVM membrum 329.hoc modo, Trecenta, vigintinouem millia, millies, millies.

TERTIVM membrum 089.ita Octoginta nouem millia, millies.

QVARTVM membrum 562.ſic. Quingenta, ſexaginta duo millia.

QVINTVM denique membrum 800.hoc pacto. octingenta.

FACILIOR adhuc reddetur numeratio, ſi pro primo puncto ponatur o. & 1. pro ſecundo puncto, & 2.pro tertio, & 3.pro quarto, & ita deinceps, vt hic in eodem exemplo factum eſſe vides.

4 3 2 1 0
42329089562800

HAC enim ratione facile intelligitur, quoties vox [mille] apponenda ſit in cuiuſque membri enunciatione. Toties enim proferenda eſt, quot vnitates in figura, quæ ſupra membrum pronuntiandum poſita eſt, continentur.

IAM vero ſi more Italorum millena millia appellare velimus Milliones, paucioribus verbis, & fortaſſe ſignificantius, numerum quemcunq; propoſitum exprimemus, ſi in maiora eum membra diſtribuamus, hoc, qui ſequitur, modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur o. Deinde, omiſſis quinq; figuris intermedijs, collocetur 1.ſupra ſequentem figuram, quæ ſeptimum locum occupat. Poſt hanc, omiſſis rurſus quinq; figuris, ſcribatur 2.ſupra figuram, quę tertium decimum occupat locum. Atq; ita deinceps, omiſſis ſemper quinque figuris, ponatur 3.4.5.&c. Vt hic in eodem exemplo factum eſt.

2 1 0
42329089562800

QVODLIBET membrum continet ſex figuras (vltimo membro excepto, quod vnicam poteſt habere figuram, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinq; tantum) quę omnes ſimul enunciandę ſunt, & poſt enunciationem cuiuſuis membri toties dictio [Millio] addenda, quot vnitates ſunt in figura ſupra membrum poſita, primo quidem in recto, deinde vero ſemper in aliquo. Vt autem quotlibet membrum facilius enuncietur, ponendum erit punctum ſub quarta eius figura, quod ſignificabit, locum ibi millenarum eſſe. Igitur ſuperius exemplum ita proferendum erit. Quadraginta duo milliones millionum; trecenta viginti nouem millia millionum, octogintanouem milliones: quingenta ſexaginta duo millia, octingenta.

ADDITIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT II.

Additio quid. ADDITIO eſt duorum, vel plurium numerorum in vnam ſummam collectio.

Numeri addendi quo pacto ſint collocandi. NVMERI addendi ita ſunt collocandi, vt vno ſub altero poſito, primæ figuræ inter ſe reſpondeant, item ſecundæ inter ſe, & tertiæ, & quartæ, &c. adeo vt defectus figurarum, ſi quis eſt, cernatur ex parte ſiniſtra. Vt hi numeri addendi, 710654. 8907. 56789. 880. collocandi erunt, vt hic apparet.

```
710654
  8907
 56789
   880
------
777230
```

8 X 8

Quo pacto fiat additio. DVCTA deinde linea ſub numeris addendis, adduntur primum omnes primæ figurę inter ſe, & numerus compoſitus, ſi vnica figura ſcribi poteſt, ſub primis figuris infra lineam ponitur, ſi vero duabus figuris ſcribendus eſt, ponitur ſola prima earum, & reliqua ſeruatur, vt deinde ſecundis figuris inter ſe addēdis adijciatur. Poſt hæc adduntur ſecundæ figuræ eodem modo, addita prius illa, quæ ſeruata eſt, ſi qua tamē ſeruata ſit, itemq; tertiæ, quartæ, & aliæ. Quod ſi ex additione vltimarum figurarum numerus componatur duabus figuris ſcribendus, ponendæ ſunt ambæ ſub linea, nulla retenta, quod tunc tota additio peracta ſit. Verbi gratia. In primis figuris propoſiti exempli o.& 9. faciunt 9.addo 7.fiunt 16.addo 4.fiunt 20. Pono ergo ſub primis figuris o. & ſeruo 2. Deinde in ſecundis figuris, ex 2. (quam figuram ſeruauerā) & 8.fiunt 10.addo 8.fiunt 18.addo 5.fiunt 23. Pono ergo figuram 3.ſub ſecundis figuris, & retineo 2. Poſt hæc accedo ad tertias figuras, vbi ex 2. (quam figuram retinueram) & 8. fiunt 10.addo 7.fiūt 17.addo 9.fiunt 26.addo 6.fiūt 32. Pono ergo 2.ſub tertijs figuris, & retineo 3. Rurſus in quartis figuris, ex 3.(q̄ figura retēta erat) & 6.fiunt 9.addo 8.fiunt 17.addo o.fiūt 17. Pono ergo 7.ſub quartis figuris & ſeruo 1.quam addo quintis figuris, efficioq; 7. Pono igitur 7.ſub dictis figuris, & nihil reſeruo. Poſtremo quia in vltimo loco ſola hæc figura 7. reperitur, pono eam ſub linea, abſolutaque erit additio. Quemadmodum autem figuras numerorum addendorum inter ſe addidimus ab inferioribus verſus ſuperiores aſcendendo, ita quoq; colligi poſſunt in vnam ſummam, ſi à ſuperioribus verſus inferiores deſcendatur.

QVOD

QVOD ſi quando ex additione figurarum vnius loci excreuerit numerus tribus figuris ſcribendus, ponenda erit prima figura ſub illo loco, & reliquæ duæ figuris ſequentium locorum addendæ, prima videlicet earum figuris proximi loci, & ſecunda figuris alterius loci: aut certe numerus duabus illis figuris retentis expreſſus ſequentis loci figuris addendus. Vt in appoſito exemplo, quoniã ex primis figuris colligitur numerus hic 102. ſcribenda erit figura 2. ſub primo loco, & figura 0. addenda figuris ſecundi loci, figura vero 1. figuris tertij loci. Vel totus numerus retentus 10. addendus figuris ſecundi loci, vt colligatur numerus 15. cuius figura 5. ſub ſecundo loco ponatur, & figura 1. figuris tertij loci addatur, &c. Vtroq; enim modo idem ſemper numerus colligetur. Examinatum autem vides hoc exemplum per abiectionem 9. de quo examine mox dicemus.

Quid faciendum ſit, quando ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris ſcribendus.

6008
5009
4009
308
239
108
108
309
4128
3009
209
308
——
23752

1 X 1

Recte porro feceris, quando ſunt multi numeri addendi, ſi eos in plures claſſes diſtribuas, & ex ſingulis claſſibus ſingulas ſummas colligas. Nam ſi demum haſce ſummas in vnam redigas ſummam, habebis ſummam ex omnibus datis numeris collectam, vitabisque moleſtiam, quæ in tot figuris in vnam ſummam colligendis

Quid faciendum ſit, quãdo multi numeri addendi ſunt.

6008	308	108	3009
5009	239	309	209
4009	108	4128	308
——	——	——	——
15026	655	4545	3526

neceſſario occurrit. Vt ſi proximum exemplum in quatuor haſce claſſes partiaris, & ſingularum ſummas, 15026. 655. 4545. 3526. in vnam ſummam redigas, efficies ſummam, 23752. eandem, quam prius collegeramus, vt hic apparet. Perſpicuum autem eſt, hoc poſteriori modo non tam facile errorem poſſe committi, quam priori, quod in hoc non tot figuræ, quot in illo ſimul addantur.

15026
655
4545
3526
——
23752

Poſt abſolutam additionem ſolent Arithmetici eam examinare, ſicut & alias operationes, quæ ſequuntur, num recte facta ſit, an non. Quod quatuor modis fieri poteſt in additione. Primum per abiectionem nouenarij, hoc pacto. Reiiciantur 9. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri poteſt, & quod reliquum eſt, ponatur ſeorſum. Deinde ex ſumma collecta reiiciantur quoque 9. quoties fieri poteſt, & quod reliquum eſt, notetur. Si enim hoc illi priori, quod reliquum fuit, æquale eſt, recte inſtituta fuit additio: Si vero inæquale, non recte. Vnde iteranda erit additio, vt error corrigatur. Ita vides in ſuperiori exemplo relictum fuiſſe numerum 8. poſt abiectionem numeri 9. tam ex omnibus numeris addendis, quam ex ſumma collecta, qui numerus 8. collocatus eſt in cruce quadam in hunc finem conſtructa.

Prima probatio additionis per 9.

Cæterum, vt facile abiiciantur 9. ſatis eſt, vt figuræ numerorum, ac ſi omnes primum occuparent locum, inter ſe addantur, & cum primum ſumma fuerit 9. aut exceſſerit 9. ita vt duabus figuris ſcribatur, reiiciantur 9. vel duæ illæ figuræ inter ſe addantur, & ſumma hæc cum ſequenti figura addatur eodem modo, &c. Eſt enim mirabilis hæc proprietas nouenarij, vt ſi figuras cuiuſcunque numeri inter ſe addas, & ex ſumma reiicias 9. vel certe, ſi ſumma hæc duabus figuris ſcribitur, duas has figuras in vnam ſummam colligas, tantundem relinquatur, vel componatur, quantum relinqueretur, ſi reiiceres 9. toties ex toto numero, quoties potes. Vt ſi ex hoc numero 38. reiiciantur 9. quoties id fieri poteſt, nempe quater remanent 2. quater enim 9. faciunt 36. Quod ſi dicas, 3. & 8. (ſumendo figuras eiuſdẽ numeri 38. ſeorſum.) faciunt 11. & reiicias 9. Vel certe dicas, 1. & 1. faciunt 2. (ſumendo etiam figuras huius numeri 11. proxime compoſiti ſeorſum) habebis eadem 2. quæ prius reliqua fuerunt. Ita quoque ſi ex hoc numero 41. reiiciantur 9. quoties fieri poteſt, nempe quater, remanent 5. Et ſi dicas, ex 4. & 1. (ſumendo figuras numeri 41. ſeorſum) fiunt etiam 5. Denique ex numero 78. ſi abiiciantur 9. quoties fieri poteſt, nempe octies, relinquuntur 6. Et ſi dicas, 7. & 8. faciunt 15. reiiciasque hinc 9. Vel certe dicas, 1. & 5. faciunt 6. tantundem habebis, quantum prius reliquum fuit. Eademque ratio eſt de cæteris.

Qua ratione ex quouis numero reiiciantur facile 9. quoties fieri poteſt.

Mirabilis proprietas nouenarij.

Itaque vt videas, qua ratione examen additionis inſtituendum ſit, examinabimus primum exemplum hoc modo.

7. & 1. faciunt 8. Additis 6. fiunt 14. id eſt, 5. Nam 1. & 4. faciunt 5. quantum nimirum relinqueretur, ſi 9. ex 14. reiicerentur, vt dictum eſt. Additis 5. ad illa 5. fiunt 10. id eſt, 1. Additis 4. fiunt 5. Additis 8. fiunt 13. hoc eſt, 4. additis 7. fiunt 11. (Nam 9. ſemper omittuntur, cum ſint perpetuo abiicienda) id eſt, 2. Additis 5. fiunt 7. Additis 6. fiunt 13. hoc eſt, 4 Additis 7. fiunt 11. id eſt, 2. Additis 8. fiunt 10. id eſt, 1. Additis 8, fiunt 9. id eſt, 0. Nam 9. reiicienda ſunt. Remanent autem 8. quæ in altera parte crucis colloco. Deinde in ſumma producta, ex 7. & 7. fiunt 14. id eſt, 5. Additis 7. fiunt 12. id eſt, 3. Additis 2. fiunt 5. Et tandem additis 3. fiunt 8. vt prius, quæ ſtatuo in oppoſita parte crucis, vt appareat æqualitas numerorum, qui poſt abiectionem 9. reliqui fuerunt.

710654
8907
56789
880
——
777230

8 X 8

Quoniam vero hac ratione non reiiciuntur 9. quoties fieri poteſt, ſed tantum per dictam proprietatem nouenarij inquiritur reſiduum, quod remaneret, ſi omnia 9. reiicerentur, fit, vt hoc examen per abiectionem 9. inſtitutum fallax ſit; vt in hoc exemplo apparet. Nam ſumma collecta falſa eſt, & nihilominus examen per 9. inſtitutum indicat, eam recte collectam eſſe, cum vtrobique vnitas ſuperſit: Quod ſi reiiciantur 9. quoties fieri poteſt, ſtatim apparebit falſitas ſummæ collectæ. Sæpius enim reiicientur 9. ex ſum-

Probatio per 9 fallax eſt, & quare fallax ſit.

25|7
30|3
——
64|1

1 X 1

ma, quam ex numeris additis. In ſumma enim hac 64. continentur 9. ſepties, ſupereſtque vnitas, propterea quod ſepties 9 ſunt 63. At in numero 25. continentur 9. bis, & ſuperſunt 7. quæ ad partem dextram repono. In 30. vero continentur 9. ter, & ſuperſunt 3. quæ etiam ex parte dextra noto. Itaque ex numeris additis reiiciuntur 9. quinquies, & ſuperſunt 7. & 3. in quibus adhuc ſemel continentur 9. ſupereſtq; vnitas, adeo vt vere ſexies tantum reiecta ſint 9. ex numeris additis, ex ſumma vero ſepties. Vnde mirum non eſt, ſummam eſſe falſam, quamuis ſemper reliqua fuerit vnitas. Vera autem ſumma eſſet hæc 55. in qua continentur 9. ſexies, & ſupereſt vnitas, quemadmodum in numeris additis.

Eodem pacto, ſi quis poſt ſummam recte collectam permutaret aliquas figuras, vel interponeret figuris ſiue ſummæ, ſiue numerorum addendorum hanc figuram 9. aut 0. quoties voluerit, vel haſce duas 7. 2. aut 6. 3. aut 4. 5. aut 8. 1. ſemper indicaret examen, ſummam adhuc recte eſſe collectam: quod tamen falſum eſt. Nam poſtquam hæc additio recte cum ſuo examine inſtituta fuerit, ſi quis per calumniam ita permutaret ſummam 1565. adhuc haberet examen ſuam vim, & tamen ſumma vera non eſſet. Idem dices, ſi ordinem figurarum in numeris addendis quis permutaret: vel certe interponeret hanc figuram 9. aut 0. vt hic apparet.

1425
230
———
1655   8 X 8

14925
2309
———
10655   8 X 8

Cur ab Arithmeticis probatio per 9. adhibeatur cũ fallax ſit.

Hæc cum ita ſint, merito quis roget, cur ab Arithmeticis hæc probatio per 9. adhibeatur. Cui reſpondendum eſt, licet per calumniam hæc probatio oſtendatur eſſe vitioſa, vt in proximis exemplis patuit, non immerito tamen à peritis Arithmeticis eam vſurpari. Nam nemo, (niſi quis dedita opera errare velit) talem errorem committet, vt examen iſtud locum habeat, ſed ſolum vna, aut altera vnitate à ſcopo aberrabit; ita vt facile tunc examen hoc oſtendat, errorem fuiſſe commiſſum, indicetque proinde, corrigendam eſſe additionem. Quis enim ita inſanus fuerit, vt vltimam illam ſummam ex primis duobus numeris colligat? Denique niſi de induſtria numeri ita diſponantur, vt reiectis 9 ſemper idem reſiduum ſit, vix aut raro admodum continget, vt examen iſtud ſuccedat, niſi quando in additione erratum non fuerit.

Secunda probatio additionis per 7.

Alio modo fit examen per abiectionem ſeptenarij hoc pacto. Reiiciantur 7. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri poteſt, & id quod ſupereſt, ſeorſum ponatur in vna parte crucis. Deinde ex ſumma collecta reiiciantur quoque 7. quoties fieri poteſt, ac reſiduum in altera parte crucis collocetur. Si enim hoc illi priori reſiduo fuerit æquale, recte facta eſt additio; ſi vero inæquale, non recte. Reiicienda autem ſunt 7. ex ſingulis numeris addendis ſeorſum, reſiduaque ad dexteram è regione ipſorum locanda, & ex his reſiduis in vnam ſummam collectis etiam abiicienda 7. atque hoc vltimum reſiduum in vna parte crucis ponendum. Cæterum non eodem modo reiicienda ſunt 7. quo abiicienda eſſe 9. diximus, cum hic numerus 7. illam proprietatem nouenarij non habeat: ſed aſſumendæ ſunt duæ figuræ primæ ad ſiniſtram ac ſi prior earum denas, & poſterior vnitates ſignificaret, dummodo prior minor ſit quam 7. (Nam ſi eſſet 7. vel maior, reiicienda forent 7. ex illa ſola.) & ex eo numero quem duæ illæ figuræ referunt, abiicienda 7. quoties fieri poteſt, & reſiduũ pro denis accipiendum, eique ſequens figura addenda pro vnitatibus, atque ex hoc numero, quem reſiduum, & ſequens figura exprimunt, iterum abiicienda 7. quoties fieri poteſt, atque ita deinceps. Vt ex numero 2379. ita reiicientur 7. Ex 23. ſi ter abiiciantur 7. remanent 2. Item ſi ex 27. (Nam figura 2. relicta, & ſequens figura 7. conſtituunt hunc numerum 27.) reiiciantur ter 7. relinquuntur 6. Si tandem ex 69 (qui numerus conſtituitur ex reſiduo 6. & figura 9.) reiiciantur 7. quoties fieri poteſt, remanent 6. Qui numerus etiam reliquus fuiſſet, ſi omnia 7. ex dato numero fuiſſent abiecta. Eodem modo ex hoc numero 783. ita abiicientur 7. Si ex 8. (Nam 7. omittuntur, vt dictum eſt, & ex 8. reiiciuntur 7.) abiiciantur 7. remanet 1. Rurſus ſi ex 13. reiiciantur 7. remanent 6. atque ita de cæteris.

Quo pacto reiicienda ſint 7. ex quolibet numero.

Itaque hac ratione ſuperius exemplum examinabitur.

710654 | 0
8907 | 3
56789 | 5
880 | 5
———
777230 | 6 X 6

Omiſſa figura 7. ſi ex 10. abiiciantur 7. remanent 3. Item ſi ex 36. abiiciantur 7. remanet 1. Abiectis vero 7. ex 15. remanet 1. Abiectis tandem 7. ex 14. remanet 0. quam figuram colloco ad dexteram primi numeri, ducta prius linea, quæ numeros addendos diſtinguat à figuris ad dexteram collocandis. Deinde in ſecundo numero abiectis 7. ex 8. remanet 1. abiectis item 7. ex 19. remanent 5. Abiectis quoque 7. ex 50. remanet 1. Denique abiectis 7. ex 17. remanent 3. quæ ad dextram repono. Rurſus in tertio numero abiectis 7. ex 56. remanet 0. Omiſſa deinde figura 7. & abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis denique 7. ex 19. remanent 5. ad dexteram collocanda. In quarto denique numero, abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis autem 7. ex 18. remanent 4. Et abiectis 7. ex 40. remanent 5. ad dexteram ponenda. Quoniam vero 5. 5. 3 & 0. efficiunt 13. ex quibus ſi abiiciantur 7. remanent 6. repono 6. in vna parte crucis. Sed ex hiſce reſiduis facilius reiicientur 7. ſi dicatur 5. & 5. efficiunt 10. Abiectis 7. remanent 3. Additis 3. fiunt 6. quemadmodum ſupra de abiectione 9. dictum eſt. Poſtremo in ſumma, omiſſis 7. 7. 7. ſi ex 23. abiiciantur 7. remanent 2. Item ſi ex 20. abiiciantur 7. remanent 6. in altera parte crucis reponẽda.

Probatio per 7. fallax eſt, ſed minus quã probatio per 9. & quare.

Verum quemadmodum examen per abiectionem 9. fallax eſt, vt diximus, ita quoque hoc per abiectionem 7. vitioſum eſſe deprehenditur: quia non conſideramus, an toties reiiciantur 7. ex numeris addendis, quoties ex ſumma, nec ne; ſed ſolum, an idem reſiduum vtrobique reperiatur, an non. Nihilominus tamen non ſine ratione huiuſmodi examen ab Arithmeticis adhiberi ſolet, quemadmodum & illud prius per abiectionem 9. inſtitutum, ob rationem ſupradictam: quia, niſi quis per calumniam numeros peruertat, vix aut raro idem reſiduum vtrobique reperietur, niſi recte facta ſit additio: Et multo quidem rarius in hoc quam in illo examine per 9. inſtituto; propterea quod non ita ſimpliciter reiiciuntur 7. vt 9. ſed maiori quodam artificio: vt non tam facile quis alium poſſit decipere, aut ab alio decipi.

203 | 0
134 | 1
———
344   1 X 1

In hoc appoſito exemplo additio vitioſa eſt, & tamen examen per abiectionem 7. indicat, eam rite eſſe inſtitutam.

Propo-

Propoſita autem hæc tabella docet, ex quibuſnam numeris abiecta 7. nihil relinquunt, vt examen iſtud per 7. reddatur facilius pro ijs, qui parum in numeris ſunt exercitati. Cuius vſus hic eſt. Si numerus duabus figuris ſcriptus, ex quo debent reiici 7. in hac tabella reperitur, nihil ſupererit poſt abiectionem 7. vt cifræ è regione numerorum huius tabellæ indicant. Si autem non reperitur in hac tabella, accipiendus erit numerus in ea proxime minor. Nam differentia inter hunc, & numerum propoſitum relinquitur poſt abiectionem 7. Vt ſi numerus propoſitus ſit 69. ſumendus erit numerus 63. in tabella, qui ſex vnitatibus à 69. differt. Reiectis igitur 7. ex 69. remanent 6. Item ſi propoſitus numerus ſit 37. accipiendus erit in tabella	7——0 14——0 21——0 28——0 35——0 42——0 49——0 56——0 63——0

numerus 35. qui duabus vnitatibus ſuperatur à 37. Reiectis igitur 7. ex 37. ſuperſunt 2. Atque ita de cæteris.

Tertio hac ratione Arithmetici additionem factam examinare ſolent. Si additio facta eſt ab inferioribus figuris verſus ſuperiores, inſtituunt eandem à ſuperioribus figuris verſus inferiores, vel contra: Et ſi poſteriori via eadem prorſus ſumma colligatur, quæ priori inuenta eſt, non dubitant, quin recte ſit facta additio, propterea quod incredibile quodammodo ſit, ſi priori modo error aliquis eſſet commiſſus, eundem prorſus poſteriori via committi, cum alio modo figuræ numerorum inter ſe additæ ſint poſteriori via, quam priori. Nam ſi errauero in additione harum figurarum 5. 2. 9. hoc modo dicendo, 5. & 2. faciunt 7. additis 9. fiunt 15. non tam facile in eundem errorem incidero, ſi è contrario eas inter ſe addam. Dicam enim 9. & 2. efficiunt 11. additis 5. fiunt 16. quia operatio aliquo modo variatur. *Tertia probatio additionis per additionem.*

Poteſt probatio hæc per additionem ita quoque inſtitui. Diuidantur numeri addendi in duas, aut plures claſſes, & ſingularum ſummæ colligantur. Nam ſi ex hiſce ſummis vnam ſummam conficias, neceſſe eſt, ſummam

```
 710654        56789
   8907          880
 ------       ------
 719561        57669
        719561
         57669
        ------
        777230
```

hanc æqualem eſſe ſummæ prius collectæ, ſi erratum non eſt. Vt ſi primum exemplum in hæc duo membra diſtribuatur, & eorum ſummæ collectæ in vnam redigantur ſummam, vt hic factum eſt, prodibit eadem ſumma, quæ prius.

Quarto & vltimo examinari ſolet additio per ſubtractionem, hac ratione. Quando duo numeri ſunt additi, ſubtrahatur vteruis eorum ex ſumma: quod quo pacto fiat, capite ſequenti docebimus. Si enim numerus ex hac ſubtractione relictus æqualis fuerit alteri numero addito, argumento eſt, nullum peccatum in additione fuiſſe commiſſum. Nam ſi ex 12. & 20. fiunt 32. neceſſe eſt, detractis 12. ex 32. relinqui 20. vel detractis 20. ex 32. relinqui 12. Quando vero plures numeri ſunt additi, ſubtrahatur vnus eorum ex ſumma, & reliqui omnes in vnam ſummam colligantur. Nam ſi hæc ſumma illi reſiduo fuerit æqualis, recte facta erit additio. Vel certe, ſubtracto primo numerorum addendorum ex ſumma, ſubtrahatur ex reſiduo ſecundus, & ex hoc reſiduo tertius, & ita deinceps, vltimo excepto. Si enim vltimum reſiduum vltimo numerorum addendorum æquale fuerit, dubium non eſt, quin additio recte facta ſit. Atque hoc examen certiſſimum eſt, licet ſit alijs paulo longius. *Quarta probatio additionis per ſubtractionem.*

SVBTRACTIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT III.

SVbtractio eſt minoris numeri ex maiori, vel æqualis ex æquali, ſubductio. *Subtractio quid.*

Facile autem cognoſces, vter duorum numerorum maior ſit, ex vltimis eorum figuris. Cuius enim figura vltima maior eſt, ille numerus maior etiam erit. Vt horum duorum numerorum ſuperior maior eſt inferiore, quia vltima eius figura 3. maior eſt, quam 2 vltima figura inferioris. Quod ſi vltimæ figuræ duorum numerorum ſint æquales, ille maior erit, cuius penultima figura maior eſt. Et ſi penultimæ etiam figuræ ſint æquales, ille maior erit numerus, in quo prius occurret maior figura, vt in his exemplis ſemper numerus ſuperior inferiore maior eſt. *Vter duorum numerorum maior ſit, quo pacto cognoſcatur.*

```
3001234
2986789

445078     700001000.
444899     700000999.
```

Sic etiam numerus, qui plures habet figuras, maior eſt eo, qui pauciores figuras continet, vt hic ſuperior numerus inferiore maior eſt.

```
12345
 9968
```

Numerus ſubtrahendus ſub eo, à quo fieri debet ſubtractio, ita collocandus eſt, vt prima figura primæ, ſecunda ſecundæ, tertia tertiæ, &c. reſpondeat: adeo vt defectus figurarum in numero ſubtrahendo, ſi quis eſt, cernatur ex parte ſiniſtra. Vt ſi numerus 40236. ex numero 3271589. ſubducendus ſit, collocandus erit ille ſub hoc, vt hic apparet. *Subtrahendus numerus quo pacto locandus ſit.*

```
3271589
  40236
-------
3231353
```

Subtractio quomodo fiat. Ducta deinde linea ſub duobus illis numeris, ſubtrahuntur ſingulæ figuræ inferioris numeri à ſingulis figuris ſuperioris numeri, initio facto à primis figuris; & reſidua ſub linea collocantur eo ordine, quo facta eſt ſubtractio. Quod ſi in ſuperiori numero aliquæ figuræ non habeant reſpondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil ſubtrahatur, reponendæ illæ erunt ſub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. ſub linea collocanda. Item ſubductis 3. ex 8. relinquuntur 5. Et demptis 2. ex 5. relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At ſubductis 4. ex 7. remanent 3. Quia vero ex figuris 2. & 3. nihil ſubtrahitur, ponendæ eæ erunt eodem ordine ſub linea.

Quid agẽdum ſit, quando figura inferior maior eſt, quam ſuperior. Quando autem figura aliqua inferior maior eſt ſuperiore ſibi reſpondente, ita vt ſubtractio fieri non poſſit, ſeruanda erit hæc regula. A proxima figura ſuperiori verſus ſiniſtram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem vnitates ſignificabit reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio fieri non poteſt. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris ſcribendus, à quo detrahatur illa figura inferior maior: ſed tunc illa figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quod ſi proxima illa figura ſuperior ſit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura verſus ſiniſtram, quæ vnitas ſignificabit 100. vnitates reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio non poteſt fieri: ſed tunc loco figuræ 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, vna vnitate minor erit. Ita quoque ſi plures huiuſmodi figuræ 0. antecederent illam, à qua vnitatem mutuamur, cogitandæ eſſent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. Quæ omnia hoc exemplo fient perſpicua.

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primvm ſubductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde, quia 9. detrahi non poſſunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerum exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rurſus quia 8. ex 7. (ſuperior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantum 7.) ſubtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatem à 4. & ſic ſubductis 8. ex 17. remanent 9. Poſt hæc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3.) non poſſunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. poſt 0. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. reſpectu figuræ 3. à qua non poteſt fieri ſubtractio, & nos indigemus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 100. mutuemur 10. relinquantur 90. Hinc fit, vt figura 3. valeat tantum 2. & ſupra 0. reponenda ſit animo figura 9. quæ ſignificat 90. reſpectu figuræ, à qua ſubtractio fieri non poterat. Itaq; ſubductis 7. ex 13. remanent 6. Et ſubductis 6. ex 9. (ſupra 0. namque diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2. (Nam figura ſuperior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemusque 5. ex 12. vt ſuperſint 7. Subductis deinde 4. ex 5. (figura enim 6. valet tantum 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rurſus 3. ex 2. non poſſunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5 Sed cum hæc vnitas valeat 10000. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri nequit, nos vero indigeamus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 10000. mutuemur 10. remanent 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat ſolum 4. & ſupra ſingulas cifras cogitatione reponenda ſit figura 9. hoc modo, 999. Hæ namque figuræ 999. ſignificant 9990. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri non poterat. Itaque ſubductis 3. ex 12. remanent 9. Et ſubducta figura 0. ex 9. (quam figuram 9. ſupra 10. diximus cogitandam eſſe.) remanent 9. Et ſubductis 9. ex 9. (quam etiam figuram 9. ſupra 0. imaginamur) remanet 0. Item ſubtractis 2. ex 9. (ſupra 0. namque reponenda quoque animo eſt figura 9.) ſuperſunt 7. At vero quoniam 9. ſubtrahi non poſſunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt ſuperſint 5. Poſtremo ſubductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 3.) remanet 0. quæ figura 0. quia vltima eſt in hoc exemplo, nihilque propterea ſignificat, omittenda eſt.

Facilior ratio ſubtractionis, quã do figura inferior ſuperiore maior eſt. Hac regula plerique Arithmetici vtuntur, quam nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior eſt ſuperiore, accipiatur differentia inter ipſam & 10. atque huic differentiæ addatur ſuperior figura, à qua ſubtractio non poterat fieri, aggregatumque ſcribatur ſub linea. Hoc enim aggregatum relinqueretur, ſi figura illa maior auferretur ex numero compoſito ex 10. & figura illa ſuperiore, à qua non poteſt fieri ſubtractio, non ſecus, ac ſi vnitas fuiſſet mutuo accepta: cum figura illa maior primum ſubtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illam figuram, deinde reſiduo, ſiue differentiæ huic ſuperior figura addatur. Poſtea ne cogamur vnitatem cogitatione auferre ex ſuperiore figura, à qua mutuo ſumpta eſt implicite vnitas, addemus proximæ figuræ inferiori verſus ſiniſtram vnitatem, & hoc aggregatum ex ſuperiori figura (nulla ex ea prius dempta vnitate) ſubducemus. Eadem enim ſemper differentia erit inter inferiorem, ac ſuperiorẽ figuram, ſiue ex ſuperiore auferas vnitatem, & inferiori nihil addas, ſiue ex ſuperiori nihil auferas, & inferiori vnitatem adiicias. Vt propoſitis hiſce duabus figuris 7. 4. ſi ex 7. tollatur vnitas, erit 2. differentia inter reſiduum 6. & 4. Et ſi ex 7. nihil dematur, adiiciatur autem vnitas ad 4. eadem differentia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotieſcunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex ſuperiori non poteſt ſubtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferiori figuræ verſus ſiniſtram. Sed hæc omnia clariora fient ex eodem exemplo, quod hic repetiuimus.

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primum ſubductis 2. ex 7. ſuperſunt 5. Quia vero 9. ſubtrahi non poſſunt ex 2. ſubtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia eſt inter 10. & 9. adiiciemus 2. vt habeamus 3. pro reſiduo ſub linea ponendo. Hoc facto ſtatim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniã rurſus ex 8. non poſſunt ſubduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ rurſus differentia eſt inter 10. & 9.) addemus

demus 8.vt habeamus 9.collocanda ſub linea. Quo peracto, ſtatim inferiori figuræ 7.addemus 1.propter illam differentiam inter 10.& 9.efficiemusque 8. Quæ quoniam ex 4.demi nequeunt, auferemus 8.ex 10.& reſiduo 2.(hoc eſt,differentiæ inter 10.& 8.)adijciemus 4.vt fiant 6.reponenda infra lineam. Deinde ſtatim inferiori figuræ 6.adiungemus 1.propter differentiam illam inter 10.& 8. efficiemuſque 7. Quæ, quoniam ex o. ſubtrahi nequeunt,ſubduco ex 10.& reſiduo 3.(id eſt,differentię inter 10.& 7.) addo o. efficioque 3. ponenda ſub linea. Rurſus inferiori figuræ 5.addo 1.propter illam differentiam inter 10.& 7.efficioq; 6. Quæ,quoniam ſubduci nequeunt ex 3.detraho ex 10.& reſiduo 4.(id eſt,differentiæ inter 10.& 6.)addo 3.efficioq; 7.infra lineam ſcribenda.His peractis,ſtatim inferiori figuræ 4.addo 1.propter dictam differentiam inter 10.& 6.facioq; 5.quibus ſubductis ex 6.ſupereſt 1. Quia vero in hac ſubductione mentio facta non eſt differentiæ inter 10. & 5.cum 5.ſubduci potuerint ex 6.non addo 1.inferiori figuræ 3.ſed eam, quoniam ſubduci non poteſt,ex 2.ſubtraho ex 10.& reſiduo 7.(ſiue differentiæ inter 10. & 3.) addo 2.facioque 9. locanda ſub linea. Poſt hæc ſtatim figuræ inferiori o.addo 1. propter differentiam dictam inter 10.& 3. efficioq; 1.Et quoniam 1.ſubtrahi non poteſt ex o.demo 1.ex 10.reſiduoq; 9.(id eſt differentiæ inter 10.& 1.)addo o. efficioq; 9. infra lineam reponenda. Poſtea iterũ ſtatim addo 1.figuræ inferiori 9.ꝑpter illam differentiam inter 10.& 1.vt habeam 10.quæ, quoniam ex o.non poſſunt detrahi,aufero ex 10.reſiduoq; o.(ſiue differentiæ inter 10.& 10.addo o.)facioq; o.pro reſiduo ſub linea collocando.Rurſus quam primum inferiori figuræ 2. addo 1.propter dictam differentiam inter 10. & 10.efficioque 3.quæ cum ex o.ſubduci nequeant, ſubtraho ex 10. reſiduoque 7.(nempe differentiæ inter 10.& 3.)addo o.facioque 7.collocanda ſub linea.Præterea mox addo 1.ad figuram inferiorem 9. propter differentiam illam inter 10.& 3. facioque 10. quæ quoniam ex 5.non poſſunt detrahi, aufero ex 10.ac reſiduo o.(differentiæ nimirum inter 10.& 10.)addo 5.efficioq; 5.pro reſiduo ſub linea reponendo.Poſtremo ſtatim figuræ inferiori 3. adijcio 1.propter illam differentiam inter 10.& 10.vt habeam 4.quæ ſubducta ex 4. reliquunt o. quam figuram o.quoniã ſuperuacanea eſt in principio numeri ex parte ſiniſtra,omittemus,cum poſita fruſtra locũ occuparet.

45000163048 27
39290345 67892
57099173 6935

Aliud Exemplum.

per 7. 5X5

4000134	5
67823	0
3932311	5

per 9. 3X3

IN hoc exemplo,quoniam ablatis omnibus figuris inferioribus ex ſuperioribus vnitas adijcienda eſſet ſequenti figurę inferiori, quæ nulla eſt, reponemus eam in ſequentem locum:quę,quoniam auferri nequit ex o. detrahenda erit ex 10. & reſiduum 9.infra lineam ponendum;Ac rurſus vnitas ſequenti loco adijcienda,atque ex 4.auferenda,vt habeatur reſiduum 3.ſub linea collocandum.

QVOD ſi numerus ex pluribus numeris,vel plures numeri ex pluribus, vel ex vno numero ſint ſubducendi,colligendi prius erunt plures numeri illi,à quibus fieri debet ſubtractio,in vnam ſummam;Itemq; plures illi,qui ſubtrahi debent,inter ſe addendi,priuſquam ſubtractio inſtituatur. *Quando numeri ſint plures quid agendum.*

EXAMEN ſubtractionis quadruplex eſt.Primum fit per abiectionem 9. Si n. ex ſuperiori numero,à quo facta eſt ſubtractio,reijciantur 9.quoties fieri poteſt,eo modo, quo in additione diximus abijcienda eſſe 9. & reſiduũ collocetur in vna parte crucis,neceſſe eſt,vt idem numerus relinquatur, ſi abijciantur 9. ex numero ſubtracto, & ex relicto, quoties fieri poteſt, niſi in ſubtractione erratum ſit. Ita vides in proximo exemplo ad dextram reſiduum ſemper eſſe 3.ſiue 9.abijcias, quoties potes,ex numero 4000134. à quo facta eſt ſubtractio, ſiue ex numeris 678823.3932311.ſimul,quorum ille ſubtractus eſt, hic vero reliquus fuit ex ſubtractione. *Prima probatio ſubtractionis per 9.*

SECVNDVM examen fit per abiectionem 7.Nam ſi ex numero, à quo facta eſt ſubtractio, reijciantur 7.quoties fieri poteſt,eo modo,quo in additione diximus abijcianda eſſe 7.& reſiduum ponatur in vna parte crucis,neceſſe eſt,ſi ſubtractio recte facta eſt,vt idem numerus relinquatur,ſi reijciatur 7.ex numero ſubtracto, ponendo reſiduum ad dexteram illius,& ex numero relicto, ponendo etiam reſiduum ad dextram illius,ac tandem duo hæc reſidua ad dexteram collocata in vnam ſummam colligantur,& ex ea reijciatur 7.ſi reijci poſſunt. Ita in ſuperiori exemplo,reiectis 7.quoties fieri poteſt,ex numero 4000134. relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 67823.remanet o.& abiectis 7.& ex 3932311.ſuperſunt 5.quæ addita ad o.faciunt quoque 5.vt in cruce ad ſiniſtram ſuperioris exempli poſita apparet. *Secunda probatio ſubtractionis per 7.*

CÆTERVM vtrumq; hoc examen fallax eſſe poteſt,ſi quis per calumniam numeros permutet,aut alios numeros apponat,quemadmodum in additione diximus.

TERTIVM examen fit per additionem. Nam ſi numerum reſiduum ſubtracto numero adijcias, neceſſario componetur numerus,à quo ſubtractio facta eſt.vt in hoc exemplo vides. *Tertia probatio ſubtractionis per additionem.*

NVMERVS,à quo fit ſubtractio.	60123
NVMERVS ſubtractus.	45678
NVMERVS reſiduus.	14445
SVMMA ex numero ſubtracto. & reſiduo compoſita,æqualis numero,à quo facta eſt ſubtractio.	60123

QVAR-

Quarta probatio ſubtractionis per ſubtractionem.

60123
14445
45678

QVARTVM examen fit per ſubtractionem. Facta enim ſubtractione, ſi reſiduum ab eodem numero, à quo facta eſt ſubtractio, auferas, ſupererit neceſſario numerus ſubtractus. Vt in proximo exemplo, ſi numerum reſiduum 14445. ex numero 60123. detrahas, reliquus erit numerus ſubtractus 45678. vt hic apparet.

Hæc poſteriora duo examina certiſſima ſunt, nullamque admittere poſſunt fallaciam, aut fraudem.

MVLTIPLICATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT IV.

Multiplicatio quid

MVLTIPLICATIO eſt ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in alium duci dicitur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerum 5. vel numerus 5. in numerum 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. ſexies. quo pacto ſemper accipientur 30. atque huiuſmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaque numerus ex multiplicatione, ſiue ductu vnius numeri in alterum procreatus toties vtrumlibet multiplicatorum continebit, quoties alter vnitatem complectitur, vt in datò exemplo manifeſtum eſt. Ex quo fit, Multiplicationem ita quoque deſcribi poſſe. Multiplicatio duorum numerorum eſt inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorum contineat, quoties alter vnitatem continet.

VT expedite omnis multiplicatio fiat, neceſſe eſt noſſe, qui numerus producatur ex ductu, ſiue multiplicatione cuiuslibet figuræ numericæ in quamuis aliam figuram, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Item ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc enim ſi bene tenueris, nullam in multiplicatione ſenties difficultatem, aut laborem. Id quod aſſiduo exercitio magis diſcitur, quam vllo præcepto. Interim tamen mirifice tibi inſeruiet ſequens tabula, quæ Pythagorica dici ſolet, ea fortaſſis de cauſa, quod Pythagoras eam vel primus excogitauerit, vel certe diſcipulos ſuos in ea mirifice exercuerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Conſtructio tabulæ Pythagoricæ.

Conſtructio huius tabulæ perfacilis eſt. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vſque ad 9. vt ex 1. & 1. fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturque per continuam additionem 2. Vt ex 2. & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiunt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c, Ita quoque tertia linea initium ſumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atq; eodem modo reliquæ lineæ compoſitæ ſunt. Quælibet enim per continuam additionem eius numeri, à quo incipit, progreditur.

Vſus tabulæ Pythagoricæ.

Vſus autem eiuſdem tabulæ, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vſus habet) hic eſt. Propoſitis duabus figuris inter ſe multiplicandis, ſi altera in ſuperiori linea, & altera in ſiniſtro latere ſumatur, & in illa linea deorſum, in hoc vero latere dextrorſum quis progrediatur, reperiet in communi concurſu numerum ex multiplicatione duarum illarum figurarum inter ſe productum. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8. produci 64. & ſic de cæteris.

Regula multiplicandi figuram in figuram.

QVOD ſi huiuſmodi tabula in promptu non ſit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura ab altera, & vtriuſq; diſtantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hæ diſtantiæ inter ſe multiplicentur. Productus enim numerus, ſi vnica figura ſcribitur, dabit primam ſummæ producendæ ex figurarum multiplicatione; ſi vero duabus figuris ſcribitur, ſeruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura ſummæ producendæ. Secunda autem figura eiuſdem huius ſummæ habebitur, ſi alterutra diſtantia ab altera figura denarum reſeruata addatur, ſi qua ſeruata eſt: Vel certe ſi figurę propoſitę inter ſe addantur, addita prius figura denarum reſeruata, ſi qua ſeruata eſt, dabit prima figura huius aggregati (reiecta ſecunda figura tamquam ſuperuacanea) ſecundam figuram ſummæ producendæ. Exemplis res fiet illuſtrior.

9.	1.	8.	2.	7.	3.
8.	2.	8.	2.	6.	4.
7	2	6	4	4	2.

In primo exemplo figuræ multiplicandæ ſunt 9. & 8. earumque diſtantiæ à 10. ſunt 1. & 2. quæ inter ſe multiplicatæ, (erit autem multiplicatio diſtantiarum à 10. facillima, cum minores ſint, quam figuræ multiplicandæ. De his n. regula hæc intelligẽda eſt) dicendo ſemel 2. vel bis 1. faciunt 2. quę ſub diſtantijs ſcribo pro prima figura

ſummæ

ſummæ producendæ. Ablata autem diſtantia 2.ex 9. vel diſtantia 1. ex 8.relinquuntur 7. quæ ſcribo ſub figuris pro ſecunda figura ſummæ producendæ. Quam ſecundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9.& 8.quod eſt 17.relicta ſecunda 1.tanquam omnino ad hoc negotium,inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9.& 8.efficit 72.

IN ſecundo autem exemplo figuræ propoſitæ ſunt 8.& 8.quarum diſtantiæ à 10.ſunt 2.& 2. His inter ſe multiplicatis,dicendo,bis 2.habebimus 4.pro prima figura ſummæ producendę.Dempta autem vtrauis diſtantia ex 8.ſupererūt 6.pro ſecunda figura,quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8.& 8. quod eſt 16.relicta ſecunda 1.tanquam ſuperuacanea.Figuræ igitur 8.& 8.inter ſe multiplicatæ faciunt 64.

IN tertio deniq; exemplo figuræ datæ ſunt 7.& 6.quarum diſtantiæ à 10.ſunt 3.& 4.Hæ inter ſe multiplicatæ,dicendo,ter 4.vel quater 3.faciunt 12.Prima ergo figura ſummæ producendæ erit 2. ſecunda vero figura 1. ſeruanda erit.Deinde ablata diſtantia 4.ex 7.vel diſtātia 3.ex 6.ſuper ſunt 3.quibus ſi addatur vnitas,quā ſeruauimus,fient 4.pro ſecunda figura ſummæ producendæ: quam etiam figuram dabit prima figura aggregati ex 7.& 6.addita prius vnitate ſeruata, quod eſt 14.omiſſa prorſus ſecunda figura 1. Producuntur ergo 42.ex multiplicatione 7.per 6.vel 6.per 7. Eadem ratio in cæteris eſt dummodo duæ figuræ propoſitæ inter ſe additæ ſuperent 10.Alias diſtantiæ illarum à 10.maiores eſſent ipſis figuris,ac proinde facilius multiplicarentur figuræ, quam diſtantiæ.Rectius tamē feceris,ſi vſu,& exercitatione memoriter ediſcas huiuſmodi multiplicationes figurarum inter ſe,quam vt vel ad tabulam Pythagoricam,vt ad hanc regulam confugias.

IAM vero propoſitis duobus numeris inter ſe multiplicandis, ſcribēdus eſt minor ſub maiore,ita vt prima figura reſpondeat primæ figuræ,& ſecunda ſecundæ,&c. vt in additione,& ſubtractione diximus. Quod tamen neceſſarium nō eſt,cum etiam maior ſub minore ſcribi poſſit,dicto tamen ordine figurarum ſeruato. Vt ſi multiplicanda ſint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horum modorum, quamuis primus ſit magis vſitatus. *Quā ratione collocādi ſint numeri inter ſe multiplicandi.*

4300678 Vel 600394.
600394 4300678.

SED doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam ſolam figuram multiplicandus ſit. Ita enim facilius intelligetur, quā ratione numerus per numerum plurium figūrarum debeat multiplicari.

QVANDO ergo numerus aliquis per vnam tantum figuram multiplicandus eſt, ſolet ſemper figura hæc multiplicans ſubſcribi primæ figuræ numeri multiplicandi. Vt ſi numerus 600394. multiplicandus proponatur per 8. ſic ſtabit exemplum. Multiplicatio autem fiet ſi figura 8. multiplicetur per omnes figuras numeri 600394. incipiendo à dextra, & ſiniſtram verſus progrediendo, ſingulosque numeros productos ſub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, ſcribendo; ita tamen, vt ſi productus aliquis numerus duabus figuris ſcribendus ſit, prima earum ponatur, ſecunda vero ſeruetur ſequenti producto adiicienda, hoc videlicet modo. Primum multiplico 8.per 4.dicendo octies 4.faciunt 32.pono 2. ſub 4. & ſeruo 3. Item octies 9.faciunt 72. & additis 3.ſeruatis, fiunt 75.pono 5.ſub 9.& ſeruo 7.Item octies 3.faciūt 24.& additis 7.ſeruatis, fiunt 31. pono 1.ſub 3. ſeruoq; 3. Deinde octies 0.facit 0.& additis 3.ſeruatis, fiunt 3, quæ pono ſub 0. nihilq; reſeruo. Rurſus octies 0.facit 0.cui, quia nihil ſeruaui in præcedenti producto, nihil addendū eſt. Pono ergo 0. ſub 0.nihilq; reſeruò. Deniq; octies 6.faciunt 48. quibus quia in proximo producto nihil ſeruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerum ſub linea, quia multiplicatio ad finem perducta eſt, cum nulla alia figura ſuperioris numeri reſtet multiplicanda per 8. Itaque ſi totum numerum 600394. multiplicemus per 8. procreabimus hunc numerum 4803152. Atque hoc modo quemcunque numerum per quamuis figuram multiplicabis. *Quomodo numerus per vnam figuram multiplicetur.*

600394
8
———
4803152

5
4 X 8
5

SI vero numerus per numerum plurium figurarum ſit multiplicandus, ducatur ſub ipſis diſpoſitis, vt dictum eſt, linea recta. Deinde ſingulæ figuræ inferioris numeri per ſingulas figuras numeri ſuperioris multiplicentur, vt proxime docuimus; hoc ſolum diligenter obſeruato, vt numerus productus ex quacunque figura inferioris numeri per primam figuram numeri ſuperioris multiplicata collocetur ſub illa figura inferioris numeri, per quam ſuperior numerus multiplicatur, reliqui autem numeri ex multiplicatione eiuſdem figuræ numeri producti ſtatuantur ſuo ordine deinceps verſus ſiniſtram, vt in hoc exemplo factum eſſe vides, in quo quatuor ordines numerorum ſub linea conſtituti ſunt ex numeris productis. *Quomodo numerus per numerum pluribus figuris ſcriptum multiplicetur.*

per 9. per 7.

4300678
600394
———
17202712
38706102
12902034
25804068
———
2582101267132

4
1 X 4
4

2
4 X 4
2

Totus enim numerus productus ex multiplicatione 4.in omnes figuras ſuperioris numeri habet primam ſuam figuram ſub 4.Ita quoque numerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri ſuperioris primam ſuam figuram habet ſub 9. Eadē ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3.in omnes figuras numeri ſuperioris collocata eſt ſub 3.Deniq; prima figura numeri ꝓducti ex multiplicatione 6.in omnes figuras ſuperioris numeri poſita eſt ſub 6. Reliquæ autem figuræ ordine ſuo progrediuntur verſus ſiniſtram.

QVO-

QVONIAM verò cifra ſiue multiplicans ſiue multiplicata producit o. omiſimus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas non multiplicauerimus in numerum ſuperiorem, quia ſemper produxiſſent o. Idem faciendum eſt, quotieſcunq; in numero inferiori fuerint aliquot cifrę. Eas n. ſemper omittemus, & ad proximè ſequẽtem figuram ſignificatiuam nos conferemus. Cifræ tamen ſuperioris numeri, ſi quæ ſint, negligendæ non ſunt. Nam licet multiplicatæ per figuras inferioris numeri ſignificatiuas producant o. ſæpenumero tamen ꝓducto illi o. addendum eſt aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reſeruatum eſt, idq; loco producti reponendum ſub linea. Immo etiam ſi nihil reſeruatum aliquando, ponenda tamen eſt figura o. ſub linea loco producti. Quæ omnia in ſuperioribus exemplis obſeruanta ſunt. In priori enim cum multiplicauimus 8. per o. produximus o. ſed quia in præcedenti multiplicatione reſeruata erant 3. poſuimus 3. loco producti o. Rurſus cum multiplicauimus iterum 8. per o. produximus etiam o. & quoniam nihil reſeruatum fuit, poſuimus o. loco producti. Idemq; factum eſt in poſteriori exemplo.

POST hæc infra omnes numeros productos alia linea ducatur, vt ſub ea ponatur ſumma ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidem ſumma colligenda eſt, vt in additione traditum eſt; dummodo prima figura cuiuslibet producti eum intelligatur locum occupare, quem figura primi producti, ſub qua illa collocatur, occupat: Hoc eſt, vt figura 2. quæ prima eſt ſecundi numeri producti in propoſito exemplo cogitetur eſſe poſita ſub ſecundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima eſt in tertio producto, intelligatur eſſe locata ſub tertio loco primi producti; Denique figura 8. quæ prima etiam eſt in quarto producto, concipiatur occupare ſextum locum ſub primo producto. In his enim locis omnes has figuras vides eſſe poſitas. Itaque vt exemplo rem monſtremus, hac ratione ſumma colligetur. In numeris productis ſola figura 2. occupat primum locum; Ea igitur ſola ponenda eſt in primo loco ſub linea. Deinde in ſecundo loco ſunt 1. & 2. quæ faciunt 3. ſub linea in ſecundo loco ponenda. Rurſus in tertio loco ſunt 7. o. 4. quæ efficiunt 11. Collocanda ergo erit 1. ſub linea in tertio loco, & ſeruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione ſumma collecta erit 2582101267132. atque hic numerus producitur ex multiplicatione 4300678. in 600394.

VT autem videas eundem numerum gigni, etiam ſi maiorem numerum ſub minore ſtatuamus, appoſuim⁹ hoc alterum exemplum ſequẽs, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter ſeſe multiplicantur, ſed maior numerus ſub minore poſitus eſt, factique ſunt quinque ordines numerorum productorum, quot nimirum ſunt figuræ ſignificatiuæ in numero inferiori. Idem tamen numerus productus eſt, qui prius.

per 9.   per 7.

```
           600394
          4300678
        ---------
          4803152
         4202758
        3602364
       1801182
      2401576
   -------------
    2582101267132
```

Probatio per 9.: cross with 4 (top), 4 (left), 1 (right), 4 (bottom).

Probatio per 7.: cross with 2 (top), 4 (left), 4 (right), 2 (bottom).

HIC modus multiplicandi, quem hacten⁹ expoſuimus, apud omnes magis vſitatus eſt: alias tamẽ multiplicandi rationes non iniucundas in pleniore noſtra Arithmetica explicabimus.

Prima probatio multiplicationis per 9.

EXAMEN multiplicationis triplex eſt. Primum fit per abiectionem 9. hoc modo. Reijciantur primũ 9. ex primo numero multiplicato; quoties fieri poteſt, vt in additione diximus, reſiduumq́; in ſiniſtra parte crucis ponatur. Deinde reiectis 9. eodem modo ex altero numero multiplicato locetur reſiduum in dextra parte crucis. Poſt hæc, multiplicatis his duobus reſiduis inter ſe, & ex producto reiectis 9. ſtatuatur reſiduum in ſuperiori parte crucis. Poſtremo ex ſumma omnium productorũ reiectis quoque 9. ſcribatur reſiduum in parte cruris inferiore. Neceſſe enim eſt, reſiduum hoc æquale eſſe reſiduo ſuperiori, ſi erratum in multiplicatione non eſt. Exempla poſita ſunt in ſuperioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9. ex 600394. reſiduũ eſt 4. Reſiduum autem huius numeri 8. eſt 8. quia 9. abijci non poſſunt. Multiplicatis autem his reſiduis 4. & 8. inter ſe, fiunt 32. à quib⁹ ſi reijciantur 9. ex producto 4803152. In ſecundo autem exemplo, reſiduum primi numeri eſt 1. ſecundi autem 4. Multiplicatisq; inter ſe his reſiduis 1. & 4. fiunt 4. in ſuprema parte crucis locanda, quia 9. abijci non poſſunt. Reiectis autem 9. ex tota ſumma, ſuperſunt etiam 4.

Secunda probatio multiplicationis per 7.

ALTERVM examen fit per reiectionem 7. ſi nimirum ex iiſdem numeris abijciantur 7. vt in additione diximus, ex quibus in ſuperiori examine præcepimus reijcienda eſſe 9. Exemplum habes in poſtremis duab⁹ multiplicationibus. Sed duo hæc examina ſunt etiam fallacia, propter cauſas ſupra adductas.

Tertia probatio multiplicationis per diuiſionem.

TERTIVM examen certiſſimum eſt, fitque per diuiſionem. Si enim tota ſumma producta diuidatur per alterutrum numerorum multiplicatorum, prodibit neceſſario in Quotiente alter numerus. Quæ quidem diuiſio facillima erit, cum opus non ſit, Quotientes figuras inquirere, cum eæ ordine omnes contineantur in altero numero multiplicato. Sed hoc examen planius intelligetur, cum Diuiſio explicata fuerit.

Alia duo exempla cum probatione per 9.

```
   4058                    3069
     23                      45
  -----                   -----
  12204                   15345
  8136                   12276
  -----                  ------
  93564                  138105
```

First example, cross: 0 (top), 0 (left), 5 (right), 0 (bottom). Second example, cross: 0 (top), 0 (left), 0 (right), 0 (bottom).

In

In priori horum exemplorum primum reſiduum eſt o. Vnde licet ſecundum reſiduum ſit 5. tamen reſiduorum multiplicatio facit o. In poſteriori autem vtrumque reſiduum numerorum multiplicatorum eſt o. Vnde eorum multiplicatio dabit etiam o. atque ita in vtroque exemplo reſiduum numeri producti etiam neceſſario erit o.

Facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras.

Quod ſi vterque numerus multiplicandus; vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodum facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter ſe, & producto numero apponendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ. Vt ſi multiplicandus ſit numerus 3406. per 4000. reiectis cifris 000. multiplicetur datus numerus per 4. & numero producto 1 3 6 2 4. apponantur eædem cifræ, hoc modo. 13624000. Sic etiam, ſi multiplicanda ſint 3040000. per 203000 reiectis 7. cifris ad dextram horum numerorum poſitis, multiplicentur reliqui numeri 304. & 203. inter ſe, & producto numero 61712. apponantur reiectæ illæ ſeptem cifræ, hoc modo. 617120000000.

Hinc fit, ſi numerus aliquis multiplicandus ſit per 10. vel 100. vel 1000. vel 10000. &c. addendas eſſe illi numero ad dextram tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, ſine vlla alia multiplicatione: quia reiectis cifris, ſupereſt ſola vnitas, quæ numerum datum multiplicans eundem numerum producit. Vt 5067. multiplicata per 10. faciunt 50670. Multiplicata autem per 100000. faciunt 506700000. Ita quoq; 3000. multiplicata per 100. faciunt 300000. &c.

DIVISIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT V.

Diuiſio quid.

Quotiens quid.

DIVISIO eſt diſtributio propoſiti numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuiſio numeri 36. per 9. eſt diſtributio eius in nonas partes, nempe à 9. denominatas; quarũ quidem ſingulæ quaternas vnitates continebunt: ita vt 4. ſit numerus ex hac diuiſione productus, qui Quotiens dici ſolet, propterea quod indicat, quoties numerus 9. qui diuidens, ſiue diuiſor appellatur, in diuidendo numero 36. contineatur. Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quotiens 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuiſionem ita quoque deſcribi poſſe. Diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuiſorem continet. Vt in propoſito exemplo perſpicuum eſt.

Quo pacto numeri in diuiſione ſint collocandi.

In diuiſione ſcribitur diuiſor ſub numero diuidendo, non quidem ponendo primam figuram ſub prima, & ſecundam ſub ſecunda, &c. vt in additione, ſubtractione, & multiplicatione factum eſt, ſed contrario ordine. Ponenda enim hic eſt vltima figura diuiſoris ſub vltima figura diuidendi numeri, & penultima ſub penultima, &c. Vt ſi diuidendus ſit numerus 7809. per 47. collocandi erunt numeri, vt in appoſito exemplo apparet.

7809
47

Quod ſi vltima figura diuiſoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocanda erit vltima figura diuiſoris ſub penultima figura numeri diuidẽdi, & penultima ſub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo eſt manifeſtum. Idem faciendum eſt, ſi vltima figura diuiſoris æqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, ſed penultima maior, quam penultima: vel ſi & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, ſed antepenultima diuiſoris maior, quã antepenultima numeri diuidendi: Vel denique, quotieſcunque diuiſor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diudendi exprimunt, quot figuris diuiſor ſcribitur. Quæ omnia in his duobus prioribus exemplis hic poſitis manifeſta ſunt. Quod ſi diuiſor æqualis fuerit illi numero, quem tot figuræ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuiſor ſcribitur, collocandus erit diuiſor ſub eo numero, vt in poſteriore tertio exemplo factum eſſe vides.

37800
47

46800.	476047.	4793.
47	4762	47

Diuiſio quomodò fiat.

In Quotiente non poteſt poni maior numerus quã 9.

Reſiduus numerus ſemper debet eſſe minor diuiſore.

Ita autem diuiſio fiet. Primum quæratur, quoties diuiſor in numero ſibi ſupraſcripto contineatur, & numerus indicans, quoties continetur, ad dexteram numeri diuidendi poſt lineam hanc curuam (ſcribatur; atq; hic numerus (qui ſemper vnica figura ſcribitur, nunquam enim maior numerus, quam 9. poni poteſt in Quotiente; etiamſi diuiſor videatur ſæpius aliquando contineri in numero ſupraſcripto, quam nouies, vt in exemplis patebit) in diuiſorem multiplicetur, productuſque numerus (qui ſeorſum ſcribendus non eſt, ſed memoria retinendus) ex ſupraſcripto numero ſubtrahatur, vt in ſubtractione docuimus, ſcribendo ſingulos numeros reſiduos ſupra figuras, à quibus facta eſt ſubtractio, deletis prius hiſce figuris vna cum diuiſore. Numerus autem totus reſiduus ſupra diuiſorem notatus minor eſſe debet diuiſore, alias erratum eſſet. Id quod etiam in aliis reſiduis obſeruandum erit.

Deinde promouendus erit diuiſor dextram verſus in proximum locum, & iterum quærendum, quoties in numero ſibi ſupraſcripto contineatur, & reliqua facienda, vt prius. Quod ſi in aliqua promotione diuiſor maior fuerit numero ſupraſcripto, ita vt nec ſemel quidem in eo contineatur, ſcribenda erit figura o. poſt illum numerum, quem poſt lineam curuam ſcribendum eſſe diximus, & diuiſor delendus, iterumque promouendus ad proximum locum, & quærendum, vt prius, quoties in numero ſupraſcripto contineatur, &c. Atque ita ſemper promouendus erit diuiſor, donec nullus locus in numero diuidendo ſuperſit, in quem diuiſor poſſit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

Quomodò numerus per vnicã figuram diuidatur.

Qui numerus dicatur ſupra diuiſorem poſitus.

Sit primum diuidendus numerus 76048. per vnicam figuram, vt per 8. Primum inuenio diuiſorem 8. contineri in numero ſupraſcripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus ſupra diuiſorem eſſe ſcriptus, qui exprimitur figura ſupra primam figuram diuiſoris poſita, & omnib. aliis verſus ſiniſtrã, ſi quæ ſint, vt in dato exemplo numerus ſupra diuiſorẽ poſitus eſt 76. Porro ex tabula Pythagorica, quæ ſupra poſita eſt, cognoſces facile, quoties figura diuiſoris in ſupra poſito numero contineatur. Si enim figuram diuiſoris ſumas in vertice tabulæ, & in eius linea, deorſum deſcendendo, accipias numerum ſupra poſitum, vel, ſi is non inuenitur, eo proximè minorem, indicabit figura ei reſpondens in ſiniſtro latere, quoties figura diuiſoris in numero ſupraposi-

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoſcatur, quoties figura diuiſoris in ſuprapoſito numero contineatur.

to contineatur. Vt in dato exemplo, ſub figura 8. non reperitur numerus 76. ſuprapoſitus: ſi igitur accipiatur 72. proximè minor, reperietur in ſiniſtro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8 in 76. atque ita de cæteris. Pono igitur 9. poſt lineam curuam, & multiplico 9. per 8. dicendo, octies 9. faciunt 72. quæ ſubtrahenda ſunt ex numero 76. ſupra diuiſorem poſito, hoc modo. Subtractis 2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figura 6. in numero diuidendo, pono 4. ſupra 6. Subtractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono ſupra 7. quia poni deberet cifra, quæ ſuperuacanea eſſet, eo quod illam nulla alia figura ſequatur verſus ſiniſtram. Atque ita abſoluta eſt vna operatio diuiſionis, remanetque hic numerus 4048. vt in propoſito exemplo vides.

4
76048 (9
8

Deinde promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 0. vt hic vides in ſecundo exemplo, video diuiſorem 8. in numero ſupraſcripto 40. contineri quinquies. Pono igitur 5. poſt figuram 9. iam inuentam, vt in tertio exemplo vides, & dico; quinquies 8. (multiplicando nimirum figuram 5. inuentam per diuiſorem) faciunt 40. quæ ſubtracta ex numero 40 ſupra diuiſorem poſito nihil reliquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit ſecunda operatio diuiſionis, remanebitq; hic numerus 48. vt in eodem tertio exemplo apparet.

4
76048 (9
88

4
76048 (95
88

Rurſus diuiſore promoto in præcedentem locum ſub 4. vt hic in quarto exemplo cernis, reperio diuiſorem 8. nec ſemel quidem contineri in ſupraſcripto numero 4. Pono igitur 0. poſt figuram 5. vltimo inuentam, vt in quinto exemplo factum eſt. Et quoniam figura 0. multiplicata per diuiſorem nihil producit, nihil ſubtrahendum erit ex numero 4. ſupra diuiſorem poſito. Deleto igitur diuiſore, abſoluta erit tertia operatio diuiſionis, remanebitque numerus 48. vt in hoc eodem quinto exemplo manifeſtum eſt.

4
76048 (95
888

4
76048 (950
888

Poſtremo, promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 8. vt hic in ſexto exemplo cernitur, inuenio diuiſorem 8. in numero 48. ſupraſcripto contineri ſexies. Pono igitur 6. poſt figuram 0. vltimo repertam, vt hic in 7. exemplo factum eſt, & dico; ſexies 8. (multiplicando nimirũ figuram 6. inuentam in diuiſorem) faciunt 48. quæ ſubtracta ex numero 48. ſupra diuiſorem poſito nihil relinquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit tota diuiſio, cum nullus alius locus ſuperſit in numero diuidendo, in quem diuiſor poſſit promoueri; nihilque in diuiſione ſuperſit. Itaq; totus quotiens numerus eſt 9506.

4
76048 (950
8888

4
76048 (9506
8888

Poſui tot exempla in hac diuiſione, vt diſtinctius appareret, quidnam in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur: quamuis ſolum extremum ſit inſtar omnium, ita in operatione neceſſe non ſit alia exempla depingere, ſed ſatis ſit, ſi vltimum deſcribatur.

Quotiens quot figuras habeat.

Vides igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuiſor ſub numero diuidendo poſitus eſt. Id quod in omnibus aliis diuiſionibus, etiam per plures figuras inſtitutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuiſor ſub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus per plures figuras diuidatur.

Sit deinde numerus 1832487. diuidendus per numerum 469. qui non vna, ſed pluribus figuris ſcribitur. Hic vt ſciatur, quoties diuiſor in numero ſupraſcripto contineatur, (eſt autem in hoc exemplo numerus 1832. ſupra diuiſorem poſitus.) non eſt id de toto diuiſore inquirendum, ſed ſatis eſt, ſi inueſtigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic eſt 4. contineatur in numero ſuprapoſito,

42
685
1832487 (3
469

Qui numerus dicatur ſupra quancunq; figuram diuiſoris eſſe poſitus.

(Dico autem etiam hic illum numerum ſupra vltimam figuram diuiſoris, vel ſupra quamcunq; aliam, eſſe poſitum, qui exprimitur figura ſupra eam ſcripta, & omnibus aliis verſus ſiniſtram, ſi quæ ſint. Vt in dato exemplo, ſupra figuram 4. poſitus eſt numerus 18. ſupra 9. autem numerus 1832. qui hic eſt 18. hac tamen adhibita cautione, vt non ſemper in Quotiente ponatur figura tot vnitatum, quoties vltima diuiſoris figura in numero ſupra eam poſito continetur, ſed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuiſorem multiplicata eo ordine, quem iam præſcribemus, talem numerum producat, qui & ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubtrahi poſſit, & ſubtractus relinquat numerum (ſi quem relinquas) diuiſore minorem. Itaque (vt ad exemplum propoſitũ veniamus) quamuis vltima figura diuiſoris, quæ eſt 4. cõtineatur in ſup. apoſito numero 18. quater, tamen quia figura 4. multiplicata in totum diuiſorem producit maiorem numerum, quam 1832. qui ſupra diuiſorem poſitus eſt, ita vt ex ſuprapoſito numero ſubtrahi non poſſit, non pono 4. in Quotiente, ſed 3. Quod ſi hæc figura 3. multiplicata in totum diuiſorem produceret maiorem etiam numerum, quam 1832. ponerem 2. loco 3. Et ſi figura 2. multiplicata in diuiſorem adhuc maiorem numerum procrearet, ponerem 1. atque ita ſemper minuam figuram Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniam, quæ in diuiſorem multiplicata numerum gignat, qui ex ſupraſcripto numero detrahi poſſit.

Quomodo ducenda ſit figura Quotientis inuenta in diuiſorem.

Sic autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuiſorem. Primum ducenda eſt in vltimam figuram diuiſoris, & hoc productum ex numero ſupra vltimam figuram illam poſito auferendum, deleta prius illa figura diuiſoris, vna cum numero, ex quo facta eſt ſubtractio. Deinde multiplicanda eſt in figuram penultimam diuiſoris, productumque ex numero ſupra poſito detrahendum, vt prius. Atque hoc modo in omnes figuras diuiſoris multiplicanda eſt, &c. vt in noſtro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita ſubtrahenda ſunt ex 18. numero ſuprapoſito. Demptis 2. ex 8. remanent 6. Deleta ergo figura 4. in diuiſore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. ſupra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex numero ſuprapoſito 63. ſic ſubducenda ſunt. Diſtantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. ſubtrahi nequeunt.) eſt 2. additis 3. fiunt 5. quæ pono ſupra 3. deleta prius figura 6. in diuiſore, vna cum figura 3. in numero diuidendo.

Addo

Addo autem 1.propter diſtantiam à 10.cuius mentio facta eſt, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui ſubtrahitur.) fiuntq; 2.quæ ex 6.ablata relinquunt 4.quæ pono ſupra 6.deleta prius dicta figura 6. Tandē ex 3.in 9.fiant 27. quæ ſic ex ſuprascripto numero 452.detrahuntur. Diſtantia 7. à 10. (quoniam 7.ex 2. detrahi non poſſunt) eſt 3.additis 2.fiunt 5. quæ pono ſupra 2. deleta prius figura 9.in diuiſore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1.ad 2.(nempe ad denas numeri 27.ſubtrahendi)propter dictam diſtantiam à 10.facioque 3.quæ ablata ex 5. (nimirum ex ſecunda figura numeri 452.à quo ſubtractio fit) relinquunt 2. Pono ergo 2.ſupra 5.deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum eſſet, ſi plures figuræ in diuiſore reperirentur. Abſoluta ergo hac ratione erit diuiſionis vna operatio, remanebitque hic numerus 425487. vt in exemplo ſuprascripto vides.

Promoto iam diuiſore in præcedentem locum, ita vt ſingulæ figuræ diuiſoris locum vnum mutent, vt hic vides, intelligo vltimam figuram diuiſoris, nempe 4.in ſuprapoſito numero 42.contineri nouies. Pono igitur 9.poſt figuram 3.in priori operatione inuentam, vt in ſequenti exemplo patet, & dico.ex 9. in 4.fiunt 36.quæ ita ſubtraho ex numero 42.ſuprascripto. Diſtantia 6.à 10. (quoniam 6.ex 2.ſubduci non poſſunt)eſt 4.additis 2.fiunt 6. quæ pono ſupra 2. deleta prius figura 4.in diuiſore, vna cum figura 2.in numero diuidendo.

```
  42
 655
1832487  (3
 4699
  46
```

Addo autem 1.ad 3.(nimirum ad denas numeri 36.ſubtrahendi.)propter dictam diſtantiam à 10. facioque 4. quæ ex 4.ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. rurſus ex 9.in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4.ex 5. remanet 1. Demptis quoque 5.ex 6.remanet etiam 1. Quare deleta figura 6.in diuiſore, vna cum figuris 5.& 6.in numero diuidendo, pono ſupra ſingulas figuram 1. Denique ex 9.in 9. fiunt 81.quæ ita ſubduco ex numero 114.ſuprapoſito. Dempto 1.ex 4.remanent 3. Pono ergo 3.ſupra 4.deleta prius figura 9.in diuiſore, & figura 4.in numero diuidendo. Diſtantia autem 8.à 10. (quia 8.ex 1.ſubduci nequeunt) eſt 2.ſi addatur 1.fiunt 3. quæ ſupra 1. colloco, deleta prius figura 1. Et propter dictam diſtantiam à 10.ſubtraho 1.ab 1.nihilque remanet. Deleo ergo 1. abſolutaque erit ſecunda diuiſionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387.vt in exemplo patet.

```
   1
  63
 421
 6553
1832487  (390
 469999
 4666
  44
```

Rurſus promoto diuiſore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura 9. locetur ſub 8. at 6. ſub 3. & 4.ſub 3. video vltimam figuram diuiſoris, puta 4.nec ſemel quidem in ſuprapoſito numero contineri, quare ſcribo 0.poſt figuram 9.proxime inuentam, deleoque diuiſorem. Abſoluta namque ita erit tertia operatio diuiſoris, remanebitque idem numerus 3387.qui in antecedente operatione reliquus fuit.

Poſtremo promoto diuiſore in primum locum, vt in eodem proximo exemplo manifeſtum eſt, reperio vltimam diuiſoris figuram 4. in ſuprascripto numero 33. contineri ſepties tantum : quia ſi ſumeretur octies, non poſſet à numero 3387. ſuprapoſito fieri ſubtractio numerorū productorum ex 8.in totum diuiſorem. Itaque pono in Quotiente figuram 7. poſt alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet & dico: Ex 7.in 4.fiunt 28.quæ hac ratione ex numero 33.ſuprapoſito demo. Diſtantia 8.à 10.(Nam 8.ex 3.non poſſunt ſubtrahi) eſt 2.ſi addantur 3.fiunt 5. Deleta ergo figura 4.in diuiſore, & figura 3.in numero diuidendo, pono 5.ſupra 3. Addo autem 1.ad 2.(nempe ad denas numeri 28. ſubtrahendi) propter dictam diſtantiam à 10. facioq; 3.quæ ex 3.ablata nihil relinquunt.

```
    1
   631
  42150
  655364
 1832487  (3907. 104/469
  469999
  4666
   44
```

Quare deleta figura 3.rurſus dico: Ex 7.in 6.fiunt 42.quæ ex 58.numero ſuprapoſito ita tollentur. Detractis 2.ex 8.relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6.in diuiſore, & figura 8.in numero diuidendo, pono 6.ſupra 8. Detractis item 4.ex 5.remanet 1. Deleta ergo figura 5.pono 1.ſupra eam, & tandem dico : Ex 7.in 9.fiunt 63.quæ ex 167.numero ſuprapoſito ſunt deducenda hoc modo. Demptis 3.ex 7. ſuperſunt 4. Deleta igitur figura 9.in diuiſore, & figura 7.in numero diuidendo, ſtatuo 4.ſupra 7. Detractis item 6.ex 6.remanet 0. Deleta ergo figura 6.pono 0.ſupra eam. Atque ita tota diuiſio abſoluta eſt, remanetque numerus hic 104. qui poſt Quotientem 3907. collocandus eſt ſupra diuiſorem 469. interiecta linea inter ipſos, vt fiat numerus fractus, hoc eſt, partes 104. ex partibus 469.in quas totum aliquod concipitur eſſe diuiſum. Eodem pacto in aliis diuiſionibus ponitur reſiduum, ſi quod fuerit, ſupra diuiſorem, linea inter ipſos interiecta, vt fiat fractus numerus.

Quid agēdum ſit cū numero ex diuiſione relicto.

Imo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus ſupra diuiſorem, interiecta dicta linea inter ipſos, vt fiat numerus fractus; Vt ſi diuidendi ſint 48.aurei in 60.milites, fiet numerus fractus, quem hic vides eſſe appoſitū, ita vt quilibet accipiat 48.partes ex 60.in quas vnus aureus intelligitur eſſe diuiſus. Quid autem ſit huiuſmodi fractus numerus, & quomodo eius valor exploretur tam in monetis, quam in ponderibus, aut menſuris, prout numerus diuidendus ſignificat monetam, aut pōdera, menſuraſue, dicemus in tractatione fractorum numerorum.

```
48
60
```

Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidēdus, quid agendum.

Sunt nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totum diuiſorem. Nam primum eam multiplicant in primam figuram diuiſoris, productumque ex numero ei figura ſuprapoſito auferunt: Deinde eandem ducūt in ſecundan figuram diuiſoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam peruenerint, productoſque numeros ex ſuprascriptis numeris tollunt. Vt ſi diuidendus ſit numerus 3387. per 469 (quemadmodum in vltima operatione ſuperioris exempli factum eſt.) poſtquam repererunt, vltimam figuram diuiſoris, nimirum 4.contineri ſepties in ſuprapoſito numero 33. (Nam octies comprehendi non poteſt, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7.non dicunt, ex 7.in 4.fiunt 28.vt nos fecimus, ſed; Ex 7.in 9.fiunt 63.quæ ita ex ſuprapoſito nume-

```
 10
2924
3387  (7
 469
```

Quomodo nonnulli ducant figurā Quotientis inuentam in diuiſorem.

ro 3387. ſubtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuiſore, & figura 7. in numero diuidendo ponunt 4. ſupra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda ſupra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ita demum ex ſuprapoſito numero 332. Ablatis 2. ex 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuiſore vna cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt 0. ſupra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non poſſunt ex 3. ſumunt diſtantiam 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda ſupra 3. prius deleta. Propter dictam autem diſtantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. ſupra 3. deleta prius figura 3. Poſtremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda ſupra 9. ſi prius deleatur in diuiſore figura 4. vna cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet: abſolutaque erit operatio. Hac porro ratione plerunque fit, vt non ſcribantur tot figuræ ſupra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuiſorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuiſoris, deinde in penultimam, &c, vt ſupra explicauimus. Id quod exemplis addiſces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis eſt in vſu, faciliusq; in eo error corrigi poteſt, ſi quãdo nimis magna figura poſita fuerit in Quotiente, vt mox docebimus.

In quo difficultas diuiſionis conſiſtat.

Hoc exemplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerum quotcunque figurarum. Totus enim labor in eo poſitus eſſe videtur, vt cognoſcatur, quoties vltima figura diuiſoris in numero ſupraſcripto ſumi debeat, vt videlicet figura hæc Quotientis in omnes figuras diuiſoris multiplcata numerum procreet, qui ex ſuprapoſito numero ſubduci poſſit, numeruſque poſt hanc ſubtractionem relictus ſit diuiſore minor.

Quando in Quotiẽte ſumpta eſt figura nimis parua, vel magna quid agendum.

Quod ſi quando contingat, (id quod non raro ijs euenire ſolet, qui parum in hoc negotio ſunt exercitati) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuiſoris multiplicata, productiſque ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubductis, numerus relictus maior ſit diuiſore, vel certe non omnes producti ſubtrahi poſſint; ſi id quidem accidat in principio diuiſionis, facile error corrigetur, ſi accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc ſunt figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem poſitæ, etiam ſi deletæ ſint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuiſoris producti iterum poſſint ſubduci, præſertim ſi figuræ illæ numeri diuidendi deletæ ſcribantur ordine ſupra alias figuras deletas, diuiſor etiam ſub diuiſore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis faceſſant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, nõ tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoſcãtur figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem in illa operatione poſitæ ab aliis figuris; quippe quæ iam deletæ ſint, & cum aliis permixtæ, ac ſupra numerum diuidendum poſitæ. Quare ne tunc cogamur diuiſionem totam iterare, (quod neceſſario faciendum eſſe omnes docent. Id quod permoleſtum eſſet, præſertim ſi iam plures operationes diuiſionis forent abſolutæ.) excogitauimus huiuſmodi remedium.

Si figura Quotientis accepta ſit nimis parua, ita vt numerus relictus poſt ſubtractionẽ numerorum, qui ex multiplicatione illius figurę in omnes figuras diuiſoris producuntur, maior ſit diuiſore ſubtrahemus diuiſorẽ ex numero relicto toties, quoties poſſumus, donec numerus relinquatur minor diuiſore, & quoties is ſubtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotiẽtis addemus. Si vero figura Quotiẽtis accepta ſit nimis magna, adeo vt poſt ſubtractionẽ aliquot numerorum, q. ex multiplicatione illius figurę in aliquot figuras diuiſoris, pducuntur, in aliquẽ numerum productum incidamus, qui amplius ſubduci non poſſit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuiſoris deletas, quarum nimirum numeri producti ſubtracti iam ſunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine ſupra illas figuras diuiſoris ſcribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione reſtituetur numerus, qui ſupra diuiſorem poſitus erat ante illam operationem. Quocirca cum iterum per diuiſorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confuſionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in quotiente, quæ vna vnitate minor ſit, quam prior accepta. Et ſi hæc figura etiam nimis magna ſit, reſtituemus eodem modo numerum ſupra diuiſorem collocatum, & accipiemus aliam figuram minorem. Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quæ in omnes figuras diuiſoris multiplicata numeros producat, qui & ſubtrahi poſſint, & numerum relinquant diuiſore minorem. Sed hæc omnia hoc propoſito exemplo fient magis perſpicua.

Exemplũ correctionis, quando nimis parua figura in Quotiente accepta eſt.

Sit diuidendus numerus 1623149. per 2899. Collocato diuiſore ſub numero diuidendo, ponamus quempiam parum exercitatum accepiſſe in Quotiente figuram 4. Vnde ſi dicamus. Ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exemplo explicauimus) ex 16. remanent 8. Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus ſubductis ex 82. remanent 50. Rurſus ex 4 in 9. fiunt 36. quibus ſublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior eſt diuiſore.

4
863
8075
1623149. (4
2899

Nimis ergo parua eſt figura accepta 4. Quare deleto reſiduo hoc, vna cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. numeri diuidendi deletas ſupra alias figuras deletas, & diuiſorem deletum renouatum ſub diuiſore collocabimus, vt in proximo exemplo factum eſſe vides. Qua ratione reſtitutus erit totus numerus diuidendus 1623149. vna cum diuiſore, ac ſi nondum inchoata eſſet diuiſio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quam 4. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & figura 1. in numero diuidẽdo, q̃ decem ſignificat reſpectu figuræ 6. dicemus rurſum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus ſubtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. ſubductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuiſore minor eſt. Recte ergo accepta eſt figura 5.

6
423
8631
18078
1623149 (4
2899
2889

1
23
678
4236
8631
18078
1623149 (45
28999
2899
289

Sed

Sed vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente poſitam eſſe figuram 6. Hæc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. ſit nimis magna. Quamobrem deleto reſiduo hoc 4. vna cum accepta figura 6. ſcribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas ſupra eaſdem, & figuram 2. in diuiſore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidendus ab initio propoſitus, vna cum diuiſore reſtituatur, ac ſi diuiſio nondum eſſet inchoata, vt in hoc exemplo appoſito factum eſſe vides. Ponemus ergo, vt in ſequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quam 6. in Quotiente, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ſublatis ex 16. relinquuntur 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 6. dicemus rurſum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus detractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 223. remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti ſubduci, relictuſq; eſt numerus diuiſore minor. Quare recte accepta eſt in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agendum ſit, quando in principio diuiſionis accepta eſt figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, ſi in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta ſit.

Exempli correctionis, quando nimis magna figura in Quotiente accepta eſt.

4
1623149 (6
2899

6
14
1623149 (6
2899

2
1
2
63
14786
1623149 (65
2899
2

Promoueatur ergo diuiſor in ſuperiori exemplo, in quo nimis parua figura ſumpta fuit in principio diuiſionis, vt ibidem cernis in tertia poſitione exempli. Fingamus autẽ, vltimam diuiſoris figuram 2. in ſupra poſito numero 17. contineri ſepties, atque adeo in Quotiente poſt figuram 5. inuentam ſcribi 7. Quo poſito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quæ ſupra 7. ſcribo, deleta prius figura 2. in diuiſore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo. Deinde rurſus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferri nequeunt. Eſt ergo figura 7. accepta nimis magna. Vt igitur reſtituatur numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, ſi forte is inter tot figuras deletas non internoſceretur, muliplicanda eſt figura 7. accepta in figuram 2. in diuiſore deletam, & producto addenda figura 3. ſupra dictam figuram diuiſoris poſita. Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. ſi addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. ſcribemus ſupra eam numerum 7. & ſupra figuram 1. deletam ponemus 1. atq; ita reſtitutus erit numerus 17. à quo facta eſt ſubtractio, vt in hoc appoſito exemplo apparet. Poſita autem figura 2. ſub figura 2. in diuiſore deleta, vt etiam diuiſor reſtituatur, vt in eodem hoc exemplo manifeſtum eſt, concipiamus vltimam figuram diuiſoris 2. contineri in 17. non ſepties, ſed ſexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiente, poni figuram 6. vt in exemplo hoc altero apparet. Quo poſito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanent 5. Deleta ergo figura 2. in diuiſore, vna cum figuris 7. & 1. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 7. & dicemus. Ex 6. in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, vna cum figuris 3. & 5. in numero diuidendo, ſcribemus 5. ſupra 3. & rurſus dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quibus ſubductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuiſore vna cum numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. ſupra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quæ ex 24. ſubtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam eſt figura 6. in Quotiente. Quare vt ſciamus, quinam numerus ſupra diuiſorem collocatus fuerit, antequam hanc operationem inciperemus, multiplicabimus figuram dictam 6. in figuras diuiſoris deletas, vt dictum eſt. Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ ſupra figuram diuiſoris 9. deletam poſita ſunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. ſcribemus ſupra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ ſeruauimus, fiunt 53. Scribemus ergo 3. ſupra 5. & retinebimus 5. Poſtremo ex 6. in 2. fiunt 12. Additis 5. quæ reſeruauimus, fiunt 17. quæ ſupra 15. collocabimus: atque ita reſtitutus erit numerus, qui ante hanc operationem ſupra diuiſorem poſitus erat. Reſtitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuiſore deletis, atque deleta figura 6. in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exemplo vides. Quoniam vero ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 17 remanent 7. delebimus figuram 2. in diuiſore, vna cum figura 1. in diuidendo numero, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5. in 8. fiunt 40. quib. ſubductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuiſoris 8. vna cum figura 7. in numero diuidendo, ſcribemus 3. ſupra eam, rurſuſque dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 336.

1
233
678
4236
5631
15078
1623149 (457
28999
2899
289

1
17
233
678
4236
5631
18078
1623149 (457
28999
2899
289

2
15
178
233
6782
4236
5631
18078
1623149 (4576
28999
289
2

17
153
178
2336
6782
4236
5631
18078
1623149 (4576
28999
2899
289
289
2

remanent 291. Deleta igitur figura diuiſoris 9. vna cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubtractis ex 2914. relinquuntur 2869. qui numerus diuiſore minor eſt. Recte ergo accepta eſt figura 5.

Promoto tandem diuiſore in proximum locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuiſoris figuram 2. in ſupraſcripto numero 28. contineri ſepties. Poſita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo appoſito vides, dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus ablatis ex 28. remanent 14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus ſubductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus demptis ex 8469. remanent 8406. qui numerus maior eſt diuiſore; & proinde figura accepta 7. nimis parua eſt. Quare ſubtrahemus diuiſorem ex dicto reſiduo, quoties poſſumus, & tot vnitatibus maiorem figuram, quam 7. ſcribemus in Quotiente, quoties diuiſor detractus fuerit. Ita autem diuiſorem detrahemus in hoc ſequenti exemplo, reſtituto prius diuiſore. Ablatis 2. ex 8. remanent 6. Item demptis 8. ex 64. remanent 56. Item ſubductis 9. ex 560. remanent 551. Tandem detractis 9. ex 5516. remanēt 5507. qui numerus adhuc maior eſt diuiſore. Detractis igitur 2. ex 5. remanent 3. Demptis autē 8. ex 35. remanent 27. Item ſubductis 9. ex 270. remanent 261. Deniq; ſubtractis 9. ex 2617. relinquuntur 2608. qui numerus minor iam eſt diuiſore. Quia ergo bis detractus eſt diuiſor, ſcribemus in quotiente, deleta prius figura 7. numerū 9. duab. videlicet vnitatibus maiorem, quā 7. Itaq; totus numerus Quotiens eſt 559. Coacti autem ſumus rē tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, q.d in ſingulis operationib. relinquatur, quāuis ſolum hoc vltimū inſtar ſit omniū. Et licet tot verbis remedium iſtud expoſuerimus, vſus tamen facile docebit, rem eſſe breuiorem ac faciliorem, quam vt verbis exprimi poſſit.

Hoc ergo remedium, ſi adhibeatur, quotieſcunq; in Quotiente figura maior, aut minor, quam oportet, ſumpta fuerit, incredibile eſt, quam expedite numerus quilibet per quemcunque numerum diuidatur: quia hac ratione non opus eſt, vt ſimus nimis anxii, qualem figurā in quauis operatione ſcribere debeamus in Quotiente, cum illo remedio errorem, ſi quis commiſſus erit, ſine vllo fere labore corrigere poſſimus: ita vt hic modus diuidendi, quem hactenus præſcripſimus, ſit inter omnes, qui ab aliis auctoribus explicari ſolent, præſtantiſſimus, atque expeditiſſimus, ac propterea ſumma diligentia, & cura adhibenda, vt in eo ſeſe exerçeat is, qui in arte ſupputandi cupit eſſe excellens, & præſtans.

2
38
179
1536
1751
2336
6782
4236
5631
180759
1623149 (45765
289999
28999
289
289
228

8
19
24
364
1790
1536
1751
2336
6782
42360
36316
1807596
1623149 (457657
289999
28999
289
289
228

2
3
5
66
87
195
246
384
1790
15360
17511
23360
67821
423608
563167
1807596
1623149 (4576579
289999
28999
2899
289
228
28

Facilior ratio diuiſionis. Sed quia, ſi prædictum remedium adhibeatur, diuiſio in nimis magnam molem excreſcit, vti poterimus hoc alio artificio. Abſoluta prima operatione diuiſionis, ſcribatur reſiduum ſeorſum vna cum ſequente figura numeri diuidendi, & ſub hoc numero diuiſor reponatur, incipiendo ab vltima figura ad dextram, & verſus ſiniſtram procedendo: Ac rurſus ſecunda operatio diuiſionis expediatur; qua expedita, reſiduum iterum ſeorſum ſcribatur, cum inſequenti figura numeri diuidendi, atq; ita deinceps vſq; ad finem. Hac enim ratione omnis confuſio figurarum deletarum vitabitur. Nam quando in aliqua harum partialium diuiſionum pro Quotiente ſumpta fuerit figura nimis magna, aut parua, facile error corrigetur, ſi illa partialis diuiſio repetatur, quod moleſtum non erit, cum opus non ſit totam diuiſionem ab initio repetere. Exemplum habes in diuiſione numeri 2596860019. per 38748. Vt autem ſcias, quamnam figuram numeri diuidendi poſt quodlibet reſiduum ſcribere debeas, recte feceris, ſi ſub vltima figura primæ operationis, vt in dato exemplo ſub 6. punctum poſueris, vt indicet in ſecunda operatione aſſumendam eſſe figuram poſt illud punctum. Sub hac figura aliud punctum eſt ſignandum, vt ſignificet in tertia operatione ſumendam eſſe figuram poſt illud punctum, &c. veluti hic obſeruatum eſſe vides.

Opera-

Operatio. I.

2 1
3729
71448
259686 (6
38748

Diuidendus 2596860019
....
Diuiſor 38748

Operatio 2.

7
184
65004
271980 (7
38748

Operatio 3.

7440 (0
38748

Operatio 4.

3565
46763
74401 (1
38748

Operatio 5.

7
1880
84277
356539 (9
38748

Totus Quotiens. 67019 $\frac{7807}{38748}$

Probatio per 9. totius exempli.

1
3 X 5
1

Poſitis ergo ordine omnibus Quotientibus, habebitur totus Quotiens 67019. Habet hoc artificium commoditatem hanc, quod ſi probatio non ſuccedat ex ſententia, non neceſſe ſit totam diuiſionem repetere, ſed ſatis eſt, vt ſingulæ operationes, quæ paucæ ſunt, examinentur, & illa in qua error fuerit deprehenſus, repetatur. Atq; hoc artificium facile eſt, & expeditum, ideoq; à tyronibus adhibendum cenſeo.

Quomodo alij diuiſionem abſoluant.

Nam quod alii multiplicent figuram in Quotiente poſitam in totum diuiſorem, productumq; numerum ſub diuiſore collocent, (prima figura poſita ſub prima, & ſecunda ſub ſecunda, &c.) vt eum ex numero ſupra diuiſorem poſito detrahant, res eſt certa illa quidem, ac facilis, ſed quæ longiorem efficiat diuiſionem, quam par eſt, eumq;, qui diuidit, non parum remoretur. Vt enim numerum hunc verbi gratia, 40689. per 129 8. diuidant, poſtquam in prima operatione poſuerunt in Quotiente figuram 3. multiplicant eam in diuiſorem, primum quidem in figuram 8. dicendo. Ex 3. in 8. fiunt 24. ſcribunt ergo 4. ſub 8. & ſeruant 2. Deinde ex 3. in 9. fiunt 27. Additis 2. quæ ſeruata ſunt, fiunt 29. Poſitis ergo 9. ſub 9. ſeruant 2. &c. Poſt hæc, deleto diuiſore, auferunt 4. ex 8. collocantq; reſiduum 4. ſupra 8. deletis prius figuris 4. & 8. &c. Promoto deinde diuiſore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius abſoluimus, cum numerum productum non ſcribamus ſub diuiſore. Habet tamen modus iſte hanc commoditatem, quod ex ipſa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiente ſit nimis magna, nec ne. Nam ſi productus numerus ex multiplicatione figuræ illius in diuiſorem ſubtrahi poſſit ex numero ſupra diuiſorem poſito, numerumque relinquat diuiſore minorem, figura illa recte accepta eſt; ſi minus, erratum eſſe, dubitandum non eſt.

45
1741
40689 (31
12988
3894
129

Commditas in hoc modo diuidendi.

Alia ratio diuiſionis facilis.

Fiet autem hic modus expeditior, ſi pro diuiſore ponatur, productus numerus ex figura Quotientis in diuiſorem, fiantq; partiales diuiſiones, vt paulo ante diximus, vt hic in eodem exemplo patet.

Operatio 1.

259686 (6
232488
———
27198

Operatio 2.

271980 (7
271236
———
744

Operatio 3.

7440 (0

Operatio 4.

74401 (1
38748
———
35653

Operatio 5.

356539 (9
348732
———
7807

Diuidendus 2596860019
Diuiſor 38748
Quotiens 67019

Verbi g. in prima operatione diuidendus eſt numerus hic 259686. Si igitur ſub ipſo ſcriberetur diuiſor, caderet figura 8. ſub 6. & figura 3. ſub 5. Et quia 3. in 25. numero ſuprapoſito cõtinentur ſexies, (nam figura 7. eſſet nimis magna) dicemus, ex 6. in 8. fiunt 48. ponemus 8. ſub 6. ſeruando 4. Deinde ex 6. in 4. fiunt 24. additiſq; 4. quæ ſeruauimus, fiunt 28. Poſitis ergo 8. ſub 8. ſeruentur 2. & ſic deinceps, donec figura Quotientis in omnes figuras diuiſoris ducta ſit. Facta autem ſubtractione, fit reſiduum 27198 &c. In tertia operatione, quia numerus diuidendus 7440. minor eſt diuiſore, poſita eſt figura 0. in Quotiente. Quod ſi quando productus numerus maior ſit diuidendo in aliqua partiali diuiſione, figura Quotientis accepta fuit nimis magna: ideoq; repetenda erit illa diuiſio partialis. Hoc modo ſi diuiſio inſtituatur, nulla erit inter figuras deletas confuſio, licet futura ſit aliquanto longior illo modo, quem in principio tradidimus.

Alius modus abſoluendi diuiſionem.

Quod etiam alii diuiſorem prius per ſingulas figuras ſignificatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem ſcribendo, vt inter hos productos quærant numerum poſitum ſupra diuiſorem, eoque inuento, vel certe, ſi non inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicantem illi aſcriptam in Quotiente ponant, atque numerum acceptum ex numero ſupra diuiſorẽ poſito ſubducant; res etiam

iam facilis eſt, & commoda, præſertim tyronibus, & parum in hac arte exercitatis, ſed nimis longa, ac moleſta: Nam vt ver. g. diuidant hunc numerum 97086. per 37. collocant diuiſorem iuxta 1. Eundem deinde duplicatũ iuxta 2. triplicatum vero iuxta 3. &c. Poſtea inter hos numeros inquirunt numerum 97. ſupra diuiſorem poſitum, quem quoniam non inueniunt, accipiunt 74. proxime minorem, & figuram 2. è regione eius collocatam ponunt in Quotiente, auferuntque 74. ex 97. ſcribentes reſiduum 23. ſupra 97. deletis prius figuris 7. & 9. vna cum diuiſore.

37	1
74	2
111	3
148	4
185	5
222	6
259	7
296	8
333	9

23
97086 (26
377
3

Promoto deinde diuiſore, quærunt inter eoſdem numeros hunc numerum 230. poſitum ſupra diuiſorem: quo non inuento, accipiunt proxime minorẽ 222. collocantque figuram 6. è regione eius poſitam in Quotiente, & denique numerum eundem 222. ex 230. ſubducunt. Atque hoc modo progredientes totam diuiſionem perficiunt. Sed quis non videt, diuiſionem hac ratione longius, quam par eſt, produci, præſertim, ſi diuiſor quatuor, aut quinq;, vel etiam pluribus figuris ſcribatur? Item quando Quotiens habet duas tantũ aut tres figuras, non video, cur fruſtra diuiſor in omnes nouem figuras ducatur.

Diuiſio per Dandam. Maxime tamen mihi probatur modus ille diuidendi, quem Itali (per Dandam) vocant, qui ſecuriſſimus eſt: quia ſtatim operatio corrigi poteſt, ſi forte in Quotiente poſita eſt figura nimis magna, vel parua, & nunquam figuræ in numero diuidendo delentur. Modus autem eſt iſte, aliquantulum ab eo, quo alii vtuntur diuerſus, ſed commodior meo iudicio, ac breuior. Sit ver. g. diuidendus numerus 1904639. per 2978. Poſito numero cum linea curua (ſcribatur diuiſor ſupra locum, vbi quotiens reponi ſolet, vt multiplicationes reddantur faciliores. Deinde ſub 6. vbi ſtaret figura 8. diuiſoris, ſi ſub diuidendo numero collocaretur, vt in principio huius cap. diximus, ponatur punctum ad denotandum, ibi inchoandam eſſe ſubtractionẽ. Igitur quoniam 2. vltima figura diuiſoris cõtinetur in 19. ſexies (q̃a nouies, vel octies, vel ſepties, totus diuiſor in numero 19046. contineri non poteſt) ponenda eſt figura 6. in Quotiente, quæ in diuiſorẽ ducenda eſt, & ſimul ſubtractio facienda, hoc ordine. Ex 6. in 8. fiunt 48. q̃ ex numero 19046. ſubtrahenda ſunt: ſed quia figura 8. maior eſt quam 6. auferemus 8. ex 10. reſiduoq; 2. addemus 6. ſummamque 8. ſub 6. collocabimus, ſeruando 5 in mente (nimirum 4. propter 40. & 1. propter 10. à quibus ſubtracta fuerunt 8.) Deinde ex 6. in 7. fiunt 42. & additis 5. ſeruatis, fiunt 47. ſubtractis ergo 7. ex 10. remanent 3. additiſque 4. fiunt 7. quæ ſub 4. collocentur, ſeruatis interim 5. propter 40. & 10. Item ex 6. in 9. fiunt 54. additiſque 5. ſeruatis, fiunt 59. ſubtractis autem 9. ex 10. (quia ex o. ſubtrahi nequeunt) remanet 1. additaq; figura o. fit 1. ſub o. ſcribenda, ſeruatis interim 6. ꝓpter 50. & 10. Poſtremo ex 6. in 2. fiunt 12. additiſq; 6. q̃ ſeruauimus fiunt 18. quib. ſubtractis ex 19. remanet 1. ſub 9. ponẽda.

Diuiſor	2978	
1904639.	(639 $\frac{1697}{2978}$	
...		
1178..	17868	productı.
2849.	8934	
1697	26802	

Hac abſoluta operatione, apponantur duo puncta ſub figura 3. vt indicent, inde incipiendam eſſe ſubtractionem. Et quia 2. continentur in 11. ter, ponenda eſt in Quotiente figura 3. (quia figura 5. aut 4. foret nimis magna) quæ iterũ in totum diuiſorem ducenda eſt eodem ordine, videlicet ex 3. in 8. fiunt 24. ſubtractis 4. ex 10. (quoniam ex 3. ſubtrahi nequeunt) remanent 6. additiſq; 3. fiunt 9. ſcribenda ſub 3. retentis mente 3. propter 20. & 10. Præterea ex 3. in 7. fiunt 21. additiſq; 3. quæ retinuimus, fiunt 24. Demptis autem 4. ex 8. ſuperſunt 4. ponenda ſub 8. retentis 2. propter 20. Rurſus ex 3. in 9. fiunt 27. additiſq; 2. quæ retenta ſunt fiunt 29. Demptis 9. ex 10. quia ex 7. tolli non poſſunt, remanet 1. additiſq; 7. fiunt 8. ſub 7. ſcribenda, reſeruatis interim 3. propter 20. & 10. Deniq; ex 3. in 2. fiunt 6. quæ cum 3. ſeruatis, faciunt 9. quibus ſublatis ex 11. remanent 2. reponenda ſub 1.

Diuiſor	2978	
1904639	(639 $\frac{1697}{2978}$	
...		
1178..		
2849.	17868	productı.
1697	8934	
	26802	

His peractis, ponantur tria puncta ſub 9. vt ſciamus, inde inchoandam eſſe ſubtractionem. Et quia 2. continentur in 28. nouies, ſcribemus in Quotiente figuram 9. q̃ in totum diuiſorem ducetur hoc ordine. Ex 9. in 8. fiunt. 72. ſubtractis ergo 2. ex 9. ſuperſunt 7. ſcribenda ſub 9. retentis interim 7. propter 70. Deinde ex 9. in 7. fiunt 63. quæ cum 7. ſeruatis efficiunt 70. ſubducta ergo figura o. ex 9. remanẽt 9. ſcribenda ſub 9. ſeruatis interim 7. propter. 70. Amplius ex 9. in 9. fiunt 81. additiſque 7. ſeruatis efficiuntur 88. Ablatis autem 8. ex 10. remanẽt 2. additiſque 4. fiunt 6. quæ ſub 4. ſcribantur, retentis in mente 9. propter 80. & 10. Poſtremo ex 9 in 2. fiunt 18. quæ cum 9. retentis efficiunt 27. quibus ablatis ex 28. remanet 1. ponenda ſub 8. Totus igitur Quotiens eſt 639. & vltimum reſiduum 1697. eſt illud, quod ex diuiſione remanet, quemadmodum etiam in ſuperioribus partialibus operationibus vltimum reſiduum 7807. eſt illud, quod in diuiſione ſupereſt.

Itaq; vt vides, tota difficultas huiuſmodi in eo poſita eſt, vt memoria retineantur denæ numerorũ productorum ex figura Quotientis in figuras diuiſoris. Et ſane modus hic pulcherrimus eſt, quia diſtincte videntur reſidua operationũ: ita vt ſi forte in Quotiente accepta eſſet figura nimis magna vel parua, facile figura illa, vna cum reſiduo falſo deleri poſſit, aſſumique alia figura ſine vlla confuſione.

Quod ſi moleſtum videatur, retinere illas denas numerorũ productorum, ſcribi poſſunt producti ſeorſum, vt in exemplo vides ſub quotiente. Nam ex 6. in diuiſorem fit numerus 17868. & ex 3. in eundem diuiſorem numerus 8934. atque ex 9. in eundem diuiſorem numerus 26802. Ita enim facilis erit ſubtractio, cum præcedenti figuræ ſit interdum addenda ſola 1. quando nimirum ex 10. facta eſt ſubtractio. Neq; vero mihi placet, vt producti inter reſidua collocentur (quod nonnulli faciunt) quia confuſio ſuboriretur inter numeros, cum tamen ſubtractiones non multo faciliores reddantnr.

Prima probatio diuiſionis per 9. Reſtat vt examen diuiſionis tradamus, quod triplex eſt. Primum fit per abiectionẽ 9. hoc pacto. Reiectis 9. ex diuiſore quoties fieri poteſt, vt in additione docuimus, ponatur reſiduum in ſiniſtra parte crucis. Reiectis item 9. ex Quotiente, quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum in dextra parte crucis. Multiplicatis deinde hiſce duobus reſiduis inter ſe, & ex producto abiectis 9. quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum hoc, ſi in diuiſione

ſione nihil remanſit, in ſuperiore parte crucis. Si autem in diuiſione reſiduum aliquod fuit, coniungendum eſt vltimum illud reſiduum cum figuris huius reſidui diuiſionis, & ſemper abijcienda 9. iſtudque reſiduum in ſuperiori parte crucis reponendum. Poſtremo reiectis 9. ex numero diuidendo, quoties fieri poteſt, ponatur reſiduum in parte inferiori crucis. Si enim reſiduum hoc æquale fuerit illi reſiduo in ſuperiori parte crucis collocato, recte peracta eſt diuiſio, ſin minus, non recte.

Itaque hæc diuiſio ita examinabitur. Reiectis 9. ex diuiſore 23. remanent 5. Abiectis item 9. ex Quotiente 176. remanent quoq; 5. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 5. & 5. inter ſe, gignuntur 25. ex quibus ſi abiiciantur 9. remanent 7. quæ (quoniam nihil ex diuiſione relictum eſt) in ſuperiore parte crucis collocanda ſunt. Et quia reiectis 9. ex numero diuidendo 4048. relinquuntur etiam 7. recte peracta eſt diuiſio.

1
131
273
4048 (176
2333
22

7
5 X 5
7

Hæc autem alia diuiſio hac ratione examinabitur. Reiectis 9. ex diuiſore 236. remanent 2. Reiectis item 9. ex Quotiente 139. remanent 4. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 2. & 4 inter ſe, fiunt 8. ex quibus non poſſunt reiici 9. Hæc ergo 8. ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in ſuperiori parte crucis: ſed quoniam ſuperſunt 130. dicemus 8. & 3. faciunt 11. Reiectis 9. remanent 2. Addito 1. fiunt 3. in ſuperiori parte crucis collocanda. Et quoniam, reiectis 9. ex numero diuidendo 45678. remanent quoq; 3. recte facta eſt diuiſio.

1
2
183
434
22030
45678 (193
23666
233
2

3
2 X 4
3

Secundum examen fit per abiectionem 7. vt in additione docuimus, dummodo ex reſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit eodem modo reijciantur & 7. reſiduū adijciatur ad illud reſiduum, quod in examine per abiectionē 9. addendum eſſe diximus reſiduo diuiſionis, atque ex aggregato reijciantur 7. *Secunda probatio diuiſionis per 7.*

Vt prior proximarum duarum diuiſionum ita examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 23. remanent 2. Item abiectis 7. ex Quotiente 176. remanet 1. Multiplicatis autem hiſce reſiduis 2. & 1. inter ſe, procreantur 2. in ſuperiori parte crucis reponenda, quia nihil ex diuiſione ſuperfuit. Quia vero reiectis 7. ex diuidendo numero 4048. remanent etiam 2. recte facta eſt diuiſio.

2
2 X 1
2

Poſterior vero diuiſio hoc modo examinabitur. Reiectis 7. ex diuiſore 236. remanent 5. Item abiectis 7. ex Quotiente 193. ſuperſunt 4. Multiplicatis autem duobus hiſce reſiduis 5. & 4. inter ſe, & ex producto 20. reiectis 7. relinquuntur 6. quæ, ſi nihil remanſiſſet in diuiſione, collocanda eſſent in parte crucis ſuperiore: ſed quoniam reliquus fuit numerus 130. ex quo ſi abiiciantur 7. ſuperſunt 4. quæ addita ad vltimum reſiduum ſeruatum 6. faciunt 10. à quibus ſi reijciantur 7. remanent 3. in ſuperiore parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet, ſi ex diuidendo numero 45678. abijciantur 7. Recte ergo diuiſio facta eſt. Verum vtrumq; hoc examen fallax eſſe poteſt, ob rationem dictam in ſuperioribus.

3
5 X 4
3

Tertium examen, quod certum eſt, & cui nulla fallacia ſubeſſe poteſt, fit per multiplicationem. Si namq; diuiſor, & quotiens inter ſe multiplicentur, & numero producto addatur reſiduum diuiſionis, ſi quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, ſi erratum in diuiſione non eſt. Vt poſterior duarum ꝓximarum diuiſionum ita examinabitur. Multiplicato diuiſore 236. per Quotientem 193. antequam producti numeri addantur inter ſe, ſcribatur ſub ipſis numerus reſiduus diuiſionis 130. prima nimirum figura ſub primo loco & ſecunda ſub ſecundo, &c. Si enim numeros productos & hoc reſiduum in vnam ſummam colligamus, vt in Multiplicatione docuimus, producetur numerus 45678. qui diuiſus fuit. *Tertia probatio diuiſionis per multiplicationem.*

236
193
708
2124
236
130
45678.

Expedit interdum, cum, facta operatione aliqua in diuiſione, dubitas, num in re aliqua peccaueris, necne, vt diuiſionem vſque ad eum locum perductam examines, ne fruſtra vlterius progrediaris, ſi forte iam error aliquis commiſſus ſit. Examinabis autem partem illam diuiſionis non aliter, ac alias diuiſiones, ſi omittas figuras numeri diuidendi ſub quibus nondum diuiſor poſitus eſt. Vt in hac diuiſione, facta prima operatione, eam examinabis per abiectionem 9. Reiectis 9. ex diuiſore 2898. remanet 0. Item reiectis 9. ex Quotiente 2. remanent 2. Multiplicatis autem inter ſe hiſce reſiduis 0. & 2. producitur 0. quæ cifra in ſuperiori parte crucis collocanda eſſet, niſi aliquid ex diuiſione ſupereſſet: ſed quoniam ſuperſunt 913. reijcienda ſunt, 9. ex hoc reſiduo. Quo facto, remanebunt 4. in ſuprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, ſi reijciantur 9. ex numero 6709. hactenus diuiſo, omiſſis figuris 456. ſub quibus nondum poſitus eſt diuiſor. *Expedit interdum, vt diuiſio nondum abſoluta examinetur.*

191
2123
6709456 (2
2898

4
0 X 2
4

Quod ſi diuiſor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuiſio, ſi à numero diuidendo remoueantur tot figuræ ad dexteram, quot cifras habet diuiſor, & reliquus numerus per diuiſorem, demptis prius illis cifris, diuidatur; Sed reſiduum huius diuiſionis, ſi quod erit, præponendum eſt verſus ſiniſtram figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autem erit diuiſor totus vna cum cifris. Et ſi in diuiſione nihil remanſit, erunt figuræ ablatæ pro numeratore fractionis ponendæ. *Facilitas diuiſionis quando diuiſor habet in principio aliquot cifras.*

2
275
456
13946 (367 $\frac{7601}{38000000}$
3888
33

Vt

Vt ſi numerus 13946007693. diuidendus ſit per 38000000. auferemus ex eo priores ſex figuras 007693 ad dexteram, quot nimirum cifræ ſunt in principio diuiſoris; & reliquum numerum 13946. per 38. diuidemus, omiſſis illis ſex cifris, vt in hoc appoſito exemplo factum eſt. Quoniam vero in diuiſione nihil relictum eſt, ſcribemus ſupra diuiſorem numerum ablatum 7693. duæ enim illæ cifræ ad ſiniſtram nihil ſignificant, ac propterea omittendæ ſunt.

Rurſus ſi idem numerus 13946007693. diuidendus ſit per 300800000. auferemus ex eo priores quinque figuras 07693. quot videlicet cifræ ſunt in principio diuiſoris; & reliquum numerum 139460. per 3008. partiemur, omiſſis quinque illis cifris, vt factum eſt in hoc altero exemplo. Quia vero in diuiſione reliquus eſt hic numerus 1092. ſi eum verſus ſiniſtram præponamus hiſce figuris ablatis 07693. collocabimus ſupra diuiſorem totum hunc numerum 109207693. vt hic cernis.

```
   09
 11142
 139460     (46 109207693/300800000
 30088
  300
```

Hinc fit, ſi vltima figura diuiſoris fuerit 1. & reliquæ omnes cifræ, Quotientem eſſe numerum diuidendum, ſublatis prius ab eo tot figuris verſus dexteram, quot cifræ ſunt in diuiſore; Numerator autem fractionis erit numerus ſublatus: & denominator ipſe diuiſor. vt ſi numerus 4780920345. diuidendus ſit per 100000 erit Quotiens 47809 $\frac{20345}{100000}$. Sic etiam ſi numerus 9700203. diuidendus ſit per 10000. Quotiens erit 970 $\frac{203}{10000}$. atq; ita de cæteris.

Facilis aliquando fit diuiſio quãdo diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio.

Neque vero hoc prætereundum eſt, ſi numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequam tota diuiſio abſoluatur, nulla figura ſignificatiua in diuiſione relicta fuerit, ponendas tunc eſſe poſt Quotientem omnes cifras numeri diuidendi nondum deletas. Vt ſi diuidendus proponatur numerus 1863000000. per 345. quoniam poſt ſecundam operationem nihil in diuiſione remanſit, ſi poſt inuentum Quotientem 54. ponantur quinque cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiens 5400000. abſolutaq; erit diuiſio.

```
  112
  338
 1863000000   (5400000
  3455
   34
```

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuiſio fundamenta ſunt omniũ quæ in Arithmetica traduntur.

Ex his quæ de additione, ſubtractione, multiplicatione, diuiſioneq; numerorum integrorum dicta ſunt, omnia, quæ in vniuerſa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilque aliud in quæſtionibus Arithmeticis ſoluendis præcipiendum ſit, quam vt numeri vel addantur, ſubtrahanturue aut multiplicentur diuidanturue. Itaque niſi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe ſit exercitatus, fruſtra ſeſe ad alia, quæ tradituri ſumus conferet.

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VI.

QVEMADMODVM in ſuperioribus numeros integros numerauimus, pluresq; propoſitos in vnam ſummam collegimus, atq; vnum ab altero ſubduximus, duos item quoſcunq; inter ſe multiplicauimus, & denique vnum per alterum ſumus partiti; ita in his, quæ ſequuntur, eadem efficiemus in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ fractioneſue dici ſolent vulgares.

Numerus fractus ſiue fractio Minutiaue quid.

Eſt autem Fractio, Minutiaue, ſiue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuiſi. Vt ſi totum aliquod ſectum ſit in quinq; partes æquales, & quiſpiam ex illis ſumpſerit vnam, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiam, ſi quis duas, tres, aut quatuor acceperit; dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus.

Numerator & Denominator fractionis quid.

Conſtat quælibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimuntur. Primus dicitur Numerator, quia numerat, quot partes contineat fractio propoſita ex illis, in quas totum, cuius eſt fractio, diuiſum eſt. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fractionis, hoc eſt, indicat, in quotnam partes totum intelligitur eſſe diuiſum. Vt cum proponitur fractio continens tres quintas partes, Numerator eſt 3. quia ſignificat, in illa fractione contineri tres partes totius; Denominator vero eſt 5. quia indicat, tres illas partes non eſſe qualeſcunque, ſed quintas

Fractio quauis quo pacto ſcribatur & pronuncietur.

Scribitur autem quælibet fractio hoc modo. Denominator directo ſub Numeratore, interiecta lineola quadam inter vtrumque numerum collocatur. Vt tres quintæ partes hoc modo ſcribuntur- $\frac{3}{5}$. pronunciaturque vterq; numerus in recto, primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferenda eſt; Tres quintæ. Hæc vero $\frac{25}{48}$. ita, Viginti quinq; quadrageſimæ octauæ, ſignificatq;, totum aliquod diuiſum eſſe in quadragintaocto partes æquales, & vigintiquinq; ex illis acceptas eſſe.

Fractiones vnde oriantur.

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio.

Fractio quauis eſt pars Numeratoris à Denominatore denominata.

Oriuntur plerunq; numeri fracti ex reſiduo diuiſionis integrorum numerorum. Quando enim aliquid in diuiſione remanſit, fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator eſt diuiſor, vt ſupra diximus. Vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiens eſt 6. ſuperſuntq; 4. Fit ergo huiuſmodi fractio $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens ſit $6\frac{4}{7}$. Item quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, gignitur fractio, cuius numerator eſt numerus diuidendus, Denominator autem diuiſor. Vt ſi diuidenda ſint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$ ſignificatq; 4. diuiſa eſſe per 7. ita vt Minutia hæc $\frac{4}{7}$. ſit ſeptima pars huius numeri 4. Pars inquam, denominata à diuiſore 7. Quemadmodum enim diuiſis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars eſt numeri diuiſi 12. Pars, inquam, à diuiſore denominata; ita etiam cum diuidimus 4. per 7. fit Quotiens $\frac{4}{7}$. qui ſeptima pars eſt numeri diuiſi 4. Pars inquam, denominata à diuiſore. Eadem ratione quælibet alia Minutia pars eſt numeratoris à denominatore denominata. Vt hæc Minutia $\frac{3}{4}$. eſt quarta pars ternarii. Nam ſi diuidantur 3. per 4. fit Quotiens $\frac{3}{4}$. Quare ſi ſumatur Minutia $\frac{3}{4}$. quater, efficientur $\frac{12}{4}$. quæ ternario æquiualent, vt ex iis, quæ paulo infra ſcribemus, manifeſtum erit. atq; ita de aliis.

ÆSTIMATIO SIVE VALOR FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VII.

Minutiarū valor quo pacto augeatur.

MINVTIÆ cuiuſuis æſtimatio, ſiue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus $\frac{1}{6}.\frac{1}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.$ vel in his $\frac{1}{7}.\frac{2}{7}.\frac{3}{7}.\frac{4}{7}.\frac{5}{7}.\frac{6}{7}.$ quælibet poſterior priore maior eſt, vt ex ſequentibus patebit: & in prioribus quidem, manente ſemper eodem numeratore, denominator minuitur: in poſterioribus vero, eodem ſemper manente denominatore, numerator augetur.

Minutiarū valor quo pacto minuatur.

Minutiæ vero cuiuſuis æſtimatio, ſiue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denominatore manente eodem, Numerator minuitur. Vt in his fractionibus. $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.$ vel in his $\frac{7}{8}.\frac{6}{8}.\frac{5}{8}.\frac{4}{8}.\frac{3}{8}.$ quælibet poſterior priore minor eſt, vt conſtabit ex ſequentibus: & in prioribus quidem, eodem ſemper numeratore manente, denominator augetur; in poſterioribus vero, eodem ſemper manente denominatore, numerator minuitur

Minutiæ, quarū numeratores ad denominatores eandem habēt proportionem, æquales ſunt.

Minutiæ deinde quæcunq;, quarum vnius numerator ad ſuum denominatorem eandem habet proportionem, quam reliquarum numeratores habent ad ſuos denominatores, ſinguli ad ſingulos, inter ſe æquales ſunt. Vt hæ minutiæ $\frac{1}{2}.\frac{8}{16}.\frac{50}{100}.\frac{100}{200}.\frac{500}{1000}.$ omnes inter ſe æquales ſunt; quia cuiuſuis numerator ad ſuum denominatorem proportionem habet ſubduplam, id eſt, dimidia pars eſt ipſius. Sic etiam $\frac{3}{4}.\frac{6}{8}.\frac{36}{48}.\frac{90}{120}.$ Nam cuiuslibet numerator ad ſuum denominatorem habet proportionem ſubſeſquitertiam, hoc eſt, tres quartas partes ipſius continet.

Si numerator, ac denominator cuiuſuis fractionis per quemcunq; numerū multiplicetur, diuidaturue gignitur eiuſdem valoris fractio.

Quoniam vero, ſi duo numeri per eundem numerum multiplicentur, ſiue diuidantur, numeri producti eandem habent proportionem, quam duo illi numeri multiplicati, ſiue diuiſi; fit, vt multiplicatis, aut diuiſis Numeratore, & Denominatore per quemcunque numerum, procreetur alia minutia eiuſdem valoris, quamuis maiores, minoreſue numeros habeat. Vt propoſita hac minutia $\frac{6}{9}.$ ſi vterque eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia $\frac{18}{27}.$ eiuſdem valoris. Sic etiam, ſi vterque numerus per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}.$ eiuſdem valoris. Et licet hæc omnia demonſtrari poſſint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus, ſi vno exemplo ex his duabus minutiis $\frac{2}{3}.\frac{6}{9}.$ deſumpto, in quo veritas huius rei perſpicue apparebit, rem illuſtremus. Nam ſi accipiatur numerus 9. qui quidem habet partes à denominatoribus dictarum minutiarum denominatas, nimirum tertiam, ac nonam, erunt duæ eius tertiæ partes æquales ſex nonis partibus eiuſdem. Cum enim tertia eius pars ſit 3. erunt duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars ſit 1. erunt quoque ſex nonæ partes 6. Æquales igitur ſunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{6}{9}.$ & ſic de aliis.

Quæ minutia vni integro æquiualeat.

Quando porro numerator alicuius minutiæ denominatori eſt æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harum minutiarum $\frac{2}{2}.\frac{6}{6}.\frac{20}{20}.\frac{1000}{1000}.$ conſtituit vnum integrum, hoc eſt, totum illud, quod in partes à denominatoribus denominatas diuiſum eſt: propterea quod in numeratore continentur omnes partes, in quas integrum, ſeu totum eſt diuiſum.

Quæ minutia minor ſit vno integro.

Quando vero numerator minutiæ minor eſt denominatore, minor eſt illa minutia vno integro, quales ſunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{7}.\frac{9}{10}$ quia cuilibet tot partes à ſuo denominatore denominatæ deſunt ad integrum conſtituendum, quot vnitatibus numerator à denominatore abeſt. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}.$ deeſt $\frac{1}{3}.$ huic vero $\frac{4}{7}.$ deſunt $\frac{3}{7}.$ & huic $\frac{9}{10}.$ deeſt $\frac{1}{10}.$

Quæ minutia maior ſit vno integro.

Quando denique numerator minutiæ denominatore maior eſt, maior eſt illa minutia vno integro. quales ſunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}.\frac{24}{7}.\frac{100}{4}.$ quia in cuiuslibet numeratore plures partes continentur, quam ſint illæ, in quas totum, ſiue integrum diuiſum eſt.

Vtra duarum minutiarū maior ſit, quo pacto cognoſcatur.

Iam vero propoſitis duabus minutiis, vt cognoſcas, vtra illarum maior ſit, ſeruabis hanc regulam. Poſitis minutiis ordine, multiplica earum numeros in crucem, id eſt, numeratorem prioris in poſterioris denominatorem, & poſterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos ſupra numeratores. Nam cuius numerator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quod ſi duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoque erunt propoſitæ minutiæ. Vt in primo horum trium exemplorum ma-

$$\begin{array}{ccc} 16. \quad 18. & 41. \quad 40. & 48. \quad 48. \\ \hline \frac{2}{3} \times \frac{6}{8} & \frac{1}{2} \times \frac{20}{41} & \frac{3}{4} \times \frac{12}{16} \end{array}$$

ior eſt poſterior minutia $\frac{6}{8}.$ quam prior $\frac{2}{3}.$ quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris, maior eſt, quam numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem poſterioris productus. In ſecundo vero exemplo maior eſt minutia $\frac{1}{2}.$ quam $\frac{20}{41}.$ In tertio deniq; æquales ſunt minutiæ $\frac{3}{4}.$ & $\frac{12}{16}.$ vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ eſt, quod, cum numeratores in crucem per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadem proportio ſit numeratorum ad denominatores, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt ſupra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorem gignit numerum, ad ſuum denominatorem habere maiorem proportionem, ac proinde illam minutiam eſſe maiorem, vt ſupra dictum eſt. Sed vt exemplo etiam diſcas, maiorem eſſe minutiam $\frac{6}{8}.$ quam $\frac{2}{3}.$ ſumamus numerum 48. qui habet partes à denominatoribus harum minutiarum denominatas, nempe octauam, & tertiam. Itaq; cum vna octaua pars huius numeri 48. ſit 6. erunt ſex octauæ, 36. Item cum vna tertia pars eiuſdem numeri ſit 16. erunt duæ tertiæ, 32. qui numerus minor eſt, quam 36.

Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pondere vel menſura exploretur.

Quod ſi data minutia cuiuſpiam monetæ, vel ponderis, aut menſuræ maioris, cupiaſque valorem eius explorare in minori moneta, vel pondere, aut menſura, hoc eſt, reuocare eam ad minorem monetam, &c. facies id in hunc modum. Multiplica numeratorem per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reuocanda eſt fractio, in maiori continetur, productumque numerum per denominatorem diuide. Quotiens enim numerus valorem datæ minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiam de ponderibus, & menſuris intellige. Vt ſi data ſit hæc minutia aureorū $\frac{4}{7}.$ quæ ſignificat, vt ſupra c. 6. diximus, quatuor aureos in

ſeptem

Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid ſignificet.

ſeptem æquales partes diſtributos, redigendaque ſit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac noſtra Arithmetica exemplis monetæ Romanæ, in qua quatuor quatrini, cum Arithmeticam hanc primum conſcripſimus, efficiebant vnum baiochum, & 10. baiochi vnum Iulium, ac 10. Iulij vnum aureum nummum.) multiplicabimus numeratorem 4. per 10. quoniam 10. Iulij vnum aureum conficiunt, vt 4. illos aureos in 7. partes diuiſos redigamus ad 40. Iulios; numerumq; productum 40. per denominatorem 7. partiemur. Quotiens enim numerus dabit Iulios $5\frac{5}{7}$. Quod ſi hanc minutiam Iuliorum, $\frac{5}{7}$. quæ ſignificat 5. Iulios in 7. partes æquales diuiſos, ad baiochos velimus redigere, multiplicabimus quoq; numeratorẽ 5. per 10. quia 10. baiochi vnum etiam Iulium conficiunt, vt 5. illos Iulios in 7. partes æquales diſtributos redigamus ad 50. baiochos: productumq; numerum 50. per denominatorem eundem 7. diuidemus. Dabit enim Quotiens numerus baiochos $7\frac{1}{7}$. Si tandem minutiam hanc baiochorum, $\frac{1}{7}$. quæ ſignificat vnum baiochum diuiſum in 7. partes æquales, ad quatrinos velimus reducere, multiplicabimus numeratorem 1. per 4. quod 4. quatrini efficiant vnum baiochum, vt illum baiochum in 7. partes æquales diuiſum ad 4. quatrinos reducamus, numerumque productum 4. per denominatorem 7. partiemur, efficiemuſque $\frac{4}{7}$. vnius quatrini, hoc eſt, paulo plus, quam dimidium vnius quatrini. Itaque $\frac{4}{7}$. vnius aurei continent Iulios 5. Baiochos 7. & Quatrinos $\frac{4}{7}$. Si vero $\frac{4}{7}$. vnius aurei redigere ſtatim velimus ad baiochos, multiplicabimus numeratorem 4. per 100. quoniam 100. baiochi vnum aureum conſtituunt, vt 4 illos aureos in 7. partes diſtributos redigamus ad 400. baiochos, numerumque productum 400. per denominatorem 7. partiemur, efficiemuſq; baiochos $57\frac{1}{7}$.

Rurſus ſi explorandum ſit, quot paſſus, pedes, palmos, digitoſue contineant $\frac{5}{8}$. vnius milliarij Italici, ſtatuendo milliarium vnum conſtare 4000. paſſibus Geometricis, paſſum vero 5. pedibus, & pedem 4. palmis, palmum autem 4. digitis, & digitum 4. granis hordei; multiplicabimus numeratorem 5. per 1000. vt 5. milliaria in 8. partes æquales diſtributa redigantur ad paſſus 5000. productumq; numerum 5000. partiemur per denominatorem 8. efficiemuſq; 625. paſſus.

Sic etiam ſi $\frac{10}{13}$. vnius paſſus reducere velimus ad pedes, multiplicabimus numeratorem 10. per 5. productumque numerum 50. per denominatorem 13. partiemur, efficiemuſque pedes $3\frac{11}{13}$. Si rurſus hunc numeratorem 11. per 4. multiplicemus, numerumque productum 44. per denominatorem 13. diuidamus, efficiemus palmos $3\frac{5}{13}$. Item ſi hunc numeratorem 5. per 4. multiplicemus, productumq; numerum 20. per denominatorem 13. partiamur, inueniemus digitos $1\frac{7}{13}$. Tandem ſi numeratorem hunc 7. multiplicemus per 4. & numerum productum 28. diuidamus per denominatorem 13. reperiemus grana hordei $2\frac{2}{13}$. Itaque $\frac{10}{13}$. vnius paſſus continent pedes 3. palmos 3. digitum 1. & grana $2\frac{2}{13}$.

Item reducenda ſit minutia hæc, $\frac{3}{4}$. vnius libræ ad vncias. Quoniam 12. vnciæ vnam libram conſtituunt, multiplicabimus numeratorem 3. per 12. & productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemuſq; 9. vncias.

Poſtremo inquirendum ſit, quot Minuta contineantur in $\frac{5}{6}$ vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiunt 1. Gradum, multiplicabimus numeratorem 5. per 60. & productum numerum 300. per denominatorem 6. diuidemus, efficiemuſq; Minuta 50.

FRACTIONES FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT VIII.

Minutia minutiarũ vnde oriantur. Minutia Minutia quid, Minutia minutiarũ quomodo pronuncietur, & ſcribuntur.

NON ſolum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiones ſimplices, de quibus hic agimus, procreentur, verum etiam interdum ipſi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes diſtribui, ac ſi eſſent integræ quædam res. Vnde fractiones fractionum, fractorumue numerorum, ſiue Minutiæ minutiarum oriuntur. Vt quemadmodum cum accipio quatuor partes alicuius totius in ſeptem partes diſtributi, efficio hanc minutiam ſimplicem $\frac{4}{7}$. quæ ſignificat quatuor ſeptimas partes ipſius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem ſimplicem $\frac{4}{7}$. diuiſam eſſe in quinque partes æquales, accipioque tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor ſeptimarum alicuius integri; ita vt prior in recto efferatur, ſcribaturque, ſicut minutiæ ſimplices, poſterior vero pronuncietur in obliquo, noteturque ſine interiectione lineæ, vt ab aliis diſtinguatur. Vt prædicta minutia minutiæ ita ſcribenda eſt $\frac{3}{5}.\frac{4}{7}$. pronunciaturque ſic. Tres quintæ quatuor ſeptimarum vnius integri. Hæc autem minutia minutiarum $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}\frac{1}{6}.\frac{1}{2}$. ita proferetur. Duæ tertiæ trium quartarum ex vna ſexta parte vnius dimidij alicuius integri: ſignificat autem ex dimidio alicuius integri ſumptam eſſe vnam ſextam partem illius dimidij in ſex æquales partes diſtributi; & ex hac ſexta parte in quatuor partes æquales diuiſa, acceptas eſſe tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuiſis in tres æquales partes ſumptas eſſe duas tertias. Eademq; ratio eſt in aliis.

Quo pacto autem æſtimatio, ſiue valor fractionum fractorum numerorum cognoſcatur. docebimus ad finem cap. 10. vbi eas ad ſimplices fractiones reuocabimus.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORVM AD minimos numeros, ſiue terminos.

CAPVT IX.

ACCIDIT nonnunquam, vt minutia aliqua ita magnis numeris ſcribatur, vt commode minoribus poſſit exprimi, non mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{36}{72}$. æquiualet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt vides, numeris expreſſæ. Operæ pretium eſt autem minutiam maioribus numeris ſcriptam ad minimos numeros, terminoſue reuocare, multas ob cauſas. Primum, quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expreſſa intelligitur, quam maioribus numeris ſcripta. Quis enim non facilius percipit $\frac{1}{2}$. quam $\frac{36}{72}$. aut quam $\frac{500}{1000}$. aut quam $\frac{826}{1652}$. cum tamen omnes idem prorſus ſignificent? Deinde, quoniam facilior redditur operatio fractionum, ſi ad minimos terminos ſint reductæ, vt ex ſequentibus fiet perſpicuum. Tertio, vt Mathematicorum libri, qui minutias ple-

Cur minutia ad minimos terminos reducantur.

runque minimis ſolent numeris notare, intelligantur. Si enim, verbi gratia, quis inueniat à quopiam ſcriptum, numerum hunc 2528. per 48. diuiſum facere Quotientem 52. $\frac{2}{3}$. ipſe vero hoc velit examinare, reperiet Quotientem 52 $\frac{32}{48}$. qui ab illo differre videtur, cum tamen idem ſit. Minutia enim hæc $\frac{32}{48}$. ad minimos terminos reducta facit $\frac{2}{3}$. Quare antequam iudicet, ſe, aut ſcriptorem illum erraſſe, quod videat eius minutiam à ſua differre, reducenda prius erit minutia à ſe inuenta, & maioribus terminis expreſſa, ad minimos numeros, ſiue terminos.

Minutiæ qua arte ad minimos numeros redigantur.

Hac autem arte Minutia quæuis maioribus ſcripta numeris ad minimos terminos reuocabitur. Diuidatur tam numerator, quam denominator per maximam communem vtriuſque menſuram, id eſt, per maximum numerum, qui vtrumque metiatur. Quotientes enim numeri (ſi Quotientem numeratoris facias numeratorem, & Quotientem denominatoris denominatorem) dabunt minutiam illi æquiualentem, & minimis numeris expreſſam. Nam cum, diuiſis duobus numeris per vnum & eundem numerum, Quotientes eandem habeant proportionem, quam illi numeri, ſint autem Quotientes numeri hoc modo inuenti omnium minimi, quod numeri minutiæ propoſitæ diuiſi ſint per maximum numerum eos numerantem, ita vt per maiorem diuidi nequeant, quin aliquid in diuiſione relinquatur; perſpicuum eſt, minutiam inuentam minimis numeris eſſe expreſſam, ita vt minoribus exprimi nequeat.

Exemplum ſit in hac minutia propoſita $\frac{32}{48}$. cuius numeratorem, ac denominatorem metiuntur, & numerant omnes hi numeri 2. 4. 8. 16. & præterea nullus. Nam licet numerus 24. qui maior illis eſt, numeret denominatorem 48. tamen numeratorem 32. non metitur. Sic etiam quamuis numerus 32. qui maior adhuc eſt, metiatur numeratorem 32. nullo tamen modo denominatorem 48. numerat. Nos autem hoc loco intelligimus numerum maximum numerantem, qui vtrumq; numerum minutię propoſitæ, id eſt, tam numeratorem, quam denominatorem numeret. Si igitur tam numerator 32. quam denominator 48. diuidatur per maximum illorum numerorum, nimirum per 16. reperientur Quotientes 2. & 3. Quare minutia propoſita $\frac{32}{48}$. reducetur ad hanc æquiualentem, $\frac{2}{3}$. & minimis numeris expreſſam. Si eoſdem numeros propoſitæ minutiæ diuideres per alium numerum eos numerantem, qui non ſit maximus, redigeres quidem minutiam ad aliam æqualem minoribus terminis expreſſam, ſed non minimis. Vt ſi iidem numeri 32. & 48. diuidantur per 8. inuenietur hæc minutia $\frac{4}{6}$. quæ minoribus adhuc numeris ſcribi poteſt, hoc modo $\frac{2}{3}$.

Eadem ratione hæc minutia $\frac{45}{60}$. cuius numeratorem & denominatorem metiuntur omnes hi numeri 3. 5. 15. redigetur ad hanc, $\frac{3}{4}$. ſi nimirum tam numerator, quam denominator per 15. qui maximus numerus eſt illos numerans, diuidatur, atque ita de reliquis.

Quãdo minutia non poteſt redigi ad minimos terminos.

Quod ſi alicuius minutiæ numeratorem, ac denominatorem nullus numerus, præter vnitatem, numeret, non poterit ad minores terminos redigi minutia illa, ſed iam minimis numeris expreſſa erit. Vt hæ minutiæ $\frac{20}{39}$. $\frac{20}{63}$. $\frac{47}{59}$. ad minores terminos reuocari non poſſunt. Quamuis enim hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem primæ minutiæ numerent, nullus tamen eorum eiuſdem denominatorem metitur. Item licet hi numeri 3. 13. metiantur denominatorem eiuſdem minutiæ, neuter tamen eorum eius numeratorem metitur. Rurſus quamuis hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem ſecundæ minutiæ, hi vero 3. 7. 9. 21. denominatorem eiuſdem metiantur, nullus tamen illorum vtrumque numerum: id eſt, tam numeratorem, quam denominatorem illius minutiæ, numerat. Poſtremæ autem minutiæ numeros nullus numerus præter vnitatẽ numerat, cum ſint (vt cum Arithmeticis loquamur) primi, quemadmodum & primarum duarum numeri ſunt inter ſe primi, quamuis nullus eorum primus ſit. Dicitur enim numerus primus, quem vnitas ſola metitur; Primi vero inter ſe numeri vocantur, quos ſola vnitas, communis menſura metitur.

Primus numerus & primi inter ſe numeri quid.

Quoniam vero, vt minutia propoſita ad minimos terminos reuocetur, neceſſe eſt, vt maxima menſura communis numeratoris, ac denominatoris inueniatur. (Per hanc enim maximam communem menſuram vterque numerus, tam numerator, quam denominator, diuidendus eſt, vt diximus.) tradi ſolet ad eam inueniendam hæc regula. Diuidatur denominator per numeratorem: Et ſi aliquid in diuiſione relictum fuerit, diuidatur diuiſor, id eſt, numerator, per reſiduum illud diuiſionis: Et ſi rurſus aliquid remanſerit, diuidatur vltimus hic diuiſor, id eſt, reſiduum illud, per reſiduum huius vltimæ diuiſionis; & ſic ſemper vltimus diuiſor per vltimum reſiduum diuidatur, donec diuiſor occurrat, qui nihil in diuiſione relinquat. Hic namque diuiſor nihil relinquens erit maxima communis menſura numeratoris ac denominatoris minutiæ propoſitæ. Quod ſi diuiſor aliquis in huiuſmodi diuiſionibus relinquat vnitatem, non habebunt numerator, & denominator minutiæ propoſitæ communem menſuram, præter vnitatem, ſed erunt numeri inter ſe primi.

Qua ratione maxima menſura communis numeratoris ac denominatoris cuiuſuis minutiæ reperiatur.

Vt ſi propoſita ſit minutia $\frac{36}{72}$. inueniemus maximam menſuram communem numeratoris, & denominatoris hoc modo. Diuidatur denominator 72. per numeratorem 36. & quoniam, hac diuiſione peracta, nihil remanet, erit diuiſor hic 36. maxima communis menſura; per quam ſi diuidamus numeratorem, denominatoremque datæ minutiæ $\frac{36}{72}$. reducemus eam ad $\frac{1}{2}$. minimis terminis expreſſam.

Quãdo numerator, & denominator datæ minutiæ nõ habeant communẽ menſuram præter vnitatem.

Rurſus ſi data ſit minutia $\frac{60}{96}$. reperiemus maximam communẽ menſuram numeratoris, & denominatoris hac ratione. Diuiſo denominatore 96. per numeratorem 60. ſuperſunt in diuiſione 36. Diuiſo rurſus diuiſore 60. per reſiduum 36. remanent in diuiſione 24. Item diuiſo hoc vltimo diuiſore 36. per vltimum reſiduum 24. relinquuntur 12. diuiſo denique vltimo hoc diuiſore 24. per vltimum reſiduum 12. nihil ſupereſt. Eſt igitur maxima menſura communis 12. per quam ſi diuidatur tam numerator, quam denominator datæ minutiæ $\frac{60}{96}$. conſtituetur hæc minutia $\frac{5}{8}$. minimis numeris expreſſa.

Sed ſi proponatur hæc minutia $\frac{48}{103}$. nõ inuenietur vlla communis menſura numeratoris, & denominatoris maior, quam vnitas. Nam denominatore 103. diuiſo per numeratorem 48. ſuperſunt 7. Diuiſo item diuiſore 48. per reſiduum 7. relinquuntur 6. Deniq; diuiſo vltimo hoc diuiſore 7. per vltimum reſiduum 6. ſupereſt 1. Quare, vt ſupra dictum eſt, numerator, & denominator minutiæ huius $\frac{48}{103}$. ſunt numeri inter ſe primi.

Inuentio maximæ menſuræ quorumlibet duorũ numerorũ.

Eadem ratione quorumlibet duorum numerorum (licet fractionem non conſtituant, ſed abſolute proponantur.) maximam communem menſuram inueniemus, ſi maiorem per minorem diuidamus, & hunc diuiſorem per reſiduum diuiſionis, ſi quod erit, & rurſus hunc vltimum diuiſorem per reſiduum vltimæ diuiſionis,

& ſic deinceps, &c. Nam vltimus diuiſor nihil relinquens in diuiſione erit maxima communis menſura datorum numerorum. Si vero in diuiſione aliqua fuerit relicta vnitas, erunt numeri dati inter ſe primi, nullamque habebunt menſuram communem, præter vnitatem.

Vnde colligatur regula inueniendi maximam menſuram duorum numerorum.

Colligitur hæc regula inueniendi maximam menſuram communem duorum numerorum ex propoſ. 2. lib 7. Eucl. Nam licet Euclides iubeat ſemper minorem numerum de maiore ſubtrahere, tamen idem efficitur, & quidem multo breuius, per diuiſionem maioris numeri per minorem, cum diuiſio ſit compendioſa quædam ſubtractio, quemadmodum & multiplicatio, compendioſa quædam additio eſt.

Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos.

Alio modo reducetur minutia propoſita ad minimos terminos, ſi tam numerator, quã denominator per communem aliquam eorum menſurã notam, etiamſi maxima nõ ſit, diuidatur, vt inueniatur minutia ſub minoribus numeris: Et rurſus huius inuentæ minutiæ tam numerator, quàm denominator, per aliam communem eorum menſuram diuidatur, & ſic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator & denominator ſint numeri inter ſe primi. vt propoſita minutia hac $\frac{36}{48}$. ſi vterque eius numerus diuidatur per 2. inuenietur hæc minutia $\frac{18}{24}$. cuius vterque numerus ſi diuidatur per 3. reperietur hæc minutia $\frac{6}{8}$. cuius tandem numeri diuiſi per 2. offerent hanc minutiam $\frac{3}{4}$. ſub minimis terminis: ſed prior illa ratio præſtantior eſt ac breuior.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORVM AD EANDEM DENOMINATIONEM, ET AD INTEGRA, NEC NON integrorum ad fractionem quamcunque, ac denique fractionum fractorum numerorum ad ſimplices fractiones.

CAPVT X.

SÆpenumero reducendæ ſunt fractiones diuerſorum denominatorum ad alias, quæ illis æquales ſint, ſingulæ ſingulis, habeantque eundem denominatorem. Quod qua ratione fieri debeat, hoc cap. exponemus, primum quidem quando propoſitæ minutiæ non ſunt plures, quàm duæ, deinde vero quando plures ſunt.

Quo pacto duæ minutiæ ad eandem denominationẽ reducãtur.

Propoſitis igitur duabus minutiis diuerſos denominatores habentibus, ſi denominatores inter ſe multiplicentur, procreabitur communis denominator, ad quem datæ minutiæ ſunt reuocandæ: numerator vero cuiuslibet in crucem per denominatorem alterius multiplicatus producet numeratorem. vt in hoc appoſito exemplo. Ex denominatore 3. in denominatorem 4. fit denominator communis 12. Item ex 2. numeratore prioris minutiæ in 4. denominatorem poſterioris fit numerator 8. At ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fit numerator 9. Duæ ergo minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ad has duas $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. reducuntur, quæ illis æquales ſunt, habentque vnum & eundem denominatorem communem 12. Quod enim $\frac{8}{12}$. æquiualeant $\frac{2}{3}$. conſtat ex propoſ. 17. & 18. lib. 7. Euclid. propterea quod vterque numerus huius multiplicatus per eundem numerum 4. vel multiplicans eundem numerum 4. nimirum denominatorem poſterioris minutiæ propoſitæ, produxit vtrunque numerum illius. Hinc enim fit, numeratorem & denominatorem minutiæ $\frac{8}{12}$. eandem habere proportionem, quam habent numerator, & denominator minutiæ $\frac{2}{3}$. Quare æquales erunt minutiæ ipſæ, vt ſupra diximus. Eadem ratione æquales erunt minutiæ $\frac{9}{12}$. & $\frac{3}{4}$. quia vterque numerus huius $\frac{3}{4}$. multiplicatus per eundem numerum 3. vel multiplicans eundem numerum 3. denominatorem videlicet prioris minutiæ datæ $\frac{2}{3}$. produxit vtrumque numerum illius $\frac{9}{12}$.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}.\ \text{reducuntur ad } \frac{8}{12}.\ \frac{9}{12}.$$

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, ad eandem denominationem proponantur reducendæ, quærendus eſt primum numerus ab omnibus denominatoribus datarum minutiarum numeratus, ita vt omnes partes ab ipſis denominatas contineat. Ita autem numerum à denominatoribus propoſitis, vel à quibuſcunque numeris datis numeratum inueniemus.

Inuentio numeri à quotcunq; datis numeris numerati.

Multiplicentur omnes denominatores inter ſe, ducendo primum in ſecundum, & hunc numerum productum in tertium, productumque hunc numerum in quartum, & ſic deinceps, donec omnes ſint multiplicati. Productus enim vltimus numerus erit is, qui quæritur. Vt propoſitis hiſce minutiis $\frac{1}{2}. \frac{2}{3}. \frac{3}{4}. \frac{1}{5}.$ ſi primus denominator 2. in ſecundum 3. multiplicetur, & productus numerus 6. in tertium 4. ducatur, productusque numerus 24. in quartum 5. multiplicetur, procreabitur numerus 120. quem dati denominatores, nempe numeri 2. 3. 4. 5. numerant.

Inuẽtio minimi numeri à quotcunq; numeris numerati.

Quoniam vero numerus hac ratione inuentus interdum ita magnus eſt, vt eo minor dari poſſit, qui ab eiſdem propoſitis denominatoribus numeretur, reperiemus minimum numerum à quotcunque numeris numeratum hoc modo. Primum inueniemus minimum numerum à prioribus duobus numeris propoſitis numeratum, hac ratione. Aut priores duo numeri habent communem aliquam menſuram, præter vnitatem, aut non: (Quod quidem cognoſces, ſi maior per minorem diuidatur, & hic diuiſor per reſiduum diuiſionis, & ſic deinceps; alterna quadam diuiſione. Si enim diuiſor occurrat, qui nihil relinquat, habebunt duo illi numeri communem menſuram, ipſeque diuiſor vltimus erit maxima eorum menſura: ſi vero occurrat diuiſor, qui relinquat vnitatem, carebunt communi menſura, eruntque primi inter ſe, vt ſupra cap. 9. docuimus.) Si duo illi numeri priores non habent communem menſuram, erit numerus ex multiplicatione vnius in alterum productus minimus ab illis numeratus, ita vt minor dari non poſſit: Si vero habent menſuram communem, inuenta maxima earum menſura communi, per ea, quæ cap. 9. ſcripſimus, diuidatur vterque per eam, ponanturque Quotientes ſub ipſis numeris. Nam ſi Quotientem prioris numeri per poſteriorem numerum multiplices, vel Quotientem poſterioris numeri per priorem numerum, procreabis minimum numerum à duobus illis numeratum. Deinde eodem modo indagabimus minimum numerum numeratum ab eo, quem hactenus inue-

inuenimus, & à tertio numero propoſito, inquirendo videlicet, num tertius numerus propoſitus, & minimus ille à prioribus duobus numeratus, habeant menſuram communẽ, necne, &c. Hic enim minimus inuentus, erit minimus à primis tribus numeris propoſitis numeratus. Rurſus inuentũ hunc numerum cum quarto numero propoſito conferemus, eodemq; modo minimum numerum ab illis numeratum inueſtigabimus. Hic enim inuentus, erit minimus à quatuor datis numeris numeratus: atque ita progrediar, donec nullus numerus ſuperſit, cum quo inuentus vltimo loco comparari poſſit. Demonſtratio huius regulæ colligitur ex propoſ. 36. & 38. lib. 7. Eucl.

Sed explicemus negotium hoc in proximis quatuor minutijs datis, quarum denominatores ſunt 2. 3. 4. 5. Primum itaque quia duo priores numeri 2. & 3. non habent aliam menſuram communem, præter vnitatem erit numerus 6. ex eorum multiplicatione, productus, minimus à 2. & 3. numeratus. Deinde, quoniam inuentus hic numerus 6. & tertius numerus datus 4. habent maximam menſurã 2. diuidemus per eam tam 6. quam 4. quotienteſq; 3. & 2. ſub ipſis ſtatuemus, vt hic vides. Si namq; multiplicemus 6. per 2. aut 4. per 3. procreabimus numerũ 12. qui minimus eſt, à tribus primis datis numeris 2. 3. 4. numeratum. Tandem, quia hic numerus 12. inuentus, & quartus numerus datus 5. non habent communem menſuram, præter vnitatem, multiplicabimus 12. per 5. producemuſque numerum 60. minimum à quatuor denominatoribus 2. 3. 4. 5. numeratum.

6.	4.
3.	2.

Sit rurſum inueniendus minimus numerus à 4. 6. 8. 12. 7. numeratus. Primum, quia primi duo 4. & 6. habent communem maximam menſuram 2. partiemur per eam tam 4. quam 6. quotienteſque 2. & 3. ſub ipſis ſtatuemus, vt hic vides. Nam ſi multiplicemus 4. per 3. vel 6. per 2. efficiemus numerum 12. minimum ab illis duobus 4. & 6. numeratum.

4.	6.
2.	3.

Deinde, quia numerus hic 12. inuentus, & tertius numerus datus 8. habent maximam menſuram communem 4. diuidemus per eam tam 12. quam 8. & quotientes 3. & 2. ſub ipſis collocabimus. Si enim multiplicemus 12. per 2. vel 8. per 3. gignemus numerum 24. minimum à primis tribus datis numeris 4. 6. 8. numeratum.

12.	8.
3.	2.

Rurſus, quoniam hic numerus inuentus 24. & quartus propoſitus 12. habent communem maximam menſuram 12. diuidemus per eam tam 24. quam 12. & quotientes 2. & 1 ponemus ſub ipſis. Nam ſi multiplicemus 24. per 1. vel 12. per 2. producemus numerum 24. minimum à quatuor numeris datis 4. 6. 8. 12. numeratum.

24.	12.
2.	1.

Poſtremo, quia hic numerus 24. inuentus, & vltimus numerus datus 7. non habent vllam menſuram communem, præter vnitatem; multiplicabimus illos inter ſe, procreabimuſque numerum 168. minimum à datis numeris 4. 6. 8. 12. 7. numeratum. Quod ſi quis per priorem regulam numerum inquireret ab eiſdem datis numeris 4. 6. 8. 12. 7. numeratum, multiplicando nimirum ipſos inter ſe, reperiret hunc numerum 1. 6. 1. 2. 8. qui multo maior eſt quam hic numerus minimus 168. à nobis inuentus.

Iam vero, inuento numero ab omnibus denominatoribus minutiarum reducendarum numerato, ſiue is minimus ſit, ſiue non, reducemus minutias datas ad eandem denominationem hoc modo. Denominator communis eſt numerus ille inuentus: quem ſi per cuiuslibet minutiæ denominatorem diuidamus, & quotientem per numeratorem multiplicemus, producemus numeratorem, qui ſupra communem denominatorem ſcribendus eſt. vt in poſtremis quatuor minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. numerus à denominatoribus numeratus eſt 120. Hic ergo erit denominator communis. Quem ſi diuidamus per 2. denominatorem primæ minutiæ, efficiemus 60. Hunc numerum ſi multiplicemus per 1. numeratorem eiuſdem minutiæ, producemus 60. numeratorem pro prima minutia. Rurſus ſi eundem numerum 120. partiamur per 3. denominatorem ſecundæ minutiæ, prodibit hic numerus 40. quem ſi multiplicemus per 2. numeratorem eiuſdem minutiæ, efficiemus 80. numeratorem pro ſecunda minutia, atque ita de cęteris. Itaque datæ quatuor minutiæ reducentur ad has quatuor eiuſdem denominationis $\frac{60}{120}$. $\frac{80}{120}$. $\frac{90}{120}$. $\frac{24}{120}$. Quod ſi accipiamus numerum 60. qui minimus eſt ab eiſdem denominatoribus numeratus, pro denominatore. reducemus eaſdem minutias ad has $\frac{30}{60}$. $\frac{40}{60}$. $\frac{45}{60}$. $\frac{12}{60}$.

Quo pacto plures minutiæ, quã duæ, ad eãdem denominationẽ reducãtur.

Eadem ratione redigi poterunt duę etiam minutiæ ad eandem denominationem, licet eas non in crucem multiplicemus. Si enim quæratur numerus ſiue minimus ſiue nõ minimus, à denominatoribus numeratus, erit is communis denominator: ex quo inuenientur numeratores, vt proxime docuimus. Vt propoſitis duabus minutijs $\frac{5}{6}$. $\frac{7}{12}$. Minimus numerus à denominatoribus numeratus eſt 12. quem ſi partiamur per 6. denominatorem prioris minutiæ, quotientẽq; 2. per 5. numeratorem eiuſdem minutiæ multiplicemus, efficiemus 10. pro numeratore prioris minutiæ. Et ſi rurſum eundem numerum 12. diuidamus per 12. denominatorem poſterioris minutiæ, & quotientem 1. multiplicemus per 7. numeratorem eiuſdem minutiæ, reperiemus 7. pro numeratore poſterioris minutiæ. Itaque datæ duæ minutiæ reducentur ad has $\frac{10}{12}$. $\frac{7}{12}$. Quod ſi quis eaſdem velit reducere per primam regulam, inueniet has minutias $\frac{60}{72}$. $\frac{42}{72}$. Ex quibus omnibus perſpicuum eſt, quantum interſit inter minimum numerum à denominatoribus datarum minutiarum numeratum, & non minimum. Per minimum enim datæ minutiæ ad minimas minutias eiuſdem denominationis reducuntur, quod per alias regulas non fit.

Alia ratio reducendi duas minutias ad eãdem denominationẽ.

Vtilitas minimi numeri à denominatorib. datarũ minutiarũ numerati.

Contingit etiam aliquando, numeratorem minutiæ ex additione, multiplicatione, diuiſioneque productæ maiorem eſſe denominatore, atque adeo minutiam illam totum ipſum, atque integrum ſuperare. Quare ea ad integra erit reducenda hac ratione: Diuidatur numerator per denominatorem. Quotiens enim dabit integra, quibus minutia data æquiualet: Et ſi quid in diuiſione ſuperfuerit, illud erit numerator, cui idem denominator ſubſcribendus eſt. vt hæc minutia $\frac{60}{12}$. ſi numerator diuidatur per denominatorem, reducetur ad 5. integra. Hæc autem minutia $\frac{100}{7}$. redigetur ad $14\frac{2}{7}$. quia in diuiſione numeratoris per denominatorem remanſerunt 2. atque ita minutia illa continet 14. integra, & inſuper duas ſeptimas partes vnius integri.

Quo modo minutia, cuius numerator maior eſt denominatore, ad integra redigatur.

Item non raro vſu venit, vt integra ad fractionem aliquam reducenda ſint, quod hoc modo fiet. Multiplicentur integra propoſita per denominatorem minutiæ, ad quam integra reducenda ſunt. Productus enim numerus erit numerator, cui denominator datæ minutiæ eſt ſubſcribendus. Vt ſi 7. integra ad quintas partes ſint redi-

Quo pacto integra ad minutiam reducãtur.

redigenda; Multiplicabimus 7. integra per 5. denominatorem propoſitæ minutiæ, productoque numero 35. ſupponemus eundem denominatorem, vt fiat minutia $\frac{35}{5}$. æquiualens 7. integris. Quod ſi integris adhæreat minutia aliqua, addendus eſt numerator illius minutiæ ad numerum productum ex integris per denominatorem minutiæ multiplicatis, vt efficiatur numerator. Vt ſi numerus hic $8\frac{2}{5}$. reducendus ſit ad quintas, vt fiat vnica minutia; Multiplicabimus 8. per 5. denominatorem adhærentis minutiæ, ac numero producto 40. addemus 2. numeratorem eiuſdem minutiæ, vt habeamus numeratorem 42. huius minutiæ $\frac{42}{5}$. quæ numero propoſito $8\frac{2}{5}$. æquiualet.

Minutiæ minutiarũ quo pacto ad ſimplices minutias reuocentur.

Poſtremo, quando in operatione aliqua minutiæ minutiarum occurrunt, reducendæ erunt ad ſimplicem minutiam, hoc artificio. Multiplica numeratores inter ſe, hoc eſt, primum in ſecundum, & hoc productum in tertium, atque iterum hoc productum in quartum, & ſic deinceps, ſi plures numeratores fuerint. Vltimus enim numerus productus dabit numeratorem ſimplicis minutiæ, quæ illi minutiæ minutiarum æqualis erit. Denominator autem erit numerus productus ex multiplicatione denominatorum inter ſe, ſi multiplicentur, vt de numeratoribus dictum eſt. Vt hæc minutia minutiæ $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. reducetur ad hanc ſimplicem fractionem $\frac{12}{35}$. quia multiplicatio numeratorum facit 12. denominatorum autem 35. ita vt tres quintæ quatuor ſeptimarum partium vnius integri contineant $\frac{12}{35}$. eiuſdem integri. Sic etiam hæc minutia minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{2}$. reducetur ad hanc ſimplicem $\frac{6}{144}$. quæ ad minimos numeros reducta faciet $\frac{1}{24}$. vt ex antecedenti cap. conſtat. Denique hæc minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. ad hanc ſimplicem reuocabitur $\frac{18}{60}$. quæ reducta ad minimos numeros faciet $\frac{3}{10}$.

Hoc autem ita eſſe, explicabimus hoc modo. Ponamus hanc vltimam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. eſſe deſumptam ex vno aureo. Neceſſe eſt igitur, ſi regula præſcripta vera eſt, eam continere tres Iulios, qui ſunt $\frac{3}{10}$. vnius aurei. Id quod quilibet facile perſpiciet. Nam $\frac{3}{5}$. vnius aurei continent 6. Iulios, quod duo Iulij ſint $\frac{1}{5}$. aurei vnius: At $\frac{2}{3}$. ſex Iuliorum ſunt 4. Iulij: & $\frac{3}{4}$. quatuor Iuliorum ſunt 3. Iulij. Eadem ratione hanc minutiam minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{3}$. recte ad hanc $\frac{2}{45}$. eſſe reuocatam, in hoc, numero 45. oſtendemus. Nam $\frac{1}{3}$. huius numeri 45. continet 15. vnitates; ex quibus ſi ſumantur $\frac{2}{5}$. accipientur 6. vnitates, ex quibus denique ſi accipiatur $\frac{1}{3}$. ſumentur 2. vnitates, quæ faciunt $\frac{2}{45}$. dicti numeri 45. Non ſecus alia exempla explicari poterunt, & probari.

ADDITIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XI.

Additio minutiarũ quo modo fiat.

SI minutiæ addendæ habeant eundem denominatorem, addendi ſunt numeratores, & aggregato idem denominator ſupponendus: Si vero diuerſos habeant denominatores, reducendæ ſunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo additio inſtituenda. Vt ſumma collecta ex hiſce tribus minutijs $\frac{2}{13}$. $\frac{4}{13}$. $\frac{6}{13}$. eſt hæc $\frac{12}{13}$. quia habent eundem denominatorem, ſummaque ex numeratoribus collecta eſt 12. quemadmodum ex 2. aureis, 4. aureis, & 6. aureis fiunt 12. aurei. Sic etiam ex hiſce minutijs $\frac{3}{10}$. $\frac{7}{10}$. colligitur hæc ſumma $\frac{10}{10}$. quæ vni integro æquiualet. Ita quoque ex his minutijs $\frac{4}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. colligitur hæc ſumma $\frac{18}{7}$. quæ reducta ad integra facit $2\frac{4}{7}$. At vero vt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad eundem denominatorem, nimirum ad has minutias $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. ex quibus in vnam ſummam collectis fiunt $\frac{17}{12}$. hoc eſt, $1\frac{5}{12}$. atque hæc eſt ſumma duarum minutiarum propoſitarum, quemadmodum ex 2. aureis & 3. Iulijs, ſi 2. aurei reducantur ad 20. Iulios, fiunt 23. Iulij. Sic etiam minutiæ hæ $\frac{6}{7}$. $\frac{12}{13}$. $\frac{10}{11}$. $\frac{4}{5}$. vt in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad has eiuſdē denominationis $\frac{4290}{5005}$. $\frac{4620}{5005}$. $\frac{4550}{5005}$. $\frac{4004}{5005}$. ex quibus fit hæc ſumma $\frac{17464}{5005}$. id eſt, $3\frac{2449}{5005}$.

Quando integra adſunt quid faciendũ.

Si integra adſint, addenda ſunt ea ſeorſum, & minutiæ etiam ſeorſum. Vt ex 8 & $\frac{3}{5}$. fiunt $8\frac{3}{5}$. Item ex 8. & $4\frac{2}{3}$. fiunt $12\frac{2}{3}$. Item ex $8\frac{2}{7}$. & $4\frac{6}{7}$. fiunt $12\frac{8}{7}$. hoc eſt, $13\frac{1}{7}$. Item ex $2\frac{2}{3}$. & $4\frac{3}{4}$. fiunt $12\frac{17}{12}$. id eſt $13\frac{5}{12}$.

Praxis addendi minutias diuerſarum denominationum inter ſe.

Itaque vt duæ minutiæ diuerſarum denominationum in vnam colligantur ſummam, multiplicandæ eæ ſunt in crucem, & producti numeri addendi, vt fiat numerator minutiæ producendæ: Deinde denominatores inter ſe multiplicandi, vt eiuſdem minutiæ denominator habeatur: quia hac ratione reducuntur duæ minutiæ ad eandem denominationem, vt ex præcedenti cap. patet, adduntur que numeratores inter ſe. Vt ſi hæ duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ſint addēdæ, multiplicabimus tam 2. numeratorem prioris per 4. denominatorē poſterioris, quam 3. numeratorem poſterioris per 3. denominatorem prioris, productosque numeros 8. & 9. in vnam ſummam colligemus, vt fiat numerator 17. Deinde productum numerum ex multiplicatione denominatorum inter ſe, nempe 12. faciemus denominatorem. Erit igitur minutia collecta $\frac{17}{12}$. Quod ſi ſint plures minutiæ addendæ, quam duæ, addemus primum priores duas, vt diximus. Deinde minutiam collectam cum tertia minutia eodem modo: Et hanc productam cum quarta, & ita deinceps. Vt ſi addendæ ſint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{7}$. colligemus primum ex prioribus duabus hanc $\frac{17}{12}$. Deinde ex hac, & tertia efficiemus eodem modo $\frac{133}{60}$. Denique ex hac, & quarta procreabimus $\frac{1231}{420}$. hoc eſt $2\frac{391}{420}$. ſummam omnium.

Probatio additionis minutiarum.

Probatio autem additionis fit per ſubtractionem. Subtracta enim altera minutiarum addendarum ex ſumma collecta, remanebit altera ſi in additione erratum non eſt. Quod ſi plures ſint addendæ minutiæ, ſubtracta vna earum ex ſumma, relinquetur minutia alijs ſimul ſumptis æqualis. Vt quoniam hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{12}$. additæ faciunt $\frac{56}{48}$. id eſt, $1\frac{8}{48}$ ſi ex hac ſumma ſubtrahatur prior minutia, nempe $\frac{3}{4}$. vt in ſequenti cap. docebimus, remanebit hæc minutia $\frac{80}{192}$. quæ æqualis eſt alteri minutiæ $\frac{5}{12}$. vt patet, ſi ad minimos terminos reuocetur, vel numeratores per denominatores in crucem multiplicentur. Producetur enim idem numerus tam ex 80. in 12. quam ex 5. in 92. nempe numerus 960. Quare, vt ſupra cap. 7. diximus, æquales ſunt minutiæ $\frac{80}{192}$. $\frac{5}{12}$.

SVB-

SVBTRACTIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XII.

SI duæ minutiæ, quarum minor ex maiore ſubducenda eſt, habeant eundem denominatorem, ſubtrahendus eſt numerator minutiæ ſubtrahendæ ex numeratore alterius, & reſiduo idem denominator ſubſcribendus. Si vero diuerſos habeant denominatores, reducendæ ſunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo inſtituenda ſubtractio. Vt ſi ſubtrahenda ſit hæc minutia $\frac{5}{17}$. ex iſta $\frac{8}{17}$. ſubtrahemus numeratorem 5. ex numeratore 8. & reſiduo 3. eundem denominatorem 17. ſupponemus, vt fiat minutia reſidua $\frac{3}{17}$. quemadmodum ſi 5. aurei ex 8. aureis tollantur, remanent 3. aurei. At vero ſi deducenda ſit hæc minutia $\frac{2}{3}$. ex iſta $\frac{8}{9}$. reducendæ erunt prius ambæ ad has $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. eiuſdem denominationis: Deinde numerator 18. ex numeratore 24. deducendus, reſiduoque 6. communis denominator 27. ſupponendus, vt fiat minutia reſidua $\frac{6}{27}$. quemadmodum, ſi 2. Iulij auferendi ſint ex 8 aureis, reducendi ſunt prius 8. aurei ad 80. Iulios, vt relinquantur 78. Iulij.

Si ab integris detrahenda eſt aliqua fractio, reducenda eſt vna vnitas integrorum ad fractionem eiuſdem denominatoris, ita vt fiat minutia, cuius numerator æqualis ſit denominatori, à qua deducenda eſt minutia propoſita. Vt ſi ex 10. auferenda ſit minutia $\frac{6}{11}$. faciemus ex vna vnitate $\frac{11}{11}$. ex quibus ſi auferamus $\frac{6}{11}$. remanebunt 9. $\frac{5}{11}$. Integra enim carebunt illa vnitate, quæ ad minutiam reducta eſt.

Quando integra adſunt, quid faciendũ.

Si vero ab integris detrahenda ſint integra, & præterea fractio aliqua, reducenda quoque eſt vna vnitas illorum integrorum ad minutiam eiuſdem denominationis: Deinde integra à reliquis integris, & fractio à fractione detrahenda. Vt ſi hic numerus 4 $\frac{3}{5}$. ſubducendus ſit ex 10. faciemus ex vna vnitate huius numeri minutiam hanc $\frac{5}{5}$. à qua ſi demantur $\frac{3}{5}$. relinquentur $\frac{2}{5}$. & ſi 4. auferantur ex reliquis 9. ſupererunt 5. Itaque totus numerus reſiduus erit 5 $\frac{2}{5}$.

Denique ſi ab integris vna cum fractis detrahenda ſint integra cum fractis, vel fractiones ſolæ; ſi quidem fractio detrahenda minor eſt, quam illa, à qua fit ſubtractio, vel illi æqualis, detrahenda eſt fractio à fractione, & integra ab integris: ſi vero fractio ſubtrahenda maior eſt, quam illa, à qua fit ſubtractio, reducenda eſt vna vnitas integrorum, à quibus ſubtractio fieri debet, ad fractionem, quæ illis adhæret, &c. Vt ſi hic numerus 6 $\frac{3}{4}$. ſubducendus ſit ex hoc 10 $\frac{1}{2}$. quoniam minutia $\frac{3}{4}$. maior eſt, quam $\frac{1}{2}$. faciemus ex vna vnitate horum integrorum 10. hanc minutiam $\frac{2}{2}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. faciet $\frac{3}{2}$. à qua ſi auferatur minutia $\frac{3}{4}$. relinquetur minutia $\frac{6}{8}$. Ablatis quoque 6. ex 9. ſuperſunt 3. Totus ergo numerus reſiduus eſt 3 $\frac{6}{8}$.

Quod ſi quando vna minutia à pluribus fuerit ſubtrahenda, vel plures ab vna, vel plures à pluribus, danda erit opera, vt prius plures illæ tam ſubtrahendæ, quam illæ, à quibus fieri debet ſubtractio, in vnam ſummam colligantur.

Quando plures ſunt minutiæ quid agendum.

Itaque vt fiat ſubtractio vnius minutiæ ab alia, cum denominatores ſint diuerſi, multiplicandi ſunt numeratores in crucem per denominatores, & vnum productum ab altero ſubducendum, reſiduoque ſupponendus numerus ex multiplicatione denominatorum inter ſe productus; quia hac ratione duæ minutiæ propoſitæ reducuntur ad eandem denominationem, &c. Vt ſi minutia $\frac{3}{4}$. ex minutia $\frac{7}{9}$. ſubtrahenda ſit, multiplicabimus 3. numeratorem minutiæ ſubtrahendæ per 9. denominatorem alterius, & productum 27. detrahemus ex numero 28. producto ex multiplicatione 7. numeratoris minutiæ, à qua fit ſubtractio, per 4. denominatorem alterius & reliquæ vnitati ſupponemus numerum 36. productum ex multiplicatione denominatorum inter ſe, vt fiat minutia relicta $\frac{1}{36}$.

Praxis ſubtrahendi minutiam à minutia.

Probatio autem ſubtractionis fit per additionem Si namque minutia relicta ad ſubtractam minutiam adiiciatur, componetur minutia illa, à qua ſubtractio facta eſt, ſi non eſt erratum. Vt quoniam ſubtracta minutia hac $\frac{3}{4}$. ex iſta $\frac{7}{9}$. relinquitur hæc minutia $\frac{1}{36}$. vt in proximo exemplo patuit; ſi addatur $\frac{1}{36}$. ad $\frac{3}{4}$. componetur hæc minutia $\frac{112}{144}$. quæ ad minimos terminos reducta erit hæc $\frac{7}{9}$. à qua nimirum facta eſt ſubtractio. Sic etiam, quia ſubtracta hac minutia $\frac{2}{3}$. ex iſta $\frac{6}{8}$. reliqua eſt minutia hæc $\frac{2}{24}$. ſi ea addatur ad $\frac{2}{3}$. fiet minutia $\frac{54}{72}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{6}{8}$. à qua ſubtractio facta eſt: vt patet, ſi vtraque ad minimos terminos reuocetur. Semper enim reperietur minutia hæc $\frac{3}{4}$. Vel certe, quia numeratores earum in crucem per denominatores multiplicati producunt eundem numerum, nimirum 432.

Probatio ſubtractionis minutiarum.

MVLTIPLICATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XIII.

SI numeratores inter ſe multiplicentur, producetur numerator ſummæ multiplicationis, ex denominatorum autem multiplicatione denominator eiuſdem gignetur. Vt ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. per $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{12}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Numeratores enim inter ſe multiplicati faciunt 6. denominatores vero 12.

Multiplicatio minutiarũ quo pacto fiat.

Quando minutia per numerum integrum multiplicanda eſt, ſupponenda eſt numero integro vnitas, vt fiat ex ipſo quaſi fractio quædam denominata ab vnitate integra. Deinde regula, quam proxime præſcripſimus, ſeruanda. Vt ſi multiplicanda ſint 8. per $\frac{4}{5}$. ſcribemus 1. ſub 8. vt in appoſito exemplo vides. Igitur ſi multiplicentur inter ſe tam numeratores, quam denominatores, producetur hæc minutia $\frac{32}{5}$. quæ æquiualet huic numero 6 $\frac{2}{5}$.

$\frac{8}{1}$. $\frac{4}{5}$.

Quãdo adſunt integra quid agendum.

Quando autem numero integro adhæret minutia, reducendus erit numerus integer ad illam minutiam, vt fiat vna fractio ex ipſo & minutia adiuncta. Vt ſi multiplicanda ſint 8. per 3 $\frac{5}{8}$. faciemus ex 3 $\frac{5}{8}$. minutiam $\frac{29}{8}$. & numero 8. ſupponemus 1. vt hic factum eſſe vides. Si igitur tam

$\frac{8}{1}$. $\frac{29}{8}$.

$\frac{14}{3}$. $\frac{1}{2}$.

numeratores inter ſe, quam denominatores multiplicentur, procreabitur hæc minutia $\frac{184}{6}$. huic numero 30$\frac{4}{6}$. æquiualens. Item ſi multiplicanda ſint 4$\frac{2}{3}$. per $\frac{1}{2}$. reducemus 4$\frac{2}{3}$. ad $\frac{14}{3}$. vt hic vides. Producetur autem ex multiplicatione minutia hæc $\frac{14}{6}$. id eſt, 2$\frac{2}{6}$. Eodem pacto ſi multiplicanda ſint 4$\frac{1}{2}$. per 3$\frac{1}{5}$. reducemus priorem numerum ad $\frac{9}{2}$. poſteriorem vero ad $\frac{16}{5}$. vt in appoſito exemplo vides.

$\frac{9}{2}$. $\frac{16}{5}$.

Multiplicatis autem tam numeratoribus inter ſe, quam denominatoribus, producetur hæc minutia $\frac{144}{10}$. hoc eſt, 14$\frac{4}{10}$.

Probatio multiplicationis minutiarum.

Examinatur autem multiplicatio per diuiſionem. Si enim minutia producta diuidatur per alteram minutiarum multipli cantium, prodibit neceſſario in quotiente altera minutia multiplicans. Vt ſi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. fiunt $\frac{4}{14}$. neceſſe eſt, vt diuiſis $\frac{4}{14}$. per $\frac{1}{2}$. producantur $\frac{4}{7}$. diuiſis autem eiſdem $\frac{4}{14}$. per $\frac{4}{7}$. gignatur $\frac{1}{2}$. Perſpicuum autem erit ex ſequenti cap. diuiſis $\frac{4}{14}$. per $\frac{1}{2}$. produci $\frac{8}{14}$. quæ minutia huic $\frac{4}{7}$. æquiualet; diuiſis autem eiſdem $\frac{4}{14}$. per $\frac{4}{7}$. produci $\frac{28}{56}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$.

Cur in multiplicatione minutiarũ producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante.

Nemini autem mirum videri debet, multiplicationẽ minutiarum producere ſemper minutiam minorem vtraque minutia multiplicante, vt in vltimo exemplo, quod in examine tradidimus, patet, vbi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$, per $\frac{4}{7}$. producta eſt minutia $\frac{4}{14}$. id eſt, $\frac{2}{7}$. quæ minor eſt vtraque minutia multiplicante. Si enim natura multiplicationis recte conſideretur, facile quiuis perſpiciet, hoc neceſſario ita debere fieri. Cum enim vnus numerus per alium multiplicari, ſeu duci dicatur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas, vt cap. 4. diximus, perſpicuum eſt, neutram minutiarum multiplicantium poſſe totã ſumi in producto, ſed fragmenta duntaxat ipſius, qualia nimirum fragmenta vnitatis, altera minutia multiplicans refert, quandoquidem hæc minutia minor eſt vnitate. Hinc enim fit, vt quemadmodum minutia multiplicans non continet integram vnitatem: ita quoque numerus productus non contineat totã alteram minutiam multiplicantem, vt in proximo exemplo, quemadmodum $\frac{1}{2}$ eſt dimidiata pars vnitatis, ita etiam numerus productus $\frac{4}{14}$. id eſt, $\frac{2}{7}$, eſt pars dimidiata huius minutiæ $\frac{4}{7}$. vt definitio multiplicationis poſtulat. Recte ergo ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producitur minutia hæc $\frac{4}{14}$. hoc eſt $\frac{2}{7}$. Sic etiam ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. producitur minutia hæc $\frac{9}{3}$. id eſt, numerus hic 3. Nam quemadmodum $\frac{1}{3}$. eſt tertia pars vnitatis, ita numerus 3. tertia pars eſt numeri 9. vel quemadmodum numerus productus 3. continet $\frac{1}{3}$. nouies, ita numerus 9. continet nouem vnitates. Non eſt igitur mirum, quod minor numerus producatur vtraque minũtia multiplicante. Si tamen integra per fractionem multiplicentur, producitur quidem numerus quoque minor illo numero integro, maior vero fractione multiplicante. Vt in proximo exemplo patet, vbi ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. productus numerus fuit $\frac{9}{3}$. hoc eſt, 3. Sic etiam ſi integra per integra cum fractione, vel integra cum fractione per integra cum fractione multiplicentur, ſemper producetur maior numerus vtroque numero multiplicante, propter numerum integrum multiplicantem integra. Vt ex multiplicatione 4. per 3$\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{52}{4}$. hoc eſt, 13. quia numerus 4. ter ſumptus facit 12. & quarta eius pars eſt 1. Vel quia numerus 3. ſumptus quater facit 12. & minutia $\frac{1}{4}$. ſumpta quater facit $\frac{4}{4}$. id eſt, 1.

DIVISIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XIV.

Diuiſio minutiarum quomodo fiat.

FAcilitatis gratia Diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reduci poterit hoc modo. Commutentur termini diuiſoris, id eſt numerator ſcribatur infra lineolam, & denominator ſupra eandem. Quo facto, ſi regula multiplicationis cap. præcedenti tradita ſeruetur, id eſt, ſi tam numeratores, quam denominatores inter ſe multiplicentur, producetur numerus Quotiens. Vt ſi diuidenda ſit minutia $\frac{1}{2}$. ſtabit exemplum, vt hic vides. Multiplicatis igitur tam numeratoribus, quam denominatoribus inter ſe, producetur minutia hæc $\frac{6}{2}$. hoc eſt, numerus 3. pro Quotiente. Sic etiam ſi diuidenda ſit minutia $\frac{2}{5}$. per $\frac{3}{7}$. ſtabit exemplun vt hic apparet. Quotiens autem erit $\frac{14}{15}$.

$\frac{1}{2}$. $\frac{6}{1}$.

$\frac{2}{5}$. $\frac{7}{3}$.

Quando adſunt integra, quid agendum.

Quando numerus integer per minutiam, vel per numerum integrum cum fractione diuidendus eſt: vel minutia per numerum integrum, vel per numerum integrum cum fractione; vel deniq; numerus integer cum fractione per minutiam, aut per numerum integrum, aut per numerum integrum cum fractione, ſupponenda eſt vnitas numero integro, ſi ei nõ adhæreat minutia, ſi vero minutia adiuncta ſit, reducendus eſt numerus integer

					Quotientes.
6.	*per*	$\frac{2}{3}$.	*Ita ſtabunt exempla.*	$\frac{6}{1}$. $\frac{3}{2}$.	$\frac{18}{2}$. *vel* 9.
6.	*per*	4$\frac{2}{3}$.		$\frac{6}{1}$. $\frac{3}{14}$.	$\frac{18}{14}$. *vel* 1$\frac{2}{7}$.
$\frac{2}{3}$.	*per*	6.		$\frac{2}{3}$. $\frac{1}{6}$.	$\frac{2}{18}$. *vel* $\frac{1}{9}$.
$\frac{2}{3}$.	*per*	6$\frac{1}{2}$.		$\frac{2}{3}$. $\frac{2}{13}$.	$\frac{4}{39}$.
6$\frac{1}{2}$.	*per*	$\frac{3}{4}$.		$\frac{13}{2}$. $\frac{4}{3}$.	$\frac{52}{6}$. *vel* 8$\frac{2}{3}$.
6$\frac{1}{2}$.	*per*	3$\frac{2}{5}$.		$\frac{13}{2}$. $\frac{5}{17}$.	$\frac{65}{34}$. *vel* 1$\frac{31}{34}$.
6$\frac{1}{2}$.	*per*	3$\frac{4}{5}$.		$\frac{13}{2}$. $\frac{5}{19}$.	$\frac{65}{38}$. *vel* 1$\frac{27}{38}$.

ger ad minutiam adiunctam, vt fiat vna minutia, quemadmodum cap. præcedenti diximus. Deinde regula iam præſcripta ſeruanda. Vt in ſequentibus diuiſionibus ſtabunt exempla, vna cum Quotientibus, vt hic vides.

Qua ratione alij diuiſionem minutiarũ doceant.

Alii tradunt hanc regulam diuiſionis minutiarum, numerator minutiæ diuidendæ (poſita vnitate ſub integris, ſi adſint, & reductis integris ad minutiam adhærentem, ſi qua adhæreat) multiplicetur per denominatorem minutiæ diuidentis; procreabitur enim hac ratione numerator Quotientis minutiæ. Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatoris minutiæ diuidendæ per numeratorem diuidentis minutiæ. Quod quidem idem eſt, ac ſi termini diuiſoris commutentur, & regula multiplicationis ſeruetur, vt perſpicuum eſt. Quoniam vero ambigere quiſpiam poſſet aliquando, an numerator minutiæ diuidendæ, an vero diuidentis producat numeratorem minutiæ Quotientis, (facile enim hæc res ex animo excidere poteſt.) magis mihi placet prior regula à nobis tradita, qua diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reuocatur.

Probatio diuiſionis minutiarũ.

Examen autem diuiſionis fit per multiplicationem. Nam ſi Quotiens minutia multiplicetur per minutiam diuidentem, producetur minutia diuiſa neceſſario, vt quia ex diuiſione $\frac{4}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia $\frac{8}{5}$. hoc eſt, $1\frac{3}{5}$. fit, vt, ex multiplicatione $1\frac{3}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia diuiſa $\frac{4}{5}$. Producitur autem ex hac multiplicatione minuta $\frac{8}{10}$. quæ huic $\frac{4}{5}$. æqualis eſt, vt patet.

Cur aliquando in diuiſione minutiarũ Quotiens maior ſit minutia diuiſa.

Quod autem in diuiſione minutiarum plerunque producatur Quotiẽs maior minutia diuiſa, vt in diuiſione $\frac{6}{7}$. per $\frac{2}{7}$ patet, in qua Quotiens eſt $\frac{42}{14}$. hoc eſt, 3. mirari nemo debet. Nam cum numerus Quotiens indicet, quoties diuiſor in diuidendo numero contineatur, manifeſtum eſt, quando minutia diuidens minor eſt minutia diuidenda, illam in hac ſæpius quam ſemel contineri; atque adeo Quotientem maiorem eſſe quam 1. etiamſi minutia diuidenda minor ſit, quam 1. Veluti in proximo exemplo, quoniam minutia diuidens $\frac{2}{7}$ in minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. continetur ter, fit, vt Quotiens ſit 3. indicans illam in hac ter contineri. Idem etiam ex definitione Diuiſionis perſpicue apparet. Cum enim diuiſio ſit inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuiſorem continet, vt cap. 5. diximus; perſpicuum eſt, in proxima diuiſione Quotientem debere eſſe 3. qui vnitatẽ ter contineat, quoties nimirũ minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. continet. Mirum ergo non eſt in diuiſione minutiarũ ſemper produci Quotientem maiorem numero diuidendo, cum diuiſor minor eſt, quam 1. & quam minutia diuidenda, vt in dato exemplo patuit, idemque in diuiſione 6. per $\frac{1}{2}$. apparet, vbi quotiens eſt 12. Nam minutia diuidens $\frac{1}{2}$. duodecies in numero diuidendo 6. continetur.

Quando Quotiens maior ſit numero diuidendo in minutijs.

Quod tamen generalius, quando diuiſor vnitate minor eſt, licet non ſit minor numero diuidendo, ita oſtendemus. Nam cum Quotiens toties vnitatem contineat, quoties diuidendus diuiſorem: erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuiſorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuiſorem. Cum ergo vnitas ponatur maior diuiſore, erit quoque Quotiens maior numero diuidendo. Ita vides in diuiſione $\frac{2}{5}$. Quotientem $\frac{8}{15}$. maiorem eſſe minutia diuiſa $\frac{2}{5}$. quia minutia diuidens $\frac{3}{4}$. minor eſt vnitate, licet maior ſit, quam minutia diuiſa.

Quando Quotiens in minutijs minor ſit diuidendo numero.

Quando tamen diuiſor maior eſt, quam 1. Quotiens ſemper minor erit numero diuidendo. Vt diuiſis $\frac{8}{9}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens eſt $\frac{16}{27}$. & diuiſis $6\frac{1}{2}$. per $1\frac{2}{3}$. Quotiens eſt $\frac{39}{10}$. id eſt $3\frac{9}{10}$. Diuiſis rurſus $100\frac{1}{2}$. per $10\frac{3}{4}$. Quotiens eſt $\frac{804}{86}$ hoc eſt, $9\frac{30}{86}$. ſiue $9\frac{15}{43}$. Sic etiam diuiſis $\frac{2}{3}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{4}{21}$. Denique diuiſis $3\frac{1}{5}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{32}{15}$. hoc eſt, $2\frac{2}{15}$. vbi vides Quotientem ſemper minorem eſſe numero diuiſo. Cuius rei ratio hæc eſt. Quoniam diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus continet diuiſorem, vt cap. 5. dictum eſt, erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuiſorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuiſorem. Cum ergo vnitas ponatur minor diuiſore, erit etiam Quotiens minor numero diuidendo.

INSITIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAPVT XV.

Inſitio minutiarum quid.

SOlent Arithmetici nonnulli vti operatione quadam minutiarum, quam inſitionem vocant. Eſt autem inſitio minutiarum nihil aliud, quam propoſitis duabus, aut pluribus minutijs, quarum quælibet ſit fractio vel vnius duntaxat particulæ omnium ſequentium, vel fractio integrarum omnium fractionum ſequentium, additio huiuſmodi fractionum ad vltimam minutiam, reſpectu cuius omnes illæ fractiones fractionum ſumuntur: ita vt quodammodo præcedentes fractiones ſequentibus inſerantur. Vnde nomen inſitionis obtinuit operatio hæc minutiarum: quemadmodũ in exemplis patebit. Vt propoſitis hiſce duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior ſit fractio vel vnius tantum particulæ poſterioris, vel fractio totius poſterioris, hoc eſt, ita vt prior contineat vel duas partes tertias vnius quartæ partis, vel duas partes tertias trium quartarum: operatio, qua $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum, ad $\frac{3}{4}$. adduntur, appellatur inſitio. Eodem modo propoſitis quatuor hiſce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita vt quælibet ſit fractio vel vnius particulæ omnium ſequentium, vel fractio totarum omnium ſequentium, hoc eſt, ita vt vel prima contineat duas tertias vnius quartæ vnius quintæ vnius ſeptimæ, & ſecunda ſignificet tres quartas vnius quintæ vnius ſeptimæ, & tertia comprehendat duas quintas vnius ſeptimæ; vel prima contineat duas tertias trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & ſecunda comprehendat tres quartas duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & tertia ſignificet duas quintas quatuor ſeptimarum: operationes, qua omnes hæ fractiones fractionum nimirum $\frac{2}{3}$. vnius quartæ vnius quintæ vnius ſeptimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ vnius ſeptimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius ſeptimæ; vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor ſeptimarum, ad $\frac{4}{7}$. adduntur, inſitio dicitur. & ſic de alijs.

Inſitio duplex eſt.

Eſt ergo inſitio duplex: vna, quando quælibet minutia eſt fractio vnius duntaxat particulæ omnium ſequentium minutiarum; altera, quando quælibet minutia eſt fractio integrarum omnium minutiarum ſequentium, vt in exemplis patuit. Arithmetici omnes de prima ſolũ inſitione locuti ſunt, nulla prorſus facta mentione

Inſitio propter quid excogitata ſit.

inſitionis ſecundæ, eam fortaſſis ob cauſam, quod prima vtilis ſit ad diuidendum quemcunque numerum integrum, vna cum fractione aliqua per numerum integrum, vt paulo poſt dicemus. Quoniam vero ſecunda inſitio egregium quoque vſum habet in progreſſionibus Geometricis, vt, Deo iuuante, in maiore noſtro Arithmetices opere declarabimus; vtriuſque inſitionis regulam trademus.

Differētia inter inſitionem & reductionē minutiarum minutiarum.

Magnum autem diſcrimen eſt inter inſitionem, & operationem illam, qua cap. 9. minutias minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere docuimus. Ibi enim propoſitis v. g. duabus hiſce minutijs, $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior ſit fractio poſterioris, ſolum inquirebamus, quamnam minutiam ſimplicem conſtituerent duæ tertiæ trium quartarum, inueniebamusq; conſtituere $\frac{6}{12}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. vnius integri; hic vero indagabimus, quænam minutia efficiatur, ſi addantur $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. efficieturque priori modo minutia hæc, $\frac{11}{12}$. poſteriori vero hæc, $\frac{15}{12}$. hoc eſt, $1\frac{1}{4}$. quarum vtraque longe abeſt à $\frac{1}{2}$. Eodem modo diſcrimen apparebit, ſi fuerint plures minutiæ, quam duæ.

Prima regula inſitionis duarum minutiarum.

Itaque ſi proponantur duæ minutiæ, quarum prior ſit fractio vnius tantum particulæ poſterioris, ita fiet inſitio. Poſterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris multiplicetur productoq; numero numerator eiuſdem prioris adiiciatur. Hoc enim aggregatū erit numerator minutiæ producendæ; denominator vero gignetur ex multiplicatione denominatorum inter ſe. vt datis hiſce minutiis $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita fiet inſitio, ſiue additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numeratore 2. eiuſdē prioris minutiæ, fiunt 11. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autē erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorū inter ſe productus: ita vt hæc minutia $\frac{11}{12}$. componatur ex additione $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Quod facile probari poteſt ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, ſecundum reductionem minutiarum minutiarum, faciunt $\frac{2}{12}$. ſi addantur $\frac{2}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{44}{48}$. hoc eſt, $\frac{11}{12}$. vt prius.

Quo modo plures minutiæ, quā duæ, inſerantur per primam regulam.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, dentur, ita vt quælibet ſit fractio vnius tantum particulæ omnium ſequentium, inſitio hoc modo fiet. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerator eiuſdem penultimæ; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoque numero addatur eiuſdem numerator; Poſt hæc aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proximè antecedentis minutiæ, productoque numero eiuſdem numerator adiiciatur; & ſic deinceps, ſi plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum ſemper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, eiuſdemque numerator producto adiiciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Poſtremum enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatorum inter ſe, vt datis hiſce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet inſitio, hoc eſt, additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vnius quintæ, vnius ſeptimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ, vnius ſeptimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numeratore 2. eiuſdem penultimæ minutiæ, fiunt 22. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ faciunt 88. Addito numeratore 3. eiuſdem minutiæ antepenultimæ, fiunt 91. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ & primæ, faciunt 273. Addito numeratore 2. eiuſdem primæ minutiæ, quæ proxime antecedit, fiunt 275. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 420. productus ex multiplicatione denominatorum inter ſe, ſi nimirum primus per ſecundum multiplicetur, & hic numerus productus per tertium, &c. Itaque ex hac inſitione orietur minutia hæc $\frac{275}{420}$. quæ ad minimos terminos reducta faciet $\frac{55}{84}$. Quod ex regula additionis probabitur hac ratione. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. per regulam reductionis minutiarum minutiarum faciunt $\frac{2}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{3}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{2}{35}$. ſi tres illæ minutiæ $\frac{2}{420}$. $\frac{3}{140}$. $\frac{2}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fient $\frac{9432500}{14400000}$. hoc eſt in minimis terminis $\frac{55}{84}$. vt prius, ſed multo facilius, & citius hæc ſumma inuenta eſt per inſitionem.

Minutiæ inſerendæ iuxta primam regulam non ſunt reducendæ ad minimos terminos ante finē operationis.

Cæterum in hac regula inſitionis nulla minutia reducenda eſt ad minimos terminos, antequam tota operatio abſoluatur, quia ſenſus variaretur, & magnus fieret error: abſoluta tamen operatione, reduci poteſt ſumma producta ad minimos terminos, vt à nobis factum eſt. Reduximus enim minutiam hanc $\frac{275}{420}$. ex inſitione productam ad iſtam $\frac{55}{84}$. Quod autem ſenſus variaretur, & error contingeret, ſi minutia aliqua ante finem operationis ad terminos minimos reuocaretur, perſpicuum eſt. Nam ſi inſerendæ ſint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{12}$. id eſt, addendæ $\frac{2}{3}$. vnius duodecimæ ad $\frac{8}{12}$. fient $\frac{26}{36}$ At ſi poſterior minutia $\frac{8}{12}$. reuocaretur ad minimos terminos, nempe ad hanc minutiam $\frac{2}{3}$. deberent inſeri $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. id eſt, addi $\frac{2}{3}$. vnius tertiæ ad $\frac{2}{3}$. qui ſenſus longe alius eſt, quam prior. Fietque propterea ex hac inſitione alia minutia, nimirum $\frac{8}{9}$. valde diuerſa à priori minutia producta $\frac{26}{36}$. Prior tamen minutia producta $\frac{26}{36}$. reduci poteſt ad hanc minimis terminis $\frac{13}{18}$.

Summa inſitionis ſecundum primam regulā ſemper minor eſt quam vnitas, & quare.

Prætereundum etiam non eſt, ſummam ex inſitione hactenus expoſita collectam, ſi vltima minutia minor eſt, quam vnitas, ſemper minorem eſſe vnitate, etiamſi infinitæ minutiæ inſerantur. Vt ſi hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{5}$. inſerantur, fiet minutia $\frac{119}{120}$. quæ minor eſt, quam vnitas. Quod ita debere eſſe, hac ratione declarari poterit. Quoniam vt $\frac{4}{5}$. efficiant vnitatem, deeſt $\frac{1}{5}$. & præcedens minutia $\frac{1}{2}$. quæ additur ad $\frac{4}{5}$. non eſt $\frac{1}{5}$. ſed $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, fit vt ad complendam vnitatem deſit adhuc $\frac{1}{2}$. vnius quintæ: at quia antecedens minutia $\frac{2}{3}$. quæ additur, non eſt $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, ſed $\frac{2}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad explendam vnitatem deſit adhuc $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ. Rurſus quoniam præcedens minutia $\frac{3}{4}$. non eſt $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, ſed $\frac{3}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad conficiendam vnitatem deſit adhuc $\frac{1}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, & ſic deinceps, ſi plures fuerint minutiæ, ſemper aliquid deerit ad vnitatem complendam.

Vſus primæ regulæ inſitionis in diuidēdo numero integro vna cū minutia per numerum integrum.

Vt autem videas, quàm præclarum vſum habeat prima hæc regula inſitionis in diuidendo numero integro vnà cum minutia per numerum integrum, adducam vnum, vel alterum exemplum. Sint diuidenda $20\frac{1}{4}$. per 12. Diuiſis integris 20 per 12. fit Quotiens $1\frac{8}{12}$. & quia minutia $\frac{1}{4}$. diuidi etiam debet per 12. & Quotiens addi priori quotienti; eſt autem Quotiens (ſi diuidatur $\frac{1}{4}$. per 12) $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, quemadmodum ſi 1. diuidatur per 12. Quotiens eſt $\frac{1}{12}$. fit, vt ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. id eſt, ſi addatur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, (nimirum Quotiens diuiſionis $\frac{1}{4}$. per 12.) ad $\frac{8}{12}$. componatur minutia, quæ addita Quotienti integro 1. efficiat totum Quotientem: Fit autem ex inſitione harum minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. minutia $\frac{33}{48}$. hoc eſt $\frac{11}{16}$. Igitur totus Quotiens erit $1\frac{11}{16}$. Idem efficies, ſi diuiſorem 12. numero integro diuidendo 20. ſupponas, vt fiat minutia $\frac{20}{12}$. & huic minutię inſeras minutiam $\frac{1}{4}$. diuidendam hoc modo $\frac{1}{4}$. $\frac{20}{12}$. quia minutia $\frac{20}{12}$. eſt Quotiens diuiſionis 20. per 12.

cui per

cui per inſitionem additur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, nempe Quotiens diuiſionis $\frac{1}{4}$. per 12. Vtroque autem modo recte fieri diuiſionem facile experieris per regulam diuiſionis. Si enim diuidas 20$\frac{1}{4}$. per 12. reperies quotientem $\frac{81}{48}$. id eſt, 1$\frac{33}{48}$. ſiue 1$\frac{11}{16}$. vt prius.

Sint rurſus diuidenda 100.$\frac{5}{6}$. per 8. Diuiſis integris 100. per 8. fit Quotiens 12$\frac{4}{8}$. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiam debet per 8. & Quotiens addi priori Quotienti; eſt autem (ſi diuidantur $\frac{5}{6}$. per 8.) Quotiens $\frac{5}{6}$ vnius octauæ, quemadmodum ſi 1. diuidatur per 8. Quotiens eſt $\frac{1}{8}$. fit, vt ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}.\frac{4}{8}$. id eſt, ſi addantur $\frac{5}{6}$. vnius octauę, (nimirum Quotiens diuiſionis $\frac{5}{6}$. per 8.) ad $\frac{4}{8}$. conficiatur minutia, quæ addita Quotienti integro 12. componat totum Quotientem: Fit autem ex inſitione harum minutiarum $\frac{5}{6}.\frac{4}{8}$. minutia $\frac{29}{48}$. Totus igitur Quotiens erit 12$\frac{29}{48}$. Idem effiicies, ſi diuiſorem 8. numero integro diuidendo 100. ſupponas, vt fiat minutia $\frac{100}{8}$. & huic minutiæ inſeras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendam, hoc modo $\frac{5}{6}.\frac{100}{8}$. quia minutia $\frac{100}{8}$. eſt Quotiens diuiſionis 100. per 8. cui per inſitionem adduntur $\frac{5}{6}$. vnius octauæ, nempe Quotiens diuiſionis $\frac{5}{6}$. per 8. eundem prorſus Quotientem 12$\frac{29}{48}$. inuenies, ſi diuidas per regulam diuiſionis, 100$\frac{5}{6}$. per 8. Facies enim quotientem $\frac{605}{48}$. hoc eſt 12$\frac{29}{48}$. Poſtremo ſint diuidenda 100$\frac{5}{6}$. per 10. Diuiſis integris 100. per 10. fit Quotiens 10. nihilque remanet. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiam debet per 10. & Quotiens addi priori Quotienti; eſt autem (diuiſis $\frac{5}{6}$. per 10.) Quotiens $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, quemadmodum ſi 1. diuidatur per 10. Quotiens. eſt $\frac{1}{10}$. fit, vt ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}.\frac{0}{10}$. id eſt, ſi addantur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ (nimirum Quotiens diuiſionis $\frac{5}{6}$. per 10.) ad $\frac{0}{10}$ (quia enim nulla fractio ſuperfuit in diuiſione 100. per 10. ponenda eſt figura 0. ſupra diuiſorem 10. vt fiat minutia $\frac{0}{10}$. continens nullam decimam.) confletur minutia, quæ addita Quotienti integro 10. componat totum Quotientem: Fit autem ex inſitione harum minutiarum $\frac{5}{6}.\frac{0}{10}$. minutia $\frac{5}{60}$. Totus ergo Quotiens erit, 10$\frac{5}{60}$. hoc eſt, 10$\frac{1}{12}$. Idem efficies, ſi diuiſorem 10. numero integro diuidendo 100. ſupponas, vt fiat minutia $\frac{100}{10}$ & huic minutiæ inſeras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendam, hoc modo $\frac{5}{6}.\frac{100}{10}$. quia minutia $\frac{100}{10}$. eſt Quotiens diuiſionis 100. per 10. cui per inſitionē adduntur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, nempe Quotiens diuiſionis $\frac{5}{6}$ per 100. Eundem omnino Quotiētem habebis, ſi 100$\frac{5}{6}$. diuidas per 10. ſecundum diuiſionis regulam. Fiet enim Quotiens $\frac{605}{60}$. hoc eſt, 10$\frac{5}{60}$. ſiue 10$\frac{1}{12}$.

Iam vero ſi proponantur duæ minutiæ, quarum prior ſit fractio totius poſterioris, fiet inſitio hac ratione. Multiplicetur poſterioris minutiæ numerator per denominatorem prioris, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione numeratorum productus. Fiet enim hac ratione numerator minutiæ producendæ. Denominator vero procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter ſe. Vt hiſce minutijs $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}$. datis, ita fiet inſitio, ſiue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numero 6. ex multiplicatione numeratorum producto, fiunt 15. pro numeratore minutiæ producēdæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum productus. Itaque ex additione $\frac{2}{3}$ trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. conflatur minutia $\frac{15}{12}$. hoc eſt, 1$\frac{1}{4}$. Quod facile probari poteſt ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. trium quartarum faciunt $\frac{6}{12}$. vt patet ex reductione, quam de minutijs minutiarum tradidimus; ſi addantur $\frac{6}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{60}{48}$. hoc eſt, 1$\frac{1}{4}$. vt prius. *Secunda regula inſitionis duarum minutiarum.*

Si vero plures minutiæ, quā duæ, ſint propoſitæ, ita vt quælibet ſit fractio integrarum minutiarū omnium ſequentium, facienda erit inſitio hoc modo. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione duorum numeratorum poſtremorum productus. Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoq; numero addatur numerus ex tribus poſtremis numeratoribus inter ſe multiplicatis productus: Rurſus aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proxime antecedentis minutiæ, productoq; numero adiiciatur numerus ex quatuor vltimis numeratoribus inter ſe multiplicatis productus; & ſic deinceps, ſi plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum ſemper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, productoq; numero adiiciatur numerus productus ex omnibus numeratoribus illarum minutiarum, quæ vſque ad eum locū aſſumptæ fuerunt, donec nulla minutia ſuperſit. Poſtremum enim aggregatū erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter ſe. Vt propoſitis hiſce minutijs $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{2}{5}.\frac{4}{7}$. ita fiet inſitio, ſiue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor ſeptimarum, ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numero 8. producto ex poſtremis duobus numeratoribus 4 & 2. inter ſe multiplicatis, fiunt 28. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ, faciunt 112. Addito numero 24. producto ex poſtremis tribus numeratoribus 4. 2. & 3. inter ſe multiplicatis, fiunt 136. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ, quæ prima eſt, faciunt 408. Addito numero 48. producto ex omnibus quatuor numeratoribus 4. 2. 3. & 2. inter ſe multiplicatis, fiunt 456. pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator vero erit numerus 420. productus ex denominatoribus omnibus inter ſe multiplicatis. Itaque ex inſitione hac generabitur hæc minutia, $\frac{456}{420}$. hoc eſt 1$\frac{36}{420}$. ſiue in minimis terminis 1$\frac{3}{35}$. Quod ex regula additionis confirmabitur hoc modo. Quoniam $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{2}{5}.\frac{4}{7}$. per regulam qua minutiæ minutiarum reducuntur, faciunt $\frac{48}{420}$. & $\frac{3}{4}.\frac{2}{5}.\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{24}{140}$. & $\frac{2}{5}.\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{8}{35}$. ſi tres hæ minutiæ $\frac{48}{420}.\frac{24}{140}.\frac{8}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fiet minutia $\frac{15640800}{14406000}$. hoc eſt 1$\frac{1234800}{14406000}$. ſiue 1$\frac{3}{35}$. in minimis terminis, vt prius. Sed multo facilius, & expeditius eandem ſummam per inſitionem collegimus. *Quo pacto plures minutiæ, quā duæ inſerantur per ſecundam regulam.*

In hac porro ſecunda regula inſitionis poſſunt minutiæ inſerendæ reduci ad minimos terminos ante operationem. Nam ſi inſerantur hæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{8}$. id eſt, ſi addantur $\frac{2}{3}$. quatuor octauarum ad $\frac{4}{8}$. fient $\frac{20}{24}$. hoc eſt, $\frac{5}{6}$. Tantundem faciemus, ſi prius $\frac{4}{8}$. reducamus ad $\frac{1}{2}$. & inſeramus poſtea $\frac{2}{3}.\frac{1}{2}$ hoc eſt, addamus $\frac{2}{3}$. vnius dimidij ad $\frac{1}{2}$. Eodem modo ſi inſerantur $\frac{6}{10}.\frac{4}{8}$. fient $\frac{64}{80}$. id eſt, $\frac{4}{5}$. eademque minutia producetur, ſi prius $\frac{6}{10}$. reducatur ad $\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{8}$. ad $\frac{1}{2}$. inſeranturque $\frac{3}{5}.\frac{1}{2}$. Producentur enim ex hac inſitione $\frac{8}{10}$. hoc eſt, $\frac{4}{5}$. vt prius. Ratio huius rei eſt, quia cum præcedens minutia ſit fractio totius ſequentis, idem erit omnino valor. $\frac{2}{3}.\frac{4}{8}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}$. Si enim hæ minutiæ minutiarum reducantur ad ſimplices minutias, reducetur prior ad $\frac{8}{24}$. hoc eſt, ad $\frac{1}{3}$. poſterior vero ad $\frac{2}{6}$. id eſt, ad $\frac{1}{3}$. quoque. Quod in priori regula non contingit. Cum enim ibi prior minutia ſit fractio vnius tantum particulæ poſterioris, perſpicuum eſt in eodem exemplo aliud eſſe $\frac{2}{3}.\frac{1}{8}$. & $\frac{2}{3}.\frac{1}{2}$. Prior enim minutia minutiarum facit $\frac{2}{24}$. hoc eſt $\frac{1}{12}$. poſterior $\frac{2}{6}$. id eſt, $\frac{1}{3}$.

QVÆSTIVNCVLÆ NONNVLLÆ NVMERORVM INTEGRORVM, AC MINVTIARVM.

CAPVT XVI.

OPeræ pretium me facturum arbitror, ſi priuſquam ad alia pergam, ſubnectam hoc loco varias quæſtiunculas numerorum integrorum, ac minutiarum, quæ per additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diuiſionemque ſoluuntur, tum quia in ijs ſoluendis ſtudioſi ſeſe exercere poſſunt in operationibus integrorum, & minutiarum, tum etiam, quia ſæpenumero ſimiles quæſtiones præclarum vſum habent in alijs rebus Arithmeticis. Hinc ergo exordiemur.

1. Inuentio numeri, à quo facta eſt ſubtractio, vel facienda vt propoſitus numerus relinquatur.

1. A quo numero ſubducta ſunt, vel ſubduci debent 23. vt remaneant 47? Item à quo numero ſubducta ſunt, vel ſubduci debent $\frac{4}{11}$. vt relinquantur $8\frac{2}{3}$? Huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur per additionem. Si enim numerum ſubtractum, ſubtrahendumue adiicias numero, qui relinqui debet, conficies numerum, à quo datus numerus ſubtractus relinquet datum numerum. Vt in priori quæſtione, ex 23. & 47. fit numerus 70. Ab hoc ergo ſubducenda ſunt 23. vt 47. relinquantur. In poſteriori autem quæſtione, ex $\frac{4}{11}$. & $8\frac{2}{3}$. fit numerus $9\frac{1}{33}$. à quo ſi ducas $\frac{4}{11}$. relinquentur $8\frac{2}{3}$. vt patet, ſi reducas minutias productas ad integra, & ad minimos terminos. Id quod in ſequentibus quæſtionibus obſeruandum etiam erit, hoc eſt, poſt abſolutam operationem reducendæ erunt minutiæ productæ ad minimos terminos, vt in hac quæſtione factum eſt.

2. Inuentio numeri ſubtracti, vel ſubtrahendi ex propoſito numero vt alius datus numerus ſit reliquus.

2. Quis numerus ſubtractus eſt, aut ſubtrahi debet ex 87. vt relinquantur 26? Item qui numerus ablatus eſt, vel auferri debet ex $\frac{8}{13}$. vt relinquantur $\frac{2}{7}$? Huius generis quæſtiones expediet ſubtractio. Nam ſi numerus, qui relinqui debet, ſubducatur ex numero, à quo fieri debet ſubtractio, remanebit numerus, qui ex eodem numero detractus relinquet reſiduum propoſitum. Vt in priori quæſtione, ſubtractis 26. ex 87. remanent 61. Si igitur tollantur 61. ex 87. remanebunt 26. In poſteriori autem quæſtione, ſi auferantur $\frac{2}{7}$. ex $\frac{8}{13}$. reſtabunt $\frac{30}{91}$. quæ ſi ſubtrahantur ex $\frac{8}{13}$. relinquentur $\frac{2}{7}$.

3. Inuentio numeri, cui datus numerus adiiciendus ſit, vel qui dato numero ſit addendus, vt alius numerus datus fiat.

3. Cui numero adiicienda ſunt 38. aut quis numerus adiiciendus eſt ad 38. vt numerus compoſitus ſit 83? Item cui numero addenda ſunt $4\frac{8}{9}$. aut quis numerus adiiciendus eſt ad $4\frac{8}{9}$. vt componatur numerus $20\frac{1}{2}$? Quæſtiones eiuſmodi per ſubtractionem etiam ſoluuntur. Nam ſi ex numero, qui componi debet, demas numerum addendum propoſitum, relinquetur numerus, cui ſi adiiciatur datus numerus addendus, fiet numerus datus. Vt in priori quæſtione, ſubductis 38. ex 83. remanent 45. Huic ergo numero adiicienda ſunt 38. vt fiat numerus 83. In poſteriori autem quæſtione, ſubtractis $4\frac{8}{9}$. ex $20\frac{1}{2}$. relinquitur numerus $15\frac{11}{18}$. cui ſi addas $4\frac{8}{9}$. fiet numerus $20\frac{1}{2}$.

4. Inuentio differentiæ inter duos datos numeros.

4. Quæ differentia, ſiue exceſſus eſt inter 100. & 349? Item inter $6\frac{1}{2}$. & $20\frac{3}{4}$? Hæ etiam quæſtiones per ſubtractionem explicantur. Si namque minor numerus ex maiore tollatur, relinquetur differentia, ſiue exceſſus quæſitus. Vt in priori quæſtione, ſublatis 100. ex 349. relinquuntur 249. pro exceſſu, differentiaue inter 100. & 349. In poſteriori autem quæſtione, demptis $6\frac{1}{2}$. ex $20\frac{3}{4}$. reſtant $14\frac{1}{4}$. Hoc ergo numero ſuperat numerus $20\frac{3}{4}$. numerum $6\frac{1}{2}$.

5. Inuentio numeri diuiſi aut diuidendi per datum numerum vt Quotiens propoſitus proueniat.

5. Quis numerus diuiſus, vel diuidendus eſt per 9. vt quotiens ſit 34? Item quis numerus diuiſus vel diuidendus eſt per $4\frac{1}{3}$. vt Quotiens ſit $\frac{1}{2}$? Tales quæſtiones per multiplicationem expediuntur. Si enim diuiſor datus per datum Quotientem multiplicetur, procreabitur numerus diuiſus diuidendusue, qui quæritur. Vt in priori quæſtione, multiplicatis 9. per 34. fit numerus 306. quo diuiſo per 9. Quotiens erit 34. In quæſtione vero poſteriori, ſi multiplicentur $4\frac{1}{3}$. per $\frac{1}{2}$. producetur numerus $2\frac{1}{6}$. qui diuiſus per $4\frac{1}{3}$. dabit Quotientem $\frac{1}{2}$.

6. Inuentio numeri, qui contineat, vel ſit aut det datam fractionem, ſeu partē, parteſue propoſiti numeri.

6. Quis numerus continet $\frac{3}{5}$. huius numeri 30? Item quis numerus eſt, vel dat $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$? Multiplicatio etiam huiuſmodi quæſtiones abſoluit. Si enim dati duo numeri inter ſe multiplicentur, gignetur numerus quæſitus. Vt quoniam in priori quæſtione ex multiplicatione $\frac{3}{5}$. per 30. producuntur 18. fit vt numerus 18. contineat $\frac{3}{5}$. numeri 30. In poſteriori autem quæſtione ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $4\frac{5}{7}$. fit numerus $2\frac{5}{14}$. qui facit $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$. Hæc quæſtio ita quoque proponi poteſt. Da mihi $\frac{3}{5}$. huius numeri 30. Item da mihi $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$.

7. Inuentio numeri, per quem datus numerus ſit diuiſus aut diuidendus, vt Quotiēs ſit propoſitus numerus.

7. Per quem numerum diuiſa, aut diuidenda ſunt 48. vt Quotiens ſit 10? Item per quem numerum diuidentur $\frac{2}{7}$. vt Quotiēs ſit $\frac{2}{3}$? Diuiſione ſimilibus quæſtionibus ſatisfiet. Nam ſi numerus diuiſus, diuidendusue propoſitus diuidatur per datum Quotientem, prodibit ex hac diuiſione diuiſor quæſitus. Vt in priori quæſtione, diuiſis 48. per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. per quem ſi diuidatur numerus datus 48. fiet Quotiens 10. In poſteriori autem quæſtione, diuiſis $\frac{2}{7}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{6}{14}$. per quem ſi diuidantur $\frac{2}{7}$. producetur Quotiens $\frac{2}{3}$.

8. Inuentio numeri per quem datus numerus ſit multiplicādus, vel qui per datum numerū multiplicandus ſit, vt gignatur numerus propoſitus.

8. Per quem numerum multiplicanda ſunt 17. aut quis numerus multiplicandus eſt per 17. vt productus numerus ſit 100? Item per quem numerū multiplicari debent $3\frac{1}{2}$. aut quis numerus per $3\frac{1}{2}$. multiplicari debet, vt numerus productus ſit $\frac{1}{4}$? Diuiſio quoque ſimilibus quæſtionibus ſatisfaciet. Nam ſi numerum, qui produci debet, partiamur per numerum qui multiplicandus proponitur, efficiemus numerum quæſitum. Vt in quæſtione priori, diuiſis 100. per 17. fit Quotiens $5\frac{15}{17}$. per quem ſi multiplicetur datus numerus 17. procreabitur datus numerus 100. In poſteriori vero quæſtione, ſi diuidatur $\frac{1}{4}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{14}$. per quem ſi multiplicetur datus numerus $3\frac{1}{2}$. gignetur datus numerus $\frac{1}{4}$.

9. Inuentio duorum numerorum, qui inter ſe multiplicati datum numerum producant.

9. Qui duo numeri inter ſe multiplicati producunt 48. vel $\frac{1}{2}$. vel $6\frac{3}{4}$. Diuiſio quoque huiuſmodi quæſtionibus ſatisfaciet. Nam ſi numerum producendum diuidamus per quemuis numerū, erit hic numerus, & Quotiens duo illi, qui quæruntur. Vt ſi 48. diuidantur per quemcunq; numerum, vt per 6. fiet Quotiens 8. Duo ergo numeri 6. & 8. inter ſe multiplicati producent 48. Sic etiam ſi eadem 48. diuidantur per alium numerum quemcunque, vt per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. Duo ergo numeri 10. & $4\frac{4}{5}$. inter ſe multiplicati gignent hunc numerum. 48. Item ſi partiamur $\frac{1}{2}$. per quemcunque numerum, vt per $\frac{2}{3}$. inueniemus Quotientem $\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri quæſiti, qui inter ſe multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Eadem ratione ſi partiamur $\frac{1}{2}$. per quemuis alium nume-

numerum, vt per 8.reperiemus Quotientem $\frac{1}{16}$. Duo igitur numeri quæſiti, qui inter ſe multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt 8.& $\frac{1}{16}$. Denique diuiſis $6\frac{3}{4}$. per quemlibet numerum, vt per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $1\frac{13}{14}$. Duo ergo numeri, qui inter ſe multiplicati producant $6\frac{3}{4}$. erunt $3\frac{1}{2}$.& $1\frac{13}{14}$.

10. Qui ſunt duo illi numeri, vt vno diuiſo per alterum, Quotiens ſit 28? Item qui ſunt duo illi numeri, vt vno diuiſo per alterum, Quotiens ſit $\frac{5}{6}$? Has quæſtiones, & alias ſimiles multiplicatio enodat. Si namque Quotientem datum multiplices per quemuis numerum, dabit numerus productus numerum diuidendum: diuiſor autem erit numerus multiplicans aſſumptus. Vt in priori quæſtione, ſi 28. multiplices per quemuis numerum, vt per 6. efficies numerum 168. Hic ergo diuiſus per 6. faciet 28. In quæſtione autem poſteriori, ſi $\frac{5}{6}$. multiplices per quemlibet numerum, vt per $\frac{1}{2}$. procreabis $\frac{5}{12}$. quibus diuiſis per $\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{5}{6}$.

Inuentio duorũ numerorũ, vt vno per alterum diuiſo, proueniat Quotiẽs propoſitus.

11. Per quem numerum multiplicanda ſunt 7. aut quis numerus multiplicandus eſt per 7. vt producto numero diuiſo per 8. Quotiens ſit 3? Item per quem numerum multiplicari debent $\frac{2}{5}$. Aut quis numerus per $\frac{2}{5}$. multiplicandus eſt, vt producto numero per $\frac{3}{4}$. diuiſo, Quotiens ſit $\frac{1}{4}$. Quæſtiones huiuſmodi multiplicatione, & diuiſione ſoluuntur. Nam ſi diuiſorem datum per datum Quotientem multiplices, numerumq; productum per datum numerum multiplicandum, multiplicantemue partiaris, erit Quotiens numerus, qui quæritur. Vt in priori quæſtione, ſi multiplicetur diuiſor datus 8. per datum Quotientem 3. producetur numerus 24. qui diuiſus per numerum multiplicandum, multiplicantemue datum, nempe per 7. faciet $3\frac{3}{7}$. numerum quæſitum. Si enim multiplicentur 7. per $3\frac{3}{7}$. fiet numerus 24. qui diuiſus per 8. faciet Quotientem 3. In poſteriori vero quæſtione, ſi diuiſor datus $\frac{3}{4}$. multiplicetur per datum Quotientem $\frac{1}{4}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuiſus per $\frac{2}{5}$. numerum multiplicantem, multiplicandumue datum faciet $\frac{15}{32}$. numerum quæſitum. Si namq; $\frac{2}{5}$. multiplicentur per $\frac{15}{32}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuiſus per $\frac{3}{4}$. faciet Quotientem $\frac{1}{4}$.

Inuẽtio numeri, per quẽ datus numerus ſit multiplicandus, vel qui multiplicandus ſit per datũ numerum, vt producto diuiſo per aliũ datum numerum proueniat Quotiens propoſitus.

12. Quota pars eſt numerus 6. huius numeri 54? Item quota pars eſt hic numerus $\frac{3}{5}$. huius numeri $\frac{9}{10}$? Quæſtiones tales per diuiſionem explicantur. Nam ſi numerus datus, qui debet eſſe pars per alterum datum numerum (qui ſemper maior eſſe debet altero) diuidatur, indicabit Quotiens, quota pars, aut partes ſit numerus datus numeri dati. Vt in priori quæſtione, diuiſis 6. per 54. fit Quotiens $\frac{6}{54}$. id eſt, $\frac{1}{9}$. Erit ergo numerus 6. vna nona pars numeri 54. In poſteriori autem quæſtione, diuiſis $\frac{3}{5}$. per $\frac{9}{10}$. fit Quotiens $\frac{30}{45}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. Continebit ergo numerus $\frac{3}{5}$. duas tertias partes numeri $\frac{9}{10}$. Hoc autem ita eſſe experiri licebit per ſextam quæſtionem. Si enim quæratur numerus, iuxta illam quæſtionem, qui ſit $\frac{1}{9}$. numeri 54. reperietur numerus 6. Si item inueſtigetur, qui numerus contineat $\frac{2}{3}$. numeri $\frac{9}{10}$. inuenietur numerus $\frac{18}{30}$. hoc eſt, $\frac{3}{5}$.

Inuentio partis quã datus numerus exhibet reſpectu alterius numeri dati.

13. Numerus hic 6. cuius numeri erit vna nona pars? Item numerus $\frac{3}{5}$. cuius numeri duas tertias continebit? Diuiſio quæſtiones tales ſoluit. Si namque datus numerus diuidatur per minutiam, quæ ſignificet propoſitam partem, partesue, dabit Quotiens numerum quæſitum. Vt in quæſtione priori, diuiſis 6. per $\frac{1}{9}$. fit Quotiens 54. Numerus ergo 6. nona pars erit numeri 54. In quæſtione vero poſteriori, diuiſis $\frac{3}{5}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{10}$. Huius ergo numeri duas tertias continebit hic numerus $\frac{3}{5}$.

Inuẽtio numeri reſpectu cuius datus numerus exhibeat partem propoſitam.

14. Hic numerus 7. quot octauas partes vnius integri comprehendit? Item numerus hic $\frac{3}{4}$. quot duodecimas partes vnius integri continet? Item hic $\frac{3}{7}$. quot octauas vnius integri complectitur? Multiplicatio huius generis quæſtiones dirimet. Si enim datus numerus per denominatorem partium, quæ quæruntur, multiplicetur, dabit productus numerus numerum partium quæſitum. Vt in prima quæſtione, multiplicatis 7. per 8. fiunt 56. Numerus ergo 7. continebit 56. octauas. In ſecunda autem quæſtione, multiplicatis $\frac{3}{4}$. per 12. fiunt 9. Numerus ergo $\frac{3}{4}$. complectitur nouem duodecimas. In tertia denique quæſtione, multiplicatis $\frac{3}{7}$. per 8. fit numerus $\frac{24}{7}$. hoc eſt, $3\frac{3}{7}$. Numerus ergo $\frac{3}{7}$. continet tres octauas, & $\frac{3}{7}$. vnius octauæ. Atque hoc ita eſſe, perſpicuum eſt. Si enim $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$. hoc eſt, $\frac{3}{56}$. & $\frac{3}{8}$. in vnam ſummam colligantur, deprehendentur $\frac{3}{7}$. Ex quo fit, $\frac{3}{7}$. continere $\frac{3}{8}$. & $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$.

Inuentio multitudinis partiũ quarũcunque, quas datus numerus continet.

REGVLA TRIVM, QVÆ ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIVE REGVLA PROPORTIONVM DICI SOLET.

CAPVT XVII.

HActenus iacta ſunt à nobis neceſſaria Arithmetices fundamenta; ſequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vſus apparet, non ſolum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, ſi in commerciis, conuentisque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac neceſſariæ. Primo autem loco ſeſe offert regula illa nunquam ſatis laudata, quæ ob immenſam vtilitatem, Aurea dici ſolet, vel regula Proportionum, propterea quod in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti ſunt, quartus autem ignotus quæritur, verſetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata eſt: quod tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum ſe habet.

Regula aurea, ſiue proportionũ, aut regula trium cur ſic dicta ſit.

Diſpoſitis tribus numeris notis, ita vt is, qui quæſtionem habet annexam, (Semper enim vnus illorum quæſtionem ſecum affert, vt in exemplis apparebit) tertio ſtatuatur loco; reliquorum autem ille, qui de eadem eſt re, hoc eſt, qui tertio ſimilis eſt, (Exempla autem declarabunt, in quo ſimilitudo hæc conſiſtat.) primum occupet locum, mediam denique ſedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, ſimilis eſſe debet: Diſpoſitis, inquam, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter ſe, productusque numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus erit quartus, qui quærebatur, ſatisfacietque quæſtioni propoſitæ: hoc eſt, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad ſecundum.

Numeri in regula triũ quo pacto ſint collocandi.

Quo pacto per regulã triũ quartus numerus ignotus ſit inquirendus.

Exemplum.

Quatuor aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi poſſint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæſtionem; de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere poſſint: Huic numero ſimilis eſt nume-

numerus 4. aureorum. Nam ſicut 4. aureis emptæ ſunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ ſunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus ſit pretium: at 12. libræ piperis ſunt merces. Ita ergo ſtabit exemplum.

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20?	fiunt	60.

Multiplicando autem inter ſe ſecundum, & tertium numerum, & productum 240. per primum diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars eſt ſecundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem eſſe quarti numeri inuenti 60.

Aliud Exemplum.

Aureos 60. expendo 5. menſibus, peto, 132. aureos quot menſibus expendam? Hic etiam cernis, quæſtionem fieri de 132. aureis, & huic numero ſimilem eſſe hunc 60. aur. Sic igitur exemplum ſtabit.

Aurei.	Menſes.	Aurei.		Menſes.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem ſecundum numerum, & tertium inter ſe, productumque 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menſes, quibus expendam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. ſecundum 5. complectitur duodecies.

Demõſtratio regulæ trium.

Demonſtratio huius regulæ hæc eſt. Quoniam eadem proportio eſſe debet primi numeri ad ſecundum, quæ tertij ad quartum inuentum, vt dictum eſt, & ex propoſitis exemplis conſtat; neceſſe eſt, ex propoſ. 19. lib. 7. Euclid. eundem numerum produci ex multiplicatione primi numeri per quartum, qui ex ſecundo in tertium gignitur. Cum igitur numerus ex ſecundo in tertium productus diuidatur per primum, vt quartus inueniatur, vt regula trium præcipit; fit vt primus numerus per Quotientem, hoc eſt, per quartum numerum inuentum multiplicatus producat eundem numerum diuiſum, qui nimirum ex ſecundo in tertium fuit procreatus. Nam numero quolibet per alium quemuis numerum diuiſo, ſi diuiſor per Quotientem multiplicetur, neceſſario numerus diuiſus rurſus procreatur, vt in tertio examine Diuiſionis integrorum cap. 5. dictum eſt. Id quod etiam conſtat ex definitionibus Diuiſionis, ac Multiplicationis: quod hoc exemplo propoſito declarabimus. Numerus 12. diuidatur per 4. vt fiat Quotiens 3. qui nimirum, ſecundum definitionẽ diuiſionis. cap 5. traditã, toties vnitatem contineat, quoties diuiſus numerus 12. diuiſorem 4. continet. Dico ſi multiplicemus diuiſorem 4. per Quotientem 3. neceſſario rurſus produci diuiſum numerum 12. Nam cum, iuxta definitionem Multiplicationis cap. 4. traditam, numerus procreari debeat, qui toties contineat diuiſorem 4. qui eſt vnus numerorum multiplicantiũ, quoties numerus quotiens 3. qui eſt alter numerus multiplicãs, vnitatẽ continet? contineat autem diuiſus numerus 12. toties diuiſorem 4. quoties numerus Quotiens 3. vnitatem includit, vt dictum eſt, liquido conſtat, numerũ diuiſum 12. ex dicta multiplicatione diuiſoris 4. per quotientem 3, procreari. Eademque ratio eſt in omnibus aliis numeris. Quæ cum ita ſint, erit omnino numerus Quotiens per regulam trium inuentus, quartus numerus proportionalis, qui quæritur, vt ex dicta propoſ. 19. lib. 7. Eucl. conſtat: quandoquidem idem numerus producitur ex primo numero in quartum, qui ex ſecundo in tertium, vt diximus.

Numero per aliũ diuiſo ſi diuiſor per Quotientẽ multiplicetur, cur rurſum numerus diuiſus producatur.

Probatio regulæ triũ.

Ex his, quæ proxime ſcripſimus, facile colligitur, qua ratione regula trium poſſit examinari. Nam ſi idem procreetur numerus ex primo numero in quartum inuentũ, qui ex ſecundo in tertium, dubitandum non eſt, quin recte inuentus ſit quartus numerus proportionalis: ſi vero non idem numerus gignatur, repetenda erit operatio.

Alia probatio regulæ trium.

Eſt tamen alia probatio regulæ trium, à pleriſq; vſurpata, quæ fit hoc modo. Statuatur primus numerus in tertio loco, & tertius in primo, quartuſque in medio. Si namque, iuxta præceptum regulæ trium, reperiatur hoc modo quartus numerus, qui prius erat ſecundus, recte ſoluta fuit quæſtio propoſita. vt primum exemplum ſupra allatum ita ſtabit.

Aurei.	Libræ.	Aurei.		Libræ.
20.	60.	4?	fiunt	12.

Nam ſi verum eſt, 20. aureis emi 60. lib. propterea quod 4. aureis emptæ ſunt libræ 12. efficitur neceſſario, vt viciſſim 4. aureis emantur libræ 12. hoc ipſo, quod 20. aureis, libræ 60. emantur.

Poſſunt interdum duo numeri ex datis tribus, vt primus & ſecundus, vel primus & tertius, ad minores redigi, vt facilior reddatur operatio. Quod quidem fiet, ſi tam primus, quàm ſecundus; vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam vtriuſque menſuram notam, ſiue ea maxima ſit ſiue non maxima, diuidatur & loco illorum Quotientes ſtatuantur. vt in hoc exemplo.

4. 12. 20? fiunt 60.

Quoniam numerus 4. metitur primum, & ſecundum, ſi, diuiſo vtroque per 4. Quotientes 1. & 3. pro illis ponantur, ita ſtabit exemplum.

1. 3. 20? fiunt 60.

Item quia in eodem exemplo numerus idem 4. numerat primum & tertium, ſi, diuiſo vtroque per 4. Quotientes 1. & 5. pro illis accipiantur, ſic ſtabit idem exemplum.

1. 12. 5? fiunt 60.

Item in ſequenti hoc exemplo.

36. 48. 63? fiunt 84.

Quoniam numerus 12. metitur primum, & ſecundum, ſi, diuiſo vtroque per 12. Quotientes 3. & 4. pro illis reponantur, ita ſtabit exemplum.

3. 4. 63? fiunt 84.

Item quia numerus 9. metitur primum, & tertium in eodem exemplo, ſi, diuiſo vtroque per 9. Quotientes 4. & 7. pro illis in regula collocentur, ſic ſtabit exemplum.

4. 48. 7? fiunt 84.

Rurſus

Rurſus hoc etiam modo quæſtio propoſita ſoluetur. Diuidatur ſecundus numerus per primum, & per Quotientem tertius multiplicetur: vel tertius per primum diuidatur, & per Quotientem multiplicetur medius. Vtroque enim modo productus numerus erit quartus proportionalis, qui quæritur. Vt in hoc exemplo.

60. 360. 132? fiunt 792.

Diuiſo ſecundo numero per primum, fit Quotiens 6. per quem ſi multiplicetur tertius numerus, gignetur quartus 792. ac ſi iuxta præceptum regulæ trium operatus eſſes. Item diuiſo tertio numero per primum, fit Quotiens $2\frac{12}{60}$. hoc eſt, $2\frac{1}{5}$. ſiue $\frac{11}{5}$. per quem ſi multiplicetur ſecundus, producetur idem quartus 792.

His recte intellectis, varijs modis examinare poteris, num per regulam trium quartus numerus recte ſit inuentus, necne. Nam ſi per varias huiuſmodi operationes eundem ſemper quartum numerum repereris, maximo argumento eſt, operationem recte eſſe inſtitutam.

Quod ſi quis roget, qui fieri poſſit, vt per tot vias ad eundem ſemper ſcopum perueniamus, ſciat, huius rei cauſam totam ex proportionibus pendere. Quoniam enim eadem proportio eſſe debet inter primum numerum, & ſecundum, quæ inter tertium, & quartum; fit vt permutando eadem proportio ſit inter primum, & tertium, quæ inter ſecundum, & quartum; Item & conuertendo eadem inter ſecundum, & primum, quæ inter quartum, & tertium; nec non eadem inter tertium, & primum, quæ inter quartum, & ſecundum. Cum ergo ſemper eadem proportio ſit inter Quotientes duorum numerorum per eundem numerum diuiſorum, quæ inter ipſos numeros; perſpicuum eſt, ſi diuidatur tam primus numerus, quam ſecundus, vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam menſuram eandem, & pro ipſis numeris Quotientes reponantur, eſſe adhuc eandem proportionem inter Quotientes primi, & ſecundi numeri, quæ eſt inter tertium numerum, & quartum; Item eandem eſſe proportionem inter Quotientes primi, & tertij numeri, quæ eſt inter ſecundum numerum, & quartum. Rurſus quoniam, diuiſo numero quouis per alium numerũ, producitur denominator proportionis, quam diuiſus numerus habet ad diuiſorem, denominator autem alium quemcunq; numerũ multiplicans, producit numerum, qui ad multiplicatum proportionem habet à dicto denominatore denominatam; fit, vt diuiſo ſecundo, aut tertio numero per primum, Quotiens ſit denominator proportionis ſecundi, aut tertij numeri ad primum. Quare ſi per hunc Quotientẽ multiplicetur tertius numerus, aut ſecundus, procreabitur quartus; qui videlicet eandem proportionem habeat ad tertiũ, quam ſecundus ad primum, vel eandem ad ſecundum, quam tertius ad primum.

Quoniam vero frequenter quæſtiones per regulam trium ſoluendæ præpoſtero ordine proponuntur, interdum etiam diuerſæ monetæ, menſuræ, vel pondera in vno numero reperiuntur, deniq; non raro primus numerus diſſimilis eſt tertio, vt facile hærere, atque impediri poſſit is, qui parum in rebus Arithmeticis eſt verſatus, explicabimus quæſtionibus aliquot varias difficultates, quæ occurrere poſſunt, hinc exordientes. *Quæſtiones nonnullæ, quibus variæ difficultates regulæ triũ explicantur.*

1. Quanti conſtat vna libra piperis, ſi 60. libræ emptæ ſint aureis 20? In hac quæſtione præpoſtere poſiti ſunt numeri. Nam 1. libra, cuius primo loco mentio fit, quæſtionem habet annexam, ac proinde tertium occupare debet locum, primum vero numerus 60. librarum, cum numero vnius libræ ſit ſimilis. Itaque recto ordine proponenda fuiſſet quæſtio hoc modo. Libræ 60. piperis conſtant 20. aureis, libra ergo 1. quanti conſtabit? vt in appoſito hic exemplo apparet.

Lib.	Aur.	Lib.		Aurei.
60.	20.	1?	fiunt	$\frac{20}{60}$. ſiue $\frac{1}{3}$.

Inuenies autem (ſi ſecundum numerum per tertium multiplices, productumque 20. per primum partiaris) valorem 1 libræ eſſe $\frac{20}{60}$. vel $\frac{1}{3}$. vnius aurei, quia cum minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio, cuius numerator eſt numerus diuidendus, denominator autem diuiſor vt cap. 5. & 6. diximus. Reducetur autem vtrauis harum minutiarum, nempe prior ad baiochos hoc modo. Multiplicetur numerator 20. per 100. (tot enim baiochi vnum aureum conficiunt.) productusque numerus 2000. per denominatorem 60. diuidatur. Quotiens enim dabit baiochos $33\frac{20}{60}$. ſiue $33\frac{1}{3}$. Tantundem inueniſſes, ſi poſterioris minutiæ $\frac{1}{3}$. numeratorem per 100. multiplicaſſes, productumque per denominatorem diſtribuiſſes. Quod ſi $\frac{1}{3}$. vnius baiochi ad quatrinos velis reuocare, multiplicabis numeratorem per 4. (cum tot quatrini baiochum conficiant.) productumque per denominatorem partieris. Inuenies enim quatr. $1\frac{1}{3}$. Itaque 1. libra conſtabit baioc. 33. quatr. $1\frac{1}{3}$.

2. Si libræ $10\frac{2}{5}$. & vnciæ $7\frac{1}{2}$. ceræ albæ conſtent aureis 2. & Iul. 6. quantum ceræ emetur baiochis 90? Sic ſtabit exemplum. *Quæſt 2.*

Aur.	Iul.	Lib.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
2.	6.	$10\frac{2}{5}$.	$7\frac{1}{2}$.	90?	fiunt	$45\frac{207}{260}$.

Quoniam vero in primo numero, ac tertio diuerſæ monetæ continentur, reducendæ erunt omnes ad minimam monetam ibi expreſſam, vt ad baiochos, eruntque in primo numero baiochi 260. Rurſus quia in ſecundo numero reperiuntur diuerſa pondera, redigenda erunt ad minima ibi expreſſa, vt ad vncias, quarum 12. vnam libram efficiunt, eruntque in $10\frac{2}{5}$. libris vnciæ $124\frac{4}{5}$. quibus ſi addantur vnciæ $7\frac{1}{2}$. fient vnciæ $132\frac{3}{10}$. Quo pacto autem fractiones vel ſolæ, vel vna cum integris multiplicari inter ſe debeant, aut diuidi, docuimus cap. 13. & 14. Itaque ſic ſtabit exemplum reductum. *Quid agẽdum quando diuerſæ monetæ, menſuræ, pondera, & fractiones occurrũt.*

Baioc.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
260.	$132\frac{3}{10}$.	90?	fiunt	$45\frac{207}{260}$.

Illud vero hoc loco annotandum eſt, minutiam ex multiplicatione medij numeri per tertiam productam, licet eius numerator ſit denominatore maior, non debere redigi ad integra, donec diuiſio ſit abſoluta, ne operatio impediatur. Vnde quia tunc multiplicatio medij numeri per tertium facit $\frac{119070}{10}$. diuidenda erit hæc minutia, antequam ad integra reducatur, per primum numerum: quæ diuiſio dabit hanc minutiam $\frac{11070}{2600}$. continentem vncias $45\frac{207}{260}$.

Quæſt. 3. 3. Quanti conſtabunt $\frac{7}{8}$. vnius vlnæ panni, ſi $\frac{3}{4}$. vnius aur. quiſpiam emerit $\frac{1}{3}$. vnius vlnæ? Sic ſtabit exemplum.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
$\frac{1}{3}$.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{7}{8}$?	fiunt	$1\frac{31}{32}$.

Multiplicatio medij numeri per tertium facit minutiam $\frac{21}{32}$. qua diuiſa per primum numerum, inuenietur minutia hæc $\frac{63}{32}$. vnius aurei, quæ facit aur. $1\frac{31}{32}$. Reducta autem hæc minutia $\frac{31}{32}$. vnius aurei ad Iulios, baiochos, & quatrinos, dat Iul. 9. baioc. 6. quatr. $3\frac{1}{2}$.

Quæſt. 4. 4. Studioſus quidam in Vniuerſitate volens dare operam literis 6. annos, animaduertit ſe 7. menſibus, & 13. diebus expendiſſe aureos 200. Iul. 7. baiochos $8\frac{2}{7}$. Quæritur ergo, quanta pecunia indigeat. Ita ſtabit exemplum.

Menſes.	Dies.	Aur.	Iul.	Baioc.	An.		Aur.	Baioc.
7.	13.	200.	7.	$8\frac{2}{7}$.	6?	fiunt	1956.	$7\frac{101}{1575}$.

Hic in primo numero menſes, & in tertio anni ad dies reuocandi ſunt. Quod vt fiat, conſiderandum eſt, quinam menſes illi ſint, quia non omnes menſes eundem dierum numerum continent. Nam ſi ponamus priores ſeptem menſes, initio facto à Ianuario, continebunt dicti 7 menſes in anno communi dies 212. vt hic vides, (in anno vero biſſextili 213. cum in eo Februarius contineat dies 29.) Additis diebus 13. fient dies 225. Deinde conſiderandum eſt, quot anni biſſextiles in illis 6. annis contineantur. Nam pro ſingulis addendus eſt dies 1. ad dies 365. anni vnius communis. Vnde ſi ponamus duos annos biſſextiles contineri, multiplicabimus 6. annos per 365. dies, & producto numero addemus 2. vt efficiantur dies 2192. Rurſus in numero medio redigendi ſunt aurei, & Iulij ad baiochos, qui erunt numero $20078\frac{2}{7}$. ita vt exemplum reductum ita ſe habeat.

Ian.	31.
Febr.	28.
Mart.	31.
April.	30.
Maius	31.
Iun.	30.
Iul.	31.
	212.
	13.
	225.

Dies.	Baioc.	Dies.		Baioc.
225.	$20078\frac{2}{7}$.	2192?	fiunt	$195607\frac{101}{1575}$.

Poſtremo reducendus erit quartus numerus inuentus baiochorum ad aureos, & Iulios. Faciunt autem omnes illi baiochi aureos 1956. Iul. 0. baioc. 7. $\frac{101}{1575}$. Tanta pecunia neceſſaria eſt ſtudioſo illi 6. annis, quorum duo biſſextiles ſint.

Hac eadem ratione poſt operationem ſemper reducenda eſt moneta quarti numeri ad maiorem, ſi fieri poteſt: Item pondera, menſuræve ad maiora pondera, vel menſuras; vt vnciæ ad libras; palmi vel pedes ad paſſus, paſſus autem ad milliaria.

Quæſt. 5. 5. Quidam conficit 7. diebus milliaria 210. Peto quot diebus milliaria 1600. conficiet, ſi quotidie iter faciat, & curſum nec remittat, nec intendat? Sic ponetur exemplum.

Milliar.	Dies.	Milliar.		Dies.
210.	7.	1600?	fiunt	$53\frac{70}{210}$.

Fractio hæc $\frac{70}{210}$. vnius diei in quarto numero, ſi numerator per 24. multiplicetur, productusque numerus per denominatorem diuidatur, redigetur ad horas 8.

Quæſt. 6. 6. Si aureis 100 Iulijs 7. baiochis 8. emptus ſit ager paſſuum quadratorum 400. quanti conſtabit ager paſſuum quadratorum 1000. pedum quadratorum 4. & palmorum quadratorum 3? ita ſtabit exemplum.

Paſſus.	Aur.	Iul.	Baioc.	Paſſ.	Ped.	Palm.		Baioc.
400.	100.	7.	8.	1000.	4.	3?	fiunt	$25199\frac{17613}{80000}$.

Reductis aureis, ac Iulijs ſecundi numeri ad baiochos; & paſſibus, ac pedibus tertij numeri ad palmos; tribuendo 16. palmos quadratos vni pedi quadrato, & 25. pedes quadratos vni paſſui quadrato; nec non & paſſibus primi numeri reductis ad palmos quoque, tribuendo vni paſſui quadrato 400. palmos quadratos; ita ſtabit exemplum reductum,

Palmi.	Baioc.	Palmi.		Baioc.
160000.	10078.	400067?	fiunt	$25199\frac{17613}{80000}$.

Quartus autem numerus baiochorum continet aur. 251. Iul. 9. baioc $9\frac{17613}{80000}$.

Quæſt. 7. 7. In nundinis quibuſdam 44. aureis emptæ ſunt 52. vlnæ panni cuiuſdam, quanti conſtabunt vlnæ 260. eiuſdem panni? Ita ſtabit exemplum.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
52.	44.	260?	fiunt	220.

Quæſt. 8. 8. Emit quiſpiam 52. vlnas panni 44. aureis, quot vlnas emet aureis 220? Exemplum ita diſponetur.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
44.	52.	220?	fiunt	260.

Quæſt. 9. 9. Emit quiſpiam ſumma quadam pecuniæ 52. vlnas panni, atque eodem pretio accepit poſtea 260. vlnas, quæ conſtiterunt aureis 220. quid ergo prius expendit? Diſponetur exemplum hoc modo.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
260.	220.	52?	fiunt	44.

10. Vlnas

10. Vlnas aliquot panni emit quidam 44. aureis, atque eodem pretio alius deinde aureis 220. emit vlnas 260. quot ergo vlnas prior emit? Stabit exemplum hoc modo. *Quæſt. 10.*

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
220.	260.	44?	fiunt	52.

Appoſui quatuor hæc poſtrema exempla, in quibus iidem quatuor numeri regulæ trium varijs modis vices inter ſe permutant, quippe cum quiſque illorum ex alijs tribus datis eruatur, vt intelligas, quo pacto te gerere debeas in alijs quæſtionibus ſimilibus.

REGVLA TRIVM EVERSA.

CAPVT XVIII.

Diximus, in quatuor numeris regulæ trium eam proportionem eſſe primi numeri ad ſecundum, quæ eſt tertij ad quartum, atque adeo, (vt ex propoſ. 14. lib. 5. Euclid. colligitur.) ſi primus maior eſt, vel minor tertio, ſecundum quoque maiorem eſſe, vel minorem quarto; id quod in exemplis omnibus hactenus adductis perſpicuum eſſe poteſt. Solet autem nonnunquam accidere, vt quo maior eſt primus numerus tertio, eo minor eſſe debeat ſecundus quarto; & quo minor eſt primus tertio, eo maior eſſe debeat ſecundus quarto. Quare contraria tunc via tenenda erit, nempe primus numerus per ſecundum multiplicandus, numeruſque productus per tertium diuidendus. Quando autem hæc regula trium euerſa (ita eam appellant) adhibenda ſit, & ratio naturalis dictare videtur, & clariſſime ex ſequentibus exemplis intelligi poteſt, quorum primum hoc ſit. *Regula trium euerſa quo pacto quartum numerum eliciat.*

1. Pannus 9. vlnarum, cuius latitudo eſt 3. palmorum, emitur a quodam, vt ſibi tunica conficiatur. Quot ergo vlnæ alterius panni, cuius latitudo eſt 2. palmorum, requirantur ad eandem tunicam, vel ſimilem conficiendam? Quoniam quæſtio eſt de panno latitudinem habente 2. palmorum, ita ſtabit exemplum. *Quæſt. 1.*

Palmi latitud.	Vlnæ.	Palmi latitud.		Vlnæ.
3.	9.	2?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

Hic manifeſte vides, quo anguſtior eſt ſecundus pannus, eo plures vlnas eſſe neceſſarias. Quare licet primus numerus tertio maior ſit, non tamen propterea ſecundus maior etiam eſſe debet quarto, ſed minor; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat ſecundus ad quartum. Hinc fit, vt primus per ſecundum ſit multiplicandus, numeruſque productus per tertium diuidendus: quia vt debita proportio ſeruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum eſt, atque hic apparet.

Palmi latitud.	Palmi latitud.	Vlnæ.		Vlnæ.
2.	3.	9?	fiunt	$13\frac{1}{2}$.

2. Quidam accepit mutuo ab alio 4000. aur. ad annos 3. quos cum ei reſtitueret, nullum cenſum accipere voluit, ſed tantum petijt, vt ei viciſſim pecuniam mutuo daret. Dedit ergo ei mutuo 7480. aur. Quamdiu ergo hic pecuniam iſtam retinere debet, vt ei ſatisfiat pro beneficio præſtito per 4000. aur. quos illi accommodauerat? In hac quæſtione, quia numerus 7480. aur. ſecum habet quæſtionem, collocandi erunt numeri hoc ordine. *Quæſt. 2.*

Aur.	Anni.	Aur.		Anni.	Dies.	Horæ.
4000?	3.	7480?	fiunt	1.	220.	$13\frac{80}{187}$.

Perſpicuum etiam hic eſt, maiorem cenſum deberi inæquali tempore aureis 7480. quam aur. 4000. atque adeo minori tempore opus eſſe, quã 3. ann vt idem cenſus, qui debetur aur. 4000. tribus annis, lucrifiat ex aur. 7480. Quare licet primus numerus minor ſit, quam tertius, non tamẽ idcirco ſecundus minor etiam erit, quam quartus, ſed maior; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat ſecundus ad quartum. Ex quo fit, multiplicandum eſſe primum pet ſecundum, productumque numerum per tertium diuidendum: quia vt debita proportio ſeruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum eſt, atque hic apparet.

Aur.	Aur.	Anni.		Anni.	Dies.	Horæ.
7480.	4000.	3?	fiunt	1.	220.	$13\frac{80}{187}$.

3. Quando menſura tritici emitur 6. aureis, panis vno baiocho emptus, iuxta ciuitatis alicuius ordinationem, pondus habet 10. vnciarum; Iam ſi eadem menſura tritici ematur 4. aureis, vel 8. aureis, quantum eſſe debet eiuſdem panis pondus? Ita ſtabunt exempla. *Quæſt. 3.*

Aur.	Vnciæ.	Aur.		Vnciæ.
6.	10.	4?	fiunt	15.
6.	10.	8?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Ratio dictat, quo vilius eſt triticum, eo maius pondus habiturum panem, & quo carius, eo minus. Talis enim proportio debet eſſe 4. aur. ad 6. aur. vel 8. aur. ad 6. aur. qualis eſt ponderis 10. vnciarum ad pondus ignotum, quod quæritur. Vnde iuxta regulam proportionum ita collocandi eſſent numeri.

Aur.	Aur.	Vnciæ.		Vnciæ.
4.	6.	10.	fiunt	15.
8.	6.	10?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

4. Operarij 30. perficiunt opus quoddam in 4. annis; quanto ergo tempore idem abſoluent 50. operarij, vel 20? vel, quot operarij idem abſoluent in annis 2. & diebus 146? Vel in annis 4. & diebus 292? Quadru- *Quæſt. 4.*

 plex

plex hoc exemplum ita ſtabit, reductis annis (quorum quilibet ſtatuatur dierum 365.) ad dies, in poſterioribus duobus exemplis.

Operarij.	Anni.	Operarij.		Anni.	Dies.
30.	4.	50?	fiunt	2.	146.
30.	4.	20?	fiunt	6.	0.

Dies.	Operarij.	Dies.		Operarij.
1460.	30.	876?	fiunt	50.
1460.	30.	1752?	fiunt	25.

Quo enim plures ſunt operarij, eo minori tempore opus eſt, quo autem pauciores, eo maiore. Item quo minus tempus eſt, eo pluribus operarijs opus eſt, quo autem maius, eo paucioribus. Igitur iuxta regulam proportionum ita collocarentur numeri.

Operarij.	Operarij.	Anni.		Anni.	Dies.
50.	30.	4?	fiunt	2.	146.
20.	30.	4?	fiunt	6.	0.

Dies.	Dies.	Operarij.		Operarij.
876.	1460.	30?	fiunt	50.
1752.	1460.	30?	fiunt	25.

Quæſt 5. 5. Obſeſſus quidam exercitus 8500. militum victum habet ad 11. menſes; verum ſpes nulla eſt ſolutionis obſidionis, vel futuri auxilij, niſi poſt 25. menſes. Quot ergo milites retinendi ſunt, vt reliquis victus ſufficiat ad 25. menſes? Numeri ita diſponendi ſunt.

Menſes.	Milites.	Menſes.		Milites.
11.	8500.	25?	fiunt	3740.

Retinendi ergo erunt milites 3740. his enim victus ſufficiet ad 25. menſes, dimittendique propterea erunt milites reliqui 4760.

REGVLA TRIVM COMPOSITA.

CAPVT XIX.

Regula triũ compoſita quid & quomodo fiat. FIT, vt interdum plures, quam tres numeri proponantur noti, ita tamen, vt ſint ſemper tres principales, alij autem illis adiuncti minus principales, denotantes vel tempus, vel lucrum, damnumue. Quod vbi contigerit, fit regula trium compoſita, & tunc vel inſtituenda erit regula trium bis, aut ter, vel quilibet per ſibi adiunctos multiplicandus, vt fiant tres tantum numeri noti, per quos quartus ignotus eliciatur, vel certe alia quædam via tentanda. Id quod ſequentibus exemplis perſpicuum fiet, in quibus variæ quæſtiones de lucro, damno, interueniente etiam diuerſitate temporis, & varietate lucri in ratione tot pro 100. diſcutientur.

Quæſt. 1. 1. Sunt 8. in communi conuictu, quorum ſinguli ſingulis mẽſibus ſoluunt 6. aureos. Quantum ergo erit pretium victus omnium ad 4. annos? Hæc quæſtio ita recte proponeretur. Vnus in vno menſe ſoluit 6. aureos: quid ergo ſoluent 8. in 4. annis, hoc eſt, in 48. menſibus? Ita autem collocandi erunt numeri.

Conuictor.	Menſes.	Aur.	Conuictores.	Menſes.
1.	1.	6.	8.	48?
	fiunt	Aur.	2304.	

Vbi vides, primum numerum vnius conuictoris habere adiunctum vnum menſem, tertium autem 8. conuictorum habere adiunctos 48. menſes. Primo ergo ita inſtituetur regula trium. Si vnus ſoluit 6. aureos, quantum ſoluent 8? vt hic.

Conuict.	Aur.	Conuict.		Aur.
1.	6.	8?	fiunt	48.

Soluent ergo 8. conuictores in vno menſe 48. aureos, cum vnus ſoluat 6. aureos in menſe. Secundo ergo iterum ita inſtituetur regula trium. Si in vno menſe ſoluunt 48. aureos, quantum ſoluent in 48. menſibus? vt hic.

Menſis.	Aur.	Menſes		Aurei.
1.	48.	48?	fiunt	2304.

Breuius tamen eadem quæſtio explicabitur, ſi tam duo numeri in principio quæſtionis primo loco poſiti inter ſe, quam duo tertio loco poſiti inter ſe multiplicentur, vt fiant tres numeri regulæ trium hoc modo.

	Aur.			Aur.
1.	6.	384?	fiunt	2304.

Nam ex hac multiplicatione procreatur numerus maior conuictorum pro vno menſe, qui æquiualet minori pro pluribus menſibus. Vt ex multiplicatione 8. conuictorũ per 48. menſes producuntur 384. conuictores pro vno menſe. Si enim ſingulis menſibus ſunt 8. conuictores, procul dubio in 48. menſibus, ſi accederent ſemper noui conuictores, fierent 384. conuictores: atq; ita tantum ſoluent hi 384. conuictores in vno menſe, quantũ 8. conuictores in 48. menſibus. Hæc eſt cauſa cur multiplicandi ſint numeri principales, per adiunctos minus principales, qui tempus ſignificant, vel aliud quippiam, dummodo non ſit de eadem re, quã ſignificant numeri principales; alioquin non eſſent duo numeri, ſed vnus. Vt ſi in aliquo loco poſiti ſint aurei, baiochi, & quatrini, cenſe-

cenſebuntur tres hi numeri pro vno, cum ſint de eadem re, vtpote qui monetam ſignificent. Eademque ratio eſt proportione quadam in alijs huiuſmodi quæſtionibus.

2. Pro 200. libris quarundam mercium aduectis per 100. milliaria ſoluendi ſunt 4. aurei: quantum ergo ſoluendum eſt pro 300. libris aduectis per 400. milliaria? Ita collocabuntur numeri. *Quæſt. 2.*

Lib.	Mill.	Aur.	Lib.	Mill.		Aur.
200.	100.	4.	300.	400?	fiunt	24.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij loci inter ſe, confecti erunt tres numeri regulæ trium hoc pacto.

	Aur.			Aur.
20000.	4.	120000?	fiunt	24.

Si eadem hæc quæſtio ſoluenda ſit per regulam trium bis repetitam, ita ſtabit primo loco exemplum.

Lib.	Aurei.	Lib.		Aurei.
200.	4.	300?	fiunt	6.

Atque ita ſoluendi eſſent 6. aurei pro 300. libris per 100. milliaria aduectis, per quot nimirum 200. libræ ſunt aduectæ. Sed quoniam 300. libræ vehendæ ſunt per 400. milliaria, ita rurſus ſtabit ſecundo loco exemplum.

Mill.	Aur.	Mill.		Aur.
100.	6.	400?	fiunt	24.

3. Tres Perſonæ conſumunt modium tritici 3. aureis emptum in 5. ſeptimanis, quantus ergo eſt ſingulorum ſumptus in vno die? Ita numeri ordinandi erunt. *Quæſt. 3.*

Perſ.	Sept.	Aur.	Perſ.	Dies.
3.	5.	3.	1.	1?

fiunt Aur. $\frac{3}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Reductis autem 5. ſeptimanis ad dies, vt primus numerus, ac tertius ſimiles ſint, ita ſtabit exemplum.

Perſ.	Dies.	Aur.	Perſ.	Dies.
3.	35.	3.	1.	1?

fiunt Aur: $\frac{3}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij inter ſe, diſponentur tres numeri ad regulam trium hoc modo.

	Aur.			Aur.		quatrini.
105.	3.	1?	fiunt	$\frac{3}{105}$.	hoc eſt,	$11\frac{3}{7}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſoluetur eadem quæſtio.

Perſ.	Aur.	Perſ.		Aur.
3.	3.	1?	fiunt	1.

Item.

Dies.	Aur.	Dies.		Aur.		quatrini.
35.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{35}$.	hoc eſt,	$11\frac{3}{7}$.

4. Si 300. aurei in 4. annis lucrantur 100. aureos, quid lucrabuntur 1580. aurei in 7. annis? Multiplicatis aureis, qui ad lucrum exponuntur, per tempus adiunctum, ita ſtabit exemplum. *Quæſt. 4.*

	Aur.			Aur.
1200.	100.	11060?	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſtabit exemplum.

Aur.	Aur. lucrum.	Aur.		Aur. lucrum.
300.	100.	1580?	fiunt	$526\frac{2}{3}$.

Item.

Anni.	Aur.	Anni.		Aur.
4.	$526\frac{2}{3}$.	7.	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

5. Quidam in tribus menſibus 10. aureis lucratus eſt 4. aureos in quanto ergo tempore 100. aureis lucrabitur 2000. aureorum? Hæc quæſtio redigi non poteſt ad ſimplicem regulam trium, propterea quod tempus, in quo 100. aurei lucrari debent 2000. aureos, ignotum eſt, atque adeo per 100. aureos multiplicari non poteſt. Adhibenda ergo erit regula trium bis, hoc modo. *Quæſt. 5.*

Aur.	Aur. lucr.	Aur.		Aur. lucr.
10.	4.	100?	fiunt	40.

Atque ita 100. aurei lucrabuntur 40. aureos in tribus menſibus, in quibus 10. aurei lucrati ſunt 4. Quare vt ſciatur, in quanto tempore 100. aurei lucraturi ſunt 2000. inſtituetur ſecundo regula trium hoc modo.

Aur.	Menſes.	Aur.		Menſes.
40.	3.	2000?	fiunt	150.

Itaque ſi 10. aurei in 3. menſibus lucrantur 4. aureos, 100. aurei lucrabuntur 2000. aur. in 150. menſibus. Quod facile probabitur, ſi quæſtio ita proponatur. Si 10. aur. in 3. menſ. lucrantur 4. aur. quantum in 150. menſ. lucrabuntur aurei 100? Reperietur enim lucrum 2000. aur. vt hic apparet.

Aur.	Menſ.	Aur.	Aur.	Menſ.		Aur.
10.	3.	4.	100.	150.	fiunt	2000.

Nam ſi tempus quodlibet per ſuam pecuniam multiplicetur, ſtabit exemplum ad ſimplicem regulam trium reductum hoc modo.

	Aur.			Aur.
30.	4.	15000?	fiunt	2000.

Quæſt. 6. 6. Si 100. aurei in 8. menſibus lucrantur 20. aureos, in quanto tempore iidem 100. aurei lucrabuntur 3000. aur? Diſpoſitio numerorum ita ſe habet.

Aur.	Menſ.	Aur.		Menſ.
20.	8.	3000?	fiunt	1200.

Quando enim eadem ſemper ſumma exponitur ad lucrum, non ponenda eſt ea inter numeros alios. Idem etiam fiet, quando idem tempus proponitur, vt in ſequenti exemplo apparebit.

Quæſt. 7. 7. Si 300. aurei in 7. menſibus lucrantur 45. aureos, quid lucrabuntur 1780. aurei in eiſdem 7. menſibus? Ita ſtabit exemplum.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
300.	45.	1780.	fiunt	267.

Quæſt. 8. 8. Si ſingulis militibus in ſingulos menſes tribuerentur 4. aurei, quantum pecuniæ expenderetur in militibus 13000. nouem menſibus? Ita ſtabit exemplum.

Milit.	Menſ.	Aur.	Milit.	Menſ.	Aur.
1.	1.	4.	13000.	9?	fiunt 468000.

Quæſt. 9. 9. Si 10. equis quotidie dentur 7. menſuræ hordei, vel auenæ, quot menſuræ, iuxta eandem diſtributionem, conuenient 100. equis ad 20. dies? ita ſtabit exemplum.

Equi.	Dies.	Menſuræ.	Equi.	Dies.	Menſuræ
10.	1.	7.	100.	20?	fiunt 1400.

Quæſt. 10. 10. Si duodecim meſſores demetant 20. iugera in 9. diebus, quanto tempore 30. meſſores demetent 45. iugera? Hic opus eſt regula trium bis repetita, primo tamen loco euerſa, quod 30. meſſores minori tempore indigeant ad demetenda 20. iugera, quam 12. meſſores. Ita ergo ſtabit regula trium euerſa.

Meſſores.	Dies.	Meſſores.		Dies.
12.	9.	30?	fiunt	$3\frac{3}{5}$.

Atque diebus $3\frac{3}{5}$. demetent 30. meſſores 20. iugera. Quare ita rurſum ſtabit exemplum ad regulam trium.

Iugera.	Dies.	Iugera.		Dies.
20.	$3\frac{3}{5}$.	45.	fiunt	$8\frac{1}{10}$.

Quæſt. 11. 11. Romæ aureus ducatus æſtimatur Iulijs 11 $\frac{1}{2}$. hoc eſt, baiochis 115. Quot ergo eiuſmodi ducatos recipiam pro 1000. aureis, quorum ſinguli 10. Iulijs, ſiue 100. baiochis æſtimantur? Vel ſi 20 ducati conſtituant 23. aureos, quot ducatos efficient 1000. aurei? Vtrumque exemplum ſic ſtabit, reductis prius 1000. aureis ad baiochos 100000.

Baioc.	Duc.	Baioc.		Duc.
115.	1.	100000?	fiunt	$869\frac{13}{23}$.
Aur.	Duc.	Aur.		Duc.
23.	20.	1000?	fiunt	$869\frac{13}{23}$.

Quæſt. 12. 12. Quot aureos reddent ducati 4000. ſi 1. aureus contineat 100. baiochos, at 1. ducatus 115. baiochos? vel vel ſi 20. ducati æſtimentur 23. aureis, quot aureos continebunt ducati 4000? Reductis 4000. ducatis prioris exempli ad baiochos 460000. ſic ſtabit vtrumque exemplum.

Baioc.	Aur.	Baioc.		Aur.
100.	1.	460000?	fiunt	4600.
Duc.	Aur.	Duc.		Aur.
20.	23.	4000?	fiunt	4600.

Quæſt. 13. 13. Mercator quidam emit 300. libras cuiuſdam mercis aureis 60. ſcire autem cupit, quantum pro 100. aureis lucraturus ſit, ſi eaſdem 300. libras vendat 64. aureis? vel quantum pro 100. aureis perditurus ſit, ſi 300. illas libras vendat 57. aureis? Hic manifeſtum eſt, cum pro 60. aureis eſſe lucraturum 4. aureos, vel perditurum 3. aureos: vt patet, ſi minus pretium à maiori ſubducatur. Dic ergo. Si 60. aur. lucrantur 4. aureos, vel perdunt 3. aur. quantum lucrabuntur, vel perdent 100. aurei?

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
60.	4.	100?	fiunt	$6\frac{2}{3}$.
Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
60.	3.	100?	fiunt	5.

Quæſt. 14. 14. Quærit apud ſe mercator quidam, quanti emendæ ſint libræ 100. alicuius mercis, vt eædem poſtea venditæ 64. aureis lucrum dent aur. $6\frac{2}{3}$. pro 100. aur? Perſpicuum eſt, eum, qui $6\frac{2}{3}$. aur. lucrari vult pro 100. aur. augere velle 100. vt fiant $106\frac{2}{3}$. Dic ergo. Si $106\frac{2}{3}$. aur. qui continent & pretium 100. aureorum, & lucrum $6\frac{2}{3}$. aur. proueniunt ex 100. aureis, ex quo prouenient 64. aurei, qui continent & pretium 100. librarum ignotum, & lucrum ſimul, ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$. pro 100.

Pret. & lucr.	Aur.	Pretium, & lucr.		Aur.
$106\frac{2}{3}$.	100.	64?	fiunt	60.

Emen-

Emendæ ergo ſunt 100. libræ aureis 60. Nam diuenditæ poſtea 64. aureis dant lucrum 4. aureorum, aut pro 100. dabunt lucrum $6\frac{2}{3}$. aur.

15. Empta eſt gemma quædam, quæ ſi vendatur 200. aureis, perduntur 10. aurei pro 100. quanti ergo Quæſt. 15. conſtitit gemma illa? Hic etiam clarum eſt, eum, qui perdit 10? pro 100. facere 90. ex 100. Hic ergo. Si 90. aur. fiunt ex 100. aur. ex quo fient 200. aur.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	200?	fiunt	$222\frac{2}{9}$.

conſtitit ergo gemma illa $222\frac{2}{9}$. aur. Quod vt probes, dic. Si ex $222\frac{2}{9}$. aur. fiunt 200. aur. quid fiet ex 100? Iuuenies enim fieri. 90. aureos, ac proinde damnum fieri 10. aureorum pro 100. vt hic vides.

Aur	Aur	Aur		Aur
$222\frac{2}{9}$.	200.	100?	fiunt	90.

Vel dic. Si pro $222\frac{2}{9}$. aur. amitto $22\frac{2}{9}$. aur. (Nam ſi gemma illa. empta ſit $222\frac{2}{9}$. aur. vendatur autem 200. aureis, liquido conſtat, damnum fieri $22\frac{2}{9}$. aur.) pro 100. quid amittam? Inuenies enim damnum 10. aureorum, vt hic apparet.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
$222\frac{2}{9}$.	$22\frac{2}{9}$.	100?	fiunt	10.

16. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quas ſi 3. aureis minores emiſſet, & vendidiſſet poſtea Quæſt. 16. 3600. aureis lucratus fuiſſet 10. pro 100. aureis: quanti ergo 1000. illas vlnas emit? Quoniam qui lucrari cupit 10. pro 100. vult ex 100. facere 110. Dic ergo. Si 110. fiunt ex 100. ex quo fient 3600? vt hic cernis.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
110.	100.	3600?	fiunt	$3272\frac{8}{11}$.

Si igitur voluiſſet tantum lucrari 10. pro 100. conſtitiſſent ille 1000. vlnæ aureis $3272\frac{8}{11}$. Nam ſi $3272\frac{8}{11}$. aur. dant 3600. aureos, aurei 100. dabunt 110. aureos, ac proinde 10. cedent in lucrum ex 100. vt hic patet.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
$3272\frac{8}{11}$.	3600.	100?	fiunt	110.

Vel ſi certe $3272\frac{8}{11}$. aur. lucrantur $327\frac{3}{11}$. aur. (Qui enim emit quippiam $3272\frac{8}{11}$. aureis, poſtea autem vendit aureis 3600. lucratur neceſſario $327\frac{3}{11}$. aur.) 100. aur. lucrabuntur 10. aur. vt hic vides.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
$3272\frac{8}{11}$.	$327\frac{3}{11}$.	100?	fiunt	10.

Sed quoniam in quæſtione additum eſt, eum lucraturum fuiſſe 10. aur. pro 100. ſi 1000. illas vlnas 3. aureis minoris emiſſet, vendidiſſetque 3600. aureis; liquido conſtat, eum 3. aureos expendiſſe vltra $3272\frac{8}{11}$. aureos. Quare 1000. conſtiterunt $3275\frac{8}{11}$. aur.

17. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quæ ſi 6. aur. conſtitiſſent, & venditæ poſtea fuiſſent Quæſt. 17. 3600. aureis, perditi fuiſſent 10. aur. pro 100. quantum ergo fuit pretium illarum 1000. vlnarum? Quoniam qui perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. fiunt ex 100. ex quo fient 3600?

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	3600?	fiunt	4000.

Si igitur perdidiſſet tantum 10. pro 100. conſtitiſſent 1000. vlnæ 4000. aureis. Nam ſi 4000. aur. dant 3600. aur, dabunt 100. aurei aureos 90. vt patet. Vel ſi 4000. aur. pendunt 400. aur. (Qui enim emit rem aliquam 4000. aureis, eandem autem vendit 3600. perdit omnino 400. aur.) 100. aurei perdent 10. aureos, vt hic vides.

Aur.	Dam. aur.	Aur.		Damn. aur.
4000.	400.	100?	fiunt	10.

Quia vero additum eſt in Quæſtione, eum perditurum fuiſſe 10. pro 100. ſi 1000. vlnas 6. aureis pluris emiſſet, easque vendidiſſet poſtea 3600. aureis; liquet, eum 6. aureos minus expendiſſe, quam 4000. Quare 1000. vlnæ conſtiterunt 3994. aur.

18. Qui ſingulas libras mercis alicuius vendit 20. baiochis, lucratur 30 pro 100. quantum ergo lucrabitur, ſi vendat maiori pretio, nempe 24. baiochis? Hic primum inueſtigare oportet, quanti conſtat vna libra, vt Quæſt. 18. vendita 20. baiochis, det lucrum 30. pro 100 vt in quæſtione 14. docuimus, hoc modo. Si 130. (pretium nimirum 100. & lucrum 30?) proueniunt ex 100. vt pretio; ex quo prouenient 20. baiochi, qui continent & pretium vnius libræ ignotum, & lucrum ſimul, ignotum etiam, quod reddat 30. pro 100?

130.	100.	20.	fiunt	$15\frac{5}{13}$.

Conſtabit ergo vna libra $15\frac{5}{13}$. baiochis. Ita enim fiet, vt cum baiochi $15\frac{5}{13}$. (vna libra vendita 20. baiochis) lucrentur baiochos $4\frac{8}{13}$. lucrifiant ex baiochis 100. baiochi 30. vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$.	$4\frac{8}{13}$.	100?	fiunt	30.

Iam vero inuento pretio vnius libræ, $15\frac{5}{13}$. baioch. perſpicuum eſt, ſi vna libra vendatur 24. baiochis, ex baiochis $15\frac{5}{13}$. lucrifieri baiochos $8\frac{8}{13}$. Quare ex 100. baioch. lucrifient 56. baiochi, vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$.	$8\frac{8}{13}$.	100?	fiunt	56.

19. Qui 100. libras mercis alicuius vendit 10. aur. perdit 10. pro 100. quantum ergo pro 100. perdet, ſi eas Quæſt. 19. vendat minori pretio, nempe 8. aureis? Hic etiam primum inueſtigare oportet, quanti conſtent 100. illæ libræ, vt venditæ 10. aureis damnum inferant 10. aureorum pro 10. vt in quæſtione 15. docuimus, hoc modo. Si 90. fiunt ex 100. (qui enim perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100.) ex quo numero fient 10?

90.	100.	10?	fiunt	$11\frac{1}{9}$.

Emptæ ergo ſunt illæ 100. libræ aureis 11 $\frac{1}{9}$. Ita enim fiet, vt cum aurei 11 $\frac{1}{9}$. (venditis 100. illis libris 10. aureis) perdant aur. 1 $\frac{1}{9}$. perdantur 10. pro 100. vt hic cernis.

11 $\frac{1}{9}$. 1 $\frac{1}{9}$. 100? fiunt 10.

Inuento autem prętio 100. illarum librarum 11 $\frac{1}{9}$. aur. manifeſtum eſt, ſi eædem 100. libræ vendantur 8. aureis, ex 11 $\frac{1}{9}$. aur. amitti aureos 3 $\frac{1}{9}$. Quam ob rem pro 100. perdentur 28. vt hic vides.

11 $\frac{1}{9}$. 3 $\frac{1}{9}$. 100? fiunt 28.

Quæſt. 20.

20. Mercator quidam in Luſitania emit 50000. lib. piperis, aut 10000. & ibidem pro vectigali ſoluit aureos 500. Naulum autem illinc in Italia conſtitit 300. aureis, & in portu aliud vectigal exactum eſt 200. aur. Vectura deinde à mari Florentiam vſque conſtitit 100. aur. ibique aliud vectigal perſolutum 100. aur. Miniſtris denique ad eam negotiationem miſſis pro mercede, & victu dati ſunt 1000. aurei. Verum hæſitat, quanti vendenda ſit libra, vt ſupra omnes impenſas de ſingulis libris lucretur 2. Iulios. Hic omnes impenſas primum in vnam ſummam colligere oportet, vt habeatur pretium, quod cum omnibus illis impēſis pro 50000. libris expoſitum eſt. Summa autem hæc in exemplo dato complectitur 12200. aur. Quare ſi 50000. lib. conſtant 12200. aureis ſiue 122000. Iulijs, vna libra conſtabit 2 $\frac{11}{25}$. Iul. vt hic vides.

	Aurei.
Piper.	10000.
Vectigal.	500.
Naulum.	300.
Vectigal.	200.
Vectura.	100.
Vectigal.	100.
Miniſtri.	1000.
	12200.

Lib.	Iul.	Lib.		Iul.
50000.	122000.	1?	fiunt	2 $\frac{11}{25}$.

Igitur ſi ſingulas libras vendat 4 $\frac{11}{25}$. Iul. lucrabitur de ſingulis libris Iulios 2.

REGVLA SOCIETATVM.

CAPVT XX.

Regula ſocietatum, quādo adhibetur, & quo pacto fiat. Quoties regula trium adhibenda ſit in regula ſocietatū. Quando eſt diuerſitas temporum in regula ſocietatum quid agendum.

Sequitur ſocietatum regula immenſum vſum apud mercatores habens, quæ quidem totá nititur regula trium, vt ex propoſitis exemplis fiet perſpicuum. Adhibetur autem, quando plures conſortium ineunt, ita vt ſinguli ſummam quandam pecuniæ conferant, fitq; hoc modo. Pecuniæ omnium in vnam ſummam colligun-tur, & numerus collectus primo loco in regula trium ſtatuitur: Secundum vero locum occupat lucrum commune, vel damnum, quod ex omnium pecuniis prouenit: Tertium denique locum tenent pecuniæ ſingulorum, &c. ita vt toties adhibenda ſit regula triū, quot ſunt illi, qui ſocietatem inierunt. Quando autem interuenit temporum diuerſitas, multiplicanda erit cuiuſque pecunia per ſuum tempus, antequam omnium pecuniæ in vnam ſummam colligantur. Deinde hi numeri producti colligendi in vnam ſummam, vt habeatur primus numerus in regula trium. Tertium autem locum occupabunt ſinguli numeri producti ex multiplicatione pecuniæ cuiuſq; in ſuum tempus, collocato rurſus lucro, vel damno communi in medio loco. Id quod in exemplis manifeſtum erit, quorum primum hoc ſit.

Quæſt. 1.

1 Quatuor mercatores, inito conſortio, lucrati ſunt in nūdinis quibuſdam 6000. aur. Primus autem illorum contulit tantum 60. aur. ſecundus 100. tertius 120. & quartus 200. in quæſtionem iam vocatur, quid quiſque ex illo lucro accipere debeat, habita ratione pecuniæ, quam expoſuit. Ante omnia colligenda eſt ſumma ex omnium pecuniis, quæ eſt 480. aur. Deinde quater inſtituenda eſt regula trium hoc modo. Si 480. aurei (quæ eſt pecunia ex omnium pecuniis collecta) lucrati ſunt 6000. aur. quid lucrabuntur 60. aur. quid 100. quid 120. & quid 200. quos ſinguli poſuerunt? veluti hic apparet.

Aur	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.	
480.	6000.	60?	fiunt	750.	Pri.
		100?		1250.	Secun.
		120?		1500.	Tert.
		200?		2500.	Quar.
				6000	

Facta operatione, vt præcipit regula trium, reperies, primum debere accipere 750. aur. ſecundum 1250. tertium 1500. & quartum 2500.

Examen huius rei erit, ſi lucra omnium in vnam ſummam collecta efficiant lucrum totum, vt in propoſito exemplo factum eſſe vides.

Quæſt. 2.

2 Tres mercatores, emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces conſtiterunt 300. aur. ſecundi 500. tertii 180. Graui deinde tempeſtate orta, proiectæ ſunt in mare merces grauiores, quæ conſtabant 400. aur. Conuenit autem inter eos, vt iactura hæc communis ſit. Quantum ergo quiſque damnum feret pro rata ſuarum mercium portione? Colligantur in vnam ſummam aurei omnium & numerus collectus 980. in primo loco regulæ trium collocetur, damnum vero commune in ſecundo, & pecuniæ ſingulorum in tertio, vt hic vides.

Aur.	Damn. aur.	Aur.		Dam. aur.
980.	400.	300?	fiunt	122 $\frac{440}{980}$. prim.
		500?		204 $\frac{80}{980}$. ſecun.
		180?		73 $\frac{460}{980}$. tertij.

Primus ergo perdet 122 $\frac{440}{980}$. aur. ſecundus 204 $\frac{80}{980}$. & tertius 73 $\frac{460}{980}$.

3. Tres

3. Tres emere volunt 4000. libras ſacchari, quæ æſtimantur 5000. aur. Primus tamen vult 1300. lib. ſecundus 1460. tertius denique reliquas lib. 1240. quantum ergo ſoluet quilibet? Dic, ſi 4000. lib. valent 500. aur. quid valent 1300 quid 1460. & quid 1240. lib. quas ſinguli capere volunt? Inuenies enim primum ſoluere aur. $162\frac{1}{2}$. ſecundum $182\frac{1}{2}$. & tertium 155. vt hic vides. *Quæſt. 3.*

Lib.	Aur.	Lib.		Aur.	
4000.	500.	1300?	fiunt	$162\frac{1}{2}$.	primi.
		1460?		$182\frac{1}{2}$.	ſecundi.
		1240?		155.	tertij.

4. Tres ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus expoſuit 200. aur. eoſque poſt 8. menſes repetijt. Secundus contulit 450. aur. eoſque poſt 6. menſes recepit. Tertius denique 500. aur. attulit, eoſque in negotiatione reliquit 10. menſibus. Quantum ergo quiſque ex lucro accipiet, habita ratione ſuæ pecuniæ, & temporis? Cuiusque pecunia per ſuum tempus multiplicetur, & numeri producti in vnam ſummam colligantur, pro primo numero regulæ trium: ſecundum vero locum occupet lucrum: tertium denique tres illi producti. In noſtro exemplo, ex pecunia primi in ſuum tempus fiunt 1600. ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, 2700. ex pecunia tertij in ſuum tempus, 5000. horum autem productorum ſumma eſt 9300. Sic ergo ſtabit exemplum. *Quæſt. 4.*

Lucr.	aur.			Lucr. aur.	
9300.	1000.	1600?	fiunt	$172\frac{4}{93}$.	Primi.
		2700?		$290\frac{30}{93}$.	Secun.
		5000?		$537\frac{50}{93}$.	Tertij.

5. Tres, ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes. Secundus attulit 700. aur. Tertius vero 800. aur. Accepit autem primus ex lucro 500. aur. ſecundus 300. & tertius 200. Quanto ergo tempore fuerunt duorum poſteriorum pecuniæ in negotiatione? Quoniam, vt in præcedenti quæſtione dictum eſt, pecunia cuiuſque in ſuum tempus multiplicanda eſt; multiplicabimus pecuniam primi per ſuum tempus, faciemusque 3000. atque ex hoc producto prouenit lucrum primi. Vt igitur ſciamus, ex quibuſnam productis lucra poſteriorum duorum proueniant, dicemus. Si 500. aur. (quod eſt lucrum primi) proueniunt ex 3000. ex quo prouenient 300. & 40. aur. quæ ſunt lucra poſteriorum? Veluti hic apparet. *Quæſt. 5.*

Lucr.	aur.	Lucr. aur.			
500.	3000.	300?	fiunt	1800.	Secundi.
		200?		1200.	Tertij.

Secundi ergo tempus per ſuam pecuniam multiplicatum facit 1800. Tertij vero 1200. Quare ſi 1800. diuidamus per 700. hoc eſt, per pecuniam ſecundi, inueniemus menſes $2\frac{4}{7}$. quibus à ſecundo expoſiti ſunt ad lucrum 700. aurei. Item ſi 1200. partiamur per 800. id eſt, per pecuniam tertij, reperiemus menſes $1\frac{1}{2}$. pro tertio.

Hoc ita eſſe experieris, ſi ita conſortium proponas. Tres, inito conſortio, lucrati ſunr 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes: ſecundus 700. aur. per menſes $2\frac{4}{7}$. tertius denique 800. aur. per. $1\frac{1}{2}$. menſes. Quantum ergo quiſq; pro rata pecuniæ ſuæ, ac temporis portione ex lucro accipiet? Si cuiuſque pecunia per ſuum tempus multiplicetur, faciemus ex pecnnia primi in ſuum tempus 3000. ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, 1800. ex pecunia tertij in ſuum tempus, 1200. Hi autem tres producti faciunt ſummam 6000. Sic ergo ſtabit exemplum.

Lucr.	aur.			Lucr. aur.	
6000.	1000.	3000?	fiunt	500.	primi.
		1800?		300.	ſecund.
		1200?		100.	tertij.

Vbi vides prodijſſe lucra ſingulorum, ſicut in quæſtione proponebantur. Recte ergo tempora duorum poſteriorum explorata ſunt.

6 Quatuor ſocietatem inierunt biennio duraturam, lucratique ſunt 10000. aur. Primus in initio ſocietatis attulit 3000. aur. & poſt menſem octauum tranſactum abſtulit ex illis 1000. aureos. viceſimo deinde menſe inchoante expoſuit rurſum 1200. aur. Secundus à principio dedit 2400. aur. & poſt 6. menſes elapſos abſtulit 800. aur. ſed ad initium menſis 16. denuo protulit 1400. aur. Tertius ſub initium conſortij exhibuit 2000. aur. tranſactiſque 7. menſibus, totam pecuniam ſuam repetijt: ſed menſe 18. incipiente, iterum poſuit 1600. aur. Quartus denique inchoante 7. menſe expoſuit 1800. aur. & poſt 4. menſes finitos recepit 900. aur. ſed ad initium menſis 17. rurſus contulit 1500. aur. Quantum ergo quilibet ex communi lucro pro ratione ſuæ pecuniæ, ac temporis recipiet? Hic diligenter explorandum eſt, quantam quiſque pecuniam, & quanto tempore expoſuerit, vt ſemper pecuniam per tempus multiplicemus, &c. Quod vt planius fiat, exemplum propoſitum ita explicabimus. *Quæſt. 6.*

Quoniam primus in principio conſortij dedit 3000. aur. recepitque 1000. poſt 8. menſes exactos, manifeſtum eſt eum in communi negotiatione expoſuiſſe 3000. aur. per 8. menſes. Multiplicantes ergo 3000. per 8. faciemus 24000. Et quia poſt 8. menſes elapſos abſtulit 1000. aur. certum eſt remanſiſſe in communi conſortio 2000. aur. vſque ad finem 19. menſis, vbi nouam pecuniam contulit. Auferentes igitur 8. menſes ex 19. remanent 11. menſes, quibus expoſuit tantum 2000. aur. & multiplicantes 2000. per 11. faciemus 22000. Poſt hæc, quoniam denuo attulit 1200. aur. ad initium 20. menſis vſque ad finem ſecundi anni, liquet, ſi addamus hos 1200. aur. ad 2000. aur. eum in communi negotiatione per 5. reliquos menſes duorum annorum, habuiſſe 3200. aur. Multiplicantes ergo 3200. per 5. faciemus 16000. Colligentes iam tres hoſce productos 24000. 22000. 16000. in vnam ſummam, efficiemus 62000. qui numerus erit poſitio primi, productus ex pecunijs, & temporibus ipſius.

Rurſus

Rurſus, quoniam ſecundus per 6. menſes impoſuit 2400. aur. propterea quòd elapſo 6. menſe, abſtulit 800 aur. multiplicabimus 2400. per 6. faciemusque 14400. Quia vero ad principium 16. menſis nouam pecuniam dicitur exhibuiſſe, perſpicuum eſt, eum per 9. menſes à principio 7. menſis vſque ad finem 15. habuiſſe in conſortio communi 1600. aur. qui relinquuntur, ſubtractis 800. ex 2400. Multiplicantes igitur 1600. per 9. faciemus ſimiliter 14400. Deinde, quia dicitur ad initium 16. menſis iterum poſuiſſe 1400. aur. manifeſtum eſt, hanc pecuniam expoſitam eſſe per reliquos 9. menſes duorum annorum, quibus ſi addantur aurei 1600. qui adhuc in communi negotiatione exponuntur, fient aurei 3000. qui per 9. illos vltimos menſes in communi vſu fuerunt. Multiplicantes ergo 3000. per 9. faciemus 27000. Collectis autem tribus hiſce productis 14400. 14400. 27000. in vnam ſummam, efficiemus 55800. pro numero ſecundi producto ex pecuniis, & temporibus ipſius.

Poſt hæc, cum tertius per 7. menſes contulerit 2000. aur. quod eos repetierit poſt 7. menſes elapſos; multiplicabimus 2000. per 7. efficiemusque 14000. Sed quia ad principium 18. menſis denuo exhibuit 1600. aur. multiplicabimus 1600. per 7. (tot enim menſes ex duobus annis ſuperſunt) faciemusque 11200. Collectis autem duobus hiſce productis 14000. 11200. in vnam ſummam, procreabimus 25200. numerum ex pecuniis, ac temporibus tertii mercatoris productum.

Quia tandem quartus à principio 7. menſis per 4. menſes poſuit 1800. aur. multiplicabimus 1800. per 4. efficiemusque 7200. Sed quia, finitis 4. menſibus, recepit 900. aur. relicti ſunt 900. aurei, qui fuerunt in negotiatione per 6. menſes à principio 11. menſis vſque ad finem 16. menſis, quando nouam pecuniam attulit. Multiplicantes ergo 900 per 6. faciemus 5400. Quoniam vero ſub principium 17. menſis poſuit iterum 1500. aur. vſque ad finem duorum annorum, additis 900. aur. qui adhuc in communi vſu ſunt, fient 2400. Multiplicantes ergo 2400. per 8. menſes reſiduos, faciemus 19200. Collectis autem tribus hiſce productis 7200. 5400. 19200. in vnam ſummam, efficiemus 31800. pro numero ex pecunijs, temporibusque quarti mercatoris procreato.

Iam vero colligentes hos quatuor numeros 62000. 55800. 25200. 31800. qui ex ſingulorum pecunijs, ac temporibus producti ſunt, in vnam ſummam faciemus 174800. pro primo numero regulæ trium. In ſecundo autem loco erit lucrum commune, & in tertio numerus ex pecunijs, & temporibus cuiusque procreatus, vt in 4. quæſtione dictum eſt. Ita ergo ſtabit exemplum.

		62000?		$3546\frac{1562}{1748}$.	primi.
		55800?		$3192\frac{384}{1748}$.	ſecundi.
174800.	10000.	25200?	fiunt	$1441\frac{1132}{1748}$.	tertij.
		31800?		$1819\frac{388}{1748}$.	quarti.

Quæſt. 7. 7. Tres ineunt ſocietatem. Primus confert 400. aur. Secundus 300. aur. & 86. baioch. Tertius 1000. aur. Iul. 7. baioch. 9. In ipſa autem negotiatione vſi ſunt fortuna aduerſa, iacturamq; fecerunt de tota ſumma 100. aureorum. Quantum ergo cuiuslibet damnum? Reductis omnibus ad baiochos, fient pro primo 40000. baiochi: pro ſecundo 30086. pro tertio vero 100079. quorum omniũ ſumma eſt 170165. Ita ergo ſtabit exemplum.

	Baioch.		Damn. baioc.
Si	170165.	dant	10000.
	40000?		$2350\frac{112250}{170165}$.
Quid	30086?	fiunt	$1768\frac{8280}{170165}$.
	100079?		$5881\frac{40635}{170165}$.

Quæſt. 8. 8. Tres ſocietatem inierunt. Primus attulit 200. aur. eosque in ſocietate reliquit 12. menſibus. Secundus contribuit 240. aur. Tertius aureum torquem, cuius pretium repetijt, poſt decem menſes elapſos. Lucrum acquiſitum fuit 138. aureorum. Facta autem debita diſtributione, primus habuit 60. aur. ſecundus 48. & tertius 30. Quot ergo menſibus reliquit ſecundus pecuniam collocatam in conſortio, & quanti torques aureus æſtimatus, vt dictæ portiones lucri cuilibet deberentur? Quoniam pecunia cuiuſque per ſuum tempus multiplicari debet, multiplicabimus 200. aur. primi per 12. menſes, faciemusque 2400. atque ex hoc numero illi prouenerunt 60. aur. Dic ergo, vt ſcias, ex quo ſecundus lucrum 48. aureorum acquiſierit: Si 60. aur. prouenerunt 2400. ex quo prouenerunt aurei 48? vt hic vides.

60.	2400.	48?	fiunt	1920.

Inueniesque 1920. qui numerus productus eſt ex 240. aur. ſecundi in ſuum tempus. Diuiſo igitur numero dicto 1920. per 240. prodibunt menſes 8. quibus pecunia ſecundi in negotiatione manſit. Rurſus, vt ſcias, ex quo tertius lucrum 30. aureorum adeptus ſit, dic. Si lucrum primi 60. aur. prouenit ex 2400. ex quo oritur lucrum tertij 30. aur? Vel ſi lucrum ſecundi 48. aur. ortum eſt ex 1920. ex quo proueniet lucrum tertij 30. aur? vt hic cernis.

60.	2400.	30?	fiunt	1200.
48.	1920.	30?	fiunt	1200.

Semper enim inuenies numerum 1200. qui productus eſt ex 10. menſibus tertij in ſuam pecuniam, hoc eſt, in pretium torquis. Diuiſo ergo hoc numero 1200. per 10. menſes, prodibit valor torquis aureorum 120. quos tertius ad negotiationem per 10. menſes attulit.

Rem ita ſe habere, cognoſces, ſi ita proponas ſodalitatem. Tres, conſortio inito, lucrati ſunt 138. aur. Primus contulit 200. aur. per 12. menſes: ſecundus 240. aur. per 8. menſes: & tertius 120. aur. per 10. menſes.

Quantum ergo cuilibet de lucro debetur? Multiplicata enim pecunia cuiuſque per ſuum tempus, inuenies lucra ſingulorum, quemadmodum in quęſtione dictum eſt, vt hic apparet.

Lucr.	aur.			Lucr. aur.
5520.	138.	2400?	fiunt	60. primi.
		1920?		48. ſecund.
		1200?		30. tertij.

9. Tres, inito conſortio per annum duraturo, lucrati ſunt ſummam quandam aureorum. Primus expoſuit ſtatim ab initio 1000. aur. ſecundus vero aureos, neſcio quot, cõtulit poſt 2. menſes exactos. Tertius demũ poſt 4. menſes à ſecundo contribuit etiam multitudinem aureorum mihi ignotam. Finita tamen ſocietate, lucrum participarunt æqualiter. Quid ergo ſecundus & tertius in eam ſocietatem contulerunt? Multiplicando 1000. aur. primi per 12. menſes, quibus eos in ſodalitate reliquit, fient 12000. Ac tantundem debet fieri ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, atque ex pecunia tertij in ſuum tempus; quandoquidem æqualia lucra habere debent. Quoniam vero ſecundus pecuniam ſuam 10. menſibus reliquit in negotiatione, ſi partiamur 12000. per 10. inueniemus pecuniam ſecundi fuiſſe 1200. aur. at ſi diuidamus per 6. menſes, quibus tertius ſuam pecuniam expoſuit, deprehendemus pecuniam tertij fuiſſe 2000. aur. Nam hac ratione ex pecunia cuiuſque in ſuum tempus producetur numerus 12000. qui tertium locum in regula trium occupabit, ac proinde æqualia lucra omnes tres habebunt, quodcunq; fuerit lucrum illud commune. Si enim lucrum commune fuiſſet 900. aur. & tres hi numeri 12000. 12000. 12000. qui ex ſingulorum pecunijs in ſua tempora ſunt producti, in vnam ſummam colligerentur, ita ſtaret exemplum. Quæſt. 9.

36000.	900.	12000?	fiunt	300.
		12000?		300.
		12000?		300.

10. Tres in communi negotiatione lucrati ſunt 190. aur. quos ita diſtribuerunt, vt portio primi tripla eſſet portionis ſecundi, & quadrupla portionis tertij. Primus autẽ contulit per 12. menſes 80. aur. Secundus ſuam pecuniam expoſuit per 8. menſes, & tertius per 4. Quantum ergo quiſque duorum poſteriorum contulit in hanc ſocietatem, & quid de lucro ſinguli acceperunt? Multiplica pecuniam primi, nempe 80. aur. per ſuum tempus, vt per 12. menſes? facieſque 960. Huius numeri ſume $\frac{1}{3}$. nimirum 320. Item $\frac{1}{4}$. nempe 240. Atque hi numeri ſunt, qui produci debent ex pecunijs duorum poſteriorum in ſua tempora: quia hac ratione lucrum ſecundi erit $\frac{1}{3}$. lucri primi, & lucrum tertij erit $\frac{1}{4}$. eiuſdem, quemadmodum & numerus 320. ex quo lucrum ſecundo oritur, eſt $\frac{1}{3}$. numeri 960. ex quo lucrum primi gignitur, & numerus 240. quod parit lucrum tertij, eſt $\frac{1}{4}$. eiuſdem numeri 960. Si igitur partiamur 320. per 8. menſes ſecundi, inueniemus 40. aur. quos ſecundus poſuit: Si vero diuidamus 240. per 4. menſes tertij, producentur 60. aur. pro tertio. Nam hac ratione pecuniæ ſingulorum per ſua tempora multiplicatę producunt numeros. 960. 320. 240. quorum primus triplus eſt ſecundi, & quadruplus tertij. Ex quo fit, lucra eaſdem quoque proportiones habitura. Vt hic vides. Quæſt. 10.

1520.	190.	960?	fiunt	120.	Lucra.
		320?		40.	
		240?		30.	

11. Tres, inito conſortio, contulerunt in communem negotiationem 1520. aur. lucratique ſunt aur. 190. quos (habita ratione pecuniæ cuiusque quam poſuit) ita partiti inter ſe ſunt, vt primus haberet 120. ſecundus 40. Quid ergo tertius habuit, & quid quiſque in ſocietatem contulerũt? Si lucrum tam primi, quam ſecundi ex toto lucro demas, relinquetur lucrum tertij 30. aur. Cognitis autem ſingulorum lucris, dic. Si totum lucrum 190. aur. ortum eſt ex communi pecunia 1520. aur. ex quo prouenit lucrum primi 120. aur. & lucrum ſecundi 40. aur. & lucrum tertij 30. aur. Reperies enim primum attuliſſe 960. aur. ſecundum 320. & tertium 240. Vt hic vides. Quæſt. 11.

190.	1520.	120?	fiunt	960.	primi.
		40?		320.	ſecundi.
		30?		240.	tertij.

Examinabitur, ſi dicas. Si 1520. (quæ eſt ſumma pecuniarum, quas ſinguli contulerunt) lucrantur 190. quid lucrabuntur 960. 320. & 240? Inuenies enim lucra 120. 40. & 30.

12. Tres, inita ſodalitate, in negotiationem contulerunt 1520. aur. quibus lucrati ſunt 190. aur. Primus, facta diſtributione, recepit 1080. aur. conflatos ex ſua pecunia, quam poſuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter ſecundus accepit 360. aur & tertius 270. Quantum ergo quiſque poſuit & quantum eſt lucratus? Facta vna ſumma ex pecunia, quam omnes poſuerunt, & lucro communi, quæ eſt 1710. Dic. Si 1710. pecunia omnium, & lucrũ, prouenit ex 1520. pecunia omnium. ex quo proueniunt 1080. qui numerus continet & pecuniam primi, & lucrum? & ex quo orientur 360. quæ continent & pecuniam & lucrum ſecundi? & ex quo numerus 270. producetur continens & pecuniam, & lucrum tertij? Inuenies enim hoc modo pecunias, quas ſinguli poſuerunt. vt hic manifeſtum eſt, Quæſt. 12.

1710.	1520.	1080?	fiunt	960.	Primi.
		360?		320.	Secun.
		270?		240.	Tertij.

Ablata autem pecunia cuiuſq; ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum ſolum. Ita deprehendes lucrum primi eſſe aur. 120. ſecundi 40. & tertij 30.

13 Duo in communi conſortio lucrati ſunt 200. aur. ex quibus primo obtigerunt 50. aur. ſecundus tamen duplo plus contulit, quam primus, & præterea 8. aur. Quantum ergo vterque expoſuit? Quoniam primus lucratus eſt 50. aur. manifeſtum eſt, ſecundum, qui duplo plus poſuit, lucratum eſſe 100. ac proinde reliquos 50. aur. qui ex toto lucro 200. aur. ſuperſunt, eſſe lucrum 8. aureorũ, quos præterea ſecundus attulit. Vt ergo habeas pecuniã, quam vterq; poſuit, dic. Si 50. aurei reſidui proueniunt ex 8. aur. quos ſecundus præterea contribuit, ex Quæſt. 13.

quo

quo producentur 50.aur.quos primus lucratus eſt,& ex quo 100.aur.quos lucratus eſt ſecundus? Reperies enim hac ratione primum poſuiſſe 8.aureos, & ſecundum 16. vt hic apparet.

50. 8. { 50? 100? } fiunt { 8. 16.

Si igitur addas 8.ad 16 aur.ſecundi, facies 24.aur.quos ſecundus in eam ſodalitatem contulit.

Examen huius rei erit,ſi 8.aur.& 24.quos ambo contribuerunt, in vnam ſummam colligas, quæ eſt 32. & dicas. Si 32.lucrati ſunt 200.quid lucrabuntur 8.& quid 24? Deprehendes enim lucrum primi eſſe 50. aur.& ſecundi 150.vt hic vides.

32. 200. { 8? 24? } fiunt { 50. 150.

Quæſt. 14. 14. Duo contraxerunt ſocietatem,quorum primus expoſuit 120. aur. & ſecundus 180. Aſſumpſerunt autem procuratorem ea conditione, vt ex lucro acciperet 10. pro 100. Lucrum vero fuit 1000. aur. Quid ergo debuit habere procurator, & quid vterque illorum? Dic. Si 100.dant 10.procuratori, quid dabunt 1000.inueniesque 100.aur.qui procuratori debentur in ratione 10.pro 100. Ablatis autem his 100.aur.ex toto lucro, hoc eſt,ex 1000.aur. remanent 900. aur. pro lucro amborum. Dic ergo. Si 300.aur. quos ambo poſuerunt, lucrati ſunt 900.aur. quid lucrabuntur aurei 120.& quid 180. veluti hic appoſitum eſt.

300. 900. { 120? 180? } fiunt { 360. 540.

Quæſt. 15. 15. Tres inierunt ſocietatem,lucratique ſunt 1520.aur.Primus contulit 1080.aur.& ſecundus 360.tertius autem tantam pecuniam expoſuit, vt ei de lucro cederent 240.aur. Quid ergo hic tertius poſuit, & quid duorum priorum quiſque eſt lucratus? Subtrahe 240.aur. quos tertius lucratus eſt,à toto lucro 1520.aureorum, vt reliqui ſint 1280.aur.pro lucro priorum duorum. Dic ergo. Si 1440. aur.quos primus & ſecundus expoſuerunt, lucrantur 1280. aur. quid lucrabuntur 1080. aur. primi, & quid 360. aur.ſecundi? Inueniesque lucrum primi eſſe 960. & ſecundi 320. vt hic cernis.

1440. 1280. { 1080? 360? } fiunt { 960. 320.

Ita enim omnium lucra conficient 1520. aur. vt autem habeas pecuniam à tertio expoſitam, dic. Si lucrum priorum duorum 1280. aur. prouenit ex 1440.aur. quos in ſocietatem attulerunt,ex quo proueniet lucrum tertii 240.aur.inueniesque 270.aur.vt hic vides.

1280. 1440. 240? fiunt 270.

Quæſt. 16. 16. Tres expoſuerunt æquales pecuniæ ſummas,lucratique ſunt 1000.aur.in vno anno.Primus reliquit ſuam pecuniam in conſortio 7. menſibus: ſecundus ſuam repetiit poſt 6. menſes: tertius autem ſuam vſque ad finem anni expoſuit. Quid ergo quiſque de lucro accipiet? Collectis omnibus menſibus,quibus ſinguli ſuas pecunias expoſuerunt,vt fiat ſumma 25.dic.Si 25.lucrantur 1000.quid lucrabuntur 7.menſes,& quid 6.& quid 12. quemadmodum hic factum eſt.

25. 1000. { 7? 6? 12? } fiunt { 280. 240. 480.

Verum hoc eſſe perſpicuum eſt, cum omnium lucra efficiant 1000. aur.quos quidem dicebantur eſſe lucrati.

Idem tamen hoc modo examinabis.Finge ſingulos expoſuiſſe 100 aur. quos per tempus cuiuſque multiplica,vt fiant 700. 600. 1200. Collectis autem hiſce numeris in vnam ſummam, quæ eſt 2500.dic.Si 2500.lucrantur 1000. quid lucrabuntur 700.600.& 1200? Inuenies enim eadem lucra,quæ prius,vt hic apparet.

2500. 1000. { 700? 600? 1200? } fiunt { 280. 240. 480.

Quæſt. 17. 17. Quatuor ſimul lucrati ſunt 340. aur.quos ita inter ſe,habita ratione pecuniarum collatarum, partiti ſunt,vt quoties ſecundus habuit 5.toties tertius habuerit 9.quoties autem tertius habuit 7.toties quartus habuerit 11. quoties denique quartus habuit 9. toties primus habuerit 13. Primus autem contulit 286. aur. quid ergo alii tres expoſuerunt,& quid ſinguli ex lucro reportarunt? Hic exprimuntur proportiones lucrorum,atque adeo pecuniarum, ex quibus lucra proueniunt. Sunt enim lucra pecuniis expoſitis proportionalia. Quoniã igitur primus toties habiturus eſt 13.quoties quartus 9. erit proportio pecuniarum expoſitarum eadem,quæ 13. ad 9. propterea quod idem numerus multiplicans 13.& 9. producit pecunias vtriuſque cum toties in illa contineri debeant 13.quoties 9.in hac. Dic ergo. Si 13. dant 286. aur. quos primus poſuit, quid dabunt 9. inueniesque 198. aur.pro collatione quarti, vt hic cernis.

13. 286. 9? fiunt 198.

Vbi vides,toties contineri 9.in 198 quoties 13.in 286.

Quoniam vero quartus dicitur habiturus toties 11. quoties tertius 7. erit proportio 198. nempe pecuniæ quarti,ad pecuniam tertii,quæ 11.ad 7. Dic ergo. Si 11.dant 198. quid 7.reperieſque collationem tertii 126.aur.vt hic conſtat.

11. 198. 7? fiunt 126.

Vbi etiam liquet,toties contineri 7.in 126. quoties 11. in 198.

Rurſus quia tertius toties debet habere 9. quoties ſecundus 5. erit proportio 126. nimirum pecuniæ tertii, ad pecuniã ſecundi,quæ 9.ad 5. Dic ergo.Si 9.dant 126.quid 5?inueniesq; collationẽ ſecundi 70.aur.vt hic patet.

9. 126. 5? fiunt 70.

Vbi

Vbi etiam apparet, toties reperiri 5.in 70.quoties 9.in 126.

Habitis autem pecuniis, quas ſinguli contribuunt, inueniemus lucra eorum, ſicuti in aliis ſocietatibus. Collectis enim omnium pecuniis in ſummam 680.dicemus. Si 680.lucrantur 340.quid lucrabuntur 286.70. 126.198.quos primus, ſecundus, tertius, ac quartus poſuit? veluti hic vides.

680. 340. { 286? 70? 126? 198? } fiunt { 143.primi. 35.ſecundi. 63.tertii. 99.quarti. }

Vbi quidem liquidò cernis, omnia lucra facere 340.& toties contineri 13.in 143.quoties 9.in 99.& toties 5.in 35.quoties 9.in 63. Item toties 7.in 63.quoties 11.in 99.

18. Tres partiri inter ſe volunt 760. aur. ea conditione, vt quoties primus habet 10. toties ſecundus habeat 7.& tertius 2. Quantum ergo ſinguli ſunt accepturi? Iunge ſimul 10.7.& 2.vt habeas 19. Deinde dic.Si 19. dant 760.quid dabunt 10.7.& 2. veluti hic vides. Quæſt.18.

19. 760. { 10? 7? 2? } fiunt { 400.primi. 280.ſecundi. 80.tertii. }

19. Quatuor partiri inter ſe volunt 785.aur. ea lege, vt quoties primus habet 10.toties ſecundus habeat 7. quoties autem ſecundus habet 14.toties tertius habeat 3.quoties deniq; tertius habet 12.toties quartus habeat 9. Quid ergo quiſq; accipiet? Vt facilior reddatur operatio, incipiendum erit ab vltimo, nempe à quarto, qui ponatur habere ſemel 9. Habebit igitur tertius ſemel etiam 12. Quia vero quoties tertius habet 3.toties ſecundus habere debet 14.ſi diuidamus 12.numerum tertii, per 3.inueniemus Quotientē 4.qui indicabit in 12.quater contineri 3. Multiplicabimus igitur 14.per dictum Quotientem 4.vt inueniamus 56.numerum ſecundi, in quo toties 14.continentur; quoties 3.in 12.Et quoniam quoties ſecundus habet 7.toties primus habere debet 10.ſi partiamur 56. numerum ſecundi, per 7.inueniemus Quotientem 8.qui indicat, in 56.octies contineri 7. Multiplicabimus igitur 10.per Quotientem hunc 8.vt producatur numerus primi 80. in quo toties 10.continētur, quoties 7.in 56. Atq; ita partes numeri dati habere debent proportiones horum numerorum 80.56.12.9. Ita enim toties primus habebit 10.quoties ſecundus 7. Et toties ſecundus 14.quoties tertius 3.Et quoties tertius 12.toties quartus 9.Collectis igitur illis numeris in vnam ſummam, quæ erit 157.Dic.Si 157.dant 785.quid dabunt 80.56. 12.& 9? vt hic vides. Quæſt.19.

157. 785. { 80? 56? 12? 9? } fiunt { 400.Primi. 280.Secundi. 60.Tertii. 45.Quarti. }

Alio modo ita ſoluetur eadem quæſtio propoſita. Quoniam cum primus habet 10.ſecundus habet 7. Ponemus 10.pro primo & 7.pro ſecundo. Deinde, quia cum ſecundus habet 14.tertius habet 3.dicemus. Si 14.ſecundi ſunt 7.quid erunt 3.tertii? Inueniemusq; $1\frac{1}{2}$.atq; talem proportionem habebit poſitio ſecundi ad poſitionem tertii, qualem 7.ad $1\frac{1}{2}$.hoc eſt, toties erunt 14.in 7.quoties 3.in $1\frac{1}{2}$. Rurſus, quia cum tertius habet 12.quartus habet 9.dicemus. Si 12.tertii ſunt $1\frac{1}{2}$.quid erunt 9.quarti? inueniemusq; $1\frac{1}{8}$.atq; talem proportionē habebit poſitio tertii ad poſitionem quarti, qualem $1\frac{1}{2}$.ad $1\frac{1}{8}$.hoc eſt, toties erunt 12.in $1\frac{1}{2}$.quoties 9.in $1\frac{1}{8}$. Collectis iam his numeris 10.7.$1\frac{1}{2}$.$1\frac{1}{8}$. in vnam ſummam, efficiemus $19\frac{5}{8}$. Quare dicemus. Si $19\frac{5}{8}$.dant 785.quid dabunt 10.7. $1\frac{1}{2}$.& $1\frac{1}{8}$. vt hic vides.

$19\frac{5}{8}$. 785. { 10? 7? $1\frac{1}{2}$? $1\frac{1}{8}$? } fiunt { 400.primi. 280.ſecundi. 60.tertii. 45.quarti. }

20. Quatuor duces, ſex ſigniferi, & 100. milites in direptione cuiuſdam vrbis irruerunt in domum quandam, vbi repererunt 72400.aur. quos inter ſe ita partiti ſunt, vt quoties quilibet dux acceperit 8. toties quilibet ſignifer acceperit 5.& quilibet miles 3. Quid ergo cuilibet ex illa præda obuenit? Multiplica numerum ducum, id eſt 4.per 8.nempe per numerum, quem toties quilibet dux debet habere, quoties alii 5.& 3.efficieſque 32. Similiter multiplica 6.numerum ſigniferorum per 5.& 100.numerum militum per 3.efficieſque 30.& 300. Iunctis ſimul tribus his numeris 32.30.300.vt fiant 362.Dic.Si 362.dant 72400.quid dabunt 32.30.& 300.vt hic vides. Quæſt.20.

362.72400. { 32? 30? 300? } fiunt { 6400. 6000. 60000. }

Itaque quatuor duces acceperunt ex illa præda 6400.aur.at 6. ſigniferi 6000.& 100. milites 60000. qui omnes conficiunt ſummam aureorum inuentam 72400.Iam vero ſi partiamur aureos ducum 6400.per 4. numerum ducum, reperiemus quemlibet habuiſſe 1600 aur. Item ſi aureos ſigniferorum diuidamus per 6.deprehendemus cuilibet obtigiſſe 1000.aur. Si denique aureos militum per 100.diſtribuamus, inueniemus ſingulos accepiſſe 600.aur. vbi manifeſte vides, toties 8.contineri in 1600. quoties 5.in 1000.& 3.in 600.nimirum ducenties.

21. Quidam extremum ſpiritum agens, cui filia erat, & filius, qui in bello dicebatur occubuiſſe, ita hæreditatem 18088. aureorum diſtribuendam inter vxorem, & filiam reliquit, vt vxor haberet $\frac{2}{3}$.filia autem $\frac{1}{3}$.ſed ſi forte filius rediret, vt filius $\frac{2}{3}$.haberet. Accidit autem, vt filius reuerteretur. Qua igitur ratione dicta hæreditas diuidenda eſt, vt voluntati teſtatoris ſatisfiat? Certum eſt, quæſtionem hanc non poſſe intelligi, vt verba ſonant. Nam ſi filius accipiat $\frac{2}{3}$.non poterit vxor habere $\frac{2}{3}$.& filia $\frac{1}{3}$. Quare omnes Arithmetici voluntatem teſtatoris Quæſt.21.

interpretãtur, vt voluerit, filium duplo plus debere habere, quam vxorem, & vxorem duplo plus, quam filiam. Id quod proportio harum minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$. quæ dupla eſt, (continet enim minutia $\frac{2}{3}$. minutiam $\frac{1}{3}$. bis.) indicare videtur. Itaque numerus 18088. ſecandus eſt in tres partes, ita vt prima contineat ſecundam bis, & ſecunda tertiam etiam bis, hoc eſt, quæ habeant continuam proportionem duplam, quod hoc modo fiet. Pone tertiam eſſe 1. Erit ergo ſecunda 2. & prima 4. quæ omnes faciunt 7. Dic igitur. Si 7. dant 18088. quid dabunt 4. 2. & 1? vt hic vides.

7. 18088. { 4? 2? 1? } fiunt { 10336. filii. 5168. vxoris. 2584. filiæ.

Quæſt. 22. 22. Tres crumenã inuenerunt cum 3042. aur, quos ita inter ſe diſtribuerunt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{1}{3}$. & tertius $\frac{1}{4}$. Quid ergo quiſque accepit? Hic etiam perſpicuum eſt, quæſtionem non poſſe intelligi, vt ſonat. Si namque primus accepiſſet $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{1}{3}$. non potuiſſet tertius accipere $\frac{1}{4}$. Nam hæ tres minutiæ efficiunt plus, quam integrnm, nempe $\frac{13}{12}$. Quare ſenſus eſt, vt datus numerus diſtribuatur in tres partes, quæ eaſdem proportiones inter ſe habeant, has quæ minutiæ $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. Quod vt fiat inueniatur numerus à denominatoribus numeratus. Minimus autem hic numerus eſt 12. inuentus per ea, quæ cap. 10. ſcripſimus. Ex hoc numero cape $\frac{1}{2}$. nempe 6. Item $\frac{1}{3}$. nempe 4. Item $\frac{1}{4}$. nempe 3. quas partes ſimul adde, vt habeas 13. Dic ergo. Si 13. dant 3042. quid dabunt 6. 4. & 3? vt hic cernis.

13. 3042. { 6? 4? 3? } fiunt { 1404. primi. 936. ſecundi. 702. tertii.

Examen ita fiet. Reduc datas minutias ad eandem denominationem, vt ad $\frac{6}{12}$. $\frac{4}{12}$. $\frac{3}{12}$. Habebunt enim hæ minutiæ eaſdem proportiones, quas numeratores habent. Eaſdem autem habent tres numeri inuenti 1404. 936 702. vt apparet.

Quæſt. 23. 23. Tres inuento loculo cum 1407. aur. ita diſtributionem fecerunt: primus accepit $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{3}{5}$. tertius $\frac{8}{11}$. quid ergo quiſque accepit? Hic etiam ſenſus eſt, vt datus numerus in tres partes ſecetur datis minutiis proportionales: alias impoſſibilis quæſtio foret. Inuento igitur, ex cap. 10. minimõ numero 110. dictas minutias continente, ſume eius dimidium 55. & tres quintas 66. & octauo vndecimas 80. eaſque in vnam ſummam 201. collige, ac dic. Si 201. dant 1407. quid dabunt 55. 66. & 80? vt hic apparet.

201. 1407. { 55? 66? 80? } fiunt { 385. primi. 462. ſecundi. 560. tertii.

Examen fiet, vt in antecedente quæſtione. Reductis enim datis minutiis ad eandem denominationem, vt ad $\frac{55}{110}$. $\frac{66}{110}$. $\frac{80}{110}$. habebunt tres numeri inuenti eaſdem proportiones; quas hæ minutiæ, nempe earum numeratores, habent, vt conſtat.

Quæſt. 24. 24. Quatuor partiri inter ſe volunt 396 aur. ita vt primus habeat $\frac{1}{2}$ & præterea 10. ſecundus $\frac{3}{5}$. minus 20. tertius $\frac{1}{3}$. & præterea 8. quartus denique $\frac{1}{4}$. minus 6. quantum ergo quiſque accipiet? In huiuſmodi quæſtionibus aufer ex tota ſumma numeros, qui accipi debent vltra partes dictas, & alios, qui deeſſe debent dictis partibus, ad eandem ſummam adiice. Vt hic aufer 10. & 8 vt remaneant 378. adde rurſus 20. & 6. fiunt 404. Deinde inuento minimo numero 60. continente datas minutias, cuius $\frac{1}{2}$. eſt 30 & $\frac{3}{5}$. 36. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. quæ omnes faciunt 101. Dic ergo. Si 101. dant 404 (qui numerus productus eſt ex additione & ſubtractione datorum numerorum ex tota ſumma 396.) quid dabunt 30. 36. 20. & 15? vt hic vides.

101. 404. { 30? 36? 20? 15? } fiunt { 120. primi. 144. ſecundi. 80. tertii. 60. quarti.

Quatuor igitur hi numeri inuenti proportiones habent eaſdem, quas datæ minutiæ, ſed in vnam ſummam collecti faciunt 404. non autem 396. vt quæſtio proponit. Quod ſi primo addas 10. vt fiant 130. & à ſecundo auferas 20. vt relinquantur 124. tertio item adiicias 8. vt fiant 88. & à quarto demum auferas 6. vt remaneant 54. efficient hi quatuor numeri 396. Vt autem habeant dictas proportiones, auferendi erunt prius numeri, & addendi, qui additi ſunt, & ſubtracti: Ita vt vere 130. ad 124. proportionem habeant, quam $\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{5}$. ſi prius 10. detrahantur ex illo, & huic adiiciantur 20. vt recte dicatur numerus 130. continere $\frac{1}{2}$. & præterea 10. numerus vero 124. continere $\frac{3}{5}$. minus 20, &c.

Quæſt. 25. 25. Eſt ciſterna habens in imo fundo tres fiſtulas inæquales: maxima reſerata, effluit tota aqua in 2. horis; media autem aperta, effluit tota in 3. horis; minima denique aperta effluit tota aqua in 6. horis. Quanto ergo tempore reſeratis omnibus tribus fiſtulis, tota aqua effluet, ſi per ſingulas fiſtulas à principio vſque ad finem aqua ſemper eodem modo effluat? Sumpto minimo numero, quem tempora in quæſtione expreſſa, nempe horæ 2. 3. & 6. metiantur, qui hic eſt 6. dic. Si maxima fiſtula in 2. horis vnam ciſternam exhaurit, quot ciſternas in 6. horis exhauriet? inuenieſque 3. Item ſi media fiſtula vnam ciſternam exhaurit in 3. horis, quot ciſternas in 6 horis exhauriet? inuenieſque 2. Item ſi minima fiſtula in 6. horis vnam ciſternam exhaurit quot ciſternas exhauriet in 6. horis? inuenieſque 1. vt hic vides.

Horæ.	Ciſterna.	Horæ.	Ciſternæ.
2. 3. 6.	1.	6?	3. 2. 1.

Colle-

Collectis iam in vnum his tribus inuentis numeris 3.2.1. vt fiat 6.dic. Si ſex ciſternæ euacuatur in 6.horis, quanto tempore 1.euacuabitur? inueniesque in vna hora. Id quod hac ratione examinabis. Si maxima fiſtula exhaurit totam ciſternam in 2.horis,& media in 3.& minima in 6.quantam partem ciſternæ exhaurient ſingulæ fiſtulæ in 1.hora? veluti hic appoſitum eſt.

Horæ.	Ciſterna.	Hora.	Ciſterna.
2.			$\frac{1}{2}$.
3.	1.	1?	$\frac{1}{3}$.
6.			$\frac{1}{6}$.

Inuenies enim maximam fiſtulam euacuare $\frac{1}{2}$.ciſternæ,& mediam $\frac{1}{3}$.& minimam $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt vnam integram ciſternam.

Eadem hæc quæſtio ita proponi poteſt. Eſt ciſterna habens in ſummitate tres fiſtulas inæquales: maxima replet ciſternam in 2.duis horis, media in 3 & minima in 6.quanto ergo tempore omnes ſimul ciſternam implebunt? Inuenies enim 1.horam.

Pari ratione ita poteſt proponi. Sunt tres artifices: primus abſoluit opus quoddam in 2. annis, ſecundus in 3.& tertius in 6.quanto ergo tempore omnes ſimul idem opus perficient? Inuenies enim 1.annum.

Cæterum huiuſmodi quæſtiones ſolui etiam poſſunt hoc pacto. Inueſtigetur per regulam trium, quantum aquæ ſingulæ fiſtulæ exhauriant in 1. hora, treſque numeri inuenti in vnam ſummam colligantur. Nam ſi hæc ſumma fuerit 1.requiritur 1.hora, vt omnes fiſtulæ totam ciſternam euacuent: ſi vero non fuerit 1. inuenietur tempus requiſitum per regulam trium, vt in hoc exemplo erit manifeſtum. Sunt tres artifices: primus abſoluit opus quoddam in 6.annis, ſecundus in 9.& tertius in 18. Quanto ergo tempore omnes ſimul idem opus perficient? Dic Si primus in 6.annis abſoluit 1.opus. & ſecundus in 9. & tertius in 18.quantum abſoluet quilibet in 1.anno? vt hic vides. *Alia ſolutio huius quæſtionis.*

Anni.	Opus.	Anni.		Operis.
6.				$\frac{1}{6}$.primi.
9.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{9}$.ſecundi.
18.				$\frac{1}{18}$.tertii.

Efficiunt autem tres numeri inuenti $\frac{1}{3}$. Dic ergo Si $\frac{1}{3}$. operis requirit 1. annum, quot annos requiret 1.opus inueniesque 3.annos. Quod examinabis, vt ſupra, veluti hic vides.

Anni.	Opus.	Anni.		
6.				$\frac{1}{2}$.prim.
9.	1.	3?	fiunt	$\frac{1}{3}$.ſecund.
18.				$\frac{1}{6}$.tert.

Inuenies enim primum in 3. annis abſoluere $\frac{1}{2}$.operis ſecundum $\frac{1}{3}$.& tertium $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt.1.

Si prius exemplum hac arte explicaretur, prima ſtatim operatione ſcopus attingeretur: quia in 1. hora tota ciſterna euacuatur, vt conſtat ex operatione examinis dicti exempli.

26. Eſt ciſterna habens fiſtulam in orificio, per quam impletur in 4.horis: habet autem in imo fundo aliam fiſtulam, per quam in 6.euacuatur. Si ergo continue influat aqua,& effluat, quanto tempore ciſterna replebitur? Primum inueſtigare oportet, quanta pars ciſternæ (poſita illa conditione) in 1.hora impleatur; quod hoc modo fiet: Si in quatuor horis 1 ciſterna impletur, quantum implebitur in 1.hora? Inuenies autem $\frac{1}{4}$. ciſternæ. Rurſus. Si in 6.horis 1.ciſterna exhauritur, quantum euacuabitur in 1.hora? Inuenies autem $\frac{1}{6}$.ciſternæ. Si ergo auferas $\frac{1}{6}$.ex $\frac{1}{4}$.remanebit $\frac{1}{12}$.ciſternæ: ac tanta portio ciſternæ implebitur in 1.hora. Dic ergo. Si $\frac{1}{12}$.ciſternæ requirit vnam horã, quid requiret 1.ciſterna? Inueniesque 12.horas. Atque in tot horis ciſterna tota implebitur. Quod hac ratione examinabis verũ eſſe. Si in 4.horis impletur 1.ciſterna, in 12. horis quot ciſternæ implebuntur? Inuenies autem 3.ciſternas. Item ſi in 6.horis euacuatur 1.ciſterna, in 12.quot ciſternæ euacuabuntur? Inuenies auten 2.ciſternas. quas ſi auferas ex 3.inuentis, remanebit 1.ciſterna plena. *Quæſt. 26.*

Quod ſi quis dicat: Ciſterna per fiſtulam ſuperiorem impletur in 3.horis, per inferiorem euacuatur in 8. hor. eodem modo ſoluetur quæſtio, ſi dicas. Si in 3. horis 1.ciſterna impletur, quantum implebitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{3}$.ciſternæ. Item ſi in 8.horis vna ciſterna euacuatur, quantum euacuabitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{8}$.ciſternæ. Si ergo demas $\frac{1}{8}$.ex $\frac{1}{3}$. remanebunt $\frac{5}{24}$. ac tanta portio ciſternæ implebitur in 1.hora. Dic ergo. Si $\frac{5}{24}$.ciſternæ requirunt 1. horã, quid requiret 1.ciſterna? Inueniesque $4\frac{4}{5}$. hor. quo tempore tota ciſterna implebitur. Quod ita probabis. Si in 3.hor. impletur 1.ciſterna, in $4\frac{4}{5}$.hor. quot ciſternæ replebuntur? Inuenies autẽ $4\frac{4}{5}$. ſi item in 8.horis euacuatur vna ciſterna, in $4\frac{4}{5}$.hor. quot ciſternæ euacuabuntur? Inuenies autem $\frac{3}{5}$. quas ſi ex $1\frac{3}{5}$.auferas, remanebit 1 ciſterna plena.

Breuius fortaſſis huiuſmodi quæſtiones ſoluentur, ſi quæratur, quanta portio ciſternæ imlpeatur in illis horis, in quib. tota impleretur, ſi nihil efflueret. Quod ita fiet in priori quæſtione. Dic. Si 6. horæ 1. ciſternã euacuant, quantum euacuabunt 4.horæ? inueniesque $\frac{4}{6}$.quas ſi ex 1, auferas (ponimus enim 1.ciſternam 4.horis impleri, ſi nihil efflueret) remanebit $\frac{1}{3}$. quæ 4.horis implebitur. Dic igitur rurſus. Si $\frac{1}{3}$.ciſternæ requirit 4.horas, quid requiret 1.ciſterna? Inueniesque 12.horas, vt prius. *Alia ſolutio huius quæſtionis.*

In poſteriori vero quæſtione dic. Si 8.horæ 1.ciſternam exhauriunt, quantum exhaurient 3.horæ? Inueniesque $\frac{3}{8}$.quas ſi demas ex 1. (ponimus enim 1.ciſternam 3. horis impleri, ſi nihil efflueret) remanebunt $\frac{5}{8}$. quæ 3.horis implebuntur. Dic ergo rurſus. Si $\frac{5}{8}$. ciſternæ expoſcunt 3.horas, quid expoſcet 1.ciſterna? inueniesque $4\frac{4}{5}$.horas, vt prius.

REGVLA ALLIGATIONIS.

CAPVT XXI.

Regula alligationis quid.

SOLENT nonnunquam Arithmetici varias merces variorum pretiorum miſcere, ita vt, ſtatuto quodam pretio medio, omnes eo emantur: quod quidem efficiunt regula quadam, quam regulam alligationis dicunt, eo quod variæ merces alligentur quodammodo ad vnum pretium, vt ex ſequentibus exemplis perſpicuum fiet.

Quæſt. 1.

1. Duo genera vini ſunt: menſura 1. primi conſtat 20. baioch. at menſura 1. ſecundi venditur 12. baioch. Quantum ergo ex vtroq; ſumendum eſt, vt menſura 1. valeat 15. baioch? Pone vnum pretium ſub altero, & ad ſiniſtram illorum colloca pretium ſtatutum, quod medium eſt inter data duo pretia. Deinde confer vtrunq; pretium datum cum ſtatuto pretio, differentiamque vtriuſque pone ad dexteram pretiorum, alternatim tamen, hoc eſt, differentiam maioris pretii iuxta minus pretium, & differentiam minoris iuxta maius: atq; has differentias in vnam ſummam collige, vt in exemplo vides.

Regula alligationis quomodo fiat.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	20.	3.
15.		
	12.	5.
		8.
		Summa differentiarum.

Poſt hæc inſtitue regulam trium bis, ita vt ſumma differentiarum primum locum occupet; menſura vero 1. ſecundum; & vtraq; differentia tertium, veluti hic cernis.

8. 1 { 3? 5? } fiunt { $\frac{3}{8}$. primi. $\frac{5}{8}$. ſecundi.

Dic ergo. Si ſumma differentiarum 8. dat 1. menſuram, quid dabunt ſingulæ differentiæ 3. & 5? Inuenies enim ex primo vino accipiendas eſſe $\frac{3}{8}$ vnius menſuræ, ex ſecundo vero $\frac{5}{8}$. atq; ita fiet 1. menſura ex vtroq; conſtans 15. baiochis. Quod ita probabis. Dic. Si 1. menſura primi vini valet 20. baioch. quid valebunt $\frac{3}{8}$? Item, ſi 1. menſura ſecundi vini valet 12. baioch. quid valebunt $\frac{5}{8}$? vt hic cernis.

1. 20. $\frac{3}{8}$. fiunt $7\frac{1}{2}$.
1. 12. $\frac{5}{8}$. fiunt $7\frac{1}{2}$.

Inuenies enim duo pretia efficere 15. baiochos, quemadmodum proponitur.

Quæſt. 2.

2. Sunt duo genera argenti non puri. Primi libra 1. valet aur. 30. alterius libra 1. valet aur. 24. Vt ergo lib. 1. valeat aur. 28. quantum ex vtroq; argento ſumendum eſt? Facta alligatione, vt in præcedenti quæſtione, dic. Si ſumma differentiarum 6. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. & 2. vt hic vides:

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	30.	4.
28.		
	24.	2.
		6
		Summa differentiarum.

6. 1. { 4? 2? } fiunt { $\frac{2}{3}$. primi. $\frac{1}{3}$. ſecundi.

Hoc enim modo habebis 1. lib. ex vtroq; argento conſtantem 28. aureis, vt examines, dic. Si 1. lib argenti prioris valet aur. 30. quid valebunt $\frac{2}{3}$. vnius libræ? Item ſi 1. lib. poſterioris argenti valet 24. aur. quid valebit $\frac{1}{3}$? vt hic apparet.

1. 30. $\frac{2}{3}$? fiunt 20.
1. 24. $\frac{1}{3}$? fiunt 8.

Atque ita 1. lib. conſtabit 28. aur. vt proponitur.

Quæſt. 3.

3. Libra 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul. Libra 1. croci 10. Iul: Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendum eſt, vt 1. libra conſtet 7. Iuliis? Quando plures res proponantur alligandæ, variis modis fieri poteſt alligatio, dummodo quælibet ſemel ſaltem alligetur. Poteſt n. quodlibet pretiū cum quolibet alio, vel cum pluribus etiam alligari ad pretium medium, ita tamen, vt ſtatutum pretium ſit medium inter duo, quæ alligantur ad ipſum, vel certe alteri illorum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, quod variis alligationibus explicabimus.

Nota.

Variis modis fieri poſſe alligationē eiuſdem exempli.

Primo ergo alligabimus pretia piperis, & zingiberis ad pretium medium, quorum differentiæ ſunt 3. & 1. alternatim collocatæ. Deinde pretia garyoph. & croci, quorum differentiæ ſunt 4. & 3. alternatim quoq; poſitæ. Denique quia ſupereſt ſolum cinnam. alligabimus eius pretium cum pretio Zingib. exempli gratia, quorum differentiæ ſunt 1. & 1. alternatim etiam ſcriptæ. Omnium differentiarum ſumma eſt 13. Differentiæ autem è regione Zingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ plures è regione eiuſdem pretii poſitæ colligendæ ſunt in vnam ſumam. Dic iam. Si ſumma differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 1. 3. 1. 4. 4? vt hic vides.

Quid faciendū, quādo plures differentiæ ponuntur è regione eiuſdem pretij.

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
	Piper.	4.	1.
	Garyoph.	3.	3.
7.	Cinnam.	6.	1.
	Crocus.	10.	4.
	Zingib.	8.	3. 1.
			13.
			Summa differentiarum.

13.	1.	1? 3? 1? 4? 4?	fiunt	$\frac{1}{13}$. pip. $\frac{3}{13}$. garyoph. $\frac{1}{13}$.cinnam. $\frac{4}{13}$.croc. $\frac{4}{13}$.zingib.

Hac ratione habebis 1.lib.ex omnibus,quæ conſtet 7.Iul. Vt examines,dic.Si 1.lib.piperis valet 4.Iul.quid valebit $\frac{1}{13}$? Item,ſi 1.lib.garioph.valet 3.quid valebunt $\frac{3}{13}$?Item,ſi 1.lib.cinnã. valet 6.Iul.q.d valebit $\frac{1}{13}$? Item ſi 1. lib.croci valet 10.Iul.quid valebunt $\frac{4}{13}$? Item ſi 1.lib.zingib.valet 8.Iul.quid valebunt $\frac{4}{13}$? veluti hic cernis.

1.	4. 3. 6. 10. 8.	quid	$\frac{1}{13}$? $\frac{3}{13}$? $\frac{1}{13}$? $\frac{4}{13}$? $\frac{4}{13}$?	fiunt?	$\frac{4}{13}$.pip. $\frac{9}{13}$.garyoph. $\frac{6}{13}$.cinnam. $3\frac{1}{13}$.croc. $2\frac{6}{13}$. zingib.

Inueniesq; omnia pretia efficere 7.Iul. vt proponitur.

Alio modo fiet alligatio, ſi pretia piperis, & zingib.alligentur ad pretium medium: Item pretia piperis,& croci. Deinde pretia garyoph.& zingib.& rurſus pretia garyoph. & croci. Poſtremo pretia cinnam.& croci: Item pretia cinnam.& zingib.vt in hoc appoſito exemplo factum eſt. Neque vero plures alligationes fieri poſſunt in hoc exemplo.Nam pretia piperis,garyoph.& cinnam. inter ſe alligari non poſſunt, cum ſingula minora ſint ſtatuto pretio medio: atq; ita quodlibet illorum bis tantum alligari poteſt; poſteriorum autem duorum vtrumque ter, nempe cum quolibet trium priorum. At inter ſe alligari nequeunt, cum ſtatutum pretium 7. Iuliorum non ſit medium inter illa, aut alteri eorum æquale,ſed vtroque minus.Dic ergo.Si ſumma differentiarum 28.dat 1.lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. 4. 4. 8.& 8. vt hic cernis. *Alia alligatio huius 3.quæſtionis.*

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	Piper.	4.	1.3.
	Garyoph.	3.	1.3.
7.	Cinnam.	6.	3.1.
	Crocus.	10.	3.4.1.
	Zingib.	8.	3.4.1.
			28. Summa differentiarum.

28.	1.	4? 4? 4? 8? 8?	fiunt	$\frac{4}{28}$. pip. $\frac{4}{28}$.garyoph. $\frac{4}{28}$.cinnam. $\frac{8}{28}$.croc. $\frac{8}{28}$. zingib.

Ita enim conflabis 1.librã ex omnibus, quæ conſtet 7.Iuliis. Quod vt probes,dic.Si 1.lib.pip.valet 4.Iul. quid valebunt $\frac{4}{28}$? Item, Si 1.lib.garyoph.valet 3.Iul.quid valebunt $\frac{4}{28}$? &c.veluti hic factum eſſe vides.

1.	4. 3. 6. 10. 8.	quid	$\frac{4}{28}$ $\frac{4}{28}$ $\frac{4}{28}$ $\frac{8}{28}$ $\frac{8}{28}$	fiunt	$\frac{16}{28}$. pip. $\frac{12}{28}$. garyoph. $\frac{24}{28}$.cinnam. $2\frac{24}{28}$.crco. $2\frac{8}{28}$.zingib.

Inuenies enim omnia pretia conficere 7. Iulios,quemadmodum in quæſtione proponitur.

Poteſt etiam alia ratione inſtitui alligatio huius eiuſdem exempli, ſi pretia piperis, & croci alligentur; Deinde pretia garyoph.& zingib.ac poſtremo pretia cinnam. & zingib. vt in hoc exemplo videre licet.Dic ergo. Si ſumma differentiarum 13. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 3.1.1.3.& 5? quemadmodum hic vides. *Alia alligatio huius 3. quæſtionis.*

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	Piper.	4.	3.
	Garyoph.	3.	1.
7.	Cinnam.	6.	1.
	Crocus	10.	3.
	Zingib.	8.	4.1.
			13. Summa differentiarum.

13.	1.	3? 1? 1? 3? 5?	fiunt	$\frac{3}{13}$.pip. $\frac{1}{13}$.garyoph. $\frac{1}{13}$.cinnam. $\frac{3}{13}$.croc. $\frac{5}{13}$.zingib.

Sic enim habebis 1.lib.ex omnibus pro 7.Iuliis. Quod probabis, vt ſupra.

Vides igitur, variis modis fieri poſſe alligationem, ſi res alligandæ plures ſint,quam duæ; dummodo pretium medium ſemper minus ſit vno pretio alligando,& maius altero? vel æquale vni, & maius vel minus altero. Verum licet ex variis alligationibus ſemper habeas pondus rerum miſcendarum propoſitum pro pretio medio ſtatuto, non tamen eadem ſemper pondera ex rebus miſcendis accipies, vt ex propoſitis exemplis perſpicuũ eſt. *Quid obſeruandũ ſit in alligationibus pluriũ rerum.*

4. Vlna 1. panni rubri valet 4.aur.& vlna 1.panni viridis valet 6.aur. & vlna 1.panni nigri valet 10.aur. Vult quidam ex omnibus 80.vlnas pro 480.aureis,quantum ergo ex ſingulis pannis accipiet?In huiuſmodi quæſtionibus oportet prius inueſtigare pretium vnius vlnæ ex omnibus pannis mixtæ, quod ita fiet,in noſtro exemplo. Si 80.vlnæ mixtæ valent 480. aur.quid valebit 1.vlna?inueniesque 6.aur.quod eſt pretium 1. vlnæ medium inter pretium vilioris panni, & pretium carioris. Quod ſi reperiretur pretium non medium, impoſſibilis eſſet quæſtio.Vt ſi diceret aliquis. Vult quidam ex omnibus pannis 80.vlnas pro 300.aur. vel pro 900.aur.impoſſibilis eſſet quæſtio. Nam ſi 800.valent 300.aur.valebit 1. vlna $3\frac{3}{4}$. quod pretium minus eſt pretio vilioris panni. Quare *Quæſt.9. Quando quæſtio alligationis eſt impoſſibilis.*

 neque

neque ex viliori panno habere poteſt quiſpiam 80.vlnas pro 300. aureis, tantum abeſt, vt ex omnibus vlnas 80. rurſus accipiat. Rurſus, ſi 80.vlnæ valent 900. aur. valebit 1.vlna 11$\frac{1}{4}$. aur. quod pretium maius eſt pretio carioris panni. Quare plures vlnas carioris panni, quam 80. emet quiſpiam aureis 900.ac proinde multo plures, ſi ex omnibus aliquot vlnas accipere velit: Sed redeamus ad noſtrum exemplum.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.
6.	virid.	6.	4.
	nig.	10.	2.0.
			10.
			Summa differentiarum.

Inuento pretio medio vnius vlnæ, fiat alligatio vt in præcedentibus, quemadmodũ hic eſt factum. Primum enim alligauimus pretia 4. & 10. ad medium pretium 6. Deinde pretia 6.&10. Dic igitur. Si ſumma differentiarum 10.dat 80.vlnas, (tot enim vlnas accipere vult ex triplici panno) quid dabunt ſingulæ differentiæ 4.4.& 2? vt hic factum eſt.

10. 80. { 4? 4? 2? } fiunt { 32.rubri. 32.viridis. 16.nigri. }

Ita enim ex tribus illis pannis ſumentur 80.vlnæ pro 480.aur. Quod ita probabis. Si 1.vlna valet 6.aur. (hoc enim pretium medium inuentum eſt vnius vlnæ ex tribus pannis mixtæ.) quid valebunt 32.vlnæ panni rubri, & 32.viridis, & 16.nigri? veluti hic cernis.

1. 6. { 32? 32? 16? } fiunt { 192.rub. 192.virid. 96.nig. }

Reperieſq; omnia pretia conficere 480.aureos.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	rub.	4.	4.0.
6.	virid.	6.	2.
	nig.	10.	2.
			8.
			Summa differentiarum.

Quod ſi pretium panni viridis non alligaſſemus cum pretio panni nigri, ſed cum pretio panni rubri, fieret ſequens alligatio. Verum alios numeros inueniſſemus. Dixiſſemus enim. Si ſumma differentiarũ 8. dat 80. vlnas, quid dabunt ſingulæ differentiæ 4.2.& 2? vt hic vides.

8. 80. { 4? 2? 2? } fiunt { 40.rub. 20.virid. 20.nig. }

Examen fiet, vt prius, ſi dicas. Vlna 1.valet 6.aur.quid valebunt vlnæ 40.panni rubri, & 20.viridis, & 20.nigri? inuenies enim omnia pretia conficere 480.aureos.

Quæſt.5. 5. Sunt quatuor genera vini: primi amphora 1. valet 21. baioch. ſecundi 27. tertii 30. & quarti 40. Vult quidam miſcere ex his 300.amphoras, ea lege, & conditione, vt ſingulæ amphoræ valeant 33. baioch. Quantum ergo ex quolibet accipiet? Hic neceſſario tria priora pretia cum poſteriori alliganda ſunt ad medium pretium 33. baioch. cum illa tria ſint hoc minora, vt in dato exemplo vides. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 42.dat 300.amphoras quid dabunt ſingulæ differentiæ 7.7.7.& 21? vt patet in exemplo.

	Pretia.	Differentiæ.
	21.	7.
	27.	7.
33	30.	7.
	40.	12.6.3.
		42.
		Summa differentiarum.

42. 300. { 7? 7? 7? 21? } fiunt { 50.primi. 50.ſecundi. 50.tertii. 150 quarti. }

Sic enim conficies 300.amphoras, quarum ſingulæ conſtabunt 33.baioch. Quod vt probes, dic. Si ſumma differentiarum 42.dat 1.amphoram, quid dabunt ſingulæ differentiæ 7.7.7.& 21? vt hic vides.

42. 1. { 7? 7? 7? 21? } fiunt { $\frac{1}{6}$.primi. $\frac{1}{6}$.ſecundi. $\frac{1}{6}$.tertii. $\frac{1}{2}$.quarti. }

Atque ita habebis vnam amphoram ex quadruplici illo vino mixtam. Dic ergo rurſus. Si 1.amphora vini primi valet 21.baioch.quid valebit $\frac{1}{6}$.amphoræ? Item ſi 1.amphora ſecundi valet 27.quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1.amphora tertii valet 30.quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1.amphora quarti valet 40.quid valebit $\frac{1}{2}$? vt hic vides.

1. { 21. 27. 30. 40. } quid { $\frac{1}{6}$? $\frac{1}{6}$? $\frac{1}{6}$? $\frac{1}{2}$? } fiunt { 3$\frac{1}{2}$.primi. 4$\frac{1}{2}$.ſecundi. 5.tertii. 20.quarti. }

Quæ omnia pretia efficiunt 33. baioch.vt proponitur.

Breuius tamen ita quoq; inſtitui poteſt examen. Quoniam ſi 1.amphora valere debet 33.baioch. valebunt 300.amphoræ 9900.baioch. Dicemus ergo ſi 300.amphoræ valent 9900.baioch. quid valebunt 50.amphoræ primi vini, & quid 50.ſecundi, & 50.tertii, & 150.quarti? vt hic vides.

30. 9900.	50?	fiunt	1650.primi.	
	50?		1650.ſecundi.	
	50?		1650.tertii.	
	150?		4950.quarti.	

Inuenies enim omnia pretia conficere 9900.baiochos.

6. Quidam pro 400. aur. emere vult 400. lib. aromatum variorum, nimirum garyophillorum, piperis, cinnamomi, Zingiberis, nucum myriſticarum, & croci, quorum hæc ſunt pretia pro ſingulis libris, Iulii 6. 7. 9. 11. 12. 16. Quot ergo ſingulorũ libras accipiet, vt 400. lib. pro 400. aur. habeat? Hic vt in quæſtione 4. dictum eſt, inueſtigandum eſt prius pretium medium vnius libræ, ad quod alligatio fieri debet, hoc modo. Si 400. lib. valent 400. aur. quid valebit 1. lib? Inuenies enim 1. aur. hoc eſt, 10. Iul. Quoniam vero, vt diximus, variæ fieri poſſunt alligationes, alligabimus primum garioph. cum Zingib. & croco. Deinde piper cum nuc. myriſt. & croco. Poſtremo cinnam. cum nuc. myriſt. vt hic factũ eſſe vides. Deinde dicemus. Si ſumma differentiarum 32. dat 400. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 8. 2. 4. 4. & 7? vt hic vides. Quæſt. 6.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	garyoph.	6.	1. 6.
	piper.	7.	2. 6.
	cinnam.	9.	2.
10.	zingib.	11.	4.
	nuc.myr.	12.	3. 1.
	crocus.	16.	4. 3.
			32.
	Summa differentiarum.		

32. 400.	7?	fiunt	87½.garyoph.
	8?		100.pip.
	2?		25.cinnam.
	4?		50.zingib.
	4?		50.nuc.myr.
	7?		87½.croc.

Inuenies enim 400. lib. quæ valebunt 400. aur. & ſingulæ lib. conſtabunt 10. Iul. Quod probabis, vt in præcedenti quæſtione dictum eſt.

Poſſunt fieri in hac quæſtione plures aliæ alligationes diuerſæ, vt in quatuor exemplis hic appoſitis apparet.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	1. 2. 6.
	7.	1. 2. 6.
	9.	1. 2. 6.
10.	11.	4. 3. 1.
	12.	4. 3. 1.
	16.	4. 3. 1.
		51.
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ
	6.	1.
	7.	2.
	9.	6.
10.	11.	4.
	12.	3.
	16.	1.
		17.
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	6.
	7.	2.
	9.	1.
10.	11.	1.
	12.	3.
	16.	4.
		17.
	Summa differentiarum.	

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	2.
	7.	1.
	9.	6.
10.	11.	3.
	12.	4.
	16.	1.
		17.
	Summa differentiarum.	

In primo enim quodlibet priorum trium pretiorum alligatum eſt cum omnibus tribus poſterioribus. In ſecundo vero primum cum quarto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum ſexto. In tertio deinde primum cum ſexto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum quarto. In quarto deniq; primum cum quinto, & ſecundum cum quarto, & tertium cum ſexto. Atq; ita in ſimilibus quæſtionibus plures fieri poſſunt alligationes inter ſe diuerſæ.

7. Quidam vult ſtatuam argenteam 300. librarum. Offeruntur ei duo genera argenti: Primi lib. 1. valet 30. aur. ſecundi 20. quæ ita inter ſe miſcere vult, vt 1. lib. conſtet 24. aur. Quantum ergo ex quolibet argento ſumet, vt habeat 300. lib. quarum ſingulæ conſtent 24. aur? Ita ſtabit alligatio, vt hic vides. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 10. dat 300. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 4. & 6? vt hic vides. Quæſt. 7.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	30.	4.
24.		
	20.	6.
		10.
	Summa differentiarum.	

10. 300.	4?	fiunt	120.primi arg.
	6?		180.ſecundi arg.

Ita enim reperies 300. libras, quarum ſingulæ valent 24. aur. Quod probabis, vt in quæſtione 5. dictum eſt.

REGVLA FALSI SIMPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXII.

INTER alias Arithmeticæ regulas non poſtremum locum obtinet regula falſi, quæ ſic dicitur, non quod falſum nos doceat, ſed quod ex falſo poſito verum eruere oſtendat: quod quidem efficit, ponendo quemuis numerum, qui propoſitæ quæſtioni putatur ſatisfacturus, licet reipſa non ſatisfaciat. Hæc autem regula duplex eſt. Quædam enim vocatur ſimplicis poſitionis, in qua nimirum vnica fit poſitio vnius dumtaxat numeri, qui quæſtioni creditur ſatisfacturus: quædam vero duplicis poſitionis dicitur, in qua videlicet duplex fit poſitio duorum numerorum, quorum vterque quæſtioni ſatisfacturus putatur. *Regula falſi cur ſic dicta ſit.* *Regula falſi duplex.*

Diſcrimen inter duas regulas falſi Cæterum magnũeſt inter duas has regulas diſcrimen. Quidquid. n.per priorem ſoluitur,id etiam per poſteriorem explicari poteſt, non autem contra. Innumeræ enim propemodum quæſtiones per poſteriorem ſoluuntur,quæ nulla ratione per priorem poſſunt explicari. Nã ſub priori continentur illæ tantum quæſtiones, in *Nota.* quibus tales partes, aut numeri exprimuntur, qui eandẽ proportionem habent in paruis numeris,quam in magnis:quales ſunt, $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}$. &c. Item numeri dupli,tripli,quadrupli,&c.Itaque ſatis eſſet,ſi poſterior regula ſola proponeretur. Sed quia per prioremplurimæ quæſtiones multo breuius explicantur, quam per poſteriorem, vtramque paucis declarabimus, initioſumpto à priori,quæ facilior eſt.

Regula falſi ſimplicis poſitionis quomodo fiat. Propoſita igitur quæſtione quacunq; per regulam falſi ſimplicis poſitionis ſoluenda, ponatur quiuis numerus, qui quæſtioni creditur ſatisfacturus, iſque iuxta quæſtionis tenorem examinetur; & quidem ſi omnia conſonent,numerus poſitus erit is,qui quæritur: Si vero aliter ſe res habeat, falſa fuit poſitio numeri aſſumpti. Quare ex hoc falſo eliciendum erit verum beneficio regulæ trium,vt in exemplis declarabitur.

1. Tres emere conſtituunt domum quandam7200.aur. Secundus duplo plus vult dare,quam primus,& *Quæſt.1.* tertius triplo plus,quam ſecundus.Quantũ ergo quiſque expendet?Hac quæſtione nihil aliud quæritur, quam vt numerus 2700.diuidatur in tres partes ea lege,vt ſecunda ſit dupla primæ,& tertia tripla ſecundæ. Pone ergo primum dare quotcunque aureos volueris,nempe 6. Igitur iuxta tenorem quæſtionis ſecundus dabit 12. cum hic numerus ſit duplus primi; tertius vero dabit 36.quod hic numerus ſit triplus ſecundi. Omnes autem hi tres numeri efficiunt 54.aur,cum tamen efficere deberent2700. Dic ergo. Si 54. prouenerunt ex falſa poſitione 6. aur.primi.ex qua vera poſitione prouenient 2700?Inueniesſque primum dediſſe 300. aur.ac proinde ſecundum 600. tertium 1800.qui omnes tres numeri efficiunt 2700.

Poſſet quoque pecunia ſecundi, & tertij reperiri ex vtriuſque poſitione,ſi diceretur. Si 54.prouenerunt ex falſa poſitione 12.aur.ſecundi,& ex falſa poſitione36.aur.tertij,ex quo prouenient 2700. Inuenires enim pecuniam ſecundi eſſe 600.aur.& tertij 1800.Sed ſatius eſt inueſtigare per regulam trium pecuniam vnius duntaxat.Ex hac enim aliorum pecuniæ facili negotio elicientur,iuxta tenorem quæſtionis.

Eoſdem proſus numeros repeririſſes, ſi pro primo alium numerum poſuiſſes, quam 6.ac proinde pro ſecundo alium,quam 12.& pro tertio alium,quam 36.

2. Interrogatus quidam, quantum pecuniæ in arca haberet, reſpondit ſe neſcire, hoc tamen ſe certo à *Quæſt.2.* procuratore cognouiſſe, $\frac{1}{3}$.&$\frac{1}{4}$.&$\frac{1}{5}$.ſuæ pecuniæ conſtituere 4700.aur. Quantum ergo pecuniæ is habuit? Hic etiam nihil aliud quæritur,quam numerus,cuius $\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$.&$\frac{1}{5}$.ſimul efficiant 4700. Pone ergo illum habere 60.aur. (vt autem fractiones vitentur, quoad fieri poteſt, ſumendus eſt ſemper numerus, qui contineat fractiones in quæſtione expreſſas, vt cap. 10.docuimus, qualis hic eſt 60.)cuius $\frac{1}{3}$.eſt 20.&$\frac{1}{4}$.15.&$\frac{1}{5}$.12. quæ omnes partes conſtituunt 47. Debebant autem conficere 4700. Dic ergo. Si 47.prouenerunt ex 60.quem numerum falſo poſuimus, ex quo prouenient 4700.inueniemuſque 6000.atque tot aureos in arca habuit. Nam $\frac{1}{3}$. continet 2000.&$\frac{1}{4}$.1500.&$\frac{1}{5}$.1200. quæ omnes partes efficiunt 4700.

3. Interrogatus quidam ludimagiſter, quot haberet diſcipulos,reſpondit: Si adhuc ſemel tot haberem, *Quæſt.3.* quot habeo, & accederet $\frac{1}{2}$.eorum,& $\frac{1}{3}$.&$\frac{1}{4}$.& præterea 1.haberem 112. Quot ergo diſcipulos habuit? Hæc quæſtio ita propoſita ſolui non poteſt per hanc regulam, propterea quod vnitas, cuius poſtremo loco fit mentio, non poteſt habere eandem proportionem cum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$.& duplo parui numeri,quam cum eiſdem partibus,& duplo magni numeri.Si tamen auferatur 1.ex numero 112.qui in quæſtione debet produci, ſoluetur quæſtio propoſita.Tunc enim nihil aliud quæritur,quam numerus,qui bis ſumptus vna cum $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$.&$\frac{1}{4}$.facit 111. Nam ſi tandem addatur 1.fient 112.Pone ergo illum habuiſſe 12.diſcipulos.Hic n. numerus continet fractiones datas. Si ergo totidem diſcipuli accedant,habebit 24.nempe duplo plures,quã prius.Ad quos ſi rurſus accedat $\frac{1}{2}$ nimirũ 6. &$\frac{1}{3}$.nempe 4.& $\frac{1}{4}$. vt pote 3.habebit 37. Debebant autem eſſe 111? vt additio 1. haberet 112. Dic ergo. Si 37.prouenerunt ex 12. ex quo prouenient.111?Inueniesſque eum habuiſſe 36.diſcipulos. Nam ſi accedant totidem habebit72.quibus ſi addantur $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.&$\frac{1}{4}$. videlicet 18 12.& 9.fient 111. addito denique 1.fient 112.

4. Quidam emit equum,hortum,ac domum 5000.aur.ea lege vt hortus quadruplo pluris conſtet, quam *Quæſt.4.* equus, at domus quincuplo pluris quam hortus. Quanti ergo emit equum, & quanti hortum, & quanti domum? Hic quæritur,vt numerus datus 5000. diſtribuatur in tres partes,ita vt ſecunda ſit primæ quadrupla,& tertia ſecundæ quincupla. Eſtque quæſtio hæc ſimilis primæ. Pone ergo equum valere 30.aur. quo poſito,valebit hortus 120. aur.& domus 600.qui omnes numeri conficiunt 750. Deberent autem conficere 5000. Dic ergo.Si 750.prouenerunt ex 30.ex quo prouenient 5000?Inueniesſque 200, atque tot aureis fuit emptus equus, ac proinde hortus empus fuit800.aur.& domus 4000.qui omnes numeri conſtituunt 5000.aur.

5. Quidam proficiſcens Venetiis Hieroſolymam expendit in itinere $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. ſuæ pecuniæ; domum autem *Quæſt.5.* reuerſus deprehendit ſibi ſupereſſe 36.aureos. Quantum ergo pecuniæ is ſecum tulit?Hic quæritur numerus à quo ſi auferãtur $\frac{2}{3}$.& $\frac{1}{5}$.reliquus ſit numerus 36.Pone illum habuiſſe 300.aur.ex quo ſi auferas $\frac{2}{3}$.nempe 200.&$\frac{1}{5}$. nimirnm 60. ſuperſunt 40. Debebant autem remanere tantum 36. Dic ergo. Si 40.prouenerunt ex 3 0 0. ex quo prouenient 36. Inueniesſque 270. atque tot aureos habuit. Nam ablatis $\frac{2}{3}$.nempe 180.$\frac{1}{5}$.nimirum 54.ſuperſunt 36.

Nota. Quod ſi quando contingat, partes in q̃ſtione expreſſas vnitatẽ ſuperare,ac proinde nõ poſſe ex poſito numero ſubtrahi,quæſtio impoſſibilis erit. Vt ſi diceret quis.Da mihi numerum,vt,ſi ex eo demas $\frac{2}{3}$.&$\frac{3}{5}$. relinquantur 36.quæſtio eſſet impoſſibilis. Nam $\frac{2}{3}$.& $\frac{3}{5}$. vnitatem ſuperant, ac proinde auferri nequeunt ex poſito numero 300.quia $\frac{2}{3}$.ſunt 180. & $\frac{3}{5}$. ſunt etiam 180.quæ partes ſimul conſtituunt 360. qui numerus ex 300.auferri non poteſt.

Quæſt 6. 6. Quæratur numerus, cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$.&$\frac{1}{6}$.efficiant 522. Pone numerum eum eſſe 60. cuius $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$.&$\frac{1}{6}$. nempe30.20.15.12.10.efficiunt 87.Nos autem volumus 522. Dic ergo.Si 87.prouenerunt ex 60. ex quo prouenient 522? Inueniesſque 360.Huius enim numeri $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$.&$\frac{1}{6}$.nimirum 180.120.90.72.&60. efficiunt 522.

Quæſt 7. 7. Quidam interroganti ſe, quantum pecuniæ haberet,reſpondit,ſe tot aureos habere, vt ſi ad eos addatur $\frac{1}{2}$.eorum,& $\frac{1}{3}$,&$\frac{1}{4}$.& præterea 100.aur. conſtituant 300.aur. Quantam ergo pecuniam habuit? Vt hæc quæ-

quæſtiõ per hanc regulã ſoluatur, detrahendi ſunt 100, aur. ex 300. vt in q̃ſtione tertia diximus, & inquirendus numerus, vt, ſi addatur eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. fiant 200. Tunc enim additis 100 fient 300. vt in quæſtione proponitur. Pone ergo eũ numerũ eſſe 24. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 12 & $\frac{1}{3}$. 8 $\frac{1}{4}$. 6. quæ omnes partes additæ ad 24. faciunt 50. Nos autẽ volumus, vt efficiant 200. Dic ergo Si 50. prouenerunt ex 24. ex quo prouenient 200? Inueniesq; 96. ac tanta fuit ſumma aureorum. Nam $\frac{1}{2}$. continet 48. & $\frac{1}{3}$. 32. & $\frac{1}{4}$. 24. qui omnes numeri faciunt 104. additi autem ad 96. efficiunt 200. ad quem numerum ſi tandem adijciantur 100. fient 300.

8. Quidam volens molere 500. modios tritici adit molitorem habentem 5. molas, quarum prima ſingulis horis molit 7. modios, ſecunda 5. tertia 4. quarta 3. quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum moletur, ſi omnibus molis triticum imponatur, & quantũ tritici ſingulis molis imponendum? Pone in 4. horis. Quo poſito, prima mola conficiet 28. modios, ſecunda 20. tertia 16. quarta 12. & quinta 4. qui omnes modii faciunt 80. Debent autem eſſe 500. Dic ergo. Si 80. modii prouenerunt ex 4. horis 500. modii ex quot horis prouenient? Inueniesq; 25. horas. In tot enim horis prima mola molet 175. modios, ſecunda 125. tertia 100. quarta 75. & quinta 25. qui omnes ſunt 500. modii; atq; tot modii cuilibet molæ ſubiiciendi ſunt, quot ipſa modios molit in 25. horis. *Quæſt. 8.*

9 Quidam proficiſcens ad nundinas lucratus eſt ex pecunia, quã ſecum attulerat, tantum, vt lucrum vna cum pecunia allata triplum eſſet pecuniæ allatæ. Ex hac deinde pecunia in aliis nundinis tantam pecuniam lucratus eſt, vt lucrũ vna cum pecunia ad has nundinas allata quincuplũ eſſet huius pecuniæ: Poſtremo ex hac pecunia in aliis nundinis tantũ lucratus eſt, vt lucrũ vna cum pecunia, quã proxime habebat, quadruplum eſſet huius pecuniæ; inuenitq; ſe habere 40000. aur. Quantũ ergo pecuniæ ad primas nundinas attulit? In hac q̃ſtione inquiritur numerus, qui multiplicatus per 3. & productus numerus per 5. & hic numerus productus per 4. faciat 40000. Pone eum numerũ eſſe 10. quem ſi multiplices per 3. facies 30. pro lucro vna cum pecunia in primis nũdinis. Si autẽ multiplices 30. per 5. procreabis 150. pro lucro vna cum pecunia in ſecundis nundinis. Si denique multiplices 150. per 4. faciens 600. pro lucro vna cum pecunia in tertiis nundinis. Nos vero diximus, in tertiis nundinis eum habuiſſe 40000. aur. Dic ergo. Si 600. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 40000? Inueniesq; $666\frac{2}{3}$. atq; tot aureos ſecũ ille attulit ad primas nundinas. Nã ſi multiplicemus $666\frac{2}{3}$. per 3. efficiemus 2000. pro lucro & pecunia in primis nũdinis. Si deinde multiplicemus 2000. per 5. gignemus 10000. pro lucro ac pecunia in ſecundis nundinis. Si deniq; multiplicemus 10000. per 4. producemus 40000. pro lucro ac pecunia in tertiis nundinis. *Quæſt. 9.*

10. Inueſtigetur numerus, vt eo muliplicato per 4. & producto per 3. & hoc producto per 6. atque huic producto additis 10. producantur 800. Hæc quæſtio per hanc regulam ſolui nequit, niſi prius detrahantur 10. ex 800. propter rationem in quæſtione 3. dictam. Subtrahe ergo 10. ex 800. relinquenturque 790 atque hic numerus producendus eſt ex multiplicationibus in quæſtione expreſſis. Nam ſi ei addantur 10. fiet numerus 800. Pone numerum quæſitum eſſe 10. quẽ ſi multiplices per 4. facies 40. qui numerus multiplicatus per 3. facit 120. hic denique numerus muliplicatus per 6. producit 720. Deberent autem produci 790. Quare dic. Si 720. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 790? Inueniesque $10\frac{35}{36}$. atque hic eſt numerus, qui quæritur. Si enim multiplices $10\frac{35}{36}$. per 4. facies $43\frac{8}{9}$. quem numerum ſi rurſus multiplices per 3. gignes numerum $131\frac{2}{3}$. quem ſi deniq; per 6. multiplices, procreabis 790. Additis autem 10. fient 800. *Quæſt. 10.*

11. Senex quidam interroganti de ſua ætate, reſpondit, ſe tot habere annos, vt ſi eis adderetur $\frac{1}{2}$. ipſorum, & ex ſumma detraheretur $\frac{1}{4}$. ipſius, haberet 99. annos. Quot ergo annos habuit? Hic inueniendus eſt numerus, ad quem ſi adiiciatur $\frac{1}{2}$. ipſius, & ex ſumma detrahatur $\frac{1}{4}$. eiuſdem ſummæ reliquus ſit numerus 99. Pone eum habuiſſe 80. annos. Si igitur adiiciatur eorum $\frac{1}{2}$. nempe 40. anni fient 120. à quibus ſi detrahatur $\frac{1}{4}$. nimirum 30. ſupererunt 90. Dicuntur autem ſupereſſe 99. Dic ergo. Si 90. prouenerunt ex 80. ex quo prouenient 99. Inueniesq; 88. atque tot annos ſenex ille habuit. Si namque eis adiicias $\frac{1}{2}$. eorum nimirum 44. facies 132. à quibus ſi auferas $\frac{1}{4}$. nempe 33. ſupererunt 99. *Quæſt. 11.*

12. Apparet faſtigium cuiuſdem turris 24. palmorum: dicit autem quidam, $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. eiuſdem turris à circumiacentib. ædificiis occultari. Quanta ergo eſt totius turris altitudo? Hic quærendus eſt numerus, ita vt, ſi ab eo auferatur $\frac{1}{3}$. & præterea $\frac{2}{5}$. relinquãtur 24. Pone eum numerum eſſe 30. à quo ſi auferas $\frac{1}{3}$. videlicet 10. & $\frac{2}{5}$. nimirum 12. remanent 8. Nos autem volumus, vt relinquantur 24. Dic ergo. Si 8. proueniuut ex 30. ex quo prouenient 90. Inueniesq; 24? ac tanta eſt altitudo turris. Nam ſi auferas $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. nempe 30. & 36. relinquentur 24. *Quæſt. 12.*

13. Eſt haſta, cuius $\frac{1}{3}$. alba eſt, & $\frac{1}{5}$. nigra & $\frac{2}{9}$. cærulei coloris, ſuperſunt autẽ 12. palmi rubri. Quanta eſt ergo lonlongitudo illius haſtæ? Hic etiam inquirendus eſt numerus, ita vt, ſi ex eo dematur $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. reliquus ſit numerus 12. Pone eum numerum eſſe 45. à quo ſi auferas $\frac{1}{3}$. nempe 15. & $\frac{1}{5}$. nimirum 9. & $\frac{2}{9}$. hoc eſt, 10. ſuperſunt 11. Debent autem remanere 12. Dic ergo. Si 11. prouenerunt ex 45. ex quo prouenient 12? Inueniesque. $49\frac{1}{11}$. ac tot palmorum eſt haſtæ illius longitudo. Nam eius $\frac{1}{3}$ continet palmos $16\frac{4}{11}$ at $\frac{1}{5}$. continet palmos $9\frac{9}{11}$. Item $\frac{2}{9}$. continent palmos $10\frac{10}{11}$. qui omnes numeri ablati ex longitudine haſtæ palmorum $49\frac{1}{11}$. relinquunt 12. palmos. *Quæſt. 13.*

14. Quidam pro 30. vlnis panni albi, & 40. vlnis panni nigri expendit 660. aureos, conſtitueruntque ſingulæ vlnæ panni nigri duplo pluris, quam ſingulæ vlnæ panni albi. Quanti ergo conſtitit vna vlna panni albi, & quanti vna vlna nigri? Pone vnam vlnam panni albi conſtitiſſe 4. aur. Et quoniam pretium vnius vlnæ panni nigri eſt duplo maius, neceſſe eſt, vnam vlnam panni nigri conſtitiſſe 8. aur. Ex quo fit 30. vlnas panni albi conſtare 120. aur. & 40. vlnas panni nigri valere 320. aur. qui omnes aurei efficiunt 440. Nos autem diximus, illum expendiſſe 660. aur. Dic ergo. Si 440. prouenerunt ex 4. ex quo prouenient 660? Inueniesque 6. aur. pro pretio vnius vlnæ panni albi, ac proinde 12. aur. pro pretio vnius vlnæ panni nigri. Ita enim 30. vlnæ panni albi conſtabunt 180. aur. & 40. vlnæ panni nigri valebunt 480. qui omnes aur. conficiunt 660. aur. *Quæſt. 14.*

RE-

REGVLA FALSI DVPLICIS POSITIONIS.

CAPVT XXIII.

Regula falſi duplicis poſitionis quomodo fiat.

PROPOSITA quæſtione quacunque per regulam falſi duplicis poſitionis explicanda, ponatur quiuis numerus ſiue paruus, ſiue magnus, qui iuxta tenorem quæſtionis examinetur. Nam ſi is quæſito reſpondeat, ſoluta erit quæſtio; ſin minus; notandus erit exceſſus, vel defectus, quo à veritate aberratum eſt vna cum litera P. vel M. quarum illa plus, hæc verò minus ſignificat, prout videlicet error veritatem exceſſerit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rurſus aliquis alius numerus ſiue maior priore, ſiue minor, qui eodem modo examinetur, &c. Nam ex duplici hac poſitione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo.

Quando vtraq; poſitio veritatem excedit, fit ſubtractio.

Si in vtraque poſitione à veritate aberratũ eſt per exceſſum, vel defectum ſubtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus pro diuiſore ſeruetur. Deinde numerus primo poſitus per ſecundũ errorẽ, & numerus ſecundo poſitus per primum errorem multiplicetur, minorque numerus productus ex maiore detrahatur. Nam ſi numerus hic reſiduus per diuiſorem iam inuentum nimirum per differentiam errorum, diuidatur, dabit quotiens numerum quæſitum, qui quæſtioni propoſitæ ſatisfaciet.

Quando vna poſitio veritatem excedit & altera deficit, fit additio.

Si vero in alterutra poſitione à veritate aberratum eſt per exceſſum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam ſummam, vt habeatur diuiſor. Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores, vt dictum eſt, producuntur, in vnam ſummam ſunt colligendi, vt habeatur numerus diuidendus, &c. Id quod ex quæſtionibus fiet perſpicuum.

Quæſt. 1.

1. Quæratur numerus, à cuius dimidio ſubtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquatur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirũ habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæſtione expreſſam, & eius $\frac{1}{2}$. alias partes expreſſas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. contineat vt fractiones quoad fieri poteſt, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, ſi numerus ſumatur habens poſteriores fractiones, & is poſtea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad ſiniſtram in ſuperiori parte crucis, & error in parte inferiori ad ſiniſtrã quoque, litera denique P. vel M. prout veritatem exceſſerit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem ſiniſtrã: Secundus vero numerus acceptus cum errore, & litera P. vel M. eodẽ ordine collocari ſolet ad dextrã eiuſdem crucis, vt in noſtro exẽplo factum eſſe vides. Hic numerus 24. poſitus ita iuxta pronunciationem quæſtionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. eſt 12. à quo numero detrahenda eſt $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Eſt autem $\frac{1}{3}$. numeri 12. numerus 4. & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquunt 5. Debebantt autem relinqui 300. Aberratum eſt ergo à veritate per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus eſt cum litera M.

24 96
M X M
295. 280.
15.
diuiſor.

Ponatur ſecundo numerus 96. qui ita iuxta quæſtionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. eſt 48. at $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48. ſunt 16. & 12. qui ex 48. ablati relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rurſus à veritate 280. vnitatibus, ac proinde error hic notandus eſt etiam cum litera M.

Iam vero quia in vtraq; poſitione defecimus à vero, ſubtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuiſor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo poſitus per 280. ſecundum errorem, & numerus 96. ſecundo poſitus per 295. primum errorem, minorque numerus productus 6720. ex maiore 28320. ſubtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuiſus per diuiſorẽ inuentum 15. dabit quotientem 1440. qui eſt numerus quæſitus. Eius enim $\frac{1}{2}$. eſt 720. & huius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt 240. & 180. qui numeri ex 720. detracti relinquunt 300. vt in quæſtione proponebatur.

Sed ſoluamus eandem quæſtionem per alios duos numeros, qui veritatem excedãt, deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat, & alter ab eadem deficiat. Ponatur ergo primũ numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 2400. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt. 800. &. 600. qui numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant autem relinqui 300. exceſſimus ergo veritatem 700. vnitatibus atque adeo error hic ſcribendus eſt cum littera P. ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 1200. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200. ablatis remanent 500. Debebant autem relinqui 300. Exceſſimus ergo rurſus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, ſubtracto minore errore de maiore, relinquetur diuiſor 500. facta autem multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucem, vt dictum eſt, ſubtractoque minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numerus diuidendus 720000. qui per 500. diuiſus dabit Quotientem 1440. vt prius.

4800. 2400
P X P
700. 200.
500.
diuiſor.

Rurſus ponamus primo numerum 2400, quo examinato iuxta quæſtionem propoſitam, inueniemus exceſſum 200. qui error ſcribendus eſt cum litera P. Deinde ponamus numerum 96. quo eadẽ ratione examinato, deprehendemus defectũ 280. qui ſcribendus eſt cum litera M. Quoniam vero in vna poſitione exceſſimus veritatem, & in altera defecimus à vero, facienda erit additio errorum vt componatur diuiſor 480. Item duo numeri producti ex multiplicatione numerorum poſitorum per errores in crucem, nempe 672000. & 19200. in vnam ſummam colligendi, vt fiat diuidendus numerus 691200. Diuiſo enim hoc numero 691200. per 480. fiet Quotiens 1440. veluti prius.

2400. 96.
P X M
200. 280.
480.
diuſor.

2. Quæſt.

2. Alexander Magnus in familiari colloquio, quod cum Caliſthene Philoſopho quodam die habuit in ætatum mentionem forte fortuna, vt accidere ſolet, incidit, hoc modo eum alloquens. Ego Epheſtionem duobus ſupero annis, Clytus vero noſtram amborum ætatem complectitur, & inſuper quatuor annos. Ex quo, fit, vt omnes tres compleamus annos 96. quot nimirum pater tuus vixiſſe dicitur, Quot ergo annos habuit tunc Alexander, Epheſtion, & Clytus? Vides hic numerum 96. diſtribuendum eſſe in tres partes, ita vt prima ſuperet ſecundã binario, tertia vero duas primas ſimul ſumptas quaternario excedat. Vel inueniẽdos eſſe 3. numeros, quorũ primus ſecundũ ſuperet binario, & tertius primos duos ſimul ſumptos quaternario excedat, omnes vero tres conſtituant 96. Pone ergo Alexandrum habuiſſe annos 20. ac proinde Epheſtionem 18. & Clytum

tum 42. Ita enim ætas Alexandri ſuperat Epheſtionis ætatem annis 2. Clytus autem amborum ætatem annorum 38. comprehendit, & inſuper 4. annos, vt in quæſtione proponitur. Quoniam vero hi numeri 20. 18. 42. conſtituunt tantum 80. qui 96. deberent conficere, fit vt à vero defecerimus 16. vnitatibus. pone ergo rurſus Alexandri annos fuiſſe 30. ac propterea Epheſtionem habuiſſe annos 28. & Clytum 62. qui omnes efficiunt 120. Deberent autem efficere tantum 96. Exceſſimus ergo veritatem 24. vnitatibus. Facta iam additione errorum inter ſe, quod vnus defecerit à veritate, & alter eandem excesserit, fient 40. pro diuiſore. Facta item multiplicatione 20. per 24. & 30. per 16. productiſque 480. 480. inter ſe additis, fient 960. quibus diuiſis per 40. fiet Quotiens 42. atque tot annos tunc Alexander Magnus habuit, ac proinde, iuxta quæſtionis tenorem, Epheſtio 22. Clytus 50. q omnes conſtituunt 96. annos.

20.		30.
18.		28.
42.		62.
——M	X	P——
80.		120.
16.		24.
	40.	
	Diuiſor.	

3. Tres habent ſummam quandam pecuniæ, nempe 44. aureos. Secundus habet duplo plus quam primus, & præterea 4. aureos. Tertius autem tantum habet quantum primus & ſecundus, & præterea 6. aur. Quantum ergo quiſque habet? Hic vides numerum 44. diſtribuendum eſſe in tres partes, vt ſecunda dupla ſit primæ, contineatque præterea 4. tertia vero æqualis ſit primæ, ac ſecundæ, contineatque præterea 6. Vel quærendos eſſe tres numeros, quorum ſecundus contineat primum bis, & inſuper 4. tertius vero contineat primum, & ſecundum ſemel, & præterea 6. ipſi vero tres numeri conficiant 44. Pone ergo primum habere 10. quo poſito, habebit ſecuudus 24. nempe duplo plus quam primus, & inſuper 4. tertius autem habebit 40. tantum videlicet quantum primus & ſecundus, ac præterea 6. qui tres numeri conficiunt 74. Deberent autem conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo veritatem 30. vnitatibus. Pone deinde primum habere 6. Habebit ergo ſecundus 16. & tertius 28. qui tres numeri conficiunt 50. Deberent autē conficere ſolum 44. Exceſſimus ergo rurſum veritatem 6. vnitatibus, facta iam ſubtractione minoris erroris de maiore, quia vterque error exceſſit veritatem, reliquus erit diuiſor 24. Facta item multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. ſubtractoque illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidendus numerus 120. quo diuiſo per 24. fiet Quotiens 5. Tantum ergo habet primus: ſecundus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnam ſummam collecti efficiunt 44. Quæſt. 3.

10.		6.
24.		16.
40.		28.
——P	X	P——
74.		50.
30.		6.
	24.	
	Diuiſor.	

Si multiplicarentur numeri, quos poſuimus ſecundum ac tertium habere per eoſdem errores, &c. inuenirentur numeri, quos ſecundus ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanent 336. quo numero diuiſo per 24. diuiſorem inuentum, fiet Quotiens 14. pro numero ſecundi. Item ex 40. per 6 fiunt 240. & ex 28. per 30. fiunt. 840. ſubtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiſo per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertii. Sed ſatius eſt, inuento numero primi, inueſtigare reliquos, iuxta pronunciationem quæſtionis, nempe eo modo, quo vterque numerus falſo poſitus eſt examinatus. Aliquando tamen commodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæſitus eſt; vt in quæſtione, 6. manifeſtum erit.

4. Quærantur tres numeri, qui faciant 60. ſecundus autem contineat primum bis, & inſuper 4. tertius vero contineat primum ac ſecundum, & præterea 6. Hæc quæſtio ſimilis eſt antecedenti. Pone primum numerum eſſe 6. ac proinde ſecundum 16. & tertiū 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent autem facere 60. Factus eſt ergo error per defectum 10. Pone rurſus primum numerum eſſe 8. ac proinde ſecundum 20. & tertium 34. qui tres numeri faciunt 62. Deberent a. facere 60. Exceſſimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inueniesque primum numerum eſſe $7\frac{2}{3}$. ac proinde ſecundum $19\frac{1}{3}$. & tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60. Quæſt. 4.

6.		8.
16.		20.
28.		34.
——M	X	P——
50.		62.
10.		2.
	12.	
	diuiſor.	

5. Diuidatur numerus 30. in duas partes, quarum prior cum 60 numerum faciat triplum numeri ex poſteriori parte, & 20. compoſiti. Pone priorem partem eſſe 20. ac proinde poſteriorem 10. Prior cum 60. facit 80. & poſterior cum 20. facit 30. Deberet autem numerus 80. triplus eſſe numeri 30. iuxta pronunciationem exempli. Cum ergo numerus 90. triplus ſit numeri 30. defecimus 10. vnitatibus à vero. Pone rurſus priorem partem eſſe 24. ac proprea poſteriorem 6. Prior cum 60 facit 84. & poſterior cum 20. facit 26. Deberet autem numerus 84. iuxta tenorem quæſtionis triplus eſſe numeri 26. Cum ergo numerus 78. triplus ſit numeri 26. exceſſimus veritatem 6. vnitatib. Operare, vt regula præcipit, inueniesque priorem partem eſſe $22\frac{1}{2}$. atque adeo poſteriorem $7\frac{1}{2}$. Prior enim cum 60. facit $82\frac{1}{2}$. & poſterior cum 20. facit $27\frac{1}{2}$. cuius numeri ille triplus eſt. Quæſt. 5.

20.		24.
10.		6.
——M	X	P——
10.		6.
	16.	
	Diuiſor.	

Alio modo inſtitui poteſt ſolutio huius quæſtionis. Poſtquam enim in prima poſitione deprehendimus priorem partem 20. cum 60. facere 80. & poſteriorem partem 10. cum 20. facere 30. cuius numeri ille deberet eſſe triplus, videndum eſt, cuius numeri triplus ſit numerus 80. Eſt autem triplus numeri $26\frac{2}{3}$. quem numerus 30, ſuperat numero $3\frac{1}{3}$. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $3\frac{1}{3}$. Rurſus poſtquam in ſecunda poſitione inuentum eſt priorem partem 24. cum 60 facere 84. & poſteriorem partem 6. cum 20. facere 26. cuius numeri ille deberet eſſe triplus; videndum eſt, cuius numeri triplus ſit numerus 84. Eſt autem triplus numeri 28. à quo numerus 26. deficit 2. vnitatibus. Defecimus ergo à veritate binario. Operare iam ſecundum regulæ præcepta, inueniesque priorem partem eſſe $22\frac{1}{2}$. & poſteriorem $7\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio commodior videtur, cum facilius per eam vitentur fractiones.

20.		24.
10.		6.
P	X	M——
$3\frac{1}{3}$.		2.
	$5\frac{1}{3}$.	
	Diuiſor.	

Quæſt. 6. 6. Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73. faciat duplum reliquorum duorum; ſecundus vero cum 73. faciat triplum duorum reliquorum; tertius denique cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum. Pone primum numerum eſſe 1. vel alium quemuis numerum imparem, vt additus ad 73. faciat numerum parem, qui poſſit habere dimidium, quandoquidem primus cum 73. debet facere numerum duplum reliquorum duorum. Quoniam igitur 1. cum 73. facit 74. qui numerus duplus debet eſſe iuxta pronunciationem exempli reliquorum duorum, neceſſe eſt, reliquos duos ſimul eſſe 37. Et quia ſecundus cum 73. debet facere numerum triplum primi, (qui eſt 1.) & tertii, diuidendus erit per antecedentem quæſtionem, numerus 37. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum numeri, qui ex poſteriore parte, & 1. componitur, atque ita, antequam propoſita quæſtio ſoluatur, neceſſe eſt, aliam prius ſoluere, quæ in ipſa operatione occurrit.

1.				3.
$10\frac{1}{4}$.				$12\frac{1}{2}$.
$26\frac{3}{4}$.	P	X	P	$25\frac{1}{2}$.
$54\frac{3}{4}$.				$36\frac{1}{2}$.
		$18\frac{1}{2}$ diuiſor.		

Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 35. Facit autem prior cum 73. numerum 75. poſterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatib. cum tot vnitatibus minor ſit noſter numerus 75. quam 108. Pone rurſus, priorem partem eſſe 5. atque adeo poſteriorem 32. Prior autem cum 73. facit 78. & poſterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non eſt numerus 78. ſed numerus 99. Defecimus ergo rurſus 21. vnitatibus. Operare iam ſecundum præcepta regulæ falſi, inueniesque priorem partem eſſe $10\frac{1}{4}$. ac proinde poſteriorem $26\frac{3}{4}$.

2.				5.
35.				32.
	M	X	M	
33.				21.
		12. diuiſor.		

Itaque ſi primus numerus propoſitæ quæſtionis eſt 1. erit ſecundus $10\frac{1}{4}$. tertius $26\frac{3}{4}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum duorum reliquorum. Si ergo tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſatisfactum erit quæſtioni. Facit autē tertius cum 73. numerum $99\frac{3}{4}$. qui quadruplus non eſt numeri $11\frac{1}{4}$. qui ex primo, & ſecundo conflatur, ſed numerus 45. quadruplus eſt numeri $11\frac{1}{4}$. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $54\frac{3}{4}$.

Pone iam primum numerum eſſe 3. qui cum 73. facit 76. qui numerus duplus eſſe debet reliquorum duorum. Duo ergo reliqui efficient 38. Et quia ſecundus cum 73. debet facere triplum primi, (qui eſt 3.) & tertii diuidendus erit per antecedentem quæſtionem numerus 38. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum eius numeri, qui ex poſteriore parte, & 3. componitur. Pone ergo priorem partem eſſe 2. atque adeo poſteriorem 36. Facit autem prior cum 73. numerum 75. at poſterior cum 3. facit 39. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 117. Defecimus ergo à veritate numero 42. Pone rurſus priorem partem eſſe 23. ac proinde poſteriorem 15. Prior autem cum 73. facit 96. at poſterior cum 3. facit 18. cuius numeri triplus non eſt numerus 96. Sed numerus 54. Exceſſimus ergo verum numero 42. Operare ſecundum regulam falſi, inueniesque priorem partem eſſe $12\frac{1}{2}$. ac proinde poſteriorem $25\frac{1}{2}$.

2.				23.
36.				15.
	M	X	P	
42.				42.
		84. Diuiſor.		

Itaq; ſi numerus primus quæſtionis propoſitæ eſt 3. ſecundus erit $12\frac{1}{2}$. & tertius $25\frac{1}{2}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum reliquorum duorum. Si igitur tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſoluta erit quæſtio. Facit autem tertius cum 73. numerum $98\frac{1}{2}$. qui quadruplus non eſt numeri $15\frac{1}{2}$ ſed numerus 62. Exceſſimus ergo verum numero hoc $36\frac{1}{2}$.

Iam vero ſi multiplices primos numeros per errores in crucem, item ſecundos, & tertios, (commodius .n. inuenientur ſecundus & tertius hoc modo, quam ſi ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quod opus eſſet quæſtione præcedenti hic vti) & facta ſubtractione, reſiduos numeros diuidas per diuiſorem inuentum $18\frac{1}{2}$. nempe per differentiam errorum, quod in vtraque poſitione factus eſt ſemper exceſſus, inuenies primum numerum eſſe 7. ſecundum 17. & tertium 23. Nam primus cum 73. facit 80. qui numerus duplus eſt reliquorum duorum: at ſecundus cum 73. facit 90. qui numerus triplus eſt duorum reliquorum. Tertius denique cum 73. facit 96. qui numerus reliquorum duorum quadruplus eſt.

Quæſt. 7. 7. Quæratur numerus, quo multiplicato per 3. & producto additis 10. Et ſumma hac multiplicata per 4. productoque additis 20. Sūma vero hac multiplicata per 5. & producto additis 30. Summa denique hac muliplicata per 6. productoque additis 40. numerus producatur 6700 Finge numerum eum eſſe 2. qui multiplicatur per 3. facit 6. additis autem 10. fiunt 16. Hac autem ſumma multiplicata per 4. fiunt 64. & additis 20. fiunt 84. Rurſus hac ſumma multiplicata per 5. fiunt 420. additiſque 30 fiunt 450. Hac denique ſumma multipicata per 6. fiunt 2700. additiſque 40. fiunt 2740. Debebat autem vltima hæc ſumma eſſe 6700. Defecimus ergo à veritate hoc numero 3960. Finge denide eundem numerum eſſe 3. qui multiplicatus per 3. facit 9. additiſque 10. fiunt 19. Hæc autem ſumma multiplicata per 4. facit 76. additiſque 20. fiunt 96. Hæc rurſum ſumma per 5. muliplicata facit 480. additiſque 30. fiūt 510. Deniq; hæc ſumma multiplicata per 6. facit 3060. additiſque 40. fiunt 3100. Debebant autem effici 6700. Defecimus ergo iterum à veritate numero hoc 3600. Operare ſecundum regulam, inueniesque numerum quæſitum eſſe 13. Hic .n. numerus multiplicatus per 3. facit 39. additiſque 10. fiūt 49. Hęc ſumma multiplicata per 4. facit 196. additis vero 20. fiunt 216. quæ ſumma multiplicata per 5. facit 1080. additis autem 30. fiunt 1110. quæ denique ſumma multiplicata per 6. facit 6660. additiſque 40. fiunt 6700.

	2.	X	3.		
3960.	P		M	3600.	
		360. diuiſor			

Quæſt. 8. 8. Ludimagiſter quidam tot habet diſcipulos, vt ſinguli perſoluant 5. aur. deſint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; ſi vero ſinguli dent 6. aur. ſuperſint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet diſcipulos, & quantum eſt pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quam numerus, qui multiplicatus per 5. talem procreet numerum, vt additis 30. eadem ſumma fiat, quæ relinquitur, ſi idem numerus per 6. multiplicetur,

tur, & à producto detrahantur 40. Pone ergo numerum diſcipulorum eſſe 30. qui multiplicatus per 5. facit 150. additiſque 30. fiunt 180. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 30. diſcipulos habeat, quorum ſinguli perſoluant 5. aureos. Videamus iam, an ſuperſint vltra hoc pretium aur. 40. ſi ſinguli ſoluant 6. aur. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 30. per 6. facit 180. nihilq; ſupereſt vltra pretium domus 180. aureorum: debebant autem ſupereſſe 40 aurei. Defecimus ergo à veritate hoc numero 40. Finge rurſus, numerum diſcipulorum eſſe 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additiſq; 30. fiunt 530. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 100. habeat diſcipulos, quorum ſinguli perſoluant 5 aureos. Videamus iam, an ſuperſint 40. aurei vltra hoc pretium, ſi ſinguli dent 6. aureos. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorum 100. per 6. facit 600. ſuperſuntq; 70 aurei vltra pretium domus 530. aureorum: debebant autem ſupereſſe tantum 40. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 30. Operare per regulam falſi, inueniesq; numerum diſcipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5. facit 350. additiſq; 30. fiunt 380. Tantum ergo eſt pretium domus. Idem numerus diſcipulorum 70. multiplicatus per 6. facit 420 qui numerus ſuperat pretium domus 380. aur. hoc numero 40.

30. 100.
P X P
40. 30.
70.
Diuiſor.

9. Duo inter ſe partiri debebant æqualiter 60. aureos: Orta autem rixa inter eos, quilibet rapuit, quantum potuit. Inita poſtea pace, primus depoſuit $\frac{1}{4}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero $\frac{1}{3}$. factumq; eſt tunc, vt tam primus accipiens $\frac{1}{3}$. ſecundi, quam ſecundus accipiens $\frac{1}{4}$. primi habuerit 30. aur. Quantum ergo quiſque primo rapuit? Pone primum rapuiſſe 36. aur. atque adeo ſecundum reliquos 24. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. nempe 9. aur. relinquentur ei aur. 27. quibus ſi addamus $\frac{1}{3}$. ſecundi, quam dicitur depoſuiſſe, nempe 8. aur. faciemus 35. aur. pro primo. Debebat autem ſolum habere 30. Exceſſimus ergo verum numero 5. Pone iam primum ſurripuiſſe 12. ac propterea ſecundũ reliquos 48. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. hoc eſt, 3. aur. remanebunt ei 9. aur. quibus ſi addamus $\frac{1}{3}$. ſecundi, puta 16. aur. efficiemus 25. aur. pro primo. Debebat autem habere 30. Defecimus ergo 5. vnitatibus à vero. Operare ſecundum regulam, inueniesq; primum rapuiſſe 24. & ſecundum propterea 36. Nam ſi primus deponat $\frac{1}{4}$. nimirum 6. aur. & reliquis 18. addat $\frac{1}{3}$. ſecundi, nempe 12. habebit 30. aur. Sic etiam ſi ſecundus, depoſita $\frac{1}{2}$. nempe 12. aur. reliquis 24. addat $\frac{1}{4}$. primi, id eſt, 6. aur. habebit 30. aur. Quæſt. 9.

36. 12.
24. 48.
—— P X M ——
5. 5.
10.
diuiſor.

Porro ex poſitione ſecundi eodem modo verum eliciemus. Nam in priori poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. aureos & reliquis 16. adiungat $\frac{1}{4}$. primi hoc eſt, 9. aur. habebit 25. aur. qui deberent eſſe 30. Defecimus ergo à veritate 5. vnitatibus. In poſteriori vero poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 16. aur. & reliquis 32. adijciat $\frac{1}{4}$. primi, nimirum 3. aur. efficiet 35. aur. qui deberent eſſe tantum 30. Exceſſimus ergo verum rurſus 5. vnitatibus. Operare per regulam, multiplicando errores per poſitiones ſecundi, &c. reperieſque ſecundum ſurripuiſſe 36. aur. & primum 24.

36. 12.
2. 48.
—— M X P ——
5. 5.
10.
Diuiſor.

10. Duo partiri debebant inter ſe 100. aur. æqualiter: orta autem inter eos rixa, quilibet quantũ potuit arripuit. Cõpoſita deinde pace inter eos, depoſuit primus $\frac{1}{3}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit $\frac{1}{5}$. primus autem accepit hanc $\frac{1}{5}$. & ſecundus illam $\frac{1}{3}$. quo facto vterque habuit 50. Quantum ergo quiſq; primo rapuit? Finge, primum rapuiſſe 30. aur. ac proinde ſecundum 70. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 10. quam ſi deponat, relinquuntur illi 20. Secundi $\frac{1}{5}$ eſt 14. quæ ſi detur primo, habebit primus 34. aureos. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate numero hoc 16. Finge rurſus, primum ſurripuiſſe 60. ac propterea ſecundum 40. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 20. quam ſi deponat, ſupererunt ei aur. 40. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt 8. quam ſi demus primo, habebit primus 48. Debebat a. habere 50. Defecimus ergo in hac etiam poſitione à veritate numero 2. Operare per regulam, reperiesq; primum ſurripuiſſe $64\frac{2}{7}$. atq; adeo ſecundum $35\frac{5}{7}$. Primi enim $\frac{1}{3}$. eſt $21\frac{3}{7}$. quam ſi deponat, remanebunt ei $42\frac{6}{7}$. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt $7\frac{1}{7}$. quam ſi deponat, ſupererunt ei $28\frac{4}{7}$. Iam vero ſi $\frac{1}{5}$. ſecundi, nempe $7\frac{1}{7}$. detur reſiduo primi. quod fuit $42\frac{6}{7}$. habebit primus 50. Item ſi $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $21\frac{3}{7}$. detur reſiduo ſecundi, quod fuit $28\frac{4}{7}$. habebit quoque ſecundus 50. vt in quæſtione proponebatur. Quæſt. 10.

30. 60.
70. 40.
M X M
16. 2.
14.
Diuiſor.

11. Duo inter ſe ita diſtribuunt 100. aur. vt ſi primus deponat $\frac{1}{3}$. & ſecundus $\frac{1}{4}$. atque aggregatum harum partium bifariam ſecetur, deturque $\frac{1}{2}$. vtriq; numero relicto, numeri fiant æquales, nempe 50. & 50. Quantæ ergo ſunt amborum partes? Finge primi partem eſſe 60. ac proinde ſecundi 40. Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 20. remanent ei 40. Si vero $\frac{1}{4}$. ſecundi, nempe 10. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, hoc eſt, ad 20. fient 30. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. nimirum 15. demus reſiduo primi, quod fuit 40. faciemus 55. Debebamus autem facere tantummodo 50. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 5. Finge deinde, primum habere 24. ac proinde ſecundum 76. (Poſui autem hoſce numeros, quod prior habeat $\frac{1}{3}$. & poſterior $\frac{1}{4}$. ſine fractionibus.) Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. ſuperſunt ei 16. Si vero $\frac{1}{4}$. ſecundi videlicet 19. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, nempe ad 8. vt fiant 27. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. hoc eſt, $13\frac{1}{2}$. demus reſiduo primi, quod fuit 16. habebit primus $29\frac{1}{2}$. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate $20\frac{1}{2}$. Operare iam per regulam, inueniesq; partem primi eſſe $52\frac{16}{17}$. ac proinde ſecundi $47\frac{1}{17}$. Nam primi $\frac{1}{3}$. eſt $17\frac{11}{17}$. quam ſi deponat, remanent ei $35\frac{5}{17}$. Secundi $\frac{1}{4}$. eſt $11\frac{13}{17}$. quam ſi deponat, ſuperſunt ei $35\frac{5}{17}$. Aggregatum autem ex $\frac{1}{3}$. primi, & ex $\frac{1}{4}$. ſecundi, id eſt, ex $17\frac{11}{17}$. & $11\frac{13}{17}$. eſt $29\frac{7}{17}$. cuius $\frac{1}{2}$. videlicet $14\frac{12}{17}$. adiecta ad reſiduum primi, hoc eſt, ad $35\frac{5}{17}$. & ad reſiduum ſecundi, id eſt, ad $35\frac{5}{17}$. facit 50. & 50. Quæſt. 11.

60. 24.
40. 76.
P X M
5. $20\frac{1}{2}$.
$25\frac{1}{2}$.
Diuiſor.

12. Diuidatur numerus 1000.in duas partes, quarum maior ſuperet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partem eſſe 600.ac proinde minorem 400. Superat autem illa hanc numerò 200.& nos volebamus,exceſſum eſſe 49. Exceſſimus ergo veritatem numero 151. Finge deinde,maiorem partem eſſe 550.ac proinde minorem 450.Superat autem illa hanc numero 100.& nos volebamus,exceſſum eſſe 49. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 51. Operare ſecundum regulam, inueniesq; maiorem partem eſſe $524\frac{1}{2}$.ac propterea minorem $475\frac{1}{2}$. Illa enim hanc ſuperat numerò dato 49.

600.		550.
400.		450.
P	X	P
151.		51.
	100.	
	Diuiſor.	

Quæſt.13. 13. Quidam habet duo pocula aurea,& vnum cooperculum 150.aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplũ pretii poſterioris poculi, additum vero poſteriori poculo facit illud eiuſdem pretij cum priori. Quanti ergo conſtant duo illa pocula? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 150.triplus ſit ſecundi,ſecundus vero cum 150.æqualis ſit primò. Pone, prius poculum conſtare 30.aur. (Ponò autem hunc numerum,quia additis 150.fit numerus,qui habet ſubtriplum ſine fractione.) Addito cooperculo 150.aureorum, conſtabit 180.aur.& quoniam pretium hoc triplum eſſe debet pretii poſterioris poculi, conſtabit poſterius poculum 60 aur. Addito cooperculo,conſtabit 210. Debebat autem conſtare tantum 30.vt eius pretium æquale eſſet pretio prioris. Exceſſimus ergo veritatem numero 180. Pone deinde,prius poculum conſtare 90.aur. Addito cooperculo 150.aureorum,conſtabit 240.aur.ac proinde poſterius poculum conſtabit 80.aur.cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo, conſtabit 230. Debebat autem conſtare tantum 90.vt eius pretium prioris pretio eſſet æquale. Exceſſimus ergo etiam hic veritatem numero 140.Operare per regulam, inueniesq; pretium prioris poculi 300.aur. Addito enim cooperculo 150.aur.fiet pretium 450.aur. atq; adeo pretium poſterioris poculi erit 150.aur. ſubtriplum videlicet illius; additoq; cooperculo fiet pretium 300. aur. æquale pretio prioris.

30.		90.
150.		150.
M	X	P
180.		240.
180.		140.
	40.	
	Diuiſor.	

Quæſt.14. 14. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 100. aureorum, quod additum priori poculo facit eius pretium triplum pretii poſterioris:additum vero poſteriori facit eius pretium duplum pretii prioris. Quanti ergo æſtimantur duo illa pocula? Finge,prius valere 50 aur.addito cooperculo 100.aur.valebit 150.aur.ac proinde poſterius valebit etiam 50. aur. cum ille numerus huius triplus ſit. Addito cooperculo,valebit 150. aur. qui numerus duplus non eſt pretii prioris, ſed numerus 100. duplus eſt illius pretii. Exceſſimus ergo veritatem numero 50. Pone rurſus,prius valere 110.aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea poſterius valebit 70. aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo valebit 170.aur. qui numerus duplus non eſt pretii prioris,ſed numerus 220.eius duplus eſt. Defecimus ergo à veritate numerò 50. Operare per regulam,inueniesq; pretiũ prioris poculi 80. aur. Addito n.cooperculo 100.aureorum,fiet pretium 180.aur.ac proinde pretium poſterioris poculi erit 60.aur. ſubtriplum videlicet illius: additoq; cooperculo,fiet pretium 160.aur.duplum pretii prioris,quod erat 80.aur.

50.		110.
100.		100.
P	X	M
150.		210.
50.		50.
	100.	
	Diuiſor.	

Quæſt.15. 15. Quidam emit tot perdices, vt ſi emiſſet $\frac{1}{2}$.$\frac{1}{3}$.& $\frac{1}{4}$. illarum, & præterea 22.haberet 100.Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cuius $\frac{1}{2}$.$\frac{1}{3}$.& $\frac{1}{4}$.cum 22.faciat 100.Pone eum emiſſe 12.Huius numeri $\frac{1}{2}$.eſt 6 & $\frac{1}{3}$.4.& $\frac{1}{4}$.3. quæ partes faciunt 13.additisq; 22.fiunt 35.Debebant autem fieri 100.Defecimus ergo numero 65.Pone ſecundo,eũ emiſſe 60.Huius numeri $\frac{1}{2}$.eſt 30. & $\frac{1}{3}$.20.& $\frac{1}{4}$.15.q̃ partes faciunt 65.additisq; 22.fiunt 87.Debebãt a.fieri 100. Defecimus ergo iterũ numero 13. Operare per regulam, inueniesq;, eum emiſſe 72.perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$.eſt 36.& $\frac{1}{3}$.24.& $\frac{1}{4}$. 18.quæ partes conficiunt 78. additis a.22.fiunt 100.quemadmodum propoſitum eſt.

12.		60.
M	X	M
65.		13.
	52.	
	Diuiſor.	

Quæſt.16. 16. Duo habent ſummam quandam aureorum: ſi ſecundus primo det 12.habebit primus ſextuplo plus, quam ſecundus: ſi vero primus det 15.ſecundo habebit ſecundus decuplo plus,quam primus. Quot ergo quiſq; aureos habet? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus cum 12. vnitatibus ſecundi ſextuplus ſit reſidui ſecundi,ſecundus vero cum 15.vnitatibus primi decuplus reſidui primi. Vt hanc,& ſimiles quæſtiones facilius ſine fractionibus ſoluas,incipiendum erit à numero ſecundo. Finge ergo,ſecundum habere 20.ex quo ſi dentur 12. vnitates primo,habebit primus.iuxta quæſtionis pronunciationẽ,ſextuplum reſidui ſecundi,quod eſt 8. Habebit tunc ergo primus 48.atq; adeo antequam 12.accepit à ſecundo,habuit 36.Iam vero ſi ex hoc numero 36.primi dentur 15. vnitates ſecundo,habebit ſecundus 35. qui numerus decuplus eſſe debet,iuxta quæſtionis tenorẽ, reſidui primi,quod eſt 21. Conſtat autem,numerum 35.non eſſe decuplum numeri 21.ſed numerum 210. Defecimus ergo à veritate numero 175.Pone rurſus ſecundum habere 100.ex quo ſi detur 12.primo,habebit primus, vt vult quæſtio,ſextuplum reſidui ſecundi,quod eſt 88. Habebit ergo tunc primus 528. atq; adeo, antequam 12.accepit à ſecundo habuit 516. Iam vero ſi ex hoc numero 516. primi dentur 15.vnitates ſecundo,habebit ſecundus 115.qui numerus decuplus eſſe debet,vt quæſtio vult, reſidui primi,quod eſt 501.conſtat autem,numerum 115.non eſſe decuplum numeri 501. ſed numerum 5010. Defecimus ergo rurſus à veritate numero 4895 Operare per regulam,inueniesq; ſecundum habere $17\frac{2}{59}$.ex quo ſi dentur 12.vnitates primo, habebit primus ſextuplum reſidui ſecundi, quod eſt $5\frac{2}{59}$. Habebit ergo tunc primus $30\frac{12}{59}$.ac proinde, antequam à ſecundo accepit 12. habuit $18\frac{12}{59}$. Si enim ex hoc numero dentur ſecundo 15. vnitates,habebit ſecundus $32\frac{2}{59}$. qui numerus decuplus eſt reſidui primi,quod eſt $3\frac{12}{59}$. vt quæſtio proponit.

20.		100.
M	X	M
175.		4895.
	4720.	
	Diuiſor.	

17. Duo habent ſummã quandam aureorũ: Si ſecundus det 6.primo,habet primus duplum reſidui ſecundi; Quæſt.17. ſi vero primus ſecundo det 3.habebit ſecundus numerum æqualem reſiduo primi. Quot ergo aureos quiſq; habuit? Hic etiam quæruntur duo numeri,quorum primus cum 6. vnitatibus ſecundi duplus ſit reſidui ſecundi, ſecundus vero cum 3.vnitatibus primi æqualis reſiduo primi. Pone ſecundum habere 15.ex quo ſi dentur 6.vnitates primo, habebit primus 18.duplum videlicet reſidui ſecundi, quod eſt 9.atque adeo, priuſquam accipe-

ret

ret 6.à ſecundo, habuit 12. Iam vero ſi ex hoc numero dentur 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 18. qui numerus æqualis non eſt reſiduo primi, quod eſt 9. ſed maior. Exceſſimus ergo veritatem numero 9. Pone deinde, ſecundum habere 20. ex quo ſi dentur 6. vnitates primo, habebit primus 28. duplum videlicet reſidui ſecundi, quod eſt 14. Antequam ergo acciperet 6.à ſecundo, habuit 22. Iam vero ſi primus det ſecundo 3. vnitates, habebit ſecundus 23. qui numerus non eſt æqualis reſiduo primi, quod eſt 19. ſed maior. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 4. Operare per regulam, inueniesque, ſecundum habere 24. ex quo ſi dentur 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplum reſidui ſecundi, quod eſt 18. Prius ergo habuit 30. atque adeo ſi det 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 27. qui numerus æqualis eſt reſiduo primi, quod etiam eſt 27.

15. 20.
P X P
9. 4.
5.
Diuiſor.

18. Eſt ciſterna habens in fundo tres fiſtulas inæquales: per maximam reſeratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimam in 6. Si ergo aqua ſemper æquabiliter effluat, quanto tempore effluet, ſi omnes tres fiſtulæ ſimul reſerentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fiſtula in 2. horis euacuat 1. ciſternam, quid euacuabit in 4. horis? inuenieſq; 2. ciſternas. Item, Si media fiſtula in 3. horis euacuat 1. ciſternam, quantum exhauriet in 4. horis? inuenieſq; $1\frac{1}{3}$. ciſtern. Item, Si minima fiſtula in 6. horis exhaurit 1. ciſternam, quantum euacuabit in 4. horis? inuenieſq; $\frac{2}{3}$. ciſtern. atq; ita omnes tres fiſtulæ in 4. horis euacuarent 4. ciſternas. Nos autem volumus tantum 1. ciſternam. Exceſſimus ergo veritatem numero 3. Pone ſecundo in 10. horis, & dic. Si maxima fiſtula in 2. horis exhaurit 1. ciſternam, quantum exhauriet in 10. horis? inuenieſq; 5. ciſternas. Item ſi media fiſtula 1. ciſternam euacuat in 3. horis, quantum euacuabit in 10. horis? reperieſq; $3\frac{1}{3}$. ciſtern. Item ſi minima fiſtula in 6. horis euacuat 1. ciſternam, quid exhauriet in 10. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. atq; ita omnes tres fiſtulæ euacuarent in 10. horis 10. ciſtern. Nos autem volumus 1. ciſtern. Exceſſimus ergo veritatem numero 9. Operare per regulam, inuenieſq; in 1. hora euacuari ciſternam. Nam maxima fiſtula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficiunt 1. ciſternam. Quæſt. 18.

4. 10.
P X P
3. 9.
6.
Diuiſor.

Hæc quæſtio etiam ita proponi poteſt. Eſt ciſterna habens in orificio tres canales inæquales. Per maximum impletur ciſterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6. &c.

19. Eſt ciſterna habens fiſtulam in orificio, per quam impletur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fiſtulam, per quam euocuatur in 18. horis. Si igitur per ſuperiorem continue influat aqua, & per inferiorem ſemper effluat, quanto tempore replebitur tota ciſterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. ciſtern. quid euacuabitur in 20. horis? inuenieſq; $1\frac{1}{9}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 20. horis impleri $2\frac{1}{9}$. ciſtern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{1}{9}$. ciſterna maneat 1. ciſterna repleta. Dic ergo: ſi in 12. horis impletur 1. ciſterna, quid implebitur in 20. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Nos autem volumus $2\frac{1}{9}$. ciſter. Defecimus ergo à veritate numero hoc $\frac{4}{9}$. Pone ſecundo in 30. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur vna ciſterna, quid euacuabitur in 30. horis? inuenieſq; $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 30. horis impleri $2\frac{2}{3}$. ciſtern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{2}{3}$. ciſtern. relinquatur 1. ciſterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur in 1. ciſterna, quid implebitur in 30. horis? Inuenieſque $2\frac{1}{2}$. ciſtern. Nos autem volumus $2\frac{2}{3}$. ciſtern Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inuenieſq; in 36. horis ciſternam impleri. Nam in 36. horis ſuperior fiſtula implebit 3. ciſternas; inferior autem exhauriet 2. ciſternas; atq; ita remanebit vna plena. Quæſt. 19.

20. 30.
M X M
$\frac{4}{9}$. $\frac{1}{6}$.
$\frac{5}{18}$.
diuiſor.

20. Artifex quidam abſoluit opus quoddam in 30. diebus; at ſi accedat alius, abſoluent ambo idem opus in 18. diebus. Quanto ergo tempore ſecundus hic ſolus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus abſoluit opus, quantum abſoluet in 18. diebus? inuenieſq; $\frac{3}{5}$. operis. Eodem ergo tempore ſecundus abſoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totum opus perficiant. Pone ergo primo ſecundum abſoluere totum opus in 40. diebus, & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 40. diebus? inuenieſq; $\frac{8}{9}$. operis. Nos autem poſuimus eum abſoluere totum opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{9}$. Pone deinde ſecundum abſoluere opus in 60. diebus, & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 60. diebus? inuenieſq; $1\frac{3}{9}$. Nos autem poſuimus eum abſoluere 1. opus. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero $\frac{3}{9}$, Operare per regulam, inuenieſq; ſecundum abſoluere opus totum in 45. diebus. Nam ſi in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, abſoluet in 45. diebus 1. opus. Quæſt. 20.

40. 60.
M X P
$\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$.
$\frac{4}{9}$.
Diuiſor.

Facilius tamen ſine regula falſi hæc quæſtio ſoluetur, hoc modo. Poſtquam inueniſti, ſecundum in 18. diebus abſoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt ſuperſint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies requirent? inuenieſq; 27. dies, qui additi ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius. Vel certe dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, quot dies requiret 1. opus integrum? Inuenies namq; rurſum 45. dies, vt prius. *Alia ſolutio huius quæſtionis.*

21. Tres inter ſe ita luſerunt, vt ſtatim primus lucratus ſit $\frac{1}{2}$. pecuniæ ſecundi: poſtea vero ſecundus $\frac{1}{3}$. pecuniæ tertii: tertius deniq; $\frac{1}{4}$. pecuniæ eius, quam primus in ludum attulit. Finito autem ludo, quiſq; ipſorum 700. aur. habuit: quantum ergo pecuniæ quiſque in ludum attulit? Hic aliud nihil quæritur, quam vt datus numerus 2100. (Si enim ſinguli habent 700. habebunt omnes tres 2100.) in tres partes diſtribuatur, ita vt, ſi prima det $\frac{1}{4}$. tertiæ, accipiat vero $\frac{1}{2}$. ſecundæ: ſecunda autem accipiat $\frac{1}{3}$. tertiæ, fiant tres numeri æquales, nempe 700. 700. 700. Vel certe quæruntur tres numeri, quorum primus depoſita $\frac{1}{4}$. ſi accipiat $\frac{1}{2}$. ſecundi, faciat 700. ſimiliter ſecundus, depoſita $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertii faciat 700. eodemq; modo tertius, depoſita $\frac{1}{3}$. cum $\frac{1}{4}$ primi faciat 700. Pone primum luſorem attuliſſe 100. aur. depoſita $\frac{1}{4}$. nempe 25. ſuperſunt ei 75. Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{2}$. ſecundi debet facere 700. erit $\frac{1}{2}$. ſecundi 625. *Quæſt. 21.*

100. 200.
1250. 1100.
225. 450.
M X M
525 350.
175.
diuiſor.

quod

quod hic numerus cum reſiduo primi, nempe cum 75. faciat 700. Attulit ergo ſecundus 1250. Poſtquam autem perdiderit $\frac{1}{2}$.remanebunt ei 625. Quoniam vero reſiduum hoc cum $\frac{1}{3}$. tertii debet facere 700. erit $\frac{1}{3}$. tertii 75.quod hic numerus cum reſiduo ſecundi faciat 700.Quare tertius ſecum attulit in ludum 225.Poſtquam autem perdiderit $\frac{1}{3}$.ſupererunt ei 150.Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{4}$.primi,h.e.cum 25.facit 175.Debebat autẽ facere 700.defecimus,ꝑpterea à veritate numero 525.Qui defectus hinc etiã cognoſcitur,ꝙ tres numeri poſiti 100. 1250.225.faciunt 1575. qui numerus à 2100. quẽ numerum oẽs tres conficere debent,deficit hoc numero 525.

Pone deinde,primum attuliſſe in ludum 200.aur.Depoſita $\frac{1}{4}$.nempe 50.ſuperſunt ei 150.aur.qui cum $\frac{1}{2}$.ſecundi facere debent 700.Erit ergo $\frac{1}{2}$.ſecundi 550.aur. Attulit ergo ſecum 1100.Perdita autem $\frac{1}{2}$.ſuperſunt ei 550. aur.qui cum $\frac{1}{3}$.tertii facere debent 700.Erit ergo $\frac{1}{3}$.tertii 150.ac proinde in initio ludi habuit 450.Amiſſa autem $\frac{1}{3}$.remanent ei 300.aur.qui cum $\frac{1}{4}$.primi,hoc eſt,cum 50.faciunt 350. Debebant a.facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 350.Qui defectus hinc quoq; elici poteſt,quod tres numeri poſiti 200.1100.450. faciunt 1750.qui numerus à 2100.deficit hoc numero 350.Operare per regulam,inuenieſq; primum luſorẽ attuliſſe 400.aur.ſecundum 800.& tertium 900 Numeros porro hos ſecundi & tertii inuenies vel ex regula falſi, multiplicando errores per ſecundi ac tertii poſitiones,&c. vel ex primo inuento,quemadmodum paulo ante ex 100.&200.quos numeros poſuimus primum habere,numeros ſecundi,ac tertii inueſtigauimus.Nam ſi primus habet 400.habebit(depoſita $\frac{1}{4}$.nimirum 100.quam perdidit)300.& quia cum $\frac{1}{2}$.ſecundi debet habere 700.erit $\frac{1}{2}$.ſecundi 400.ac proinde ſecundus attulit 800.Amiſſa autem $\frac{1}{2}$.ſupererunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$.cum $\frac{1}{3}$.tertii facere debet 700.erit $\frac{1}{3}$.tertii 300.proptereaq; tertius attulit 900. Amiſſa enim $\frac{1}{3}$.remanebunt ei 600. quibus ſi addatur $\frac{1}{4}$.primi,hoc eſt, 100. aur.habebit 700.vt quęſtio vult.

Quæſt. 22. 22. Tres mercatores lucrati ſunt 400.aur.quos,habita ratione pecuniæ,quam quiſq; poſuit,ita diſtribuerunt,vt ſecundi portio ſuperaret portionem primi numero 12. tertii vero portio excederet portionem ſecundi numero 16. Quanta ergo fuit portio cuiuſq;? Finge, primũ accepiſſe 1.aur. (volo enim quæſtionem hanc ſoluere per minimos numeros, nempe per poſitionem 1.& 2.vt clarius appareat generalitas huius regulæ falſi.) ac proinde ſecundum 13.& tertium 29.qui omnes numeri conficiunt 43.Debebant autem conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rurſus,primum accepiſſe 2.aur. atq; adeo ſecundum 14.& tertium 30.qui omnes numeri conficiunt 46. Debebant a. conficere 400 Defecimus ergo etiã nunc à veritate numero 354.Operare per regulã,inuenieſq; primi portionẽ eſſe 120.aur. ſecundi 132.& tertii 148. qui tres numeri conficiunt ſummã 400. aur. vt in quæſtione proponitur.

1.		2.
13.		14.
29. M	X	M 30.
43.		46.
357.		354.
	3. Diuiſor.	

Quæſt.23. 23. Imperatoris exercitus contra Turcas continet 40000.Germanorum:peditum,tot vero Italos,&Hungaros,vt numerus Italorum ſit $\frac{1}{2}$.Germanorum,atq; Hungarorum:numerus vero Hungarorum ſit $\frac{1}{3}$.Germanorum atq; Italorum. Quantus ergo eſt Italorum,& quantus Hungarorum numerus atq; adeo quantus totus exercitus? Finge, Italos eſſe 30000. Et quoniam hic numerus debet eſſe $\frac{1}{2}$.Germanorum,atq; Hungarorum,erunt Germani,atq; Hungari 60000. Cum ergo Germani ſint 40000. erunt Hungari 20000.qui debent conficere $\frac{1}{3}$. Germanorum,atq; Italorum, nempe numeri 70000.Conficiunt autem $\frac{1}{3}$.numeri 60000. Exceſſimus ergo veritatem numero 10000.Finge ſecundo,Italos eſſe 24000. Et quoniam hic numerus debet eſſe $\frac{1}{2}$.Germanorum,atq; Hungarorum,erunt Germani,atq; Hungari 48000.Cum ergo Germani ſint 40000. erunt Hungari 8000.qui debent conficere $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Italorum, nempe numeri 64000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$.numeri 24000. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 40000. Operare per regulam,inuenieſq; Italos eſſe 32000.Hungaros vero 24000.ac proinde totum exercitum 96000.Nam hac ratione Itali conficiunt $\frac{1}{2}$.Germanorum, atq; Hungarorum,Hungari vero $\frac{1}{3}$.Germanorum,atq; Italorum,vt patet.

30000.		24000.
20000.		8000.
P	X	P
10000.		40000.
	30000. diuiſor.	

Quæſt.24. 24. Viſum eſt hic apponere artificium illud Archimedis, quo teſte Vitruuio lib.9.cap.3.deprehendit furtum aurificis cuiuſdam in corona aurea,hoc eſt,quantum argenti fuerit commiſtum,nõ diſſoluta corona. Cum enim Hiero rex ſtatuiſſet Diis ſuis votiuam offerre coronam ex puro auro,aurifex,ſublata auri portione,argenti tantundem commiſcuit: Indignatus vero Hiero ſe contemptum, (vt verbis Vitruuii vtar) neq; inueniens,qua ratione id furtum deprehenderet,rogauit Archimedem,vti in ſe ſumeret ſibi de eo cogitationem. Tunc is,cum haberet eius rei curam,caſu venit in balneum, ibiq; cum in ſolium deſcenderet,animaduertit,quantũ corporis ſui in eo inſideret,tantum aquæ extra ſolium effluere.Itaq; cum eius rei rationem explicationis offendiſſet,non eſt moratus,ſed exiliuit gaudio motus de ſolio,&nudus vadens domũ verſus ſignificabat clara voce,inueniſſe,ꝙ quæreret. Nã currens identidem græce clamabat εὕρηκα, εὕρηκα. Tũ vero ex eo inuentionis cõgreſſu duas dicitur feciſſe maſſas æquo pondere,quo etiã fuerat corona,vnam ex auro,alterã ex argento.Cum ita feciſſet,vas amplũ ad ſumma labra impleuit aqua,in quo demiſit argenteam maſſam, cuius quanta magnitudo in vaſe depreſſa eſt, tantũ aquæ effluxit: ita exempta maſſa,quãto minus factum fuerat,refudit,ſextario menſus,vt eodẽ modo,quo prius fuerat ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit,quantũ ad certũ pondus argenti certa aquæ menſura reſpõderet. Cũ id expertus eſſet,tum aureã maſſam ſimiliter pleno vaſe demiſit,& ea exempta eadem ratione; menſura addita,inuenit ex aqua nõ tantum defluxiſſe,ſed tantum minus,quantũ minus magno corpore eodem pondere auri maſſa eſſet, q̃ argenti.Poſtea vero repleto vaſe in eadem aqua ipſa corona demiſſa,inuenit plus aquæ defluxiſſe in coronam,quam in auream eodem pondere maſſam,& ita ex eo,quod plus defluxerat aquæ in corona, q̃ in maſſa,ratiocinatus,deprehendit argenti in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius.Explicemus a.nos,quo pacto per regulam falſi furtum dictum deprehendi poſſit, ſi adhibeatur artificium illud Archimedis.

Ponatur exempli cauſa,coronam illam fuiſſe 100.lib.eaq; impoſita in vaſe effluxiſſe 65.lib.aquæ,impoſita vero maſſa puri auri 100. lib. effluxiſſe 60. lib. aquæ; impoſita tandem maſſa pura argenti 100. lib. effluxiſſe 90. lib.aquæ.Finge ergo,aurificem abſtuliſſe 40.lib.aur.totidemq; libras argenti ſubſtituiſſe,ita vt in corona fuerint 60.lib.auri,& 40.lib.argenti. Vide iam,an corona ita confecta eijciat 65.lib.aquæ,quod ita ſcies. Dic.Si 100.lib.aur.eijciũt 60.lib.aquæ,quantum aquæ eijcient 60.lib.auri? Itẽ ſi 100 lib.argenti expellunt 90.lib.aquæ,quantum aquæ expellent 40.lib.argenti? inuenieſq; in vtraq; operatione 36.lib.aquæ,ita vt corona eijciat 72.lib.aquæ. Debebat autem eijcere tantum 65.lib.Exceſſimus ergo veritatem numero 7.Finge ſecundo,aurificem ſurripuiſſe 30.lib.auri,ac proinde in corona fuiſſe 70. lib. auri, & 30. lib. argenti. Dic ergo. Si 100. lib. auri expellunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 70. lib. auri? Item,ſi 100.lib. argenti eijciunt 90.lib.aquæ,quantum

60.		70.
40.		30.
P	X	P
7.		4.
	3. diuiſor.	

aquæ eiicient 30.lib.argenti? inueniesque in priori operatione 42.lib. aquæ, in poſteriori vero 27. quæ efficiunt 69.lib.aquæ. Debebant autem eſſe tantum 65.lib. Rurſus ergo exceſſimus veritatem numero 4. Operare per regulam, inueniesq;, aurificem accepiſſe $16\frac{2}{3}$.lib.auri, atq; adeo, coronam illam mixtam fuiſſe ex $83\frac{1}{3}$. lib.auri, & ex $16\frac{2}{3}$.lib.argenti. Quod vt probes, dic. Si 100.lib.auri eiiciunt 60.lib.aquæ, quantum aquæ eiicient $83\frac{1}{3}$.lib.auri? Item, ſi 100.lib.argenti eiiciunt 90.lib.aquæ, quantum aquæ eiicient $16\frac{2}{3}$.lib.argenti? inueniesque in priori operatione 50.lib.aquæ, in poſteriori vero 15. lib.aquæ, quæ omnes conficiunt 65.libras aquæ, quas poſuimus coronam eiicere.

Eodem modo deprehenſum fuiſſet furtum, etiamſi maſſæ auri, & argenti non fuiſſent 100.lib. quot libras habebat corona, ſed quotcunque librarum, nempe auri 10.lib. v.g. & argenti 20. dummodo diligenter exploretur. quantum aquæ ſingulæ maſſæ eijciant. Nos ponamus 10.lib auri eiicere 6.lib.aquæ. at 20.lib.argenti eiicere 18.lib.aquæ. Vnde in priori poſitione dices. Si 10.lib.aur.eiiciunt 6.lib.aquæ, quantum aquæ eiicient 60.lib.auri? &c.

Si ponatur corona 300 lib. & maſſæ auri, argentique totidem lib. hac conditione, vt corona eiiciat 218.lib.aquæ, aurum vero 206.lib.aquæ, & argentum 230.lib.aquæ; inueniemus in corona fuiſſe 150.lib.auri, totidemq; argenti. Vt patet in hiſce duabus poſitionibus, in quarum priore ſtatuuntur 100.lib.auri, & 200.lib.argenti: in poſteriore autem 101.lib.aur.& 199.argenti, &c.

100.		101.
200.		199.
—— P	X	P ——
4.		$3\frac{23}{25}$.
	$\frac{2}{25}$. Diuiſor.	

Hoc ergo artificio deprehendetur in quacunque maſſa ex auro, argentoque commixta. quantum auri, quantumque argenti permixtum ſit.

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

CAPVT XXIV.

Progreſſio Arithmetica quid.

PROGRESSIO Arithmetica eſt ſeries plurium numerorum ſe æqualiter ſuperantium, vt hic.

Progreſſio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.&c.

Progreſſio numerorum imparium incipiens ab 1.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.&c.

Pregreſſio numerorum parium incipiens à 2.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28. &c.

Progreſſio naturalis numerorũ, & numerorum imparium pariũq; quid.

Prima enim harum trium progreſſionum dicitur progreſſio naturalis numerorum, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant vnitate. Secunda vero dicitur progreſſio numerorum imparium, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant binario. Tertia denique appellatur progreſſio numerorum parium, incipitque à 2. qui eſt primus numerus par, quemadmodum & 1. eſt primus numerus impar, atque adeo primus omnium numerorum, licet improprie. In hac autem progreſſione numerorum parium omnes numeri ſe ordine ſuperant etiam binario, quemadmodum & in progreſſione numerorum imparium. Eodem modo hic.

Alia progreſſiones.

2.5.8.11.14.17.20.23.26.29.&c.

4.8.12.16.20.24.28.32.36.40.&c.

Prior namque harum progreſſionum incipit à 2. progrediturque per 3. cum omnes numeri in ea ſe ordine ſuperent ternario: poſterior vero incipit à 4. progrediturque per eundem numerum 4. cum in ea omnes numeri ſe ordine ſuperent quaternario.

Arithmetica progreſſio quo pacto continuetur.

Continuatur quælibet progreſſio Arithmetica, ſi differentia, exceſſusue numero illi addatur, poſt quem progreſſio extendenda eſt. Vt ſi progreſſio hæc, 4.9.14.19.24. continuanda ſit, addemus differentiam, ſiue exceſſum progreſſionis, nempe 5 (quam quidem differentiam, exceſſumue inueniemus, ſi primum progreſſionis numerum à ſecundo, vel quemuis alium à proxime maiore in eadem progreſſione ſubtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemuſque 29. Huic iterum numero adiiciemus 5. componemuſque 34. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, ſi quis progreſſionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, exceſſumue 6. addenda erunt 6 ad 7 vt fiant 13. pro ſecundo numero progreſſionis: Item 6. ad 13. vt fiant 19. pro tertio numero. &c.

Differẽtia progreſſionis Arithmeticæ quo modo inueniatur.

Progreſſio Arithmetica decreſcere non poteſt in infinitum.

Pari ratione progreſſio Arithmetica continuatur retrocedendo, ſi differentia progreſſionis à minori extremo ſubducatur. Vt ſi progreſſio hæc 30.37.44.51.58. continuanda ſit verſus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquantur 23. Ex his rurſus ſubducemus 7. vt remaneant 16. Ex his rurſus ſubducemus 7. vt ſuperſint 9. à quibus rurſus auferemus 7. vt ſuperſint 2. à quibus amplius auferri nequeunt 7. ac propterea dicta progreſſio amplius non poteſt decreſcere. Sic etiam, ſi quis progreſſionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. verſus vnitatem, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquantur 36. Item 4. ex 36. vt remaneant 32. Rurſus 4. ex 32. vt ſuperſint 28. Item 4. ex 28. vt relinquantur 24 &c.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ triũ numerorũ.

Proprium eſt progreſſionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale ſit duplo medii numeri, vt hic apparet, 7.18.29. demonſtraturque à Iordano lib. 1. propoſ. 2.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quatuor numerorum.

Pregreſſionis vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium eſt, vt aggregatum extremorum æquale ſit aggregato mediorum; veluti hic apparet, 4.12.20.28. demonſtraturque à Iordano lib. 1. propoſ. 3. Atque hoc non ſolum verum eſt in quatuor numeris ſeſe continue eodem numero ſuperantibus, quales ſunt numeri in dato exemplo; ſed etiam in quatuor, quæ non continue ſe ſuperant eodem numero, dummodo eadem ſit differentia inter primnm ac ſecundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides 4.12.30.38.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progreſſione Arithmetica, cuius numerus terminorum eſt impar, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, nec non duplo medii numeri. Vt hic apparet.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum fuerit impar.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.

Cum enim quatuor hi numeri 3.7.39.43. habeant eandem differentiam, licet non continuatam (Nam eadem eſt differentia inter 3.&7. quæ inter 39.&43.) erit, ex iis, quæ proxime diximus, aggregatum extremorum 3.& 43. æquale aggregato mediorum 7.& 39. Eadem ratione aggregatum ex 7.& 39. æquale erit aggregato ex 11.& 35. quod hi quatuor numeri 7.11.35.39. habeant eandem differentiam, licet non continuatam & ita de reliquis, donec ad tres medios numeros 19.23.27. perueniamus; qui cum habeant eandem differentiam, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, aggregatum extremorum 19.& 27. æquale duplo medii numeri 23. Eadem eſt ratio de omnibus aliis huius generis progreſſionibus Arithmeticis.

Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunq; terminorũ, ſi numerus terminorũ fuerit par.

Ex poſteriore quoque proprietate efficitur, in omni progreſſione Arithmetica, cuius numerus terminorum eſt par, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium. Vt hic manifeſtum eſt.

3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quod poſtremo loco ſumendi ſunt quatuor numeri medii 15.19.23.27. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non eſt vnicus numerus medius, ſed duo. Nunc ſequuntur regulæ ad Arithmeticas progreſſiones ſpectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progreſſione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vna cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem ſummæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatum per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſſione.

4.7.10.13.16.19.22.25.28 31.34.37.

Ex 4.& 37. fiunt 41. quæ multiplicata per numerum terminorum, hoc eſt, per 12. (Sunt enim 12. numeri in ea progreſſione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. eſt ſumma omnium numerorum datæ progreſſionis. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

Hæc regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorum eſt par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorum. Si vero numerus terminorum eſt impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum eſt impar, ſemper illud aggregatum eſt par) per numerum terminorum. Hac enim ratione ſemper producitur ſumma omnium numerorũ progreſſionis. Vel hoc modo. Quando aggregatum ex primo, & vltimo termino eſt par, multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, ſiue is par ſit, ſiue impar. Si vero aggregatum illud eſt impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc ſemper par eſt. Vt in ſuperiori exemplo, quia numerus terminorum eſt par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo eſt impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum, efficiuntque ſummam omnium numerorum 246. vt prius. In his autem duabus progreſſionibus, in quarum priore numerus terminorum eſt par, nempe 10. & in poſteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vl-

3.7.11.15.19.23.27 31.35.39.

4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.

timo eſt par, nimirum 42. in priore, & 38. in poſteriore, multiplicant tam dimidium illius, nimirum 21. per 10. numerum terminorum, quam dimidium huius, quod eſt 19. per 11. numerum terminorum, vt in priori efficiant ſummam 210. & in poſteriori 209.

Ratio harum regularum hæc eſt. Quoniam ſupra diximus, quando numerus terminorum eſt par, aggregatum extremorum æquale eſſe cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium, fit, vt omnia aggregata ſimul ſint tot, quot vnitates ſunt in dimidio numeri terminorum. Quare ſi vnum aggregatum, nempe extremorum multiplicetur per dimidium numeri terminorum, producetur ſumma omnium aggregatorum. Rurſus quia docuimus, quando numerus terminorum eſt impar, aggregatum extremorum eſſe æquale cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium, necnon duplo medii numeri, fit, vt medius numerus ſit dimidium cuiuslibet aggregati. Ergo omnia aggregata ſimul, vna cum medio numero, continebunt tot dimidia vnius aggregati, quot ſunt termini. Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum, multiplicetur per numerum terminorum, producetur ſumma omnium terminorum.

Itaque, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vna cum numero terminorum, ad eliciendam ſummam totius progreſſionis, etiamſi intermedii termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito, vna cum numero terminorum, & differentia progreſſionis, vltimus terminus inueſtigetur, ſequenti regula explicabimus.

Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum.

In progreſſione autem naturali numerorum, quæ ab 1. incipit, inuenietur breuiſſime ſumma omnium terminorum, hoc modo. Multiplicetur vltimus numerus (qui ſemper indicat numerum terminorum) per numerum proxime maiorem. Huius enim numeri producti dimidium eſt ſumma omnium terminorum. Vt hic.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Numerus terminorũ progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11. per 12. numerum proxime maiorem producitur numerus 132. cuius dimidium 66. eſt ſumma totius progreſſionis. Sic etiam in hac progreſſione.

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.

Ex multiplicatione vltimi numeri 10. per 11. numerum proxime maiorem fit numerus 110. cuius dimidium 55. eſt totius progreſſionis ſummæ.

Itaque ſi quis velit ſummam progreſſionis naturalis, quæ terminetur in quouis numero dato, vt in 100. in qua nimirum ſint 100. termini, multiplicandus erit vltimus numerus datus, in quo progreſſio dicitur terminari, vt hic

vt hic numerus 100. per numerum proxime maiorem, vt hic per 101. Nam producti numeri (qui hic eſt 10100.) dimidium, nempe 5050. in dato exemplo, erit ſumma dictæ progreſſionis. Eademq; ratio eſt in aliis.

Alia inuẽtio ſummæ progreſſionis naturalium numerorum.

Alii hanc etiam regulam diſtrahunt in duo membra, hoc modo. Si vltimus numerus eſt par, multiplicant numerum proxime maiorem in dimidium vltimi numeri: Si vero eſt impar, multiplicant eum in dimidium numeri proxime maioris. Hac enim ratione ſemper producitur ſumma omnium numerorum progreſſionis. Vt in poſteriori progreſſione naturali, multiplicant 11. numerum proxime maiorem vltimo numero per 5. dimidium vltimi numeri, faciuntq; 55. ſummam totius progreſſionis, vt prius. In priori autem progreſſione naturali, multiplicant 11. vltimum numerum per 6. dimidium numeri proxime maioris vltimo numero, efficiuntq; 66. ſummam totius progreſſionis, vt prius.

Particularis inuẽtio ſummæ numerorum imparium.

In progreſſione quoq; numerorum imparium, quæ ab 1. incipit, inuenietur facillimo negotio ſumma omnium terminorum, ſi numerus terminorum in ſeipſum multiplicetur, vt hic.

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19,

Ex multiplicatione numeri terminorum, qui eſt 10. in ſeipſum procreatur numerus 100. qui eſt ſumma totius progreſſionis.

Numerus terminorũ in progreſſione numerorum imparium quo pacto reperiatur.

Habetur autem numerus terminorum, ſi vltimo numero adiiciatur 1. & compoſiti numeri dimidium ſumatur, vt in dato exemplo, ſi addatur 1. ad 19. fit numerus 20. cuius dimidium 10. indicat numerum terminorum.

Itaq; ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum imparium, quæ terminetur in quovis dato numero, vt in 67. addenda erit vnitas ad vltimum numerum, in quo progreſſio terminari dicitur, vt hic ad 67. Nam compoſiti numeri (qui hic eſt 68.) dimidiũ, nempe 34. in dato exemplo, dabit numerum terminorum: qui in ſe multiplicatus producet ſummam illius progreſſionis. Vt in propoſito exemplo, in quo ponuntur 34. termini, ſi multiplicetur numerus 34. in ſe, procreabitur ſumma illius progreſſionis 1156. Atq; ita de cæteris.

Particularis inuẽtio ſummæ numerorum parium.

In progreſſione denique numerorum parium, quæ à 2. incipit, nullo etiam labore reperietur ſumma, ſi dimidium vltimi numeri, quod ſemper indicat numerum terminorum progreſſionis, (ſemper enim tot ſunt termini progreſſionis eiuſmodi numerorum parium, quot ſunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerum proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.

Numerus terminorũ in progreſſione numerorum pariũ qua ratione inueniatur.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus eſt dimidium vltimi termini, vel numerus terminorum) per 13. numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156. hoc eſt, ſumma omnium illorum numerorum parium.

Itaq; ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum parium, quæ terminetur in quolibet dato numero vt in 100. multiplicandus erit numerus, qui dimidium conficit numeri vltimi dati, in quo dicitur terminari progreſſio, vt numerus 50. in dato exemplo, (hic enim dimidium eſt vltimi numeri dati 100.) per numerum proxime maiorem illo dimidio, vt hic per 51. Productus enim numerus vt 2550. in dato exemplo, erit ſumma illius progreſſionis; & numerus terminorum erit 50. in eodem exemplo, quot nimirum vnitates ſunt in dimidio vltimi numeri. Et ſic de aliis.

REGVLA II.

Vltimus terminus cuiuſcunq́ progreſſionis Arithmeticæ quo pacto eliciatur ex numero terminorum vna cum primo termino, & differentia progreſſionis.

SI in quauis progreſſione Arithmetica notus fuerit numerus terminorũ; vnà cum primo termino, & differẽtia progreſſionis, inueniemus vltimum terminum, etiamſi intermedios terminos non habeamus, hoc modo. Ex numero terminorum abijciatur 1. reliquus vero numerus per differentiam multiplicetur, ac tandem huic ꝑducto primus terminus adijciatur. Numerus n. cõpoſitus erit vltimus terminus. Vt ſi primus terminus alicuius progreſſionis ſit 3. numerus autem terminorũ ſit 10. & differentia 8. cognoſcemus decimum terminum, hoc eſt, vltimum huius progreſſionis ſine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero terminorum auferemus 1. & reliquum numerum 9. multiplicabimus per 8. differentiam progreſſionis, producto tandem numero 72. adijciemus 3. primum terminum. Compoſitus enim numerus 75. eſt decimus terminus progreſſionis, cuius primus terminus eſt 3. & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

3.11.19.27.35.43.51.59.67.75.

Quæſtio de bobus Augiæ.

Itaque ſi quis hanc quæſtionem proponat. Augias Herculi de numero boum, quos habebat, interroganti reſpondit, boues ſuos omnes per loca 40. ita eſſe diſpoſitos, vt quoties in primo loco continentur tres boues, toties in ſecundo contineantur 5. in tertio toties 7. in 4. toties 9. &c. Acceſſit Hercules ad primum locum, & reperit boues 30. Quot igitur boues habuit Augias, & quot boues in vltimo loco fuerunt? ſoluenda erit hoc modo. Quoniam in primo loco ſunt decies 3. boues, erunt in ſecundo loco decies 5. nimirum 50. & in tertio decies 7. nempe 70. & ſic deinceps, vt ſit progreſſio quædam Arithmetica, cuius primus terminus ſit 30. differentia vero 20. & numerus terminorum 40. Eliciendus ergo eſt primùm vltimus terminus per regulam, hoc modo. Ex 40. numero terminorum abijciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiam multiplicetur, productoque numero 780. primus terminus 30. adijciatur. Fiet enim vltimus terminus, ſiue quadrageſimus, 810. atque tot boues fuerunt in vltimo loco.

Deinde vero ex hoc vltimo termino inuento & ex primo dato, vnà cum numero terminorũ eruenda per primam regulam ſumma totius progreſſionis, etiamſi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur compoſitusque numerus 840. per 20. hoc eſt, per dimidium numeri terminorum, multiplicetur. Productus namque numerus 16800. eſt ſumma totius progreſſionis, atque adeo numerus boum Augiæ. Vt autem videas, quot boues in ſingulis locis fuerint, atque adeo in vltimo loco fuiſſe 810. appoſuimus hic totam progreſſionem.

30. 50. 70. 90. 110.130.150.170.190.210.230.250.270.290.310.330.350.370.390.410.
430.450.470.490.510.530.550.570.590.610.630.650.670.690.710.730.750.770.790.810.

Quæſtio de ducibus militiæ.

Similis erit quæſtio, ſi quis ita dicat. Imperator ſtrenuis ducibus numero 20. diſtribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hoſtilem transcẽderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps eodẽ modo progrediẽdo. Quanta ergo fuit ea ſumma pecuniæ, & quantum, qui

qui primus murum tranſcendit,accepit ? Si namque ex 20.numero terminorum(tot enim ſunt termini in illa progreſſione, quot ſunt duces.) auferas 1.& reliquum numerum 19.multiplices per 30.differentiā progreſſionis,productoque numero 570.adiicias primum numerum, nempe 100.efficies 670. pro vltimo progreſſionis termino: atque tot aureos habuit primus dux. Inuento autem vltimo termino,ſi ei addatur primus, nimirum 100.vt fiant 770.atque hic numerus per 10.dimidium numeri terminorum multiplicetur,fiet ſumma omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit ſumma pecuniæ diſtributæ. Tota vero progreſſio ita ſe habet.

100.130.160.190.220.250.280.310.340.370. 400.430.460.490.520.550.580.610.640.670.

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

CAPVT XXV.

Progreſſio Geometrica quid.

PROGRESSIO Geometrica eſt ſeries plurium numerorum ſe in eadem proportione ſuperantium, vt hic apparet.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.&c.
1.3.9.27.81.243.729.2187.6561.19683.&c.
3.6.12.24.48.96.192.384.768.1536.&c.

Prima enim harum progreſſionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus ſit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus ſit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atque vtraque harum progreſſionum ab 1.incipit; tertia deniq; per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1.ſed à 3.initium ſumit.

Geometrica progreſſio quo pacto continuetur. Denominator proportionis in progreſſione Geometrica quomodo inueniatur.

Continuatur quælibet progreſſio Geometrica; ſi per denominatorem proportionis numerus ille, poſt quem progreſſio extendenda eſt,multiplicetur. Vt ſit progreſſio hæc proportionis triplæ,4.12.36.continuanda ſit,multiplicabimus vltimum numerum 36.per 3.denominatorem proportionis, (quem quidem denominatorem inueniemus, ſi ſecundum numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proxime minorem in eadem progreſſione.)efficiemuſque 108.Hunc iterum numerum per 3.multiplicabimus,producemuſque 324.& ita deinceps in infinitum.Sic etiam, ſi quis progreſſionem incipere velit à 7.& progredi per proportionem quincuplam, cuius denominator eſt 5. multiplicanda erunt 7. per 5. vt fiant 35. pro ſecundo numero progreſſionis. Item 35.per 5.vt fiant 175.pro tertio numero,&c.

Pari ratione progreſſio Geometrica continuatur retrocedendo,ſi minus extremum per denominatorem diuidatur. Vt ſi progreſſio hæc 64.128.256.512. continuanda ſit verſus minores numeros,cum denominator proportionis ſit 2. diuidemus 64. per 2. faciemuſque 32. quæ rurſum partiemur per 2. inueniemuſq; 16 & ſic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet.

512.256.128.64.32.16.8.4.2.1.$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$.&c.

Progreſſio Geometrica decreſcit in infinitum.

Et nunquam erit finis huius decrementi in progreſſione Geometrica. Sic quoque, ſi quis progreſſionem inchoare velit à 100. & progredi verſus vnitatem per proportionem ſeſquialteram, cuius denominator eſt $1\frac{1}{2}$. diuidemus 100.per $1\frac{1}{2}$.vt habeamus $66\frac{2}{3}$. Item $66\frac{2}{3}$.per $1\frac{1}{2}$.vt habeamus $44\frac{4}{9}$.&c.

Proprietas progreſſionis Geometricæ trium terminorũ.

Proprium eſt progreſſionis Geometricæ trium numerorũ, vt numerus qui ex primo numero in tertium producitur,æqualis ſit numero,qui ex medio fit in ſeipſum multiplicato. Vt hic apparet, 3.9.27.demonſtratur que ab Euclide lib.7.propoſ.20.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quatuor terminorum.

Progreſſionis vero Geometricæ quatuor numerorum proprium eſt, vt numerus qui ex multiplicatione primi numeri in quartum fit,æqualis ſit numero,qui ex ſecundo in tertium procreatur. Vt hic vides,2.6.18 54. demonſtraturque ab Euclide lib.7.propoſ.19. Atque hoc non ſolum eſt in quatuor numeris continue proportionalibus, quales ſunt quatuor numeri in dato exemplo, ſed etiam in quatuor,qui non ſunt continue proportionales,dummodo eadem ſit proportio ſecundi ad primum, quæ quarti ad tertium. Vt hic cernis, 3.6 10.20.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorũ ſit impar.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progreſſione Geometrica, cuius numerus terminorum eſt impar, numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualem eſſe numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium producitur, necnon numero, qui ex medio in ſeipſum fit. Veluti hic apparet.

3.6.12.24.48.96.192.384.768.

Cum enim quatuor hi numeri 3.6.384.768. habeant eandem proportionem, licet non continuam,erit, ex iis,quæ proxime diximus,numerus,qui fit ex 3.in 768. æqualis ei,qui fit ex 6.in 384. Eadem ratione numerus, qui fit ex 6. in 384. æqualis erit ei, qui ex 12.in 192. producitur, quod hi quatuor numeri 6.12.192.384. eandem habeant proportionem, licet non continuatam; & ita de reliquis, ſi plures ſint, donec ad tres medios 24.48.96. perueniamus; qui cum eandem habeant proportionem, erit, per ea,quæ paulo ante docuimus, numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in ſeipſum gignitur. Eademque ratio eſt de omnibus aliis huiuſmodi progreſſionibus Geometricis.

Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorũ ſit par.

Ex poſteriore quoq; proprietate efficitur, in omni progreſſione Geometrica, cuius numerus terminorum eſt par,numerum ex multiplicatione extremorum productum æqualem eſſe numero,qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter diſtantium producitur. Vt hic manifeſtum eſt.

3.6.12.24.48.96.192.384.

Quod probabimus,vt prius, hoc dempto, quod poſtremo loco ſumendi ſunt quatuor numeri medii 12.24.48.96,non autem tres tantum, vt prius; quia hic non eſt vnicus numerus medius,ſed duo. Sequuntur iam regulæ ad progreſſiones Geometricas ſpectantes.

REGVLA I.

Summa cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

SI in quauis progreſſione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vna cum minore,& maiore extremo, perueniemus in cognitionem ſummæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo,& reliquus numerus per numerum,qui vna vnitate minor ſit,quam denominator,diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, ſiue maius extremum adiiciatur,componetur ſumma omnium terminorum. Vt in hac progreſſione.

3.12.

3.12.48.192.768.3072.12288.49152.

Demptis 3.ex 49152. remanent 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quam habent numeri datæ progreſſionis, eſt 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, ſiue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemuſque ſummam totius progreſſionis 65535. Item hic.

4.6.9.$13\frac{1}{2}$.$20\frac{1}{4}$.$30\frac{3}{8}$.$45\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex $45\frac{9}{16}$. relinquuntur $41\frac{9}{16}$. quæ ſi diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Eſt enim $1\frac{1}{2}$. denominator proportionis ſeſquialteræ, quam habent numeri huius progreſſionis, ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiens $83\frac{1}{8}$. cui ſi addatur vltimus numerus, ſiue maius extremũ $45\frac{9}{16}$. fiet ſumma totius progreſſionis $128\frac{11}{16}$. atque eodem modo ſummam cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ inueniemus.

Itaque, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam ſummam totius progreſſionis, etiamſi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire poſſimus, licet non continuetur tota progreſſio, ſequenti regula explicabimus.

In progreſſione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium eſt 1. facillimo negotio ſumma totius progreſſionis quotcũque terminorum reperietur, ſi vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic.

Particularis inuẽtio ſummæ progreſſionis proportionis duplæ, cuius initium eſt 1.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024 reijciatur 1. habebitur ſumma totius progreſſionis 1023.

Ex quo fit, quemlibet numerum, in huiuſmodi progreſſione, abiecta prius vnitate, eſſe ſummam omnium numerorum antecedentium, cum quilibet numerus ſit proxime præcedentis numeri duplus.

In progreſſione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, eſt ſumma omnium antecedentium numerorũ.

REGVLA II.

IN omni progreſſione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus ſeipſum multiplicans gignit numerum, qui ab eo abeſt tanto interuallo, quanto ipſe ab vnitate diſtat: quiuis autem numerus alium maiorem multiplicans producit numerum, qui à maiore tanto interuallo diſtat, quanto ipſe minor ab vnitate abeſt. Hæc regula clariſſimè ex propoſ. 11. lib. 8. Euclidis colligitur, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. declarauimus. Exempli gratia

1.2.4.8.16.32.64.128.256 512.1024.

In hac progreſſione duplę proportionis, quæ ſequitur, ſi numerus 16. qui quintũ locũ ab vnitate occupat, in ſeipſum multiplicetur, producetur numerus 256. qui quintum etiam locum à numero 16. occupat, nempe nonũ. Sic quoque ſi numerus 32. ſextum locum ab vnitate occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus 1024. qui ſextum etiam locum à numero 32. occupat, nimirum vndecimum. Ita etiam numerus 8. quarti loci multiplicans numerum 64. producit numerum 512. quarto loco à numero 64. reponendum.

Itaq; hanc licebit regulam colligere. Si in progreſſione Geometrica cuius initium eſt 1. numerus aliquis quẽcunque locum occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, ponendus. Vt ſi numerus ſeipſum multiplicans occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: ſi occupet ſeptimum locum, producetur numerus in tertiodecimo loco ponẽdus &c. Id quod aperte oſtenſum eſt in progreſſione ſuperiori proportionis duplæ, idemq; clariſſime in hac altera progreſſione proportionis quadruplæ apparet.

Si in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis ſeipſum, vel alium numerũ multiplicet, quem locũ numerus productus occupet.

1.4.16.64.256.1024.4096.16384.65536.

Nam ſi numerus 64. in quarto loco poſitus, ſeipſum multiplicet, gignetur numerus 4096. in ſeptimo loco ponendus. Ita quoque numerus 256. quintum occupans locum ſeipſum multiplicãs producit numerum 65536. in nono loco reponendum.

Vt autem facilius ſciatur, quo in loco quilibet numerus productus ſit collocandus, ſubſcribenda eſt progreſſioni Geometricæ progreſſio naturalis numerorum hoc ordine. Sub 1. hoc eſt, ſub primo numero, ſcribatur 0. ſub ſecundo numero ponatur 1. ſub tertio 2. ſub quarto 3. & ita deinceps, vt in hac progreſſione proportionis duplæ factum eſt.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.
0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.

Nam quilibet numerus grogreſſionis Geometricæ ſeipſum multiplicans producit numerum ſupra illum numerum progreſſionis naturalis numerorum collocandum, qui duplus eſt illius, qui ſubſcribitur numero ſeipſum multiplicanti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerum ſupra illum numerũ progreſſionis naturalis numerorum reponendum, qui componitur ex duobus numeris, qui numeris multiplicantibus ſubſcribuntur. Vt ſi numerus 32. in ſe multiplicetur, procreabitur numerus 1024. ſupra 10. collocandus, quòd numerus 10. duplus ſit numeri 5. qui numero 32. ſubſcribitur. Item ex multiplicatione 8. in 256. producetur numerus 2048. ſupra 11. reponendus, ꝙ numerus 11. cõponatur ex 3. & 8. qui numeri ſub 8. & 256. ſcripti ſunt.

Quilibet numerus in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ſeipſum multiplicans producit numerũ in duplo maiore loco minus vnitate, & numerus multiplicans, ponendum.

Et quoniam, quot vnitates ſunt in quolibet numero progreſſionis naturalis numerorum, talem locum vno amplius occupat in progreſſione Geometrica numerus illi ſuprapoſitus, vt in ſuperiore exemplo perſpicue apparet; facile inueniemus numerũ cuiuſq; loci in progreſſione Geometrica, etiamſi non ſcribamus oẽs numeros intermedios. Sit enim inueniẽdus, verbi gratia, numerus in vigeſimo loco ſupradictę progreſſionis collocãdus. Primũ ſcribo quatuor, aut quinq;, vel plures numeros progreſſionis, vnà cũ progreſſione naturali, vt hic vides.

Progreſſio naturalis numerorũ quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus ſit in progreſſione Geometrica incipiente ab 1.

1.2.4.8.16.32.64.
0.1.2.3.4.5.6.

Deinde multiplico v.g. 8. in ſe, facioq; 64. numerum ſeptimi loci, ſub quo nimirum poſitus eſt numerus 6. vna vnitate minor numero locorum; quòd numerus 3. ſub 8. duplicatus faciat 6. Quòd ſi multiplicemus 8. in 64. faciemus 512. numerum decimi loci, ſub quo nimirũ ſcriberetur numerus 9. vna vnitate minor numero locorũ, quòd numeri 3. & 6. ſub quarto & ſeptimo loco faciant 9. Rurſus ſi 512. numerum decimi loci, ſub quo ponitur numerus 9. multiplicemus in ſe, producemus numerũ 262144. in loco decimonono ſcribẽdum, ſub quo nimirum poneretur numerus 18. vna vnitate minor numero locorum, propterea quòd numerus 9. ſub decimo loco duplicatus facit 18. Iã vero quia ex 18. qui numerus ſub decimonono loco ſcribitur, & ex 1. ſub ſecundo loco poſita

Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermedijs.

ſita fiunt 19. ſi multiplicemus numerum 2. ſupra 1. poſitum per numerum 262144. ſupra 18. poſitum, conficiemus numerum 524288. in viceſimo loco, ſub quo videlicet numerus 19. ponitur ſcribendum.

Rurſus, ſi quis velit in eadem progreſſione numerũ in decimooctauo loco reponendum, multiplicabimus numerum 32. ſub quo ponuntur 5. in ſeipſum, producemuſque numerum 1024. in vndecimo loco ſcribendum, ſub quo numero ponitur numerus 10. qui duplus eſt numeri 5. Et quoniam ex 10. qui numerus ſub vndecimo loco ponitur, & ex 6. qui numerus ponitur ſub ſeptimo loco, fiunt 16. qui numerus ſub loco decimo ſeptimo ſcribitur, ſi numerum 64. ſeptimi loci per numerum 1024. vndecimi loci multiplicemus, procreabimus numerum 65536. loci decimiſeptimi. Tandem quia ex 16. qui numerus ſub decimoſeptimo loco ponitur, & ex 1. quæ ſub ſecundo loco ponitur, fit numerus 17. qui ſub decimooctauo loco ſcribitur; ſi multiplicemus numerum inuentum 65536. decimiſeptimi loci, per numerum 2. ſecundi loci, gignemus numerum 131072. in loco octauo decimo ſcribendum, ſub quo videlicet ponitur numerus 17.

Quæ dicta ſunt in hac regula de progreſſione Geometrica incipiente ab 1. vera etiã eſſe de progreſſione Geometrica incipiẽte non ab 1. ſed ab alio numero.

Hæc omnia quadrant etiam in progreſſionem quamcunque Geometricam nõ ab 1. ſed à quouis alio numero incipientem, dummodo quemlibet numerum ex multiplicatione productum diuidamus per primum numerũ progreſſionis. Quotiens enim erit numerus quæſitus. Vt in hac progreſſione proportionis duplę apparet.

5. 10. 20. 40. 80. 160. 320. 640. 1280. 2560. 5120.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Nam ſi numerus 80. quintũ locum à primo numero occupans in ſeipſum multiplicetur, procreabitur numerus 6400. quo diuiſo per primum numerũ, vtpote per 5. fiet Quotiens 1280. in quinto loco à numero 80. collocandus, nempe in nono loco, ſub quo ponitur numerus 8. qui duplus eſt numeri 4. ſub numero 80. multiplicante poſiti. Vbi vides, numerum 80. quinti loci, cum ſeipſum multiplicat, producere numerum, quo diuiſo per primum numerum progreſſionis, fit Quotiens 1280. in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, reponendus. Sic etiam, ſi numerus 40. quarti loci multiplicet numerum 640. & productus numerus 25600. per primum numerum 5. diuidatur, fiet Quotiens 5120. quarto loco à numero 640. ſcribendus, nempe loco vndecimo, ſub quo ponitur numerus 10. conflatus ex 3. ſub 40. & ex 7. ſub 640. Quod ſi numerum 1280. multiplicemus per 5120. procreabimus numerum 6553600. quo diuiſo per primum numerum 5. reperiemus Quotientem 131720. reponendum in loco decimonono, qui nimirum vnitate ſuperat numerum 18. conflatum ex numeris 8. & 10. poſitis ſub numeris multiplicantibus.

Ita quoque (vt in alia progreſſione exemplum etiam ponamus.) in hac progreſſione proportionis ſeptuplæ

2. 14. 98. 686. 4802. 33614. 235298. 1647086. 11529602. 80707214.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Quo pacto numerus cuiuſcunq; loci in progreſſione Geometrica, incipiente à quouis numero inueſtiget ſine inter medijs numeris.

ſi numerus 4802. quintum locum à primo numero occupans ſeipſum multiplicet, procreabitur numerus 23059204. quo diuiſo per primum numerum, nempe per 2. fiet Quotiens 11529602. in quinto loco à numero 4802. locandus, in nono videlicet loco ſub quo numerus 8. ponitur. Sic etiam, ſi numerus 98. tertii loci multiplicet numerum 1647086. & productus numerus 161414428. per primum numerum 2. diuidatur, fiet Quotiens 80707214. tertio loco à numero 1647086. ſcribendus, nimirum loco decimo, ſub quo ponitur numerus 9. conflatus ex 2. ſub 98. & ex 7. ſub 1647086. &c.

Ex his facile inueniemus numerum cuiuſq; loci. Si namq; in priori progreſſione inueniendus ſit numerus triceſimo loco ponendus, multiplicabimus numerum 5120. in ſe, producemuſq; numerum 26214400. quo diuiſo per 5. fiet Quotiens 5242880. ponendus loco viceſimo primo, qui videlicet vnitate ſuperat numerum 20. qui duplus eſt numeri 10. ſub 5120. poſiti, poniturq; ſub viceſimo primo loco. Et quoniam 20. & 9. faciunt 29. ſi numerum 5242880. viceſimi primi loci, ſub quo numerus 20. ponitur, multiplicemus per 2560. ſub quo numerus 9. ſcribitur, efficiemus numerum, quo diuiſo per 5. fiet Quotiens 2684354560. locandus in loco triceſimo, qui nimirum vnitate ſuperat conflatum illum numerum 29.

Vides igitur, nos reperire poſſe extremum numerum cuiuslibet progreſſionis Geometricæ, etiam ſi nõ ſcribantur omnes numeri intermedij illius progreſſionis: pluribus tamen operationibus, quàm ſupra in ſecunda regula progreſſionum Arithmeticarum adhibuimus.

Summa quotcunq; terminorũ progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, ſeipſã multiplicãs producit numerũ, qui, abiecta prius vnitate, ſumma eſt duplo plurium terminorum.

Quoniam vero in prima regula diximus, numerum quemcunq; in progreſſione Geometrica proportionis duplæ incipiente ab 1. abiecta prius vnitate, ſummam eſſe omnium antecedentium numerorum; in hac autem ſecunda regula docuimus, quemlibet numerum progreſſionis Geometricæ ab 1. incipientis, ſi ſeipſum multiplicet, gignere numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam ſit locus numeri ſe multiplicantis, ponendum: fit, vt ſi ſummæ quotcunq; numerorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis addatur 1. & aggregatum in ſeipſum multiplicetur, producatur ſumma, abiecta prius vnitate, duplo plurium numerorum eiuſdem progreſſionis: quia prior ſumma, addita vnitate, conſtituit proxime ſequentem numerum in eadem progreſſione, qui numerus ſeipſum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam ſit locus numeri multiplicantis, reponendum; ac proinde, abiecta vnitate, idem numerus ſumma erit omnium antecedentium numerorum, qui quidem duplo plures ſunt, quam priores, quorum ſumma accepta fuit. Exempli gratia, ſumma ſeptem terminorum, addita vnitate, conſtituit octauum terminum, qui multiplicatus in ſe producit terminum decimumquintum, nempe numerum in duplo maiore loco, quam ſit octauus, minus vnitate, ponendum; qui quidem, abiecta vnitate, ſumma erit quatuordecim antecedentium terminorum, nimirum duplo plurium, quam ſeptem, quorum ſumma accepta fuit. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Quo pacto facile inueniatur ſumma 64. locorum progreſſionis Geometricæ duplæ proportionis ab 1. incipientis.

Itaq; ſi quis breuiter cupiat inuenire ſummam 64. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, quot nimirum loca ſunt in ludo latrunculorum, quem ſcacchiorum ludum vocãt, accipienda erit primum ſumma horum quatuor terminorum 1. 2. 4. 8. nempe 15. Deinde, addita vnitate, multiplicandum aggregatum 16. in ſe. Si enim ex numero producto 256. abijciatur 1. erit ſumma octo terminorum 255. Rurſus, addita 1. multiplicandum aggregatum 256. in ſe, vt fiant 65536. ac proinde ſumma 16. terminorum 65535. Quod ſi rurſus, addita 1. aggregatum 65536. in ſe multiplicetur, procreabitur numerus 4294967296. qui, abiecta

abiecta prius vnitate, dabit ſummam 32. terminorũ. Poſtremo ſi 4294967296. in ſe multiplicentur, fiet numerus 18446744073709551616. qui, abiecta prius vnitate, dabit ſummam 64. terminorum. Atque tot quatrini requiruntur, vt quis replere poſſit omnia 64. loca dicti ludi latrunculorum, ponendo 1. quatrinum in primo loco; 2. quatr. in ſecundo; 4. in tertio, 8. in quarto, & ſic deinceps progrediendo per duplam proportionem: qui efficiunt aureos, (tribuendo ſingulis aureis 400. quatrinos) 46116860184273879 $\frac{3}{80}$. quanta pecunia vix in toto vno regno, vel etiam pluribus, aut toto mundo, reperitur; quod multis incredibile videtur.

Quanta pecunia requiratur, vt impleãtur 64. loca ludi latrũculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in ſecundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionẽ duplam.

Immo vix tot grana frumenti in vniuerſo orbe terrarum exiſtunt, quot in dictis 64 locis continerentur, ſi in primo ponitur 1. granum, in ſecundo 2. in tertio 4. &c. quod ita perſpicuum faciemus, licet multis omnino incredibile videatur. Secundum Medicos, & pharmacopolas, grana 60. efficiunt 1. drachmam, id eſt, $\frac{1}{8}$. vnius vnciæ; ac proinde 480. grana 1. vnciam & 5760. grana 1. libram. Cum ergo 600. libræ communiter conſtituant 1. menſuram, quam Romani Rubium dicunt, & quę parum ab illa menſura differt, quam Nautæ in Italia Salmam appellant; conſtabit 1. Rubius granis 3456000. Quare ſi grana 18446744073709551615. quæ in dictis 64. locis continentur, per grana 3456000. vnum Rubiũ conſtituentia diuidantur, prodibunt Rubij 5337599558365. & paulo amplius: quot vix in toto terrarum orbe arbitror ſimul reperiri. Nam cum communiter nauis oneraria ferat Rubios 3000. requirerentur, vt minimum, ad frumentum illud portãdum naues 1779199852. ad quas onerandas vix ſatis eſſe totius mundi frumẽtum, facile ſibi quiuis perſuadebit. Quod ſi in toto mundo vix ſunt 18446744073709551615 grana frumenti, multo minus tot quatrini exiſtent, etiamſi omnes monetæ in quatrinos reſoluerentur: cum nulli dubium ſit, maiorem in mundo frumenti eſſe copiam, quàm pecuniæ. Quod etiam hinc colligi poteſt.

Quot grana frumẽti conſtituant vnum Rubium.

Quoniam ducatus aureus Romæ æſtimatur baiochis 115. ſiue quatrinis 460. ſi quatrini 18446744073709551615. in dictis locis 64 contenti diuidantur per baiochos 115. hoc eſt, per quatrinos 460. efficientur ducati aurei 40101617551542503. & paulo amplius. Quia vero 100. ducati aurei faciunt 1. libram, continebunt 1800000. libræ aureos ducatos 180000000. quot nimirum commode vna nauis oneraria ferre poteſt, cum rubij frumẽti 3000. vnam nauem onerantes faciant libras 1800000. quod pondus multis partibus ſuperat Obeliſcum illum immenſum, qui Romæ iuxta templum S. Petri viſitur, quippe cum hic, vt periti affirmarunt, contineat libras duntaxat 1180000. quem tamen vix ferri poſſe ab vna naue, facile ſibi perſuadebit, qui eius molem diligentius intueatur. Quod ideo dixerim, nequis putet, parũ nos vni naui tribuere, cum ei concedimus libras 1800000. hoc eſt rubios frumenti 3000. ſiue aureos ducatos 180000000. Ex quo fit, ad aureos ducatos 40101617551542503. vehendos neceſſarias eſſe naues 222786764. & amplius: quis autem dubitet, totius mundi pecuniam etiamſi ad aureos ducatos reducatur, tantam non eſſe, vt tot naues oneret?

Quot naues requirantur ad ferendum frumẽtum in 64. locis ludi latrunculorum poſitum.

Quot naues requirantur ad ferendã pecuniam in 64 locis ludi latrunculorum poſitã: ſi ad aureos reduceretur.

Quod ſi quis in primo loco ponat 1. quatrinum, vel granum; 2. in ſecundo; 6. in tertio; 18. in quarto; 54. in qunito, & ſic deinceps, ita vt vnitates in quolibet loco poſitæ ſint duplo plures quàm in omnibus præcedentibus locis ſimul: quod tum demum fiet, ſi vnitates ſecundi loci triplices, & productum numerum rurſus triplices, atq; ita deinceps, vt in hac progreſſione manifeſtum eſt, & ita oſtendi poteſt. Quoniam vnitates cuiuslibet loci du-

1.2.6.18.54.162.487.1458.4374.13122.&c.

plæ ſunt vnitatum in omnibus præcedentibus locis poſitarum, continebunt dictæ vnitates bis vnitates proxime antecedentis loci, & vnitates omnium quoque aliorum locorum præcedentium bis. Cum ergo vnitates proxime antecedentis loci bis contineant vnitates omnium locorum antecedentium, comprehendent vnitates proxime antecedentis loci ter. Verbi gratia, quoniam vnitates 18. in quarto loco duplæ ſunt harum vnitatum 1. 2. 6. continebũt dictæ vnitates 18. bis vnitates 6. ac præterea vnitates 1.2. bis. Quare cum vnitates 6. duplæ quoque ſint vnitatum 1.2. continebunt eædem vnitates 18. bis vnitates 6. & inſuper ſemel, nempe vnitates quoque 1.2. bis ac proinde ſi triplicentur vnitates 6. producentur vnitates 18. ſequentis loci, quæ triplæ quidem ſunt vnitatum proxime antecedentis loci, duplæ vero omnium præcedentium locorum. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod ſi quis, inquam hac ratione ponat quatrinos, vel grana in dictis 64. locis, reperietur ſumma multo maior, quàm prius.

In progreſſione cuius primus terminus eſt 1. ſecundus 2. tertius vero ſecundi triplus & ſimiliter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus eſt omniũ præcedentium terminorum.

Hoc autem modo ſumma elicietur, etiamſi non ponãtur omnes numeri illius progreſſionis. Quoniã omnes numeri progrediuntur per proportionem triplam, initio facto à ſecundo loco; inueſtigandus erit numerus loci ſexageſimi tertij in proportione tripla, cuius principium eſt 2. Hic enim numerus inuẽtus occupabit locum 64. in ludo latrunculorum, atq; eo cognito reperietur ſumma omnium 63. locorum, vt in prima regula progreſſionum Geometricarum docuimus; cui ſi adijciatur 1. in primo loco dicti ludi poſita, habebitur ſumma omniũ 64. locorum. Exempli gratia. Poſitis his quinque terminis, 2.6.18 54.162. ſi quintus in ſe multiplicetur, productuſque per primum diuidatur, producetur numerus 13122. nono loco ponendus, nempe in duplo maiore loco, minus vnitate, quam eſt locus numeri in ſe multiplicati, vt in ſecũda hac regula docuimus. Quòd ſi rurſum numerus 13122. noni loci in ſe multiplicetur, productuſq; per primum hoc eſt, per 2. diuidatur, gignetur numerus 86093442. ſeptimodecimo loco ponendus: qui ſi rurſum in ſeipſum multiplicetur, productuſq; per primum diuidatur, fiet numerus hic ſequens 3706040377703682. triceſimo tertio loco ponendus: qui rurſum ſi multiplicetur in ſe, productuſq; diuidatur per primum, procreabitur numerus 6867367640585024969315698178562. loco ſexageſimo quinto locandus. Nos autem quærimus numerum ſexageſimi tertij loci, ad quem inuentus numerus ſexageſimi quinti loci proportionem habet triplæ duplicatam hoc eſt, noncuplam, ex defin. 10. lib. 5. Eucl. propterea quòd numeri poſiti in loco ſexageſimo tertio, ſexageſimó quarto & ſexageſimo quinto continuam proportionem triplam habent. Quare ſi numerum inuentum per 9. partiamur, reperiemus numerum hunc ſequentem 763040848953891663257299797618. loco ſexageſimo tertio reponendum.

Qua arte inueniatur ſumma 64. terminorũ ab 1. incipientium atque ita progredientiũ, vt quilibet duplus ſit omniũ anteſcedentium terminorũ.

Detracto iam primo numero 2. & reſiduo diuiſo per numerum vnitate minorem denominatore proportionis triplæ, nempe per 2. Quotiente denique ad numerum inuentum ſexageſimi tertij loci adiecto, fiet ſumma omnium ſexagintatriũ locorum, cui ſi apponatur 1. in primo loco ludi latrunculorum poſita, componetur ſumma omnium 64. locorum dicti ludi hæc ſequens.

1144561273430837494885949696427.

Hanc eandem ſummam ita quoque inueniemus. Multiplicetur ſumma trium primorũ locorum ludi latrunculorum,

Alia ratio inueniendi ſummã 64. terminorũ ab 1. incipientium atque ita progredientiũ, vt quilibet omniũ antecedentiũ terminorũ ſit duplus. Quantum frumẽtum requiratur vt impleãtur 64. loca ludi latrunculorũ ita in primo loco ponatur 1. granum. in ſecundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps vt grana ſubſequentis loci ſint dupla omniũ granorũ in præcedentibus omnibus locis ſimul. Et quot naues neceſſariæ ſint ad illud frumẽtum portandum. Quot naues totam ſuperficiem terræ & maris operirent ſi ſe mutuo tangerent. Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ neceſſariæ sũt ad proximè dictum frumentũ portãdum. Quot globos toti terræ æquales cõſtitueret frumẽtum in 64. locis proxime dictis contentum. Quot naues ferrent aureos ducates ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo quo de granis frumenti dictum eſt. Et quot globos terræ ac maris dictæ naues tegerent.

culorum, quæ eſt 9. in ſe fietque ſumma 81. duplo plurium locorum minus vno, hoc eſt, quinque locorum: quæ ſi rurſus in ſe multiplicetur, fiet eadem ratione ſumma 6561. nouem locorum, nempe duplo plurium, quam quinque minus vno: quæ rurſus multiplicata in ſe producet ſummam 43046721. ſeptemdecim locorum: Hæc iterum in ſe multiplicata faciet hanc ſummam 1853020188851841. trigintatrium locorum: quæ in ſe rurſum

343368382029251248465784908928 1.

multiplicata, gignet ſummam ſexagintaquinque locorum. Nos autem quærimus ſummam ſexaginta quatuor tantum locorum, quæ in ſumma inuenta ter continetur. Nam ſumma quotcunq; locorum tripla eſt ſummæ omnium locorũ præcedẽtium: propterea quòd numerus vltimi loci, nempe (in dato exemplo) ſexageſimi quinti, duplus eſt omnium præcedentium locorum. Hinc enim fit, vt addita ſumma omnium præcedentium locorum ad numerum ſexageſimi quinti loci, fiat ſumma omniũ ſexagintaquinque locorũ, continens nimirũ ter ſummã præcedentium ſexaginta quatuor locorum. Quocirca diuiſa ſumma inuenta per 3. reperietur ſumma hæc ſexa-

114456127343083749488594969642 7.

ginta quatuor locorum ludi latrunculorum vt prius.

Hæc omnia grana, ſi diuidantur per 3456000. quot vnum Rubium conſtituunt, efficient Rubios ſequentes, 3311809240251265899554 25 $\frac{11201}{128000}$. ad quos vehẽdos, impoſitis 3000. Rubijs in quamlibet nauem, neceſſariæ ſunt naues numero 110393641341708863318 $\frac{19}{40}$. quæ 102714380. globos ex terra & aqua confectos contegerent. Ponimus enim ſupremam aream vnius nauis æquiualere quadrato, cuius latus continet 70. palmos, quibus Mechanici, atq; architecti vtuntur: cũ plerunque longitudo nauis ſit 120. palmorum, latitudo autem 40. ſi ad parallelogrammum rectangulum redigeretur; atque adeo area ipſius contineat palmos quadratos 4800. cuius radix quadrata fere eſt 70. Cum ergo 5500 palmi, plus minus, conficiant vnum milliare, ac propterea palmi 133750000. milliaria 22500. quot in toto ambitu terræ continentur; ſi partiamur hos palmos per 70, hoc eſt, per latitudinem, longitudinemve vnius nauis quadratæ, reperiemus in toto ambitu terræ contineri naues 1910714. ſe inuicem tangentes. Eodem modo conficient palmi 39374500. totam terræ diametrum milliaria 7159. cõplectentem: quos palmos ſi rurſus per 70. partiamur, inueniemus in terræ diametro comprehendi naues ſe inuicem tangentes 562493. ferè. Multiplicantes autem naues 562493. diametri per 1910714. naues ambitus, faciemus naues 1074763250002. totam ſuperficiem terræ mariſque tegentes, vt ad finem primi cap. ſphæræ ſcripſimus: per quas ſi diuidamus illas ſuperiores 110393641341708863 18. naues quę ad frumẽtum aſportãdum requiruntur, deprehendemus globos ex terra marique cõfectos 102714380. & quidem omnes nauibus ad frumentum portandum neceſſarijs contectos: quæ ſumma frumenti multis partibus ſuperat frumentum totius orbis, cum ne vnam quidem terram operire poſſint naues in quibus totius orbis frumentum contineretur, vt patet.

Alia ratione incomprehẽſibilem hanc multitudinem frumenti explicabimus, ſi nimirum inquiramus, quot globi, ſiue ſphæræ ex illis granis, quæ poſteriori modo in 64. locis ludi latrunculorum continentur, confici poſſint, quarum ſphærarum quælibet globo terreſtri ſit æqualis: quod ita fiet. Quoniam grana frumenti rotunda non ſunt, ſumemus pro ipſis grana coryandri, quæ rotunda ſunt, licet paulo minora ſint, quam frumenti grana. Ita enim fiet, vt plures globi conficiantur ex granis frumenti, quàm ex granis coryandri, cum pauciora illorum requirantur, quam horum, ad vnum globum conſtituendum, ſitque tanta multitudo illorum, quanta horum, in 64. locis ludi latrunculorum. Quia igitur 18. grana coryandri (vt experientia deprehenſum eſt à me) cõſtituunt quartam partem pedis Geometrici, & paulo amplius, fit, vt recte dicere poſſimus, 70. grana ſecundum longitudinem diſpoſita explere longitudinem vnius pedis. Quare cum ſphæræ triplicatam ſuarum diametrorũ proportionem habeant, vt Euclides demonſtrauit lib. 12. propoſ. 18. continebuntur in ſphæra, cuius diameter pedi Geometrico æqualis eſt, grana coryandri 343000. cum hic numerus ad 1. proportionem habeat triplicatam eius, quam habet pes Geometricus 70. granorum ad 1. vt hic apparet.

1. 70. 4900. 343000.

Rurſus quia 5000. pedes Geometrici vnum milliare conſtituunt, habebit eadem ratione ſphæra, cuius diameter vni milliario, æqualis ſit ad ſphæram, cuius diameter æqualis ſit vni pedi, proportionem, quam ad 1 habet hic numerus 125000000000. cum numerus hic ad 1. habeat proportionem triplicatam eius quam 5000. pedes habent ad 1. vt hic vides.

1. 5000. 25000000. 125000000000.

Quare cum ſphæra habens diametrum pedalem contineat grana coryandri 343000. exiſtent in ſphæra, cuius diameter vni milliario ſit æqualis, grana 42875000000000000.

Deinde quoniam diameter terræ complectitur milliaria 7159. ponemus nos eam contiuere 7200. milliaria. Quo poſito, habebit tota ſphæra terræ ad ſphærã, cuius diameter vni milliari eſt æqualis, proportionem, quam hic numerus 373248000000. ad 1. propterea quod numerus hic ad 1. proportionem habet triplicatam eius, quam habent 7200. milliaria totius diametri terræ ad 1. milliare vt hic manifeſtum eſt.

1. 7200. 51840000. 373248000000.

Quocirca cum ſphæra diametri vnius milliarij comprehendat grana 42875000000000000. complectetur totus globus terræ grana numero 16003008000000000000000000000. Si igitur per hunc numerum partiamur numerum granorum omnium in illis 64. locis ludi latrunculorum cõtentum, efficiemus globos terræ 71 $\frac{1}{2}$, & amplius. Tot ergo ſphæræ, quarum quælibet toti terræ ſit æqualis, requiruntur ex granis coryandri compoſitæ, vt dicta 64. loca repleri poſſint eo modo, quo diximus, quod omnium fidem ſuperare videtur.

Iam vero ſi grana illa ſint quatrini, efficiemus ex illis aureos ducatos ſequentes numero.

2488176681371385858584477167 31.

Quoniam autem ſupra diximus, vnam nauem commode ferre ducatos aureos 180000000. ſi illos per hos diuidamus, deprehendemus naues has 1382320378539658810324. neceſſarias eſſe, vt dictam pecuniam ferrent, quæ tot ſuperficies terræ mariſque contegerent, quot ſunt in hoc numero 1286162676. vnitates; propterea quòd ſupra poſuimus 1074763250002. naues vnam ſuperficiem terræ ac maris contegere. Quæ ſumma pecuniæ omnem captum ingenij humani excedit.

Pari

Pari ratione, ſi quis optet ſummam 40.terminorum eiuſdem progreſſionis, accipienda primum erit ſumma horum 5.terminorum 1.2.4.8.16. nempe 31. Deinde, addita 1.multiplicandum aggregatum 32.in ſe, abiecta enim vnitate ex producto numero, fiet ſumma 10.terminorum 1023. Rurſus ſi aggregatum multiplicetur in ſe, & ex producto numero reijciatur 1. exurget ſumma 20.terminorum 1048575. Poſtremo, addita rurſus 1. ſi aggregatum in ſeipſum multiplicetur, & ex producto numero dematur 1. producetur ſumma 40.terminorum, videlicet 1099511627775. Atq; tot quatrinos reciperet Dux aliquis, qui 40.oppida ſua ea lege diuenderet, vt ei pro primo solueretur 1. quatrinus, pro ſecundo 2. quatr. pro tertio 4. & ita deinceps progrediendo ſemper per proportionem duplam. Hi autem quatrini conficiunt aureos $2748779069\frac{175}{400}$. Quod ſi hac pecunia emerentur redditus annui, ita vt 100.aurei tantum lucrifacerent 5.aureos (cum tamen lege ordinaria plus lucrentur) haberentur aurei hi 137438953. & baioch. $47\frac{7}{10}$ quantos redditus nullus vnquam Monarcha, aut Reſp. habuit: vt non inſanus iudicandus ſit Dux ille, (vt pleriſq;, qui in Arithmeticis parum ſunt exercitati, videtur) qui ea ratione 40. ſua oppida diuendit, ſed ſapientiſſimus.

Qua ratione facile inueniatur ſumma 40. terminorū progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis.

Quanti cōſtet 40. oppida, ſi vendantur ita vt pro primo ſoluatur 1. quatr. pro ſecūdo 2 quatri pro tertio 4. &c.

Poſtremo ſi quis cupiat expedite ſummam habere 24. terminorum eiuſdem progreſſionis, ſumenda erit primum ſumma trium horum terminorum 1.2.4. quæ eſt 7. Deinde, addita 1 multiplicandum aggregatum in ſe, & à producto numero auferenda 1. vt habeatur ſumma 6.terminorum 63. Addita 1. rurſus multiplicandum aggregatum in ſe, & auferenda 1. ex numero producto, vt fiat ſumma 12. terminorum 4095. Tandem, addita rurſus 1. multiplicandum aggregatum in ſe, & 1. ſubducenda ex numero procreato, vt exurgat ſumma 24.terminorum 16777215 Non ergo ridendus eſſet, qui bellicoſum equum, qui in pedibus habet 24.clauos, ita venderet, vt ei pro primo clauo ſoluatur 1.quatr. pro ſecundo 2. pro tertio 4. pro quarto 8. &c. Nam reciperet pro equo 16777215.quatr. qui conficiunt $41943\frac{1}{25}$.aur. pro quo pretio vnuſquiſq; libenter ſuum equum daret. Hæc pauca de progreſſionibus dicta ſint ſatis. Multo enim plura de eiſdem ſcribemus in pleniore noſtra Arithmetica.

Quo modo breuiter eliciatur ſūma 24. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis.

Quanti conſtet equus habens 24. clauos in pedibus, ſi ita vendatur, vt detur 1. quatri pro primo clauo, 2. pro ſecundo & 4. pro tertio, &c.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATAE.

CAPVT XXVI.

NVmerus quadratus dicitur, qui ex aliquo numero in ſeipſum multiplicato producitur. qualis eſt 4. qui ex multiplicatione numeri 2.in ſeipſum gignitur. Item 9. cum ex 3.in ſe producatur. Item 2209. quia generatur ex multiplicatione 47.in ſe, &c. Vnitas quoque ab Arithmeticis numerus quadratus, licet impropriè, appellatur, propterea quod ex 1.in ſe producatur. Numerus autem, qui in ſe multiplicatus producit quadratum numerum, vocatur latus, ſiue radix quadrati.

Quadratus numerus quid.

Radix quadrata quid.

Extractio igitur radicis quadratæ eſt inuentio numeri, qui in ſe multiplicatus producat numerum propoſitum, ſi quadratus eſt, vel ſi non eſt quadratus, maximum numerum quadratum in eo contentum. Vt extractio radicis quadratæ ex numero 2209. eſt inuentio numeri 47. quia hic in ſe multiplicatus producit propoſitum numerum 2209. Item extractio radicis quadratæ ex numero 3375. eſt inuentio numeri 58. quia hic in ſe multiplicatus gignit numerum quadratum 3364. qui eſt omnium maximus in 3375. contentus. Nam proxime maior quadratus numerus, cuius latus, ſiue radix eſt 59. vnā vnitate maior, quam 58. eſt 3481.

Extractio radicis quadratæ quid.

Primum autem numerus propoſitus, cuius radix inueſtiganda eſt, ſignandus eſt punctis quibuſdam, poſito puncto ſub prima figura ad dextram, vel ſupra primam figuram, & alio ſub tertia, & alio ſub quinta, & ita deinceps ſub ſeptima, nona, & ſub aliis locis imparibus; ita vt quodlibet punctum habeat duas figuras, illam videlicet, ſub qua punctum ſignatum eſt, & aliam, quæ hanc verſus ſiniſtram præcedit; excepto vltimo puncto ad ſiniſtram, quod aliquando vnicam figuram habet, quando nimirum numerus figurarum eſt impar. Tot autem figuras habebit radix propoſiti numeri, quot puncta ſignata ſunt. Vt hic numerus 21178404. · · · · ita ſignabitur, habebitq; eius radix quatuor omnino figuras. Hic autem numerus 456789012. · · · · · ita ſignabitur, eiuſq; radix 5.figuris ſcribetur.

Quomodo numerus, cuius radix quæritur, pūctis ſit ſignandus.

Quot figuras habeat radix propoſiti numeri.

Signato hac ratione numero, ita radix ipſius eruetur. Sub vltimo puncto ad ſiniſtram ponitur radix maximi quadrati in figuris ad illud punctum ſpectantibus contenti, quæ maior eſſe non poteſt, quam 9. eademque radix ſcribitur ad dexteram numeri propoſiti poſt hanc lineam curuam (vt de diuiſione integrorum numerorum diximus: atq; hæc radix, inſtar Quotientis figuræ, per radicem ſub puncto poſitam, inſtar diuiſoris, multiplicatur, productuſq; numerus ex ſupraſcripto numero ſubtrahitur, deletis prius figuris, à quibus fit ſubtractio, vna cum radice ſub puncto notata, quemadmodum in diuiſione integrorum docuimus. Numerus autem reſiduus non poteſt eſſe maior, quam duplus radicis ſub puncto poſitæ.

Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur.

Poſt hæc duplicatur radix inuenta, ſcribiturq; numerus hic duplicatus ſub ſequenti puncto, hoc ordine, vt prima eius figura ponatur ſub figura, quæ proxime punctum vltimum ſequitur verſus dextram, aliæ vero, ſi quæ ſint, ordine ſuo verſus ſiniſtram progrediendo, ita vt figura, ſub qua ſequens punctum ponitur, nihil ſcribatur. Sub ea enim ponenda eſt noua figura Quotientis. Poſito hac ratione numero illo duplicato, diuiditur per illum numerus ſupraſcriptus, Quotientiſq; figura ad dexteram poſt propoſitum numerum ſcribitur, atq; etiam ſub puncto, vt fiat quaſi integer diuiſor ex duplicato illo numero, & figura hac Quotientis. Quo facto, multiplicatur figura hæc Quotientis in totum illum diuiſorem, vt in diuiſione integrorum, productuſq; numerus ex ſupraſcripto numero ſubducitur, &c. Antequam autem figuram hanc nouam Quotientis ſcribas, tentandum prius erit, num ea multiplicata in duplicatum illum numerum, & in ſeipſam poſitam poſt illum numerum duplicatum, talem numerum producat, qui à ſuprapoſito numero poſſit ſubtrahi.

Rurſus eodem modo totus numerus poſt lineam hanc curuam (hactenus poſitus duplicatur, duplicatuſque numerus ſub ſequenti puncto ſcribitur eo ordine, quem ſupra præſcripſimus, ita vt rurſus ſequens punctū vacuum relinquatur pro noua figura Quotientis. Per hunc numerum vero duplicatum diuiditur ſupraſcriptus numerus, ſumiturq; talis figura pro Quotiente, quæ in numerum illum duplicatum, & in ſeipſam poſt illum numerum duplicatum poſitam multiplicata, numerum procreet, qui ex ſupraſcripto numero detrahi poſſit.

Pari ratione totus numerus in Quotiente hactenus poſitus, duplicatur, & reliqua fiunt, vt prius: atq; ita deinceps, donec omnia puncta ſint abſoluta. Verum hæc omnia exemplis fient clariora.

Sit eruenda radix quadrata ex numero 21178404. Notatis punctis, vt ſupra dictum eſt, pono ſub vltimo ad ſiniſtram figuram 4. tanquam radicem maximi quadrati in ſupraſcripto numero 21. contenti (quadratus enim numerus maioris radicis nempe 5. eſt 25.) eamq; rurſus ſcribo poſt lineam hanc curuam (. Multiplicata autem figura 4. in Quotiente per figuram 4. ſub puncto, fiunt 16. quæ ex 21. ſublata, vt in diuiſione integrorum præcepimus, relinquunt 5. ſpectabuntq; ad ſequens punctum tres hæ figuræ 517.

```
     5.
21178404 (46
 . . . .
486.
```

Deinde duplicata figura Quotientis 4. vt fiant 8. ſcribo 8. ſub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 51. per 8. & inuenio 8. contineri in 51. ſexies. Pono ergo 6. tam in Quotiente poſt 4. quam ſub puncto figuræ 7. Multiplicata autem figura hac Quotientis 6. per totũ diuiſorem 8,6. productoq; detracto ex ſuprapoſito numero 517. remanet 1. pertinebuntq; hæ tres figuræ 184. ad ſequens punctum.

```
531
21178404 (460.
 . . . .
48620
```

Rurſus duplicato Quotiente 46. hactenus inuento, vt fiant 92. ſcribo 2. ſub 8. & 9. ſub 1. vt in exemplo vides; diuidoq; 18. per 92. Sed quia 92. non continentur in 18. pono 0. in Quotiente, & ſub puncto figuræ 4. deleoq; totum diuiſorem 920. ſpectabit autem ad poſtremum punctum totus hic numerus 18404.

```
9
531
21178404 (4602
 . . . .
48620002
```

Poſtremo duplicato Quotiente 460. hactenus inuento, vt fiant 920. ſcribo 0. ſub 0. & 2. ſub 4. & 9. ſub 8. vt vides in exemplo. Diuidendo autem 1840. per 920. inuenio hunc numerum in illo contineri bis. Pono ergo figuram 2. tam in Quotiente, quam ſub puncto primæ figuræ 4. Multiplicata vero hac figura 2. per totum diuiſorẽ 9202. productoq; numero dempto ex numero ſupraſcripto, nihil ſupereſt. Radix ergo quadrata numeri propoſiti eſt 4602. ipſeq; numerus propoſitus quadratus eſt, cum nihil ſupereſuerit poſt vltimam ſubtractionẽ factam.

```
992
531
21178404 (4602.
 . . . .
48620002
992
```

Sit rurſus inquirenda radix quadrata ex numero 456789012. Signatis punctis, vt docuimus, ſcribo ſub vltimo puncto ad ſiniſtram figuram 2. tanquam radicem maximi quadrati in ſupraſcripto numero 4. contenti, eamque rurſus pono in Quotiente. Multiplicata autem figura 2. in Quotiente per figuram 2. ſub puncto, fiunt 4. quæ ex 4. ſubducta nihil relinquunt, pertinebuntq; hæ duæ figuræ 56. ad punctum ſequens.

```
456789012 (21
.  .  .  .  .
241
```

Duplicata figura Quotientis 2 fiunt 4. quæ ſcribo ſub 5. relicto puncto ſequenti vacuo pro noua figura Quotientis. Diuidendo autem 5. per 4. inuenio Quotientem 1. quem ſcribo tam poſt Quotientẽ 2. quam ſub puncto figuræ 6. Multiplicata autem figura hac Quotientis 1. per totum diuiſorem, ablatoque numero producto ex 56. remanent 15. ita vt ad ſequens punctum ſpectent quatuor hæ figuræ 1578.

```
15
456789012 (213
.  .  .  .  .
24123
4
```

Deinde duplicato Quotiente 21. hactenus inuento, vt fiant 42. pono 2. ſub 7. & 4. ſub 5. Diuidendo autem 157. per 42. reperio Quotientem 3. quem pono & in Quotiente, & ſub puncto figuræ 8. Multiplicata autem hac figura Quotientis 3. per totum diuiſorem 423. ſubtractoque numero producto ex 1578. relinquuntur 309. Pertinebunt ergo ad ſequens punctum quinq; iſtæ figuræ 30990.

```
30
1519
456789012 (2137
.  .  .  .  .
2412367
442
```

Rurſus duplicato Quotiente 213. hactenus inuento, vt fiant 426. ſcribo 6 ſub 9. & 2. ſub 9. & 4. ſub 0. Diuidendo autem 3099. per 426. inuenio Quotientem 7. quem ſcribo tam in Quotiente, quam ſub puncto figuræ 0. Multiplicata vero hac Quotientis figura 7. per totum diuiſorem 4267. detractoq; producto numero ex 30990. remanent 1121. atq; adeo ad punctum ſequens pertinebunt ſex hæ figuræ 112112.

```
1
21
3052
151971
456789012 (21372
.  .  .  .  .
241236742
44227
4
2
```

Poſtremo duplicato Quotiente 2137. hactenus inuento, vt fiant 4274. colloco 4. ſub 1. & 7. ſub 1. & 2. ſub 2 & 4. ſub 1. Diuidendo autem 11211. per 4274. reperio Quotientem 2. quem ſcribo & in Quotiente, & ſub puncto figuræ 2. Multiplicata autem hac Quotientis figura 2. per totum diuiſorem 42742. & dempto producto numero ex 112112. ſuperſunt 26628. Numerus ergo propoſitus quadratus non eſt, ac proinde Quotiens inuentus 21372. non eſt eius radix, ſed alterius numeri, qui eſt maximus quadratus in dato numero comprehenſus, qualis eſt numerus 456762384. Nam proxime maior quadratus, qui videlicet habet radicem vna vnitate maiorem radice inuenta 21372. conſtituit numerum maiorem propoſito numero.

```
136
2186
305272
15197138
456789012 (21372
.  .  .  .  .
241236742
44227
4
```

Extractio radicis quadratæ per Dandam. Poteſt etiam fieri radicis quadratæ extractio, more Italorum per Dandam, vt in diuiſione numerorum integrorum explicauimus, qui modus ſecuriſſimus eſt. In eo enim omnis confuſio vitatur, ſi forte nimis parua, magnaue figura accipiatur: propterea quod nullæ figuræ delentur. Modus autem eſt hic. Sit eruenda radix quadrata ex hoc numero 456789 ſignatis punctis, vt dictum eſt, pono in Quotiente figuram 6. radicem videlicet maximi quadrati in vltimo puncto 45. contenti, eandemq; figuram 6. ſcribo ad dexteram, quemadmodum in diuiſione per Dandam ad dextram quoq; diuiſorem collocauimus: & dico. Ex 6. figura Quotiẽtis in 6. figuram in parte dextra collocata fiunt 36. quæ ex 45. ſubtraho hoc modo. Quoniam 6. ex 5. detrahi nequeunt, detraho 6. ex 10. & reſiduo 4. addo 5. vt fiant 9. quæ ſub 5. ſcribo, ac mente retineo 4. nimirum 3. propter 30. & 1. propter 10. quæ 4. ſubducta ex 4. nihil relinquunt, ideoq; punctum ſubſequens erit 967.

```
456789 (675.  |  6.
 .  .  .      |  127.
9             |  1345
78
1164
```

Dein-

Deinde duplicatur figura 6.inuenta,vt fiant 12.per quæ diuido ſequens punctum 967.omiſſa tamen figura 7.ſub qua punctum eſt ſcriptum: Et dico. In 9.continetur 1.ſepties (Nam octies contineri non poteſt) ſcribo ergo 7.tam in Quotiente, quam ſeorſum poſt diuiſorem 12.atq; figuram 7 multiplico in totum numerum 127. hoc modo ex 7.in 7.fiunt 49. Et quia 9.ex 7.detrahi non poſſunt, detraho 9.ex 10. relinquamq; 1. addo ad 7. vt fiant 8.quæ ſcribo ſub 7. ita tamen vt figura 8. demiſſior ſit quam 9. atq; retineo 5.nimirum 4.propter 40.& 1. propter 10.Rurſus ex figura 7.inuenta in 2.fiunt 14.additiſq; 5.quæ reſeruauimus,efficio 19.Et quia 9.ex 6.ſubtrahi nequeunt detraho 9.ex 10 & reliquæ 1.addo 6. vt fiant 7. ſub 6.iuxta 8.ſcribenda, retineoq; 2. nimirum 1. propter denam numeri 19.& 1.propter 10.à quibus detraximus 9.&c. Tandem ex eadem figura 7.inuenta in 1. fiunt 7 additiſq; 2.quæ ſeruauimus,fiunt 9.qua ſubducta ex 9.nihil ſupereſt, idcircò nihil ſcribendum eſt ſub 9. eritq; ſequens punctum,quod eſt vltimum 7889.

Poſtremo tota radix 67.hactenus inuenta duplicanda eſt,vt fiant 134. per quæ diuido punctum vltimum 7889.relicta tamen figura 9.ſupra punctum poſita: Et dico. In 7.continetur 1.quinquies. Pono ergo 5. in Quotiente, & poſt diuiſorem 134.& figuram 5 duco in totum numerum 1345.hoc modo. Ex 5.in 5. fiunt 25. ablatiſque 5.ex 9.ſuperſunt 4.quæ pono ſub 9.& reſeruo 2.propter 20.Atque iterum dico. Ex figura 5. inuenta in 4 fiunt 20.additiſque 2.quæ ſeruauimus, fiunt 22. Detractis autem 2. ex 8.ſuperſunt 6.quæ ſub 8.ſcribo: & mente retineo 2.propter 20.ſiue duas denas.Rurſus dico. Ex inuenta figura 5.in 3.fiunt 15.additiſque 2. quæ ſeruata ſunt fiunt 17. Demptis autem 7.ex 8.remanet 1.quã pono ſub 8.& reſeruo 1.propter 10.ſiue propter vnam denam.Tandem dico. Ex eadem figura 5.inuenta in 1.fiunt 5 additaq; 1. quam ſeruauimus,fiunt 6. quæ ſubtracta ex 7.relinquunt 1. quam ſub 7.pono.Atq; ita tota radix inuenta eſt 675.ſuperſuntq; 1164. Ex quibus formatur fractio hæc $\frac{1164}{1351}$. ita vt radix propinqua (vt in appropinquatione radicum in ſequenti cap.dicemus) ſit $675\frac{1164}{1351}$.minor tamen; quam vera,cum eius quadratus numerus hic tantummodo $456788\frac{1607533}{1825201}$.

Atque modus hic extractionis præclarus eſt: quippe cum in eo omnia reſidua operationum diſtincte, & ſine confuſione appareant, adeo vt ſi in Quotientem accepta forte eſſet figura nimis magna, aut parua, (nimis quidem magna foret, ſi numeri producti à puncto propoſito ſubtrahi non poſſent, nimis vero parua, ſi facta ſubtractione, reſiduum maius eſſet duplo radicis inuentæ) facili negocio error poſſit corrigi, quemadmodum ſupra in Diuiſione per Dandam dictum eſt.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex eſt, quemadmodum & diuiſionis integrorum. Primum enim fit per abiectionem 9.alterum per abiectionem 7.& tertium per multiplicationem,vt in diuiſione integrorum dictum eſt. Sed radix inuenta accipienda eſt hic loco diuiſoris:quia ſi numerus propoſitus diuidatur per radicem inuentam, fiet Quotiens eadem radix: Et ſi quid ſuperfuerit in extractione radicis, idem ſupererit in diuiſione, dummodo in Quotiente ſumantur eædem figuræ radicis inuentæ, licet in vltima diuiſione partiali maior aliquando figura ſumi poſſet, quando nimirum reſiduum extractionis radicem exceſſerit. Itaq; prius exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9.ex radice 4602.remanent 3.quæ in vtroq; latere crucis ſcribo, propterea quod radix eſt & diuiſor,& Quotiens,vt diximus. Multiplicatis iam inter ſe duabus hiſce figuris 3.& 3.fiunt 9.reiectiſque 9. remanet 0. in ſuperiori parte crucis collocanda. Tandem reiectis 9.ex propoſito numero,remanet etiam 0. Poſterius autem exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 6.ex radice 21372.remanent 6.in vtroq; latere crucis ponenda. Multiplicatis autem inter ſe hiſce figuris 6.& 6. fiunt 36.reiectiſq; 9.ex 36.& ex reſiduo extractionis,ſuperſunt 6. Tantundem remanet,ſi reiiciantur 9.ex dato numero.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex.

0
3 X 3
0

6.
6 X 6
6.

Quod ſi multiplicetur radix prioris numeri in ſe producetur idem numerus prior. Itẽ ſi radix numeri poſterioris in ſe multiplicetur, productoq; numero addatur reſiduũ extractionis gignetur idẽ numerus poſterior.

Obiter etiam hic animaduertendum eſt, in nulla extractione radicis quadratæ reſiduum, ſi quod eſt, maius eſſe poſſe,quam duplum radicis inuentæ. Si enim ſuperaret duplum radicis inuentæ, vel vna vnitate, haberet numerus propoſitus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta eſt. Ratio huius rei eſt, quod quilibet quadratus ſuperat proxime minorem numerum quadratum duplo radicis ipſius minoris quadrati, & inſuper vna vnitate;adeo vt, ſi addatur 1. ad duplum radicis cuiuſuis quadrati,& hoc aggregatum ad quadratum proxime minorem, fiat quadratus proxime maior. Vt quadratus numerus 64.ſuperat numerum quadratum 49.numero 15.Conſtat autem numerum 14.duplum eſſe radicis quadrati 49.quæ eſt 7 ſupereſſeq; vnam adhuc vnitatem in 15.ac proinde,ſi addatur 1.ad 14. duplum radicis 7.& hoc aggregatum ad 49. fieri quadratum numerum 64.proxime maiorem quàm 49.cuius radix eſt 7. Si igitur proponat quis numerum 63.vt eius radix quadrata eruatur,reperietur radix 7.ſupereruntq; 14.quæ radicis ſunt dupla:Si vero quis propõneret numerũ 64.inueniretur radix 7. erratum eſſet,quia ſupereſſent 15.quæ maiora ſunt,quàm duplum radicis 7. Quare radix numeri 64.erit 8.

Reſiduum in extractione quadratæ radicis maius eſſe non poteſt quam duplum radicis inuentæ.

Quæ ſit differentia inter duos quadratos proximos.

APPROPINQVATIO RADICVM IN NVMERIS NON QVADRATIS.

CAPVT XXVII.

QVONIAM cum numerus propoſitus non eſt quadratus, inuenta radix in ſe multiplicata producit numerum minorem numero ipſo,quemadmodum in poſteriori exemplo patuit,vbi radix in ſe multiplicata gignit numerum, qui à numero propoſito ſuperatur toto hoc numero 26628. monſtrabimus hoc loco duplicem viam, qua radix propinquior inueniatur, ita vt eius numerus quadratus à propoſito numero non quadrato inſenſibili fere differentia diſtet. Vera enim radix numero exprimi non poteſt,ſed ſolum per lineam,vt in pleniore noſtra Arithmetica demonſtrabitur. Priori via reperietur radix propinquior quidem in infinitum, ſed tamen minor,quam vera; adeo vt eius quadratus numerus ſemper à numero propoſito ſuperetur. Poſteriori via inuenietur radix propinquior quoq; in infinitum, ſed quæ veram excedat; ita vt eius numerus quadratus maior ſemper ſit numero propoſito Vtraq; porro via demonſtrata eſt Geometrice & à Theone Alexandrino in lib. 1. Almageſti Ptolemæi, & à Federico Commandino in lib. Archimedis de dimenſione circuli.

Quo modo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor ſit quã vera.

Prior ergo via ita ſe habet.Inuenta radice maximi quadrati in propoſito numero comprehenſi, adijciatur

ad eam fractio, cuius numerator eſt reſiduum extractionis, quo nimirum propoſitus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in ſe multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ, & præterea vnitas, qua nimirum radix numeri quadrati, qui proxime maior eſt propoſito numero, ſuperat radicem inuentam numeri quadrati, qui proxime minor eſt numero propoſito. Hac enim ratione compoſita erit radix multo propinquior, quam inuenta, minor tamen, quam vera. Ad quam ſi addatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo propoſitus numerus non quadratus excedit quadratum radicis propinquioris iam inuentæ, per numerum compoſitum ex duplo eiuſdem radicis propinquioris, & exceſſu, quo radix quadrati numeri proxime maioris ſuperat radicem propinquiorem inuentam, exurget radix adhuc propinquior, minor tamen quam vera. Ad quam ſi iterum apponatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo propoſitus numerus non quadratus ſuperat quadratum radicis propinquæ vltimo loco inuentæ, per numerum compoſitum ex duplo eiuſdem vltimæ radicis propinquæ & exceſſu, quo radix quadrati numeri proxime maioris excedit radicem eandem vltimam propinquam, efficietur adhuc propinquior radix, minor tamen, quam vera. Atque hoc modo licebit ſemper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, ſed ſemper radix aliquanto minor, quam vera.

Exemplum. Sit propoſitus numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris eſt 4. quæ in ſe multiplicata producit 16. ſuperſuntq; 4. Si ergo ad radicem 4. addatur fractio $\frac{4}{9}$. cuius numerator eſt reſiduum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. & præterea 1. fiet propinquior radix $4\frac{4}{9}$. Huius enim quadratus numerus eſt $19\frac{61}{81}$. qui minor quidem eſt, quam propoſitus numerus 20. ſed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Ablato hoc quadrato $19\frac{61}{81}$. ex numero propoſito non quadrato 20. ſuperſunt $\frac{20}{81}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero propoſito, excedit radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam hac minutia $\frac{5}{9}$. quæ addita ad duplum radicis propinquæ $4\frac{4}{9}$. hoc eſt, ad $8\frac{8}{9}$. facit numerum $9\frac{4}{9}$. per quem ſi diuidatur reſiduum illud $\frac{20}{81}$. fiet Quotiens $\frac{180}{6885}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam faciet radicem propinquiorem $4\frac{3240}{6885}$. hoc eſt, $4\frac{8}{17}$. Huius enim numerus quadratus eſt $19\frac{285}{289}$. qui minor quoq; eſt, quam numerus propoſitus 20. nō quadratus, ſed magis ad eum accedit, q̃ quadratus $19\frac{61}{81}$. radicis $4\frac{4}{9}$. ante hanc radicē $4\frac{8}{17}$. inuentæ.

Rurſus ſubtracto hoc quadrato numero $19\frac{285}{289}$. ex propoſito numero 20. non quadrato, ſuperſunt $\frac{4}{289}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero propoſito excedit radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam minutia hac $\frac{9}{17}$. quæ addita ad duplum vltimæ radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. hoc eſt, ad $8\frac{16}{17}$. facit numerum $9\frac{8}{17}$. per quem ſi diuidatur reſiduum illud $\frac{4}{289}$. fiet Quotiens $\frac{68}{46529}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam, facit radicem propinquiorem $4\frac{21964}{46529}$. hoc eſt $4\frac{76}{161}$. Huius enim numerus quadratus eſt $19\frac{25901}{25921}$. qui minor quoq; eſt propoſito numero 20. non quadrato, magis tamen ad eum accedit, quam quadratus $19\frac{285}{289}$. radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. ante hanc radicem $4\frac{76}{161}$. inuentæ. Atq; in hunc modum licebit ſemper magis ac magis ad veritatem accedere, ad quam tamen nunquam perueniemus, ſed ſemper ab ea deficiemus.

Quomodo reperiatur radix propinquior, quæ tamen maior ſit, quam vera.

Poſterior autem via hæc eſt. Inuenta radice maximi quadrati in propoſito numero comprehenſi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator eſt reſiduum extractionis, quo nimirum propoſitus numerus quadratum numerum proxime minorem, quem radix inuenta producit in ſe multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ. Componetur enim hac ratione radix multo propinquior, quam inuenta, maior tamen, quam vera. A qua ſi auferatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo quadratus numerus radicis propinquioris iam inuentæ excedit numerum propoſitum, per duplum eiuſdem radicis propinquioris, relinquetur radix adhuc propinquior, maior tamen, quam vera. A qua ſi rurſus detrahatur id, quod prouenit ex diuiſione exceſſus, quo numerus quadratus radicis propinquæ vltimo loco inuentæ ſuperat numerum propoſitum, per duplum eiuſdem radicis vltimæ propinquæ, remanebit adhuc proquinquior radix, maior tamē quam vera. Atque hoc modo licebit ſemper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamen vera radix inuenietur, ſed ſemper radix aliquanto maior, quam vera.

Exemplum. Sit propoſitus idem numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris eſt 4. quæ in ſe multiplicata facit 16. ſuperſuntq; 4. Si ergo ad radicem 4. adijciatur fractio $\frac{4}{8}$. cuius numerator eſt reſiduum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. fiet propinquior radix $4\frac{4}{8}$. hoc eſt, $4\frac{1}{2}$. Huius enim numerus quadratus eſt $20\frac{1}{4}$. qui maior quidem eſt, quam propoſitus numerus 20. ſed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Iam vero, ſi $\frac{1}{4}$. exceſſus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{4}$. proxime inuentæ ſuperat numerum propoſitum 20. diuidatur per duplum radicis propinquæ $4\frac{1}{2}$. iam inuentæ, hoc eſt, per 9. fiet Quotiens $\frac{1}{36}$. qui ablatus ex radice $4\frac{1}{2}$. proxime inuenta relinquet propinquiorem radicem $4\frac{34}{72}$ hoc eſt, $4\frac{17}{36}$. Huius enim numerus quadratus eſt ex $20\frac{1}{1296}$. qui maior quoq; eſt numero propoſito 20. ſed minus ab eo diſtat, quam quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$. ante hanc inuentæ.

Quod ſi rurſus $\frac{1}{1296}$. exceſſus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{1296}$. radicis $4\frac{17}{36}$. proxime inuentæ ſuperat propoſitum numerum 20. diuidatur per duplum radicis $4\frac{17}{36}$. iam inuentæ, id eſt, per $8\frac{34}{36}$. hoc eſt per $8\frac{17}{18}$. fiet Quotiens $\frac{1}{11592}$. qui ſubductus ex radice $4\frac{17}{18}$ proxime inuenta relinquet radicē propinquiorem $4\frac{10946}{23184}$. hoc eſt, $4\frac{5473}{11592}$. Huius enim quadratus numerus eſt ſequens $20\frac{1}{134374464}$. qui maior etiam eſt numero propoſito 20. ſed minus ab eo diſtat, quam quadratus $20\frac{1}{1296}$. radicis $4\frac{17}{36}$. ante hanc inuentæ. Atq; in hunc modum licebit ſemper magis ac magis accedere ad veritatē, ad q̃ tamen nunq̃ perueniemus, ſed ſemper eam excedemus.

Alia extractio radicis quadratæ propinqua.

Libet hoc loco explicare aliam rationem inueniendi radicem ſatis propinquam per vnicam extractionem radicis, quæ Mathematicis valde familiaris eſt, atq; vſitata. Eſt autem eiuſmodi. Poſt numerum cuius radix quæritur, apponantur aliquot binarij cifarum vt 0000. vel 000000. vel 00000000. &c. quo autem plures cifrarum binarij apponantur, eo propinquior radix eruetur. Poſtea ex toto numero cum appoſitis cifris extrahatur radix, vt traditum eſt, ex qua ad dextram tot figuræ abſcindantur, quot binarij cifrarum appoſiti fuere ad numerum propoſitum. Reliquæ namq; figuræ radicem exhibebunt, vna cum minutia, cuius numerator erit numerus per figuras abſciſſas expreſſus, denominator autem erit 10. ſi vnus tantum binarius cifrarum fuit appoſitus vel 100. Si duo binarij fuere appoſiti, vel 1000. ſi tres binarii &c. ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c.

Sit

Sit v.g. eruenda radix quadrata ex 20. Appoſitis tribus cifrarum binariis, exurget numerus 20000000. cuius radix per Dandam eruta eſt 4472. (Negligimus hic reſiduum 1216.) Demptis tribus figuris 472. ad dexterã propter tres binarios Cifrarum appoſitos, erit radix $4\frac{472}{1000}$. ſatis propinqua, minor tamen quam vera, cum eius quadratus numerus ſit tantum $\frac{19998784}{1000000}$. hoc eſt, $19\frac{998784}{1000000}$. qui paulo minor eſt numero dato 20. Quod ſi ad numeratorẽ adijcias 1. fiet radix $4\frac{473}{1000}$. maior quam vera, quippe cum quadratus eius numerus ſit $20\frac{7729}{1000000}$. paulo maior dato numero 20.

20000000(4472	4
	84
	887
	8942

4
64
191
1216

Hac porro ratione recte inueniri propinquam radicem quadratam demonſtratum, à nobis eſt in Geometria practica lib. 6. propoſ. 20.

Extractio radicis quadratæ propinquæ ex minutiis.

Eadem hæc ratio locum etiam habet in numeris fractis. Nam ſi tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Cifrarum binarij, fiet ex radice Numeratoris illis Cifris aucti Numerator, & ex radice Denominatoris totidem Cifris aucti Denominator. Vt ſi deſideretur radix huius minutiæ $\frac{2}{3}$. Additis duobus binariis cifrarum fit minutia $\frac{20000}{30000}$. Radix numeratoris eſt 141. & Denominatoris 173. Ergo radix propinqua minutiæ $\frac{2}{3}$. erit $\frac{141}{173}$. cuius quadratus numerus eſt $\frac{19881}{29929}$. paulo minor quam $\frac{2}{3}$. & ſic de aliis.

Lege quæ in Geometria practica lib. 4. cap. 2. num. 5. & lib. 6. propoſ. 21. ſcripſimus. Ibi enim reperies rationem facilem extrahendi radicem quadratam ex qualibet minutia non quadrata.

EXTRACTIO RADICIS CVBICÆ.

CAPVT XXVIII.

Numerus Cubus quid.

CVBVS eſt numerus qui ex aliquo numero in ſe ipſum multiplicato, deinde in productum gignitur, qualis eſt 8. qui ex multiplicatione numeri 2. in ſe ipſum, & in productum numerum 4. producitur. Item 27. qui producitur ex 3. in ſe, & in productum 9. Item 103823. quia gignitur ex 47. in ſe, & in productum 2209. &c. Vnitas quoq; ab Arithmeticis numerus cubus, licet improprie, nominatur, propterea quod ex 1. in ſe, & in productũ 1. producitur. Numerus a. qui in ſe multiplicatus, & in productũ, cubum procreat, vocatur latus, ſiue radix cubi.

Extractio radicis cubicæ quid.

Extractio igitur radicis Cubicæ ex dato numero eſt inuentio numeri qui in ſe primum multiplicatus, deinde in productum procreet datum numerũ, ſi cubus eſt, vel ſi non eſt cubus, maximum numerum cubum in eo contentum. Vt extractio radicis cubicæ ex numero 59319. eſt inuentio numeri 39. quia hic in ſe ductus, & in productum 1521. gignit numerum 59319. propoſitum. Item extractio radicis cubicæ ex numero 116592. eſt inuentio numeri 48. quia hic in ſe ductus, & in productũ 2304. producit numerũ 110592. qui eſt maximus cubus in dato numero 116592. contentus: quippe cum proxime maior cubus, cuius latus, ſiue radix eſt 49. vna vnitate maior quam 48. ſit 117649. Difficilior autem eſt extractio radicis cubicæ, quam quadratæ, & quam variis viis præſcribunt Auctores. Nos eam trademus, quam nouam quodammodo lib. 6. Geometriæ Practicæ ad finem propoſ. 19. extraximus. Eſt autem eiuſmodi.

Quomodo numerus, cuius radix quæritur punctis ſit ſignandus.

Primum numerus propoſitus, cuius radix cubica eruenda eſt, ſignandus eſt punctis quibuſdam, poſito puncto ſub prima figura ad dextram, vel ſupra ipſam figuram & alio ſub quarta figura, omiſſis duabus figuris in medio, atq; alio ſub ſeptima, omiſſis duabus aliis in medio, & ſic deinceps ſub decima, decima tertia, &c. relictis ſemper duabus figuris poſt quodlibet punctum, ita vt quoduis punctum habeat tres figuras, illam videlicet, ſub qua punctum eſt ſignatum, & alias duas, quæ hanc verſus ſiniſtram præcedunt, excepto vltimo puncto ad ſiniſtram, quod aliquando vnicam figuram habet, aliquando vero duas tantum. Tot autem figuras habebit radix propoſiti numeri, quot puncta ſignata ſunt. Vt hic numerus 256047896. ſignabitur, vt in hac formula cernis, habebitq; eius radix cubica tres figuras. Hic vero numer⁹ 3456789012786. ita ſignabitur, eiuſq; radix quinq; figuris ſcribetur.

Quot figuras habeat radix cubica dati numeri.

256047896
· · ·

Quo pacto radix cubica ex dato numero eruatur.

Deinde in promptu eſſe debet appoſita hæc tabella cõtinens cubos nouem figurarũ Arithmeticarum vt primum punctum ad ſiniſtram expediri poſſit. Quibus paratis ſit eruenda radix cubica ex numero 256047896. Notatis punctis vt diximus, ex primo puncto 256. ad ſiniſtram ſubtraho cubũ 216. (cuius radix 6.) maximum in eo contentum. Et quia remanent 40. erit ſequens punctum 40047. & prima radicis figura 6.

Radices	Cubi
1.	1
2.	8
3.	27
4.	64
5.	125
6.	216
7.	343
8.	512
9.	729

Paro diuiſorem, multiplicando quadratum radicis 6. cubi ſubtracti, nimirum 36. per 300. qui erit 10800. per quẽ ſi diuidam meum punctũ 40047. inueniam Quotientem 3. pro ſecunda figura radicis. Hanc duco in 10800. diuiſorem inuentum, facioq; 32400. Deinde duco quadratum nouæ figuræ inuentæ 3. nimirum 9. in productum ex prima figura inuenta 6. in 30. videlicet in 180. facioq; 1620. Poſtremo ad ſummam duorum horum productorum 32400. 1620. id eſt, ad 34020. adijcio cubum inuentæ nouæ figuræ 3. nimirum 27. totamque ſummã 34047. ex meo puncto 40047. ſubtraho. Et quia ſuperſunt 6000. erit vltimum punctum 6000896. ſcribo ergo inuentam figuram 3. poſt priorẽ 6. id eſt, poſt radicem maximi cubi 216. ex primo puncto ſubtracti.

Radix propoſiti numeri 635.

32400
1620
———
34020
27
———
34047

Poſt hæc paro eodem modo diuiſorem nouum pro vltimo puncto, hoc modo. Quadratum totius radicis 63. hactenus inuentæ hoc eſt 3969. duco iterum in 300. Productus namq; numerus 1190700. erit diuiſor, per quem ſi diuidam meum punctum 6000896. reperiam Quotientem 5. ſcribendum poſt radicem 63. hactenus inuentam. Hanc figuram 5. inuentam ſimiliter duco in diuiſorem inuentum 1190700. facioq; 5953500. Deinde quadratum eiuſdem nouæ figuræ 5. nimirum 25. duco in productum ex radice 63. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc eſt in 1890. efficioq; 47250. Poſtremo ad ſummam horum duorum productorum 5953500. 47250. adijcio cubum 125. figuræ 5. inuentæ, ac totam ſummam 6000875. ex meo puncto ſubtraho, id eſt, ex 6000896. ſuperſuntque 21. Numerus ergo propoſitus cubus non eſt, ac proinde Quotiens in-

40047
34047
———
6000

5953500
47250
125
———
6000875

uentus 635. non eſt eius radix cubica, ſed alterius numeri qui eſt maximus cubus in dato numero comprehenſus, qualis eſt, 256047875. Nam proxime maior cubus habens radicem vna vnitate maiorem radiçe inuenta 635, conſtituit numerum maiorem propoſito numero.

Quod ſi ſupereſſet aliud punctum, ducendus eſſet quadratus totius radicis 635. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuiſor exurgeret, &c. Ex hoc porro exemplo declarato ſatis puto intelligi regulam noſtram pro extractione cubica ab aliorum quidem regulis nonnihil differentem, ſed meo iudicio faciliorem.

Quantum poſſit eſſe reſiduum in Extractione Cubica.

Sciendum autem eſt, in nulla Extractione radicis cubicæ reſiduum, ſi quod eſt, maius eſſe poſſe, quam triplum quadrati radiçis inuentæ, vna cum triplo eiuſdem radicis: alias haberet numerus propoſitus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta eſt. Ratio eſt, quod quilibet çubus ſuperat proxime minorem cubum triplo, quadrati ex radiçe minoris cubi producti, vna cum eiuſdem radicis triplo, & inſuper vna vnitate, adeo vt ſi addatur 1. ad triplum quadrati ex radice cuiuſuis cubi producti, & ad triplum eiuſdem radicis, atq; hæc ſumma ad eum cubum adijciatur, fiat cubus proxime maior. Vt cubus numerus 27. ſuperat cubum 8. numero 19. Conſtat autem numerum 18. conflatum eſſe ex triplo quadrati radicis 2. hoc eſt ex 12. & ex triplo ipſius radicis 2. nimirum ex 6. atq; adeo, ſi addatur 1. confici differentiam inter duos cubos proximos 8. & 27.

Quanta ſit differentia inter duos cubos proximos.

Quo pacto cognoſcatur, num figura ſumpta ſit nimis parua in Quotiente.

Itaq; ſi quando in Extractione tam magnus numerus fuerit reſiduus, vt dubites, te in Quotiente figuram ſumpſiſſe nimis paruam. (Nam ipſa operatio, quando ſubtractio fieri nequit, docet nimis magnam fuiſſe figuram aſſumptam) capiendum eſt triplum quadrati radicis ad eam vſq; operationem inuentæ, vna cum triplo eiuſdem radicis. Si enim ſumma horum duorum numerorum minor fuerit reſiduo extractionis, ſcito, te nimis paruam figuram in Quotientem ſumpſiſſe. Si vero dicta ſumma æqualis fuerit reſiduo, vel maior, recte in Quotiente figuram fuiſſe aſſumptam. Idem cognoſces ſi periculum feceris cum figura maiore. Si namq; multiplicationes fiant, vt in regula præcipitur, & ſubtractio fieri non poſſit, recte accepta fuit figura prior, ſi vero fieri poſſit ſubtractio, figura accepta fuit nimis parua.

Probatio Extractionis radicis cubicæ triplex.

Examen extractionis radicis Cubicæ tribus etiam modis fieri poteſt, vt & diuiſionis integrorum, & Extractionis radicis Quadratæ: primo videlicet modo per abiectionem 9. altero per abiectionem 7. ac tertio per multiplicationem, vt in diuiſione integrorum dictum eſt: ſed radix inuenta ſumenda hic eſt pro diuiſore. Vt exemplum ſuperius ita per 9. examinabitur. Reiectis 9. ex radice 635. remanent 5. quæ in vtroq; latere crucis colloco: propterea quod radix loco diuiſoris ſumitur, & pro Quotiente, vt diximus. Multiplicatis iam duabus hiſce figuris 5. & 5. inter ſe, & producto 25. ducto in eandem figuram 5. vt gignatur Cubus 125. figuræ 5. atq; ex hoc cubo vna cum reſiduó extractionis 21. reiectis 9. ſuperſunt 2. collocanda in ſuperiori parte Crucis. Et quia ſi abijciantur 9. ex numero propoſito, remanent quoq; 2. in inferiori parte Crucis ſcribenda, recte fuit radix extracta.

2
5 X 5
2

At per 7. ita idem exemplum examinabitur. Reiectis 7. ex radice 635. remanent 5. quæ in vtroq; Crucis latere ſcribo. Multiplicata autem figura hac 5. cubicæ, & ex cubo 125. reiectis 7. ſuperſunt 6. quæ addita ad 0. nimirum ad reſiduum, quod remanet ſi ex 21. reſiduo extractionis abijciantur 7. faciunt 6. Et quoniã ſuperſunt etiã 6. ſi ex numero propoſito abijciantur 7. rectius inuenta eſt radix cubica.

6
5 X 5
6

Quod ſi multiplicetur radix inuenta 635. cubice, hoc eſt primum in ſe, deinde in productum, numeroq; genito addatur reſiduum 21. procreabitur propoſitus numerus, ex quo radix eruta fuit.

APPROPINQVATIO RADICVM IN NVMERIS NON CVBIS.

CAPVT XXIX.

Appropinquatio radicis cubicæ.

VT ex numeris, qui Cubi non ſunt, propinqua radix eruatur, non eſt ad hanc vſq; diem inuenta via magis accurata, quam ea, quã in Geometria Practica lib. 6. cap. 20. demonſtrauimus, quæ eſt eiuſmodi. Numero propoſito apponantur aliquot ternarij Cifrarum (quo autem plures Cifrarum ternarij apponentur, eo propinquior radix eruetur) & ex toto hoc numero radix cubica extrahatur, vt traditum eſt. Deinde ex ea radice abiectis ad dextram tot figuris quot Cifrarum ternarij appoſiti fuere, reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda eſt fractio numeratorem habens figuras abiectas, denominatorem vero vnitatem cum totidem Cifris, quot ternarii Cifrarum additi fuerunt, nimirum 10. ſi vnus ternarius fuit additus vel 100. ſi duo ternarii additi fuerunt, vel 1000. ſi tres, & ſic deinceps: ita vt fractio illa cõtineat, vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c.

Exempli cauſa; Ex numero 29160. qui cubus non eſt, eruenda ſit radix cubica propinqua. Apponantur tres ternarij Cifrarum vt in fractione habeantur partes milleſimæ, denominatæ videlicet à 1000. atque ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix Cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus reſiduus, atq; adeo maior radix, quam vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dexteram propter tres Cifrarũ ternarios appoſitos, erit propinqua radix $30\frac{779}{1000}$. minor, q̃ vera, cum eius cubus ſit $29158\frac{188419139}{1000000000}$. maior a. propinqua radix. q̃ vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cub. ſit $29161\frac{230552000}{1000000000}$.

Extractio radicis propinquæ Cubicæ ex minutiis.

Ratio hæc locum etiam habet in numeris fractis. Nam ſi tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Cifrarum ternarij, fiet ex radice numeratoris illis Cifris aucti Numerator & Denominator ex radice Denominatoris illis Cifris aucti, quemadmodum ſupra de radice quadrata fractorum numerorũ diximus.

Aliam rationem expeditam pro extrahenda radice cubica ex dato numero fracto reperies in noſtra Geometria Practica lib. 6. Propoſitione 21.

Agendum iam eſſet de Extractione aliarum radicum, quæ infinitæ ſunt, vt in noſtra Geometria Practica propoſit. 19. explicauimus. Sed quoniam tractatio hæc difficilior eſt, inuentioq; radicis quadratæ, & Cubicæ magis eſt neceſſaria ad libros Archimedis, Ptolomæi, cæterorumq; Mathematicorum intelligendos, conſulto à nobis in pleniorem noſtram Arithmeticam, & in Geometricam Practicam differtur. In ea namq; Arithmetica pleniore non ſolum omnes radices, cum earum appropinquationibus (quod in Geometria quoq; practica lib. 6. fecimus) tractabimus, ſed innumera alia, à quibus in hoc Compendio dedita opera abſtinuimus, exponemus.

FINIS.

INDEX OMNIVM CAPITVM HVIVS ARITHMETICAE.

1 Numeratio integrorum numerorum. pag.3
2 Additio integrorum numerorum. 5
3 Subtractio integrorum numerorum. 7
4 Multiplicatio numerorum integrorum. 10
5 Diuiſio integrorum numerorum. 13
6 Numeratio fractorum numerorum. 22
7 Æſtimatio, ſiue valor fractorum numerorum. 23
8 Fractiones fractorum numerorum. 24
9 Reductio fractorum numerorum ad minimos numeros, ſiue terminos. 25
10 Reductio fractorum numerorum ad eandem denominationem, & ad integra, nec non integrorũ ad fractionem quamcunq; , ac deniq; fractionũ fractorum numerorũ ad ſimplices fractiões. 26
11 Additio fractorum numerorum. 28
12 Subtractio fractorum numerorum. 29
13 Multiplicatio fractorum numerorum. 29
14 Diuiſio fractorum numerorum. 30
15 Inſitio fractorum numerorum. 31
16 Quæſtiunculæ nonnullæ numerorum integrorũ, ac minutiarum. 34
17 Regula trium; quæ alio nomine regula aurea, ſiue regula proportionum dici ſolet. 35
18 Regula trium euerſa. 39
19 Regula trium compoſita. 40
20 Regula Societatum. 40
21 Regula alligationis. 52
22 Regula falſi ſimplicis poſitionis. 55
23 Regula falſi duplicis poſitionis. 58
24 Progreſſiones Arithmeticæ. 65
25 Progreſſiones Geometricæ. 68
26 Extractio radicis quadratæ. 73
27 Appropinquatio radicum in numeris non quadratis. 76
28 Extractio radicis cubicæ. 77
29 Appropinquatio radicum in numeris nõ cubis. 78

INDEX EORVM, QVÆ IN SINGVLIS Capitibus continentur.

IN PRÆFATIONE.

Arithmeticæ præſtantia, atque vtilitas. pag. 2

In numeratione integrorum numerorum.

Numeratio quid. 3
Valor decem figurarum Arithmeticarum quo pacto cognoſcatur. ibid.
Quot loca ſint in quolibet numero. ibid.
Prima figura, & vltima in quouis numero quæ ſit. ibid.
Ordo locorum in quouis numero cur à dextra ſiniſtram verſus procedat. ibid.
Quid qualibet figura in quouis loco poſita ſignificet. ibidem.
Loca in quouis numero ſuperant ſeſe ordine in decupla proportione. ibid.
Quid obſeruandum ſit, vt datus numerus facile exprimatur. ibid.

In additione integrorum numerorum.

Additio quid. 4
Numeri addendi quo pacto ſint collocandi. ibid.
Additio quo pacto fiat. ibid.
Quid agendum ſit quando ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris ſcribendus. 5
Quid faciendum ſit, quando multi numeri addendi ſunt. ibidem.
Probatio additionis per 9. quomodo fiat. ibid.
Qua ratione ex quouis numero reijciantur facile 9. quoties fieri poteſt. ibid.
Nouenarii mirabilis proprietas. ibid.
Probatio additionis per 9. fallax eſt, & quare. 6
Probatio additionis per 9. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax ſit. ibid.
Probatio additionis per 7. quomodo fiat. ibid.
Quo pacto reiicienda ſint 7. ex quolibet numero. ibid.
Probatio additionis per 7. fallax eſt, & quare. ibid.
Probatio additionis per 7. cur ab Arithmeticis adhibeatur, cum fallax ſit. ibid.
Probatio additionis per 7. minus fallax eſt, quam per 9. & quare. ibid.
Tabella probationis per 7. 7
Probatio additionis per additionem quo pacto fiat. ibid.
Probatio additionis per ſubtractionem quo pacto fiat. ibidem.

In ſubtractione integrorum numerorum.

Subtractio quid. ibid.
Vter duorum numerorum maior ſit, quo pacto cognoſcatur. ibid.
Subtrahendus numerus quo pacto locandus ſit ſub eo à quo fit ſubtractio. ibid.
Subtractio quomodo fiat. 8
In ſubtractione quid agendum ſit, quando figura inferior maior eſt, quam ſuperior. ibid.
Facilior ratio ſubtractionis quando figura inferior ſuperiore maior eſt. ibid.
In ſubtractione quid agendum ſit, quando plures ſunt numeri. 9
Probatio ſubtractionis per 9. & 7. quo pacto fiat. ibid.
Probatio ſubtractionis per additionem, & ſubtractionem quo pacto fiat. ibid.

In multiplicatione integrorum numerorum.

Multiplicatio quid. 10
Tabula Pythagorica. ibid.
Tabula Pythagorica quo pacto conſtruatur. ibid.
Vſus tabulæ Pythagoricæ ad cognoſcendũ, quid faciat multiplicatio vnius figuræ in aliam figuram. ibid.
Regula multiplicandi figuram in figuram. ibid.
Numeri in multiplicatione quomodo collocandi ſint. 11
Numerus quiuis per vnam figuram quo pacto multiplicetur. ibid.
Numerus quiuis per numerum pluribus figuris ſcriptum quo pacto multiplicetur. ibid.
Probatio multiplicationis per 9. & 7. quo pacto fiat. 12
Probatio multiplicationis per diuiſorem quo pacto fiat. 12. & 13.
Numeri habentes in principio cifras, quo pacto facilius multiplicentur. 13

In diuiſione integrorum numerorum.

Diuiſio quid. ibid.
Quotiens quid. ibid.
Numeri in diuiſione quomodo ſint collocandi. ibid.
Diuiſio quomodo fiat. ibid.

In quotiente non poteſt poni maior numerus quam 9. ibidem.
Reſiduus numerus in diuiſione ſemper minor eſſe debet quam diuiſor. ibid.
Numerus per vnam figuram quomodo diuidatur. ibid.
Qui numerus dicatur ſupra diuiſorem poſitus. ibid.
Vſus tabulæ Pytagoricæ ad cognoſcendum, quoties figura diuiſoris in ſuprapoſito numero contineatur. ibid.
Quotiens quot poſſit figuras habere. 14
Numerus per plures figuras quo pacto diuidatur. ibid.
Qui numerus dicatur ſupra quamcunq; figuram diuiſoris poſitus. ibid.
Quomdo ducenda ſit figura Quotientis inuenta in diuiſorem. ibid.
Quid agendum ſit cum numero ex diuiſione relicto. 15
Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agendum ſit. ibid.
Quomodo nonnulli ducant figuram Quotientis inuentam in diuiſorem. ibid.
Difficultas diuiſionis in quo conſiſtat. ibid.
Quid agendum ſit, quando in Quotiente ſumpta eſt figura nimis parua vel magna. 16
Quo pacto diuiſio facile inſtituatur, vt non erretur. 18
Diuiſio ab aliis quo modo fiat. 19
Commoditas in modo diuiſionis, quo alij vtuntur. ibid.
Quo pacto hic modus fiat expeditior. ibid.
Alius modus abſoluendi diuiſionem. ibid.
Diuiſio per Dandam quo pacto fiat. 20
Probatio diuiſionis per 9. quo pacto fiat. ibid.
Probatio diuiſionis per 7. quomodo fiat. 21
Probatio diuiſionis per multiplicationem quo pacto fiat. ibidem.
Diuiſio nondum abſoluta quo pacto examinetur. ibid.
Facilitas diuiſionis, quando diuiſor in principio habet aliquot cifras. ibid.
Facilis aliquando fit diuiſio quando diuidendus numerus habet aliquot cifras in principio. 22
Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio fundamenta ſunt omnium, quæ in Arithmetica traduntur. ibid.

In numeratione fractorum numerorum.

Fractus numerus quid. ibid.
Numerator, & Denominator fractionis quid. ibid.
Fractio quæuis quo pacto ſcribatur, & pronuncietur. ibidem.
Fractiones vnde oriantur. ibid.
Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio. ibid.
Fractio quæuis eſt pars aliquota Numeratoris à Denominatore denominata. ibid.

In æſtimatione ſiue valore fractorum numerorum.

Minutiarum valor quo pacto augeatur. 23
Minutiarum valor quo pacto minuatur. ibid.
Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt. ibid.
Si numerator, ac denominator cuiuſuis fractionis per quemcunq; numerum multiplicetur, diuidaturue gignitur eiuſdem valoris fractio. ibid.
Quæ minutia vni integro æquiualeat. ibid.
Quæ minutia minor ſit vno integro. ibid.
Quæ minutia maior ſit vno integro. ibid.
Vtra duarum minutiarum maior ſit, quo pacto cognoſcatur. ibid.
Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pondere, vel menſura exploretur. ibid.
Iulius, Baiochus, & Quatrinus apud Romanos quid ſignificent. 24

In fractionibus fractorum numerorum.

Minutiæ minutiarum quid, & vnde oriantur. ibid.
Minutiæ minutiarum quomodo pronuncientur, ac ſcribantur. ibid.

In reductione fractorum numerorum ad minimos numeros, ſiue terminos.

Minutiæ cur ad minimos terminos reducantur. ibid.
Minutiæ qua arte ad minimos terminos redigantur. 25
Quæ minutia ad minores terminos redigi non poſſit. ibid.
Primus numerus, & primi inter ſe numeri quid. ibid.
Maxima menſura communis Numeratoris, ac Denominatoris minutiæ datæ quo pacto reperiatur. ibid.
Quando Numerator, & Denominator datæ minutiæ non habeant communem menſuram, præter vnitatem. ibid.
Maxima menſura quorumlibet duorum numerorum quo pacto inueniatur. ibid.
Vnde colligatur regula inueniendi maximam menſuram duorum numerorum. 26
Alia ratio redigendarum minutiarum ad minimos terminos. ibid.

In reductione fractorum numerorum ad eandem denominationem, & ad integra, nec non integrorum ad fractionem quamcunq;, ac deniq; fractionum fractorum numerorum ad ſimplices fractiones.

Duæ Minutiæ quo pacto ad eandem denominationem reducantur. ibid.
Inuentio numeri à quotcunq; datis numeris numerati. ibid.
Inuentio minimi numeri à quotcunq; numeris numerati. ibid.
Plures minutiæ, quam duæ, quo pacto ad eundem denominatorem reducantur. 27
Alia ratio reducendi duas minutias ad eandem denominationem. ibid.
Vtilitas minimi numeri à denominatoribus datarum minutiarum numerati. ibid.
Minutia, cuius numerator maior eſt denominatore, quo pacto ad integra reducatur. ibid.
Integra qua ratione ad minutiam quamcunq; redigantur. ibid.
Minutiæ minutiarum quo pacto ad ſimplices minutias reuocentur. ibid.

In additione fractorum numerorum.

Additio minutiarum quomodo fiat. ibid.
In additione minutiarum quid faciendum ſit, quando integra adſunt. ibid.
Praxis addendi minutias diuerſarum denominationum inter ſe. ibid.
Probatio additionis minutiarum per ſubtractionem quomodo fiat. ibid.

In ſubtractione fractorum numerorum.

Subtractio minutiarum quomodo fiat. 29
In ſubtractione minutiarum quid faciendum ſit, quando integra adſunt. ibid.
In ſubtractione, quando plures ſunt minutiæ, quid agendum. ibid.
Praxis ſubtrahendi minutiam à minutia. ibid.
Probatio ſubtractionis minutiarum per additionem quomodo fiat. ibid.

In multiplicatione fractorum numerorum.

Multiplicatio minutiarum, quo pacto fiat. 30

In multiplicatione minutiarum, quando adſunt integra, quid agendum. ibid.
Probatio multiplicationis minutiarum per diuiſionem quo pacto fiat. ibid.
In multiplicatione minutiarum cur producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante. ibid.

In diuiſione fractorum numerorum.

Diuiſio minutiarum quomodo fiat. ibid.
In diuiſione minutiarum, quando adſunt integra, quid agendum. ibid.
Diuiſio minutiarum qua ratione ab aliis tradatur. 31
Probatio diuiſionis minutiarum per multiplicationem quo pacto fiat. ibid.
In diuiſione minutiarum cur aliquando producatur Quotiens maior, quam minutia diuiſa. ibid.
Quando Quotiens maior ſit numero diuidendo in minutiis. ibid.
Quando Quotiens in minutiis minor ſit diuidendo numero. ibid.

In inſitione fractorum numerorum.

Inſitio minutiarum quid. ibid.
Inſitio minutiarum duplex eſt. ibid.
Inſitio minutiarum propter quid excogitata ſit: 32.
Differentia inter inſitionem minutiarum, & reductionem minutiarum. ibid.
Prima regula inſitionis duarum minutiarum. ibid.
Quomodo plures minutiæ, quam duæ, inſerantur per primam regulam. ibid.
Minutiæ inſerendæ per primam regulam non ſunt reducendæ ad minimos terminos ante finem operationis, & quare. ibid.
Summa inſitionis ſecundum primam regulam ſemper minor eſt, quam vnitas & quare. ibid.
Vſus primæ regulæ inſitionis in diuidendo numero integro vna cum minutia per numerum integrum. ibid.
Secunda regula inſitionis duarum minutiarum. 33
Quo pacto plures minutiæ, quam duæ inſerantur per primam regulam. ibid.
Minutiæ inſerendæ per ſecundam regulam reduci poſſunt ad minimos terminos ante finem operat. ibid.

In quæſtiunculis nonnullis numerorum integrorum, ac minutiarum.

Vtilitas quæſtiuncularum quarundam. 34
Inuentio numeri à quo facta eſt ſubtractio, vel facienda, vt propoſitus numerus relinquatur. ibid.
Inuentio numeri ſubtracti, vel ſubtrahendi, ex propoſito numero, vt alius datus numerus ſit reliquus. ibid.
Inuentio numeri cuius datus numerus adijciendus ſit, vel qui dato numero ſit addendus, vt alius numerus datus remaneat. ibid.
Inuentio differentiæ inter datos duos numeros. ibid.
Inuentio numeri diuiſi, aut diuidendi per datum numerum, vt Quotiens propoſitus proueniat. ibid.
Inuentio numeri, qui contineat vel ſit, aut det datam fractionem, ſeu partem, parteſue propoſiti numeri. ibid.
Inuentio numeri, per quem datus nnmerus ſit diuiſus aut diuidendus, vt Quotiens ſit propoſitus numerus. ibid.
Inuentio numeri, per quem datus numerus ſit multiplicandus, vel qui per datum numerum multiplicandus ſit, vt gignatur numerus propoſitus. ibid.
Inuentio duorum numerorum, qui inter ſe multiplicati datum numerum producant. ibid.
Inuentio duorum numerorum, vt vno per alterum diuiſo, proueniat Quotiens propoſitus. 35
Inuentio numeri per quem datus numerus ſit multiplicandus, vel qui multiplicandus ſit per datum numerum, vt producto diuiſo per alium datum numerum proueniat Quotiens propoſitus. ibid.
Inuentio partis, quam datus numerus exhibet reſpectu alterius numeri dati. ibid.
Inuentio numeri, reſpectu cuius datus numerus exhibeat partem propoſitam. ibid.
Inuentio multitudinis partium quarumcunq;, quas datus numerus continet. ibid.

In regula trium, quæ alio nomine regula aurea, ſiue regula proportionum dici ſolet.

Regula trium, ſiue aurea, ſiue proportionum cur ſic dicta ſit. ibid.
Numeri in regula trium quo pacto ſint collocandi. ibidem.
Quo pacto per regulam trium quartus numerus ignotus inquiratur. ibid.
Demonſtratio regulæ trium. 36
Numero per alium diuiſo, ſi diuiſor per Quotientem multiplicetur, cur rurſum numerus diuiſus producatur. ibidem.
Probatio regulæ trium. ibid.
Compendia varia regulæ trium. ibid.
Probationes variæ regulæ trium. 37
Demonſtratio compendiorum regulæ trium. ibid.
Quæſtiones nonnullæ, quibus variæ difficultates regulæ trium explicantur. ibid. & ſeqq.
Quid agendum, quando diuerſæ monetæ, menſuræ, ponderæ, & fractiones in regula trium occurrunt. 38

In regula trium euerſa.

Regula trium euerſa quo pacto quartum numerum eliciat. 39
Quæſtiones aliquot ad regulam trium euerſam ſpectantes. ibid. & ſeq.

In regula trium compoſita.

Regula trium compoſita, quid, & quomodo fiat. 41
Quæſtiones aliquot ad regulam trium compoſitam ſpectantes. ibid. vſq; ad 44.

In regula Societatum.

Regula Societatum quando adhibeatur, & quo pacto fiat. ibid.
Quoties regula trium in regula Societatum adhibenda ſit. ibid.
Quid agendum, quando in regula Societatum eſt diuerſitas temporum. ibid.
Quæſtiones aliquot ad regulam Societatum ſpectantes. ibid. & ſeqq.

In regula alligationis.

Regula alligationis. 52
Regula alligationis quomodo fiat. ibid.
Quæſtiones aliquot ad regulam alligationis ſpectantes. ibid. & ſeqq.
Variis modis fieri poteſt alligatio, ſi res alligandæ plures ſint, quam duæ. 52
Quid agendum, quando in regula alligationis ponuntur plures differentiæ è regione eiuſdem pretij. ibid.
Quid obſeruandum ſit in alligationibus plurium rerum. 53
Quando quæſtio alligationis ſit impoſſibilis. ibid.

In regula falſi ſimplicis poſitionis.

Regula falſi cur ſic dicta ſit. 55
Regula falſi duplex eſt. ibid.
Diſcrimen inter duas regulas falſi. 56
Regula falſi ſimplicis poſitionis quomodo fiat. ibid.

Quæ-

Quæſtiones aliquot ad regulam falſi ſimplicis poſitionis ſpectantes. ibid. & ſeqq.

In regula falſi duplicis poſitionis.

Regula falſi duplicis poſitionis quo pacto fiat. 58
In regula falſi duplicis poſitionis, quando vtraque poſitio veritatem excedit, vel ab ea deficit, fit ſubtractio. ibidem.
In regula falſi duplicis poſitionis, quando vna poſitio veritatem excedit, & altera ab ea deficit, fit additio. ibidem.
Quæſtiones aliquot ad regulam falſi duplicis poſitionis ſpectantes. ibid. & ſeqq.

In progreſſionibus Arithmeticis.

Progreſſio Arithmetica quid. 65
Progreſſio naturalis numerorum, & numerorum imparium, pariumq; quid. ibid.
Arithmetica progreſſio quo pacto continuetur. ibid.
Differentia progreſſionis Arithmeticæ quomodo inueniatur. ibid.
Arithmetica progreſſio decreſcere non poteſt in infinitum. ibid.
Proprietas progreſſionis Arithmeticæ trium numerorum. ibid.
Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quatuor numerorum. ibid.
Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, ſi numerus terminorum fuerit impar. ibid.
Proprietas progreſſionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, ſi numerus terminorum fuerit par. 66.
Summa cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur. ibid.
Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum. ibid.
Numerus terminorum progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus. ibid.
Particularis inuentio ſummæ numerorum imparium. 67
Numerus terminorum in progreſſione numerorum imparium quo pacto reperiatur. ibid.
Particularis inuentio ſummæ numerorum parium. ibid.
Numerus terminorum in progreſſione numerorum parium qua ratione inueniatur. ibid.
Vltimus terminus cuiuſcunq; progreſſionis Arithmeticæ quo pacto eliciatur ex numero terminorum, vna cum primo termino, & differentia progreſſionis. ibid.
Quæſtio de bobus Augiæ. ibid.
Quæſtio de ducibus militiæ. ibid.

In progreſſionibus Geometricis.

Progreſſio Geometrica quid. 68
Geometrica progreſſio quo pacto continuetur. ibid.
Denominator proportionis in progreſſione Geometrica quomodo inueniatur. ibid.
Progreſſio Geometrica decreſcit in infinitum. ibid.
Proprietas progreſſionis Geometricæ trium terminorum. ibidem.
Proprietas progreſſionis Geometricæ quatuor terminorum. ibid.
Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum, ſi numerus terminorum ſit impar. ibid.
Proprietas progreſſionis Geometricæ quotcunq; terminorum ſi numerus terminorum ſit par. ibid.
Summa cuiuſcunq; progreſſionis Geometricæ quo pacto inueniatur. 68
Particularis inuentio ſummæ progreſſionis proportionis duplæ, cuius initium eſt 1. 69
In progreſſione proportionis duplæ incipiente ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, eſt ſumma omnium antecedentium numerorum. ibid.
Si in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. numerus aliquis ſeipſum, vel alium numerum multiplicet quem locum numerus productus occupet. ibid.
Quilibet numerus in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ſeipſum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quam numerus multiplicans ponendum. ibid.
Progreſſio naturalis numerorum quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus ſit in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. ibid.
Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermediis. ibid.
Quo pacto ea, quæ de progreſſione Geometrica incipiente ab 1. dicta ſunt, accommodentur progreſſioni Geometricæ non incipienti ab 1. 70
Quo pacto numerus cuiuſcunque loci in progreſſione Geometrica incipiente à quouis numero inueſtigetur ſine intermediis numeris. ibid.
Summa quotcunque terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, addita prius vnitate, ſeipſam multiplicans producit numerum, qui abiecta prius vnitate, ſumma eſt duplo plurium terminorum. ibidem.
Quo pacto facile inueniatur ſumma 64. terminorum progreſſionis Geometricæ duplæ proportionis ab 1. incipientis. ibid.
Quanta pecunia requiratur vt impleantur 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. quatr. in ſecundo 2. in tertio 4. & ita deinceps progrediendo per proportionem duplam. 71
Quot grana frumenti conſtituant vnum Rubium. ibid.
Quot naues requirantur ad ferendum frumentum in 64. locis ludi latrunculorum poſitum. ibid.
Quot naues requirantur ad ferendam pecuniam in 64. locis ludi latrunculorum poſitam, ſi ad aureos reduceretur. ibidem.
In progreſſione, cuius primus terminus eſt 1. ſecundus 2. tertius vero ſecundi triplus, & ſimiliter quartus tertij triplus, & ita deinceps: quilibet terminus duplus eſt omnium præcedentium. ibid.
Qua arte inueniatur ſumma 64. terminorum ab 1. incipientium, atq; ita progredientium, vt quilibet duplus ſit omnium antecedentium terminorum. ibid.
Alia inuentio eiuſdem ſummæ. 72
Quantum frumentum requiratur, vt impleantur, 64. loca ludi latrunculorum, ita vt in primo loco ponatur 1. granum, in ſecundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps, vt grana ſubſequentis loci ſint dupla omnium granorum in præcedentibus omnibus locis ſimul. ibid.
Quot naues neceſſariæ ſint ad prædictum frumentum portandum. ibid.
Quot naues totam ſuperficiem terræ & maris operirent, ſi ſe mutuo tangerent. ibid.
Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ neceſſariæ ſunt ad proxime dictum frumentum portandum. ibid.
Quot globos toti terræ æquales conſtitueret frumentum in 64. locis proxime dictis contentum. ibid.
Quot naues ferrent aureos ducatos ex quattrinis, qui replerent 64. loca eo modo, quo de granis frumenti dictum eſt. ibid.
Quot globos terræ ac maris prædictæ naues tegerent. ibid.
Qua ratione facile inueniatur ſumma 40. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis 73
Quanti conſtent 40. oppida ſi vendantur ita, vt pro primo ſoluatur 1. quatr. pro ſecundo 2. pro tertio 4. &c. ibidem.

Quomo-

Quomodo breuiter eliciatur ſumma 24. terminorũ progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1.incipientis. ibid.
Quanti conſtet equus habens 24.clauos in pedibus, ſi ita vendatur, vt detur 1.quatr.pro primo clauo, & 2.pro ſecundo, & 4.pro tertio, &c. ibid.

In Extractione radicis quadratæ.

Quadratus numerus quid. ibid.
Radix quadrata quid. ibid.
Extractio radicis quid. ibid.
Numerus, cuius radix quæritur, quomodo punctis ſignetur. ibid.
Quot figuras habeat radix propoſiti numeri. ibid.
Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur. ibid.
Extractio radicis quadratæ per Dandam. 74
Examen extractionis radicis quadratæ triplex. 75
Reſiduum in extractione radicis quadratæ maius eſſe non poteſt, quam duplum radicis inuentæ. ibid.
Quæ ſit differentia inter duos quadratos proximos. ibid.

In appropinquatione radicum in numeris non quadratis.

Quomodo inueniatur radix propinquior, quæ tamen minor ſit, quam vera. ibid.
Quomodo reperiatur radix propinquior, quæ tamen maior ſit, quam vera. 76
Alia extractio radicis quadratæ propinquæ. ibid.
Extractio radicis propinquæ ex minutiis. 77
Cubus numerus quid. ibid.
Extractio radicis cubicæ quid. ibid.
Quomodo numerus, cuius radix cubica quæritur, punctis ſit ſignandus. ibid.
Quot figuras habeat radix cubica dati numeri. ibid.
Quo pacto radix cubica ex dato numero eruatur. ibid.
Quantum poßit eſſe reſiduum in extractione cubica. 78
Differentia inter duos cubos proximos quanta ſit. ibid.
Quo pacto cognoſcatur, num figura ſumpta ſit nimis parua in radice. ibid.
Probatio extractionis radicis cubicæ. ibid.
Appropinquatio radicis cubicæ. ibid.
Extractio radicis cubicæ propinquæ ex minutiis. ibid.

FINIS INDICIS.

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV

ALGEBRA.

MOGVNTIÆ,

Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat

IOANNES VOLMARI.

Cum Gratia & Priuilegio Sacræ Cæſar. Maieſt.

ANNO M. DC. XII.

PROOEMIVM
DE ALGEBRÆ PRÆSTANTIA.

ET dignitate ſumma, & ampliſſimarum laudum præconijs nulli poſtrema ea ars eſt, quam recepto vocabulo Algebram noſtrates appellarunt: ſiue enim eius veluti natiuam originem inquiras, inde vſque ab Arabum felicibus ingenijs repetenda eſt: ſiue honeſtatem, inter Mathematicarum ordinis primas verſatur: ſiue amplitudinem, nullis numerorum ſtatis finibus, nulla magnitudinum mole, nullis gentium priuatis, publicis, priſcis, recentibus, cultis, barbaris inſtitutis, non vllo terrarum, vaſto licet, ambitu continetur. Propoſitum ſiue ſcopus eius eſt, vt certam aliquam à ſenſuum cognitione, ac ſenſu ſecretam quantitatem exploret, & tandem inter duos aliquos numeros æqualitate, ſiue æquatione comperta, deprehendat, atque demonſtret. Venaticæ canis inſtar, quæ ſi quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata deliteſcentem feram ſubodorata fuerit, tamdiu oculis, tamdiu odora narium ſagacitate ſcrutatur ſingula, donec comprehenſam, dentibuſque hærentem prædam domino ſiſtat. Et ſane multo etiam opificium ipſum opus admiratione antecellit, & arduum ſua ſponte facinus, atque præclarum exornat ipſa conficiendi ratio, redditque præſtantius. Perſimile eſt, quod diſſimili in re andabatarum more ludentibus euenire ſolet. Quamdiu enim obuelatis oculis vrgentur ipſi, vrgentque vrgentes ſe, comprehenſuros ſe aliquem nunquam deſperant, è multis tamen, quis tandem ſit intercipiendus, ignotum habent, & fruſtra ſæpe his atque illis tentatis tenebris, vbi aliquem tenuerunt, tum demum detracta vitta, lucem oculi recipiunt, & ludus abſoluitur. Obſcuros enim numeros Algebra nunc addendo, nunc diuidendo, nunc multiplicando, ſuſpenſo velut veſtigio, pertentat, certa, ſe in aliqua Geometrica progreſſione ab vnitate profecta deprehenſuram, quod quærit, in qua tamen progreſſione inuentura ſit, incerta; ac tamdiu cæco labore ludit, tamdiu latitantis numeri tenebras omnes explorat, veſtigat, ac perfert, donec eo progrediatur, & ad eum numerum deueniatur, qui fuerat quæſtioni ſubiectus, qui tum demum in lucem emergit, cum ipſa abſoluitur operatio. Et primò quidem is numerus exiſtit, qui in toto illo numerorum labore vnitatem progreſſionis ab vnitate incipientis proxime conſequitur, tum etiam ij omnes numeri deprehenduntur, qui ad quæſtionem explicandam indagandumque propoſitum additi & diuiſi fuere, vt ſuis deinde locis planum faciemus. Quam igitur ſcopus iſte late vagatur, qui nec genus vllum numerorum, nec vllius magnitudinis diuerſitatem, à ſe alienam putat? vt non numerorum modo latebras omnes detegat, ſed vniuſcuiuſque etiam molis finitam magnitudinem, ſuorum metrum, ponderum momenta, menſurarumque certos terminos aſſequatur; neque vlla Arithmeticæ quæſtio ſubijciatur, quam non veluti ſuam agnoſcat Algebra, atque expediat. Tam multas, tam varias, tam obſcuras, tam difficiles Mathematicæ partes vna Algebra pertractat vniuerſas. Nam quod rerum Mathematicarum inextricabiles nodos ſolui non poſſe, accidit aliquando, aut ſi quid obſcurum extrahi à tenebris nunquam potuit, non huius facultatis præcepta certiſſima, ſed æquationum & æqualitatum difficultates, & quæ nondum innotuit, earundem ratio cauſanda eſt. De his tamen plura ad finem capitis 12. habentur. Illud modo agamus, vt quantis interuallis Algebra Arithmeticæ præceptionibus antecellat, videamus: Quid enim in illa eſt, quod non etiam huius veluti faſces vereatur? quæ exempla tam ſua, quæ tam ancipites quæſtionum ambages, quæ tantæ moles difficultatum, qui tam inextricabiles meandri rerum abditiſſimarum, quæ non ſint omnia illi cum iſta communia? Nihil habet Arithmetica, nihil quod Algebram fugiat; quæ explicare ipſa cum nequeat, cognoſcenda Algebræ tradat, habet quã plurima. Illud vero quam præclarum eſt, quam vnicuique optandum maxime, quam huius facultatis peculiare? Quod enim cæteris commune eſt, vt non ante propoſita difficultas expediri poſſit, nec ne, ſentias, quam totam abſoluas, &, bis iterumque integram repetas, itereſque operationem; id in hac, in ipſo operationis decurſu obuiam fit, & prodit ipſa ſe quæſtio, prius quam labor finem accipiat. Quæ enim ſæpe ſuppoſitæ fallaciæ, & quæſtionum pugnautes inter ſe ſententiæ Algebræ imperitos latent, eas Arithmeticæ ſtudioſus, niſi per hanc exploratas habeat, totus de ꝓpoſitæ quæſtionis ſolutione ſollicitus fruſtra laborat, atq; ad has, atq; ad illas regulas animum refert, experitur ſingulas, ſingulas recognoſcit, torquet ſeſe & conficit, ad extremum inanes labores ſuos ſentit, ſtudiumque infelix damnat. Quare ne illud quidem in hac facultate eſt magnopere verendum, ne laborem vllum temere ſuſceptum, & ad extremum vſque fruſtra toleratum dolendum ſit; quod aliæ Mathematicæ partes accipere quidem ab hac poſſunt, præſtare ipſæ non poſſunt. Atque hæc pauca de præſtantia ac dignitate Algebræ præfationis loco dicta ſint.

Scopus Algebræ.

Algebræ excellentia.

DE INVENTORE ALGEBRÆ AC NOMINE.

CAPVT I.

DE inuentore huius artis non conuenit inter omnes; Gebrum Arabem Aſtronomum aſſerunt non pauci, & à Gebro Algebram dictam contendunt. Vero ſimilius tamen Ioannes Regiomontanus in præfatione Alphragani Diophanto Alexandrino hoc inuentum attribuit. Ipſe enim Diophantus in tredecim librorum præfatione, quos hac de re ſcripſit ad Dionyſium, ſe primum huius ſcientiæ inuentorem profitetur, & à nemine ante ſe in lucem datam, immo ad ſuam vſque ætatem ignotam omnino fuiſſe, pronunciat. Maiorem accepit nomen ipſum varietatem; nam quod inter cæteras Arithmeticæ regulas maxime præſtat, Ars maior à plurimis appellata eſt. Regulam cenſus & rei Latini dixerunt; hoc eſt, regulam Radicis & quadrati. Magna enim ex parte quæſtiones in hac arte propoſitæ ſoluuntur per calculationes radicum, quas ipſi res, & quadratorum, quos ijdem cenſus vocant, vt ſuo loco conſtabit. Apud Italos Regula coſæ (ſeu della coſa) nuncupatur; quod in quæſtionibus ſoluendis ſemper vna radix ponatur, quam ipſi coſam dicunt. Ex quo etiam nomen illud ſortita eſt, quo à multis regula Coſſica nominatur. Non vno eam nomine Arabes omnes nominarunt, Algebram enim quidam vocant, quod apud eos idem ſonat, ac reſtauratio; quia nimirum in quæſtionibus hac arte ſoluendis ad aliquam ſemper æquationem, ſiue æqualitatem eſt deueniendum; in qua, quicquid ablatum, quidquid diminutum eſt, quiquid deeſſe comperitur, reſtaurari oportet. Almuchabulam vero, quod oppoſitionẽ eorum lingua ſignificat, propterea vocant alij, quod in quæſtionum abditis exponendis in hac ſcientia, cum ad æquationem æqualitatemve aliquam peruentum eſt, duo ſemper numeri æquales, diuerſo tamen nomine, ſibi inuicem opponuntur. Atq; hinc poſtremo factum eſt, vt geminatis nominibus Algebram & Almuchabulam aliqui vocauerint; quod ſcilicet tum per reſtaurationem, tum per hanc, quam modo diximus, oppoſitionem, quæſtiones omnes expediat. Harum tamen appellationum rationes is cognoſcet planius, qui quæſtionum, quæ hoc opere continentur, ſolutiones diligentius cognouerit. Vſus tamen apud ſcriptores, vt cum Arabibus Algebra hæc tota noſtra ſcientia communi appellatione diceretur obtinuit.

Varia nomina Algebræ.

HÆC de inuentore & nomine Algebræ dicta ſufficiant. Quæ ſi quam præclara eſt, quam iucunda ſtudioſis ſui, quam omnibus ſe ſe præſtat admirabilem; tam etiam perſpicue tradita eſſet, nec in Arithmeticorum, qui eam docuerunt, obſcuritate declaranda magis, quam in eiuſdem facultatis præceptis explicandis laborandum eſſet, coleretur etiam ipſa inter primas, ſuamque dignitatem pariter, & nominis ſplendorem integrum retineret: nec tam multi ſcriptorum vel ambagibus impediti, vel obſcuritate deterriti, relato repente veſtigio, ante diſcendæ Algebræ voluntatem & ſpem perdiſcendi abieciſſent, quam Algebram ipſam, primo, vt aiunt, è limine ſalutarent.

HORVM mihi laborem leuandi labor incumbit in præſentia, nec moleſtus, licet grauis, nec ſi eius fructus exiſtat, iniucundus. Quod & diuina ope præſtare pro meis viribus enitar. Omnia proinde, quæ ad Algebram ſpectant, ea methodo tradere, difficultatumque moles omnes explanare conabor, vt quiuis mediocriter tantum in Arithmeticæ præceptis verſatus, quam fieri poſſit, nimirum in ea addiſcẽdа laboris experiatur. In quo tamen præſtando, ſicut diligentiam non patiar deſiderari meam, ita eorum à me opinionem alienam puto, ſi qui ſunt, qui vſquequaque perfectam & numeris omnibus abſolutam Algebræ tractationem à me requirant.

NON adeo me amo, vt me tantopere cæteris omnibus, qui ad hanc diem eam deſcripſerunt, præferendum putem; vt quod ipſi non effecerunt, præſtare me poſſe profitear.

ÆQVATIONES eſſe plurimas inter tres pluresve numeros diuerſis nominibus appellatos, probe ſcio, quæ in quæſtionibus Algebræ beneficio diſſoluendis interdum, licet non ita frequenter, incidunt, nec tamen ſatis adhuc compertum apud omnes eſt, qua arte ab ipſis radices ſint educendæ, quarum ego æquationum & eas, quæ adhuc cognitæ exploratæque ſunt, & eas, quæ nondum ſuis è tenebris emerſerunt, cap. 12. enumerabo. Meum igitur hoc opus eſt, ea vna cura, vt quæ inuolute alij, ego explicatius exponam, apertius, quæ illi obſcurius; proferre quæ latent, ardua explanare, facem præferre, ſingula, quo ad mea induſtria feret, dilucide & enucleate tradere atque docere. Poſtremo non tam de Algebræ dignitate & exiſtimatione detrahere illæ æquationes debent, ex quibus radices inuenire nondum didicimus, quam eam quæſtiones infinitæ propemodum commendare, quæ æquationibus inuentis ſoluuntur, certamque, vt ſuis locis conſtabit, ſcientiæ rationem habent. Verum qui ſuos labores non omnino otioſos in Algebræ ſcientia poſuiſſe optat, eum in vulgaribus Arithmeticæ præceptis ſe ſe aliquando exercuiſſe oportebit, nec eorum omnino rudem ad huius cognitionem inſtitutionemque accedere, cuiuſmodi illa ſunt: quæ quaſi fundamenta ſunt tyronibus iacienda; Additio numerorum, ſubtractio, multiplicatio, atque diuiſio, non integrorum modo, ſed & fractorum. His adde proportionum regulam, quæ à pleriſque regula trium nuncupatur; atque his ſimilia non pauca: Proportiones prætérea, progreſſioneſque numerorum tum Arithmeticas, tum Geometricas calluiſſe debet. Tertio noſſe debet radicum omnium extractiones ex quocunque numero, qui proponatur, ſiue integer is fuerit, ſiue fractus. Demum & Geometria, & diſciplinis alijs excultum, nec leuiter expolitum eſſe præſtabit.

Intẽtio authoris.

STVDII præterea plurimum in Algorithmo addiſcendo collocandum erit, quem habet hæc facultas à cæteris peculiarem. Algorithmum vero dicimus tractationem, quæ additionem, ſubtractionem, & alias

Algorithmus quid.

operationes

operationes numerorum complectitur. Eum inquam Algorithmum numerorum quorundam, quos vulgari Arithmetica explicari in vſu non eſt. Eorum porro numerorum triplex omnino genus numeratur. Primum quidem eorum, quos Coſſicos plerique; vel Denominatos dixerunt, ijque in aliqua Geometrica progreſſione quæ ab vnitate ducit initium, reperiuntur; cuiuſmodi ſunt Radices, Quadrati, Cubi, & quæ eiuſdem generis ſunt non pauca, de quibus mox dicere inſtituam. In altero genere inſunt numeri, qui radicales appellantur, vt radix quadrata, cubica, & huiuſmodi cuiuſcunque numeri, ſiue is eam habeat radicem, ſiue non habeat. atque de his diſſeremus, cũ ad caput 16. peruenerimus. Tertij deniq; generis ſunt numeri radicales numerorũ eius generis, quod primo loco poſitum eſt à nobis, quales ſunt radix quadrata, vel cubica, & ſimiles, quotcunq; quadratorum, cuborum, vel radicum, &c. de quibus poſtremus nobis erit labor. Et quoniam eorum numerorũ Algorithmus, quos in ſecundo ac tertio genere collocauimus, difficultatem non minimam, & obſcuritatem habet non contemnendam, de induſtria eum in finem regulæ Algebræ reijci placuit. Nam etiamſi quæſtionum ſatis multæ cum Geometricarum, tum Arithmeticarum per hanc Algebræ regulam enodari ac ſolui nequeant ſine illo Algorithmo; nulla tamen inter Algebræ ſcientiam, & eum Algorithmum cognatio tanta eſt, vt hæc ab illo, tanquam nexu quodam adhæreſcant ſibi, aut nunquam diuelli queat, aut aliquo modo ab eodem pendere dicenda ſit. Primum igitur Algorithmus Coſſicorum, ſiue eorum, qui Denominati dicuntur, numerorum explicandus nobis eſt, qui ad hanc ſcientiam penitus cognoſcendam omnino cenſetur neceſſarius. Tum ipſam Algebræ regulam, eaque omnia perſequemur, quæ ad eiuſdem regulæ plenam cognitionem faciunt; quibus abſolutis, à cap. 16. initium facientes, totoque 26. numerorum radicalium, & abſolutorum & Denominatorum, ſiue Coſſicorum Algorithmum trademus. Extremas partes Ænigmata agent, quibus propoſitis, & tandem explicatis, planior ac perfectior totius regulæ Algebræ ſenſus fiet, & fructus vberior.

Tria genera numerorum in Algebra vſitatorũ.

DE NVMERIS COSSICIS, SIVE DEnominatis.

CAPVT II.

NVMERI Coſſici, ſiue Denominati ſunt omnes numeri cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis. Propoſita namque progreſſione qualibet Geometrica ab vnitate initium ſumente, Primus terminus, id eſt, vnitas numerum abſolutum, & ſimplicem repræſentat: Secundus vero terminus vnitatem ſequens vocatur radix omnium ſequentium, cum ex eius multiplicatione in ſeipſum procreetur tertius, & ex multiplicatione eiuſdem ſecundi termini in tertium producatur quartus, & ſic deinceps, vt in ſcholio propoſ. 10. lib. 8. Eucl. demonſtrauimus. Tertius deinde terminus, quia producitur, vt dictum eſt, ex ſecundo in ſeipſum, dicitur Quadratus, ſeu Cenſus, vel Zenſus, vt nonnulli huius artis periti volunt. Quartus poſtea terminus appellatur Cubus, quoniam fit ex multiplicatione radicis, hoc eſt, ſecundi termini in ſuum quadratum nimirum in tertium terminum, vt diximus. Atque ita deinceps omnes numeri progreſſionis Geometricæ, cuius initium eſt vnitas, denominantur, habita ratione multiplicationis radicis in ſequentes terminos.

Numeri Coſſici qui ſint.

QVIA vero varie huiuſcemodi numeri à varijs auctoribus denominantur, delegimus nos ex omnibus modum quendam denominandi illos numeros facilem, & valde accommodatum, vt denominationes has quantumlibet extendere poſſimus, & appoſitis characteribus deſignare; appellantes nimirum numeros progreſſionis Geometricæ, numeros Coſſicos. qua quidem in re nonnullos ſcriptores recentiores ſecuti ſumus. Parum enim refert, ſi hoc nomine, vel alio appellentur numeri progreſſionis Geometricæ, dummodo res ipſa intelligatur. Denominationes autem hæ exprimuntur ſequentibus characteribus.

Cur numeros proportionis Geometricæ dicamus Coſſicos.

N. ℞. ʒ. ce. ʒʒ. ß. ʒce. Bß. ʒʒʒ. cce.
ʒß. Cß. ʒʒce. Dß. ʒBß ceʒ. ʒʒʒʒ. Eß. &c.

PRIMVS character N. appellationem habet numeri abſoluti & ſimplicis, ita vt numerus, cui appoſitus fuerit, pro abſoluto & ſimplici habeatur. vt 4 N. nihil aliud ſignificant, quam quatuor vnitates ſimplices ac abſolutas: Plerunque tamen character hic vel ſignum N, non ſolet numeris apponi, quando pro abſolutis habendi ſunt. Itaque ſiue numerus aliquis gerat hoc ſignum N, ſiue eo careat, accipiendus eſt pro numero abſoluto.

Explicatio characterũ Coſſicorũ.

Secundus character ℞. habet appellationem Radicis, vel Rei, ita vt numerus, cui appoſitus ſit, à radicibus denominetur. vt 4 ℞. ſignificant quatuor radices, vel res. Vnde ſi progreſſio Geometrica habeat 2. in ſecundo loco, erunt 4 ℞. octo vnitates: ſi vero 3. duodecim vnitates. & ſic de cæteris.

Tertius character ʒ. repræſentat quadratum, quem cenſum nonnulli dicunt. vt 4 ʒ. ſunt quatuor quadrati vel zenſi. Itaque ſi tertius numerus progreſſionis Geometricæ ſit 4. erunt 4 ʒ. decem & ſex vnitates: Si autem 9. triginta ſex vnitates. &c.

Quartus character ce. denotat cubum. vt 4 ce. ſignificant quatuor cubos; ita vt ſi cubus fuerit 8. 4 ce. ſint 32. vnitates: ſi 27. 4 ce. ſint 108. vnitates. &c.

Idem dicendum eſt de reliquis characteribus, quorũ ſignificationes hic ſunt ſubſcriptæ, vna cum appella-

tionibus, & ſignis, quibus alij ſcriptores vtuntur. Quemadmodum enim appellationes numerorum Coſſicorum apud ſcriptores varios variæ ſunt, vt diximus, ita etiam ſigna ſeu characteres, quibus ipſas exprimunt, ijdem non ſunt.

N. Numerus ſimplex, & abſolutus.

2e. Radix. Italis Res, vel Coſa. Vnde hoc modo ab ipſis radix exprimitur. 1 co. 4 co 20. co &c. Alij vero ita deſignant. 1 ℞. 100 ℞. &c.

ℨ. Zenſus, ſiue Quadratus. Alij quadratum exprimunt hoc charactere q. vt 1 q. 30 q. 8 q. &c. Itali ſic notant. ce. vt 1. ce 4. ce 20. ce. &c.

ce. Cubus. Alij artifices ita depingunt. cu. vt 7 cu. 8 cu. 200. cu. &c.

ℨℨ. Zenzizenſus, ſiue Quadratiquadratus. Nonnulli ita ſignant. qq. vt 3 qq. 10 qq. &c. Itali vero ſic. ce. ce. vt 4 ce. ce. 9. ce. ce. 12 ce. ce. &c.

ß. Surdeſolidus. Hunc alij dicunt Surſolidum, vel Superſolidum. Italis dicitur Relatum primum. Vnde ita ſolent exprimere. Rel. P. vt 11 Rel. P. 20 Rel. P. &c.

ℨce. Zenſicubus, ſeu Quadratus cubi. vel Cubizenſus. Quadraticubus. Cubus quadrati. Cubiquadratus. Alij hoc charactere vtuntur. q ce. Poſſet quoque hic numerus inuerſis notis ſignari. vt ceℨ. ce q. Itali hoc modo ſignant. ce. cu. vel cu. ce.

Bß. Bſurdeſolidus. Secundum quoſdam Biſurdeſolidus, vel Surſolidus, aut Superſolidus ſecundus. Apud Italos vocatur Relatum ſecundum. vnde ita depingunt. Rel. 2.

ℨℨℨ. Zenſizenzenſus, ſeu Quadratus quadratiquadrati. Quem ita nonnulli denotant. qqq. Itali vero ſic. ce. ce. ce.

Cce. Cubicubus, ſeu Cubus cubi. qui ita à quibuſdam pingitur. cece. Ab Italis autem ſic. cu. cu.

ℨß. Zenſurdeſolidus, ſeu quadratus Surdeſolidi, vel Surdeſolidus quadrati. Hunc ita nonnulli deſignat. qß. Itali vero, quoniam eum vocant cenſum Relati primi, hoc modo notant. ce. Rel. P.

Cß. Cſurdeſolidus. Secundum alios Terſurdeſolidus, vel Superſolidus tertius. Italis dicitur Relatum tertium, & ita pingitur. Rel. 3.

Eodem modo proportione quadam reliqua ſigna, ſiue characteres Coſſici explicari poterunt, qui quidem in infinitum progrediuntur, vt mox dicemus.

Quando ſeries naturalis numerorum numeros Coſſicos progreſſionis Geometricæ exponat.

VT autem cognoſcamus, quidnam ſibi velint prædictæ denominationes, & qua ratione originem ducant à terminis cuiuſque progreſſionis Geometricæ ab vnitate initium ſumentis; conſiderandæ ſunt diligenter ſequentes duæ progreſſiones, vna cum ſupradictis characteribus Coſſicis in medio earum poſitis.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
N.	2e.	ℨ.	ce.	ℨℨ.	ß.	ℨce.	Bß.	ℨℨℨ.	Cce.	ℨß.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	&c.
Cß.	ℨℨce.	Dß.	ℨBß.	ceß.	ℨℨℨℨ.	Eß.	&c.
2048.	4096.	8192.	16384.	32768.	65536.	131072.	&c.

PRIOR progreſſio eſt naturalis numerorum ſeries incipientium ab 0. qui exponunt & ſigna Coſſica ſubſcripta, & terminos poſterioris progreſſionis, quæ Geometrica eſt, ab vnitate initium ducens: appellanturque numeri ordinis ſuperioris exponentes terminorum progreſſionis Geometricæ, & ſignorum Coſſicorum. Hæc autem expoſitio in hoc conſiſtit. Prima figura 0. habens ſub ſe N, & 1. indicat numerum ſimplicem & abſolutum ex vnitatibus compoſitum, & ob id nullo exponente inſignitur. quamuis improprie hæc figura 0, dici poſſit Exponens numeri abſoluti. Secundus terminus 1. ſupra 2. & 2e. oſtendit numerum ſecundum progreſſionis Geometricæ eſſe primam denominationem in numeris Coſſicis, appellarique Radicem. Tertius deinde terminus 2. manifeſtat, tertium numerum Geometricæ progreſſionis eſſe ſecundam denominationem vocarique Zenſum, ſiue Quadratum. Sic quoque 6. demonſtrat, ſextam denominationem eſſe numerum Zenſicubum, & ſic de cæteris.

Quot proportiones inter vnitatẽ & quemlibet numerũ progreſſionis Geometricæ intercipiantur.

DEINDE ijdem numeri exponentes progreſſionis naturalis numerorum docent, quot proportiones progreſſionis Geometricæ interijciantur inter quemlibet numerum eiuſdem Geometricæ progreſſionis, atque vnitatem. Vt 1. ſupra 2e. & 2. ſignificat, inter 2. ſiue radicem progreſſionis Geometricæ, atque vnitatem contineri vnicam proportionem 2. ad 1. At 2. ſupra ℨ. & 4. indicant, inter 4. ſiue ℨ. quadratum ve, atque vnitatem comprehendi duas proportiones 4. ad 2. & 2. ad 1. Item 3. ſupra ce, & 8. monet, inter 8. ſiue ce, & vnitatem cadere tres proportiones 8. ad 4. & 4, ad 2. & 2. ad 1. & ſic de cæteris, vt 6. ſupra ℨce. & 64. monſtrat, inter 64. ſiue ℨce. atque vnitatem intercipi ſex proportiones 64. ad 32. & 32. ad 16. & 16. ad 8. & 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1.

Cuius characteris exponens gignatur ex mutua multiplicatione diuiſioneque duorũ exponentium.

PRÆTEREA quilibet duo exponentes numeri inter ſe multiplicati producunt exponentem characteris Coſſici, qui ex characteribus aſſumptorum exponentium componitur. Vt ductis 2. in 3. fit 6. exponens characteris ℨce. qui ex ℨ & ce componitur. Item ex 3. in 5. fit exponens 15. characteris ceß. ex ce, & ß. compoſiti, &c. Sic etiam diuiſo quouis numero exponente maiore per minorem quemcunque, indicabit Quotiens, ſi integer numerus eſt, exponentem characteris Coſſici, qui relinquitur, ſi ex charactere numeri exponentis diuiſi, tollatur character numeri exponentis, per quem facta eſt diuiſio. Vt ſi 6. exponens characteris ℨce. diuidatur per 2. exponentem characteris ℨ. fit quotiens 3. exponens characte-

characteris ℭ. qui relinquitur, ſi ex charactere ℨℭ, exponentis 6. auferatur character ℨ. exponentis 2. Item ſi numerus 15. exponens characteris ℭß. diuidatur per 5. exponentem characteris ß. fit Quotiens 3. exponens characteris ℭ. qui relinquitur, ſi ex ℭß. tollatur ß. &c.

RVRSVS hæc figura 2. poſita ſupra 4. & ℨ. docet, quadratum, ſeu ſecundam denominationem produci ex multiplicatione radicis bis poſitæ. Nam ſi radix 2. ponatur bis hoc modo 2. 2. & fiat multiplicatio 2. in 2. procreabitur Quadratus, ſeu Zenſus 4. Eodem pacto figura hęc 3. poſita ſupra 8. & ℭ. ſignificat, cubum, ſiue tertiam denominationem produci ex radice ter poſita, & multiplicata. Nam ſi radix 2. ter ponatur, vt hic, 2. 2. 2. fiatque multiplicatio 2. in 2. & producti numeri in 2. exurget cubus 8. Sic quoque figura 5. monſtrat, numerum Surdeſolidum procreari ex multiplicatione radicis quinquies poſitæ, vt hic 2. 2. 2. 2. 2. Eademque eſt ratio de omnibus alijs.

Definitio vniuſcuiuſque numeri Coſſici.

EX his facile definientur omnes numeri Coſſici. Si enim petatur, quid ſit v.g. numerus Bſurdeſolidus; dicemus eum eſſe numerum, qui ex aliquo numero ſepties poſito, & multiplicato gignitur. Vt 128. naſcitur ex multiplicatione huius radicis 2. ſepties poſitæ in hunc modum, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Similiter Zenſizenſus erit numerus, quem numerus aliquis quater poſitus ſua multiplicatione producit, &c. Semper autem numerus, qui aliquoties poſitus multiplicatione ſua numerum aliquem procreat, dicitur radix producti numeri. Vt quoniam 2. poſitus decies hoc modo, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplicatus facit hunc numerum 1024. qui eſt ℨß. idcirco 2. dicitur radix Zenſurdeſolida huius numeri 1024. Idemque de aliis dicendum eſt.

VIDES igitur, quam appoſite naturalis progreſſio numerorum ab 0. incipientium, & ſupra progreſſionem Geometricam ab vnitate cœptam poſita, dicatur exponere terminos progreſſionis Geometricæ.

CÆTERVM non ſolum ex multiplicatione radicis aliquoties poſitę producuntur numeri progreſſionis Geometricę, vt expoſuimus, verum etiam ex multiplicatione numerorum aliorum inter ſe, vt ſigna eorum Coſſica demonſtrant. Vt licet hic numerus Zenſurdeſolidus 1024. gignatur ex radice decies poſita, hoc modo, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. vt eius exponens 10. indicat: tamen quia eius ſignum Coſſicum ℨß. conſtat ex his duobus ſignis Coſſicis ℨ. & ß. quorum exponentes ſunt 2. & 5. idcirco ſi eadem radix 2. bis ponatur, hoc modo, 2. 2. propter 2. exponentem ſigni ℨ. & multiplicetur, vt producatur 4. & hic productus quinquies poſitus, hoc modo, 4. 4. 4. 4. 4. ob 5. exponentem ſigni ß. multiplicetur, procreabitur idem numerus 1024. Eodem modo, ſi radix 2. quinquies ponatur, propter ſignum ß. atque ita multiplicetur, & productus numerus 32. ponatur bis, propter ſignum ℨ. idem numerus gignetur. Nam radix ita multiplicata 2. 2. 2. 2. 2. facit 32. hic autem numerus ita multiplicatus 32. 32. procreat 1024. atque ita de reliquis dicendum eſt, ſi eorum ſigna Coſſica ex pluribus ſignis Coſſicis componantur.

Additio & ſubtractio idē faciunt in ſerie naturali numerorum, quod Multiplicatio & Diuiſio in progreſſione Geometrica.

EST quoque in ſuperioribus progreſſionibus dignum conſideratione, quod additio numerorum progreſſionis Arithmeticę reſpondet multiplicationi numerorum progreſſionis Geometricæ; & ſubtractio diuiſioni. Sicut enim exempli gratia, 2. & 5. faciunt 7. ſi ſimul addantur, ita quoque ℨ. & ß. quorum 2. & 5. ſunt exponentes, nempe 4. & 32. inter ſe multiplicati producunt 128. id eſt, Bß. cuius exponens eſt 7. Item ſicut 3. & 9. ſimul faciunt 12. ita ℭ. & Cℭ. nimirum 8. & 512. quorum exponentes ſunt 3. & 9. inter ſe multiplicati gignunt 4096. hoc eſt, ℨℨℭ. cuius exponens eſt 12. atque eodem modo de reliquis dicendum eſt.

RVRSVS quemadmodum ſubtrahendo 5. à 7. remanent 2. ita diuidendo Bß, nempe 128. cuius exponens eſt 7. per ß, hoc eſt, per 32. cuius exponens eſt 5. prodit numerus 4. nempe ℨ. cuius exponens eſt 2. Similiter ſicut ſubtrahendo 3. ex 12. relinquuntur 9. ita diuidendo ℨℨℭ. hoc eſt, 4096. cuius exponens eſt 12. per ℭ, id eſt, per 8. cuius exponens eſt 3. producitur Cℭ, nempe 512. cuius exponens eſt 9. & ſic de cæteris. Demonſtrationem huius rei afferemus in Multiplicatione, & Diuiſione numerorum Coſſicorum.

QVOD autem dictum eſt hactenus de progreſſione Geometrica duplæ proportionis, quæ ab vnitate incipit, idem intelligendum eſt in quauis alia progreſſione Geometrica, cuius initium vnitas eſt: cuiuſmodi ſunt verbi gratia duæ ſequentes progreſſiones Geometricæ, quarum prior continet proportiones quadruplas, poſterior autem ſeptuplas complectitur.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	&c.
N.	℞.	ℨ.	ℭ.	ℨℨ.	ß.	ℨℭ.	Bß.	ℨℨℨ.	&c.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.	65536.	&c.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	&c.
N.	℞.	ℨ.	ℭ.	ℨℨ.	ß.	ℨℭ.	Bß.	&c.
1.	7.	49.	343.	2401.	16807.	117649.	823543.	&c.

Omnia namque quæ dicta ſunt, ad has duas progreſſiones, & ad omnes alias transferri facile poſſunt.

Quomodo omnes numeri progreſſionis Geometricæ ſint denominādi.

SVPEREST, vt doceamus, quanam ratione omnes numeri cuiuſcunque progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis denominandi ſint, aut (quod idem eſt) quænam ſigna Coſſica dictis numeris tribuenda ſint, & aſcribenda. Quod quidem facile præſtabimus, ſi prius denominemus numeros, quorum exponentes ſunt numeri primi, cuiuſmodi ſunt ſequentes.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. &c.

Horum autem characteres, ſiue ſigna, quæ ipſi exponunt, hęc ſunt.

ℨ. ℭ. ß. Bß. Cß. Dß. Eß. Fß. Gß. Hß. Iß. Kß. Lß. Mß. Nß. Oß. Pß. Qß. &c.

Cum enim tertius numerus ab vnitate in progreſſione quauis Geometrica ſit quadratus, vt demonſtratur propoſ. 8. lib. 9. Euclid. erit eius ſignum ℨ. cuius exponens 2. Rurſus quia quartus numerus ab vnitate eſt Cubus, vt conſtat ex eadem propoſ. erit eius nota ℭ. & exponens 3. Deinde quia ſextus ab vnitate numerus, quem exponit numerus primus 5. neque quadratus eſt, neque cubus, niſi quando ſecundus numerus ab vnitate quadratus eſt, vel cubus, vt ex propoſ. 10. lib. 9. Euclid. liquido conſtat, tribuerunt ei ſcriptores hoc ſignum ß. ita vt

Surdeſolidus appellatus ſit. Quoniam vero idem in reliquis numeris, quorum exponentes ſunt numeri pri-
mi,contingit, ita vt neque quadrati ſint, neque cubi, primo ab vnitate non exiſtente quadrato, vel cubo, vt ex
eadem propoſ. perſpicuum eſt, apellati ſunt quoque illi numeri progreſſionis Geometricæ, qui exponentes
habent numeros primos,Surdeſolidi, ita vt is, quem exponit 7. dicatur ſecundus Surdeſolidus, qui vero expo-
nitur ab 11. Tertius Surdeſolidus, & ſic de cæteris. Sed quia, ſi ſecundus Surdeſolidus ita ſignetur, 2ß. & tertius
ſic, 3ß. &c. facile notæ Arithmeticæ huic ſigno ß. appoſitæ alios numeros confundere & perturbare poſſunt;
viſum eſt artificibus loco notarum Arithmeticarum aſciſcere literas Alphabeti, denominareque ſecundum ß.
Bß. à ſecunda litera,& tertium Cß. à tertia litera, &c. Hoc igitur modo formantur ſigna & characteres nume-
rorum Coſſiçorum, quorum exponentes ſunt numeri primi, vt hæc formula indicat.

2.	3.	5.	7.	11.	13.	17.	19.	23.	29.	31.	37.	&c.
ℨ.	ℭ.	ß.	Bß.	Cß.	Dß.	Eß.	Fß.	Gß.	Hß.	Iß.	Kß.	&c.

EX his inueniemus characteres cæterorum numerorum Coſſicorum, quorum exponentes non ſunt
numeri primi,ſed compoſiti,hoc modo. Reſoluatur numerus exponens compoſitus, cuius denominatio, &
character deſideratur, in ſuas partes aliquotas incompoſitas, quæ inter ſe ordine multiplicatæ ipſum conſti-
tuant, atque producant. quod in hunc modum fiet.

Numerum compoſitũ in ſuas partes incompoſitas reſoluere, quæ ipſum producant.

NVMERVS compoſitus datus diuidatur per minimum numerum primum, per quem diuidi poteſt:
Similiter quotiens,ſi fuerit numerus compoſitus: Rurſus hic quotiens, ſi fuerit compoſitus,per numerum pri-
mum minimum,qui eum numeret, diuidatur: atque ita deinceps continue fiat diuiſio, donec occurrat quo-
tiens,qui ſit numerus primus, nullam videlicet habens partem aliquotam. Nam ſi omnes diuiſores eiuſmodi,
etiamſi aliqui ſæpius repetantur, vna cum vltimo quotiente ordine ponantur, & inter ſe multiplicentur, pro-
ducetur præciſe datus numerus compoſitus: atque ipſi diuiſores, vna cum vltimo quotiente ſunt partes in-
compoſitæ datum numerum compoſitum per multiplicationem conſtituentes. Vt ſi numerus compoſitus
datus ſit 924. Primo diuido eum,quoniam par eſt, per 2.tanquam per eius partem incompoſitam minimam,
inuenioque quotientem 462. Reſeruo autem 2. Rurſus quotientem 462.quia par eſt,diuido per 2.efficioque
quotientem 231.& reſeruo iterum 2. Deinde quotientem 231.quia impar eſt, diuido per 3. tanquam per mini-
mum numerum primum, reperioque quotientem 77. (quod ſi aliquid in diuiſione relictum fuiſſet, expertus
fuiſſem diuiſionem per 5.7.& alios numeros primos, donec nihil fuiſſet reſiduum. Et ſi nulium talem diuiſo-
rem,qui nihil relinquat, inuenirem, tunc primi duo diuiſores 2.2.& vltimus quotiens eſſent partes incompo-
ſitæ datum numerum reſtituentes, & nulla alia dari poſſet, præter vnitatem) Reſeruo igitur 3. Et rurſus di-
uido 77. per 3. ſed quoniam aliquid ſupereſt in diuiſione, non reſeruo 3. ſed eundem quotientem 77.
partior per 5. ſed quia aliquid ſupereſt in diuiſione, diuido eundem per 7. inuenioq; quotientem 11. nu-
merum primum. Sunt ergo partes incompoſitæ 2.2.3.7.11. numerum datum 924. ſua multiplicatione re-
ſtituentes.

DEINDE omnibus partibus aliquotis incompoſitis inuentis characteres debiti ſubſcribantur. Hac
enim ratione proſiliet character integer compoſitus integri numeri exponentis. Exemplum. Inueniendum
ſit ſignum Coſſiçum numeri trigeſimi primi Coſſici, cuius exponens eſt numerus hic compoſitus 30. Quotus
enim numerus Coſſicus eſt ab vnitate, tot vnitates, minus vna, continet eius exponens, vt ex antedictis pro-
greſſionibus apparere poteſt. Quoniam igitur partes ipſius aliquotæ incompoſitæ ſua multiplicatione ipſum
procreantes ſunt 2.3.5. quarũ ſigna ſunt ℨ.ℭ.ß. idcirco numerus dictus trigeſimus primus hoc ſigno Coſſico
decorabitur ℨℭß. appellabiturque Zenſicubiſurdeſolidus. Eodẽ modo exponens 24. cuius partes incompo-
ſitæ ſunt 2.2.2.3. habebit ſignum Coſſicum ℨℨℨℭ. Ita quoque exponens 100. cuius partes incompoſitæ ſunt
2.2.5.5. hoc ſignum Coſſicum ſortietur ℨℨßß. & ſic de cæteris.

IDEM conſequemur hac ratione. Accipiantur duo quicunque numeri, qui inter ſe multiplicati pro-
ducunt exponentem numerum oblatum. Nam eorum ſigna Coſſica component ſignum Coſſicum propoſi-
ti numeri exponentis. vt ſi exponens ſit 12. numeri ſua multiplicatione ipſum producentes ſunt 3. & 4. quo-
rum ſigna Coſſica ſunt ℭ. & ℨℨ. Signum igitur Coſſicum exponentis 12. eſt ℨℨℭ. Semper enim ſigna Coſ-
ſica minora præponuntur maioribus. Eodem pacto numeri ſua mutua multiplicatione producentes eundem
numerum exponentem 12. ſunt 2.& 6.quorum prior ſignum Coſſicum habet ℨ.poſterior vero ℨℭ. Signum
ergo Coſſicum numeri exponentis 12. eſt ℨℨℭ.vt prius. Quod ſi aliquando ignoretur alterius numerorum
multiplicantium, vel etiam vtriuſque ſignum Coſſicum, ſumendi erunt alij duo numeri ipſum producen-
tes, vt in poſteriori exemplo, ſi nos lateat ſignum Coſſicum huius multiplicantis 6. accipiemus 2. & 3. qui
ipſum procreant, quorum ſigna ſunt ℨ. ℭ. Inuenitur ergo idem ſignum Coſſicum numeri exponentis 12.
ℨℨℭ. &c.

Quem locũ progreſſionis Geometricæ occupet quilibet numerus Coſſicus.

IAM vero ſi è contrario ſigni cuiuſlibet Coſſici propoſiti numerus exponens quæratur; ſi quidem
fuerit incompoſitum, accipiemus ex ſuperiori progreſſione numerorum primorum numerum primum pro-
poſito ſigno debitum. vt ſi offeratur Coſſicum hoc ſignum Dß. erit eius exponens 13. Si vero ſignum ſit
compoſitum, ſumemus exponentes ſignis componentibus debitos, eoſque inter ſe multiplicabimus. nam
productus numerus erit exponens propoſiti ſigni Coſſici, vt ſi detur ſignum Coſſicum ℨℨℭ. compoſitum
ex his tribus ℨ. ℨ. ℭ. capiemus horum exponentes 2. 2. 3. ex ſuperiori progreſſione primorum numerorum,
eoſque inter ſe multiplicabimus. nam productus numerus 12. eſt exponens dicti ſigni ℨℨℭ. atque ita de cæ-
teris dicendum eſt.

Quomodo alij numeros progreſſionis Geometricæ denominent.

NON eſt autem prætereundum, quoſdam auctores hac in arte non mediocriter verſatos aliter hos nu-
meros Coſſicos denominare, habita nimirum ratione multiplicationis, qua ex radice producuntur. Quoniam
enim tertius numerus ab vnitate progreſſionis Geometricæ, quem nos Quadratum, vel Zenſum diximus,
producitur ex multiplicatione radicis bis poſitæ hoc modo, 2.2. vel 3.3. vel 4.4. vel 5.5.&c. ita vt vna tantum fiat
multiplicatio; propterea numerum hoc modo genitum, id eſt, quadratum, appellant Primam quantitatem:

quia prima eſt omnium, quæ ex radice naſcuntur. Cubum deinde, quia gignitur ex radice ter poſita, ita vt fiant duæ multiplicationes, dicunt Secundam quantitatem. Zenſizenſum vero eadem de cauſa vocant Tertiam quantitatem. & ſic de cæteris intelligendum eſt. Sed placet nobis proprijs ſignis, & characteribus vti, vt clarius res ipſa percipiatur. Noſtra etenim ſigna, & characteres à literis, ac numeris facile diſcernuntur, ita vt confuſio nulla poſſit exoriri: quæ in aliorum ſignis, characteribuſque vitari vix poteſt.

DE NVMERATIONE COSſicorum numerorum.

CAPVT III.

FACILIS eſt ex dictis Numeratio numerorum Coſſicorum. Quando enim ſoli ponuntur, vt 5℞. vel 8ʒ. vel 20ℭ. &c. exprimuntur hoc modo, quinque radices, vel 8. Zenſi, ſiue quadrati, vel 20. cubi, &c. Quando autem coniuncti inter ſe proponuntur, medio hoc ſigno +, vel hoc —. vt 5℞ + 8ʒ. vel 8ʒ — 5℞. vel 20ℭ + 8ʒ — 5. habenda eſt maxima ratio horum ſignorum +. —. quorum illud dicitur ſignum additorum, ſignificatque plus, vel additionem; hoc vero appellatur ſignum ſubtractorum, denotatque minus, vel diminutionem, aut ſubtractionem. Hinc factum eſt, vt numeri illi, quibus interponitur ſignum +, dicti ſint compoſiti. Quibus vero interiicitur ſignum —. nominati ſint Diminuti. Quibus denique vtrumq; ſignum interponitur, appellati ſint mixti. licet omnes dici poſſint compoſiti. Itaq; compoſitus hic. 5℞ + 8ʒ. effertur hoc modo. 5. radices, plus 8. zenſi, Hic vero Diminutus 8ʒ — 5℞. hoc modo. 8. zenſi, minus 5. radices. Mixtus vero iſte, 20ℭ + 8ʒ — 5. hoc pacto. 20. cubi, plus 8. zenſi, minus 5. vnitates. Nam, vt dictũ eſt, numerus, qui poſt ſe non habet characterem aliquem Coſſicum, ſignificat numerum abſolutum ex vnitatibus compoſitum.

Explicatio ſignorum + & —.

Numeri Coſſici cõpoſiti, Diminuti, & mixti qui.

REFERVNTVR autem, vt patet, hæc ſigna +. —. ad numeros, qui ea ſequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Item numerus, quem neutrum horum ſignorum præcedit, intelligitur habere ſignum additorum +. Senſus porro numerorum compoſitorum, diminutorum, vel mixtorum facilis eſt. Nam cum dicimus 5℞ + 8ʒ. intelligimus 5. radices vna cum 8. zenſis: hoc eſt, vnitates 42. ſi radix eſt 2. & quadratus, vel zenſus 4. Sic cum dicimus 8ʒ — 5℞. intelligimus ex 8. zenſis detractas eſſe 5. radices. vnde ſi radix eſt 2. atq; adeo zenſus 4. continebit numerus propoſitus vnitates 2. Idem dicendum eſt de alijs.

QVONIAM vero in antecedenti capite characteres numerorum Coſſicorum, cuiuſmodi ſunt ℞. ʒ. ℭ. &c. appellauimus interdum etiam ſigna Coſſica; vt vitemus omnem confuſionem, appellabimus in ſequentibus has notas ℞. ʒ. ℭ. &c. characteres, has vero +. —. ſigna.

PLERIQVE auctores pro ſigno + ponunt literam P, vt ſignificet plus: pro ſigno vero — ponunt literam M, vt ſignificet minus. Sed placet nobis vti noſtris ſignis, vt à literis diſtinguantur, ne confuſio oriatur.

PRÆTEREA inter recentiores non pauci radices ſurdas, vt vocant, vel irrationales, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt, notant hoc ſigno √. quod ſtatim inſequitur character Coſſicus ʒ, vel ℭ, vel ʒʒ. &c. prout radix illa eſt quadrata, Zenſicaue, vel Cubica, vel Zenſizenſica, ſiue quadrati quadrata, &c. V. g. radicem quadratam numeri 12. deſignant hoc modo. √ʒ12. cubicam hoc modo √ℭ 12. & Zenſizenſicam hac ratione, √ʒʒ 12. atq; hanc ob cauſam ſignũ hoc √ radicale appellatur. Quo ſigno nos etiã in ſequẽtibus vtemur: quippe cum minor confuſio ex eo oriatur, quam ſi, quod plerique faciunt, radicem quadratam ita ſignemus, Rq. Cubicam hoc modo. R cu. Zenſizenſicam hoc alio, Rqq. &c. Facile enim ex hac deſignatione, literæ Rq. R cu. Rqq. cum aliis literis confunduntur. Diligenter ergo hæc ſigna √ʒ. √ℭ. √ʒʒ. √ß. &c. addiſcenda ſunt, vt ea, quæ ſequuntur, intelligantur, quando nimirum huiuſmodi ſigna occurrent. Sciendum tamen, quotieſcunque nominatur radix alicuius numeri, ſine voce, quadrata, cubica, ſurdeſolida, vel zenſizenſica, &c. vel illi numero præfigitur ſignum hoc √. ſine charactere ʒ, ℭ, ß, ʒʒ, &c. intelligi radicem quadratam ſimpliciter apud ſcriptores. quod à nobis etiam non raro obſeruabitur.

Radices ſurdæ, quo pacto ſignentur.

Signum radicale quid.

DE ADDITIONE ET SVBTRActione numerorum Coſſicorum.

CAPVT IV.

QVANDO numerus Coſſicus additur numero Coſſico alterius denominationis, vel characteris, abſoluitur additio mediante hoc ſigno +, fitque numerus compoſitus. Vt hi duo numeri 6℞. & 8. ſimul additi faciunt 6℞ + 8. Item 6℞. & 8ℭ. faciunt 6℞ + 8ℭ. &c.

Additio Coſſicorum numerorũ diuerſarũ denominationum.

QVANDO vero addendus eſt numerus Coſſicus alteri numero Coſſico eiuſdem appellationis, vel characteris, adduntur ſimul numeri, & ſummæ apponitur idem character Coſſicus. Vt hi numeri 4ʒ. & 9ʒ. ſimul additi faciunt 13ʒ. Item 5℞. & 4℞. faciunt 9℞. &c.

Additio numerorũ Coſſicorũ eiuſdem appellationis.

PARI ratione, quando numerus Coſſicus ſubtrahitur à numero Coſſico alterius denominationis, abſoluitur ſubtractio mediante hoc ſigno —, fitque numerus diminutus. Vt hic numerus 6℞. detractus ex 8ʒ. relinquit 8ʒ — 6℞. Item 12. ex 6. ℞. relinquunt 6℞ — 12. & ſic de cæteris.

Subtractio numerorũ Coſſicorum diuerſarũ appellationum.

QVAN-

Subtractio numerorũ Coſſicorum eiuſdẽ denominationis.

QVANDO vero numerus Coſſicus ſubtrahendus eſt ex altero numero Coſſico eiuſdem characteris, ſubtrahitur numerus à numero, & reliquo numero idem character affigitur. Vt 4℞. ex 9℞. relinquunt 5℞. Et 9 ce. ex 20 ce. relinquunt 11 ce. &c.

Additio & ſubtractio Coſſicorum numerorũ compoſitorum, &c.

SED quando Coſſici numeri compoſiti, diminuti & mixti inter ſe adduntur, vel alter ab altero ſubtrahitur, ponendus erit alter ſub altero, ita vt numeri eiuſdem appellationis inter ſe reſpondeant, quemadmodum in fractionibus Aſtronomicis fieri conſueuit. Quod ſi in alterutro eorum non reperiatur numerus reſpondens alicui in altero numero, ponenda erit loco eius figura hæc nihili 0. cum ſigno +. Quibus conſtitutis addendi erunt numeri eiuſdem appellationis, vel alter ab altero detrahendus, & ſummæ vel numeri reliqui propriis in locis ſubſcribendi, vna cum iiſdem ſignis, +, vel —, quæ in numeris addendis, vel ſubtrahendis reperiuntur.

Exempla Additionis.

℞.	N.
6	+ 8
7	+ 10.
13	+ 18

ʒ.	℞.	N.
7	+ 8	— 5.
3	+ 9	— 8.
10	+ 17	— 13

ce.	N.	ʒ.
7	+ 8	— 3
4	+ 11	— 5
11	+ 19	— 8

ce.	ʒ.	℞.	N.
4	+ 11	+ 0	— 6
3	+ 0	+ 8	— 4
7	+ 11	+ 8	— 10

ß.	ʒʒ.	℞.	N.	ʒ.
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0
11	+ 9	+ 14	— 14	+ 4

ʒ.	N.
4	— 8
10	— 10
14	— 18

In penultimo exemplo additus eſt huic numero, 7ß + 8℞ — 5 + 4ʒ. hic numerus, 4ß + 9ʒʒ + 6℞ — 9. factaque eſt hæc ſumma 11ß + 9ʒʒ + 14℞ — 14 + 4ʒ.

Exempla Subtractionis.

ce.	ʒ.	℞.	N.
7	+ 11	+ 8	— 10
3	+ 0	+ 8	— 4
4	+ 11	+ 0	— 6

ce.	N.	ʒ.
11	+ 19	— 8
4	+ 11	— 5
7	+ 8	— 3

ß.	ʒʒ.	℞.	N.	ʒ.
11	+ 9	+ 14	— 14	+ 4
7	+ 0	+ 8	— 5	+ 4
4	+ 9	+ 6	— 9	+ 0

ʒ.	℞.	N.
10	+ 17	— 13
7	+ 8	— 5
3	+ 9	— 8

In penultimo exemplo reliquus numerus eſt, 4ß + 9ʒʒ + 6℞ — 9. Reiicitur enim + 0. quia neque in reliquo numero ſubtractionis, neque in ſumma additionis poni debet figura hæc 0. cum ſit ſuperuacanea. Eodem modo reliquus numerus in primo exemplo erit, 4ce + 11ʒ — 6.

POTEST etiam fieri additio, & ſubtractio, ſi characteres Coſſici ſcribantur poſt numeros, non autem ſupra ipſos numeros. vt ſecundum exemplum Additionis, ita ſtabit.

7 ʒ	+ 8 ℞	— 5 N	
3 ʒ	+ 9 ℞	— 8 N	
10 ʒ	+ 17 ℞	— 13 N	

Secundum item exemplum Subtractionis ita ſtabit.

11 ce	+ 19 N	— 8 ʒ
4 ce	+ 11 N	— 5 ʒ
7 ce	+ 8 N	— 3 ʒ

Quod etiam de multiplicatione, diuiſioneque intelligendum eſt. Atque hic modus vt plurimum à nobis obſeruabitur in hoc opere.

Quid agendum, quãdo vnus numerus habet ſignũ +, & alter ſignum —, in additione, & ſubtractione.

QVOD ſi in additione, vel ſubtractione alter numerorum habuerit ſignum +, alter vero —, commutatur ſpecies, ſeu operatio; hoc eſt, in Additione ſubtrahitur minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur ſignum maioris numeri, à quo facta eſt ſubtractio, ſiue illud fuerit +, ſiue —.

In Subtractione vero adduntur ſimul numeri, & ſummæ apponitur ſignum ſuperioris numeri, à quo fieri debebat detractio; quodcunque illud fuerit ſiue +, ſiue —.

Exem-

Exempla Additionis.

ℨℭ.		ß.		ℨℨ.		ℭ.		ℛ.		N.
7	+	0	+	8	+	0	—	4	+	8
7	+	5	—	11	—	11	+	0	+	0
14	+	5	—	3	—	11	—	4	+	8

ℨ.		ℛ.
6	+	8
2	—	10
8	+	2

Si hi duo numeri 6ℨ — 8ℛ. & 12ℛ — 3ℨ debeãt addi, formabimus exemplum hoc modo, vt ſingula ſingulis reſpondeant.

	ℨ.		ℛ.
+	6	—	8
—	3	+	12
	3	+	4

Vel ſic

+	6ℨ	—	8ℛ
—	3ℨ	+	12ℛ
	3ℨ	+	4ℛ

Rationem vero huius operationis pulchre docent numeri abſoluti. vt hic vides.

8 + 5		8 — 5		8 + 4		8 — 4
10 — 4		10 + 4		10 — 5		10 + 5
18 + 1		18 — 1		18 — 1		18 + 1

Quoniam enim in primo exemplo ad 8 + 5. hoc eſt, ad 13. non adduntur integre 10. vt fiant 23. ſed ſubductis prius 4. Ideo fit ſumma 19. nempe 18 + 1. Itaque poſtquam addita ſunt 8. & 10. factaque ſunt 18. detrahenda ſunt 4. ex 5, vt remaneat 1, cum hoc ſigno +.

Eodem modo in ſecundo exemplo, non adduntur integre 8, ſed minus 5. ad 10 + 4, hoc eſt, ad 14. propterea poſtquam ex 8. & 10. facta ſunt 18. detrahenda ſunt 5. ex 4. Et quia deeſt vnitas, vt poſſit ſubtrahi, idcirco ponitur 1. cum ſigno —. Eadem ratio eſt in cæteris. Vbi vides in primo exemplo ex 8 + 5. & 10 — 4. id eſt, ex 13. & 6. effici 18 + 1. id eſt, 19. In ſecundo vero ex 8 — 5. & 10 + 4. hoc eſt, ex 3. & 14. fieri 18 — 1. hoc eſt, 17. In tertio quoque ex 8 + 4. & 10 — 5. hoc eſt ex 12. & 5. conflari 18 — 1. hoc eſt, 17. In quarto denique ex 8 — 4. & 10 + 5. id eſt, ex 4. & 15. confici 18 + 1. id eſt, 19.

Exempla Subtractionis.

ℨℭ.		ß.		ℨℨ.		ℭ.		ℛ.		N.
14	+	5	—	3	—	11	—	4	+	8
7	+	0	+	8	+	0	—	4	+	8
7	+	5	—	11	—	11	±	0	+	0

ℨ		ℛ.
8	—	2
6	+	8
2	—	10

In priori exemplo, quãdo detrahuntur — 4ℛ. ex — 4ℛ. poteſt ſignari reliqua figura 0, vel ſigno +, vel ſigno —. Nihil enim intereſt vtrum illorum ponatur, quando reliquus numerus eſt 0. Immo totus reliquus numerus ita ſcribendus erit. 7ℨℭ + 5ß — 11ℨℨ — 11ℭ.

Ratio quoque huiuſce operationis perſpicua eſt in numeris abſolutis, vt ex ſequentibus exemplis apparet.

18 + 5		18 + 4		18 — 5		18 — 4
8 — 4		8 — 5		8 + 4		8 + 5
10 + 9		10 + 9		10 — 9		10 — 9

Quoniam enim in primo exemplo non integre ſubducuntur 8. ex 18 + 5. hoc eſt ex 23. ſed minus 4. propterea ſubductis 8. ex 18. vt relinquantur 10. addenda ſunt rurſum 4. ad 5. Eademque eſt ratio in ſecundo exemplo. In tertio vero exemplo, cum 8. deducantur ex 18, ex quibus iam ablata ſunt 5. reſtituenda ſunt 5. ipſis 4. & ſumma per ſignum — notanda. Quod etiam fit in quarto exemplo. Vbi vides in primo exemplo, ſi ex 18 + 5. hoc eſt, ex 23. detrahantur 8 — 4. hoc eſt, 4. relinqui 10 + 9. id eſt, 19. In ſecundo quoque, ſi ex 18 + 4. hoc eſt, ex 22. detrahantur 8 — 5. id eſt, 3. relinqui 10 + 9. hoc eſt, 19. In tertio vero, ſi ex 18 — 5. id eſt, ex 13. detrahantur 8 + 4. id eſt, 12. remanere 10 — 9. id eſt, 1. In quarto denique, ſi ex 18 — 4. hoc eſt, ex 14. demantur 8 + 5. id eſt, 13. remanere quoque 10 — 9. hoc eſt, 1.

QVOD ſi quando contingat, vt idem ſignum + vel — reperiatur tam in numero ſubtrahendo, quam in eo, à quo fit ſubtractio, ſed ſubtrahendus maior ſit; ſubtrahendus erit præpoſtero ordine ſuperior ab inferiori, ſed numero reliquo dandum ſignum contrarium, ita vt ex ſigno +, fiat —, & ex — fiat +. Vt duo exempla, quæ ſequuntur, indicant.

Quid agendũ in ſubtractione, quando vterque numerus habet ſignum + vel — & numeri præpoſtere ponuntur.

ℨ.		ℛ.		N.
9	+	4	—	5
4	+	7	—	8
5	—	3	+	3

	ℭ.		ℨ.		N.
	6	—	5	+	3
	7	—	9	+	10
—	1	+	4	—	7

In po-

In poſteriori exemplo, quoniam 6ce. & 7ce. intelliguntur habere ſignum +, idcirco reliquus numerus adeptus eſt ſignum —. Vnde ita ſcribendus erit, 4ʒ — 1ce — 7. Non enim recte primus numerus afficitur ſigno —. Huius etiam operationis veritas perſpicua eſt in duobus hiſce exemplis numerorum abſolutorum. Vbi vides, ſi in priori exemplo

9	+ 4	— 5	6	— 5	+ 3
4	+ 7	— 8	7	— 9	+ 10
5	— 3	+ 3	— 1	+ 4	— 7

ex 9 + 4 — 5. id eſt, ex 8. ſubtrahantur 4 + 7 — 8, id eſt, 3. relinqui 5 — 3 + 3. nimirum 5. In poſteriori vero, ſi ex 6 — 5 + 3. ſubducantur 7 — 9 + 10. hoc eſt, 8. ex 4. remanere — 1 + 4 — 7. hoc eſt, — 4. quia nimirum ſuperiori numero deſunt 4. vnitates, vt inferior ſubtrahi poſſit.

CÆTERVM omnia præcepta hactenus tradita de additione, & ſubtractione, quod ad ſigna + & — ſpectat, comprehenduntur facile his duabus regulis ad memoriam iuuandam.

Duæ regulæ obſeruandæ in additione, & ſubtractione.

I

Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando numeri præpoſtere ponuntur. Tunc enim ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + . fit —, & ex — fit +.

II.

Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis; Et in additione ponitur ſignum maioris numeri; In ſubtractione vero ſuperioris, à quo fit ſubtractio, ſiue maior is ſit, ſiue minor, aut æqualis. Quæ quidem regulæ, intellectis præceptis traditis, difficiles non ſunt.

Probatio additionis & ſubtractionis.

SVPEREST, vt doceamus, quo modo inſtituenda ſit probatio, ſiue examen Additionis, & Subtractionis. Duobus igitur modis comprobari poteſt, an recte nec ne in Additione, vel Subtractione operatum ſit. Primum enim probari poteſt Additio per ſubtractionem, & ſubtractio per Additionem; quemadmodum in abſolutis numeris ſolet fieri.

Secundo conſtruatur tabula cum aliquibus progreſſionibus Geometricis ab vnitate incipientibus. vt hic cernis.

N	𝔯	ʒ	ce	ʒʒ	ß	ʒce	Bß	ʒʒʒ
1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$

Deinde reſoluantur numeri Coſſici addendi, iuxta aliquam harum progreſſionum, in numeros abſolutos, ijque ſimul addantur, vel vnus ab altero detrahatur, ratione ſigni +, vel —. Poſt hæc eodem modo reſoluantur numeri Coſſici ſummæ collectæ. Si enim recte facta eſt additio, erunt numeri ſummæ collectæ reſoluti ſimul æquales numeris addendis reſolutis ſimul. Vt in hoc exemplo. 6ce. (ſi probatio inſtituatur per progreſſionem, cuius radix eſt 2.) faciunt 48. & 4ʒ. faciunt 16. Iungantur ſimul 48. & 16. propter ſignum +. fiunt 64. Item 4ce. faciunt 32. addantur ad 64. propter ſignum + (ſemper enim numerus nullo ſigno notatus, intelligitur inſignitus hoc ſigno +, vt dictum eſt.) fiunt 96. Denique 8ʒ. faciunt 32. quæ ablata ex 96, ob ſignum —, relinquunt 64. Videiam, an 10ce — 4ʒ. reſoluti faciant quoque 64. Perſpicuum autem eſt, 10ce. facere 80, à quibus ſi deducantur 4ʒ. hoc eſt, 16. propter ſignum —, relinqui 64 &c.

ce.		ʒ.
6	+	4
4	—	8
10	—	4

NON ſecus Subtractio comprobabitur, ſi eius numeri Coſſici in abſolutos numeros commutentur. Nam numeri ſubtracti, & reliqui ſimul æquales debent eſſe numeris, à quibus facta eſt ſubtractio, &c. Vt in hoc propoſito exemplo, ſi probationem inſtituamus iuxta progreſſionem, cuius radix eſt 3. 10 ce. faciunt 270, à quibus, ſi deducantur 4ʒ, id eſt, 36. propter ſignum —, remanent 234.

ce.		ʒ.
10	—	4
6	+	4
4	—	8

Satis autem conſtat 6ce + 4ʒ. & 4ce — 8ʒ. reſolutos ac ſimul additos facere quoque 234.

Eodem modo ſi 6ce + 4ʒ. reſoluti detrahantur ex 10 ce — 4ʒ. reſolutis, relinquentur 4 ce — 8ʒ. Vel certe ſi 4ce — 8ʒ. reſoluti deducantur ex 10ce — 4ʒ. remanebunt 6ce + 4ʒ. reſoluti.

Idem exemplum examinabitur per progreſſionem, cuius radix eſt $\frac{1}{2}$. licet aliquanto laborioſius, hoc modo. 10 ce. faciunt $\frac{10}{8}$. à quibus ſi tollantur 4ʒ. nimirum $\frac{4}{4}$ hoc eſt, $\frac{8}{8}$, remanent $\frac{2}{8}$. Neceſſe igitur eſt, vt 6ce + 4ʒ. reſoluti, & detracti ex $\frac{2}{8}$. relinquant 4ce — 8ʒ. reſolutos. Et quia 6ce. faciunt $\frac{6}{8}$. & 4ʒ. efficiunt $\frac{4}{4}$. id eſt, $\frac{8}{8}$. quæ cum $\frac{6}{8}$ faciunt $\frac{14}{8}$. quæ ex $\frac{2}{8}$ ſubtrahendæ ſunt. At quoniam numeri præpoſtere ponuntur, ſubtrahendæ ſunt $\frac{2}{8}$. ex $\frac{14}{8}$. vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta primam regulam. Atque tantundem debent conficere 4ce — 8ʒ. Sunt autem 4ce. $\frac{4}{8}$. à quibus vt auferatur 8ʒ. id eſt, $\frac{8}{4}$. vel $\frac{16}{8}$. auferendæ ſunt $\frac{4}{8}$. ex $\frac{16}{8}$. propterea quod numeri ſunt poſiti præpoſtere, vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta legem primæ regulæ. quod eſt propoſitum.

DE MVL-

DE MVLTIPLICATIONE & Diuiſione numerorum Coßicorum.

CAPVT V.

CVM numerus Coſſicus per numerum abſolutum multiplicatur, aut diuiditur; producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuiſione, vt in numeris abſolutis) eiuſdem denominationis Coſſicæ. Vt multiplicatis 4𝔯. vel 8𝔷. per 3. proueniunt 12𝔯. vel 24𝔷.&c. Item diuiſis 12𝔯 vel 24𝔷, per 3. producuntur 4𝔯. vel 8𝔷.&c. *Multipl. & Diuiſio numeri Coſſici per abſolutum.*

QVANDO vero numerus Coſſicus per numerum Coſſicum multiplicatur, vel diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuiſione, vt in numeris abſolutis) alterius denominationis Coſſicæ, vt autem ſciatur, quænam denominatio procreetur, pulchre id commõſtrat progreſſio quælibet Geometrica ab vnitate incipiens, vna cum numeris exponentibus, de quibus in cap. 2. dictum eſt, & hic apparet. *Multipl. & Diuiſio numeri Coſſici per Coſſicum numerum.*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	&c.
N.	𝔯	𝔷	𝔠	𝔷𝔷	ß	𝔷𝔠	Bß	𝔷𝔷𝔷	C𝔠	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	&c.

Nam in multiplicatione fit exponens numerus denominationis Coſſicæ conflatæ ex additione exponentium numerorum, qui videlicet denominationes illas, quæ multiplicantur, exponunt. In diuiſione autem reperitur exponens numerus Coſſicæ denominationis productæ, qui relinquitur, ſi exponens numerus denominationis diuidentis ſubtrahatur ab exponente numero denominationis diuidendæ. Vt ex multiplicatione. 4𝔯. in 4𝔯 vel 4𝔯 in 7𝔯. fiunt 16𝔷. vel 28𝔷. Nam vnitas, quæ eſt exponens huius characteris Coſſici 𝔯. addita ad vnitatem, facit 2. exponentem huius characteris 𝔷. Sic etiam ex multiplicatione 4𝔯. in 5𝔷. fiunt 20𝔠. Et ex 4𝔷. in 6ß. fiunt 24 Bß.&c. Item ex diuiſione 24 Bß. per 4𝔷. fiunt 6ß. Et ex diuiſione 36𝔷𝔠. per 4𝔷𝔷. producuntur 9𝔷. Et ex diuiſione 12𝔷𝔷. per 4𝔠. fiunt 3𝔯. Et ex 8𝔷. per 8𝔷. fit 1 N. quia ſubductis 2. à 2. relinquitur 0, exponens numeri abſoluti. Ita quoque diuiſis 12𝔷𝔠. per 4ß. proueniunt 3𝔯.&c.

EX his facile intelligitur, quonam modo numerus Coſſicus in ſeipſum multiplicetur quadrate, cubice, &c. Nam 5. 𝔠. in ſe quadrate faciunt 25.𝔷𝔠. cum 3.& 3. faciant 6. At 5 𝔠. in ſe cubice faciunt 125.C𝔠. Nam primum 5 𝔠. in ſe faciunt 25.𝔷𝔠. Deinde 25 𝔷𝔠. in 5𝔠. faciunt 125 C𝔠.&c.

DEMONSTRATIO huius rei facilis eſt. Repetatur enim progreſſio characterum Coſſicorum numeros progreſſionis Geometricæ denominantium, vna cum naturali progreſſione numerorum exponentium, vt hic. *Demõſtratio Multiplicationis & Diuiſionis numerorũ Coſſicorum.*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
N.	𝔯.	𝔷.	𝔠.	𝔷𝔷.	ß.	𝔷𝔠.	Bß.	𝔷𝔷𝔷.	C𝔠.	𝔷ß.	Cß.	&c.

Quoniam igitur, vt in ſcholio propoſ. 11. lib. 9. Euclid. docuimus, quilibet numerus progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis ſeipſum multiplicans producit numerum eiuſdem progreſſionis, qui tantum ab eo diſtat excluſiue, quantum ipſe abeſt excluſiue ab vnitate; fit vt 𝔠. ſeipſum multiplicans producat 𝔷𝔠. qui tertium locum occupat poſt 𝔠. excluſiue, quemadmodum & 𝔠. tertium habet locum poſt N. hoc eſt, poſt vnitatem excluſiue. Quare cum exponens huius characteris 𝔠. nempe 3. ad ſe additus faciat 6. exponentem, qui tertium locum poſſidet poſt 3. excluſiue, propterea quod tres vnitates continentur in 3. per quot nimirum interualla denominatio 𝔠. diſtat à N. ſeu vnitate excluſiue (Nam exponens cuiuſque denominationis Coſſicæ tot continet vnitates, quotum locum ipſa denominatio obtinet ab vnitate, ſiue à N. excluſiue.) perſpicuum eſt, numerum 6. qui fit ex additione 3. ad 3. eſſe exponentem huius characteris Coſſici 𝔷𝔠. qui producitur ex multiplicatione 𝔠. in ſe. Eademque ratio eſt de cæteris characteribus Coſſicis, qui ſeipſos multiplicant.

RVRSVS, quia, vt ex eodem ſcholio conſtat, ſi minor aliquis numerus progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis multiplicet maiorem quempiam eiuſdem progreſſionis, procreatur numerus, qui tantum à maiore diſtat excluſiue in progreſſione eadem, quantum minor ab vnitate abeſt excluſiue; efficitur vt 𝔠. multiplicans 𝔷𝔠. producat C𝔠. qui tertiũ occupat locum poſt 𝔷𝔠. excluſiue, ſicut & 𝔠. tertium poſſidet locũ excluſiuè poſt N, hoc eſt, poſt vnitatem. Quocirca cũ exponens 3. characteris 𝔠. additus ad 6. exponentem characteris 𝔷𝔠. faciat 9. exponentem, qui tertium locum adeptus eſt poſt 6. excluſiue, propterea quod in 3. continentur tres vnitates, quotum nimirum locum excluſiue ab vnitate, ſeu N, occupat character hic 𝔠; manifeſtum eſt, numerum 9. qui fit ex additione 3. ad 6. exponentem eſſe huius characteris Coſſici C𝔠 qui gignitur ex multiplicatione 𝔠. in 𝔷𝔠. Eadem de cauſa idem character C𝔠. procreatur ex multiplicatione 𝔷𝔷. in ß. & ſic de cæteris.

QVONIAM vero, vt Additio Subtractionem, & Subtractio Additionem; ita quoque Multiplicatio Diuiſionem, & Diuiſio Multiplicationem probat; fit vt quemadmodũ ex additione 3. ad 3, fiunt 6. & ex multiplicatione 𝔠. in 𝔠. fit 𝔷𝔠; ita ſubtractis 3. ex 6. relinquantur 3. & diuiſo 𝔷𝔠. per 𝔠. proueniat 𝔠. Item ſicut ex additione 3. ad 6. fiunt 9. & ex multiplicatione 𝔠 in 𝔷𝔠. fit C𝔠; ſic etiam ſubtractis 3. ex 9. relinquantur 6. & diuiſo C𝔠. per 𝔠. producatur 𝔷𝔠. eademque ratio eſt de reliquis.

EX hac demonſtratione perſpicuum fit, id quod cap. 2. tradidimus; Additionem videlicet numerorum progreſſionis Arithmeticæ reſpondere multiplicationi numerorum progreſſionis Geometricæ, & Subtractionem Diuiſioni. Demonſtrauimus enim, quemadmodum ex additione 2. ad 4. fiunt 6. ita ex multiplicatione ʒ, in ʒʒ, fieri ʒce. Item ſicut ſubtractis 2. ex 6. relinquuntur 4. ita diuiſo ʒce, per ʒ, fieri ʒʒ, &c.

Multipl. & Diuiſio numeri Coſſici compoſiti per abſolutum, vel per Coſſicũ tam ſimplicem, quam compoſitũ.

ITAQVE ex multiplicatione cuiuſuis characteris Coſſici in alium quemcunque producitur character Coſſicus tantũ à maiore diſtans excluſiue, quantũ minor ab vnitate, hoc eſt, ab hoc ſigno N. recedit excluſiue, vel quantus eſt exponens minoris characteris Coſſici. Vt ex ce, in ʒʒʒ, fit Cß. &c. Ex diuiſione vero cuiuſlibet characteris Coſſici maioris per alium quemuis minorem prouenit character Coſſicus tantum à maiore diſtans excluſiue, retrocedendo tamen, quantum minor ab vnitate, ſeu charactere N, abeſt excluſiue, vel quantus eſt exponens minoris characteris Coſſici. vt ex diuiſione Cce, per ʒʒ, producitur ß. &c.

QVANDO autem numerus Coſſicus compoſitus, vel diminutus multiplicatur, aut diuiditur per numerum abſolutum, vel Coſſicum tam ſimplicem, quam compoſitum, diminutumue, præter documentum iam traditum habenda eſt maxima ratio horum ſignorum +. & —. Nam quando numeri ſe mutuo multiplicantes, vel diuidẽtes habuerint idem ſignum +. vel —. apponitur producto ſemper hoc ſignum +. Quando vero alter illorum habuerit ſignum +, & alter hoc —, afficitur productus numerus perpetuo hoc ſigno —. Quod alij ſcriptores docent his verbis. In multiplicatione ac diuiſione, Plus per Plus, vel Minus per Minus producit Plus: At Plus per Minus, vel Minus per Plus producit Minus. Hoc autem vnica hac regula memoriæ mandabitur.

Regula in multipl. & diuiſione numerorũ Coſſicorum obſeruãda.

Eadem ſigna ponunt ſignum additorum: Diuerſa vero ſigna ponunt ſignum ſubtractorum.

Exempla Multiplicationis.

```
7 ʒ + 4 2e        | 7 ʒ — 4 2e        | 7 ʒ — 4 2e
      9 N         |       9           |       9 2e
63 ʒ + 36 2e      | 63 ʒ — 36 2e      | 63 ce — 36 ʒ

          8 ʒ + 9          |           8 ʒ — 9
          8 ʒ + 9          |           8 ʒ — 9
         72 ʒ + 81         |        — 72 ʒ + 81
64 ʒʒ + 72 ʒ               |  64 ʒʒ — 72 ʒ
64 ʒʒ + 144 ʒ + 81         |  64 ʒʒ — 144 ʒ + 81

8 ce — 4 ʒ
       6 2e
48 ʒʒ — 24 ce

                    6 ʒ + 8 2e — 6 N
                          2 ʒ — 4 N
              — 24 ʒ — 32 2e + 24 N
   12 ʒʒ + 16 ce — 12 ʒ
12 ʒʒ + 16 ce — 36 ʒ — 32 2e + 24 N

                          9 ʒ + 8 N — 3 2e
                          7 ce — 4 ʒʒ — 8 ʒ
                  — 72 ʒʒ — 64 ʒ + 24 ce
        — 36 ʒce — 32 ʒʒ + 12 ß
   63 ß + 56 ce — 21 ʒʒ
— 36 ʒce + 75 ß — 125 ʒʒ + 80 ce — 64 ʒ
```

In hoc vltimo exemplo præcedunt ſemper in ſumma maiores denominationes Coſſicæ minores denominationes Coſſicas. Sed quoniam non recte in initio ponitur hoc ſignum —, propterea ita collocanda erit ſumma producta.

75 ß — 36 ʒce — 125 ʒʒ + 80 ce — 64 ʒ

Exempla Diuiſionis.

```
      1                   |        1                  |        1
     10 ce  (3⅓ N         |       10 ce  (3⅓ ʒ        |       10 2e  (3⅓ N
per   3 ce                |  per   3 2e               |  per   3 2e

       1                         |  2
9 ʒ + 4 2e  (3 2e + 1⅓ N         |  18 ʒʒ — 12 ʒ  (4½ ce — 3 2e
3 2e  3 2e                       |   4 2e    4 2e

         40
30 ʒ — 58 2e + 24 N              (6 2e — 8 N
 8 2e — 3 N
        8 2e — 3 N
```

— 12ʒ 0℞
12ʒʒ + 16ce — 36ʒ — 32℞ + 24N (6ʒ + 8℞ — 6N
2ʒ + 0℞ — 4N
2ʒ + 0℞ — 4N
2ʒ + 0℞ — 4N

Quoniam in omni diuiſione numerorum Coſſicorum denominationes debent eſſe continuatæ, idcirco in vltimo exemplo, in quo diuiſor eſt 2ʒ — 4N. interpoſuimus 0℞, cum ſigno +, vt totus diuiſor ſit 2ʒ + 0℞ — 4N. Idem factum eſſe vides in ſequenti exemplo, vbi diuidendus numerus eſt 1ce + 1. & diuiſor 1℞ + 1.

— 1ʒ + 1℞
1ce + 0ʒ + 0℞ + 1 (1ʒ — 1℞ + 1N
1℞ + 1
1℞ + 1
1℞ + 1

CÆTERVM tria hæc vltima exempla, in quibus diuiſor eſt numerus compoſitus, vel diminutus, arte ſunt excogitata. Nam vt plurimum per huiuſmodi diuiſores diuiſio fieri non poteſt, ſed ſubſcripto diuiſore ipſi diuidendo numero, interiectaque linea, fit fractio, vt hic. *Quando nõ poſſit fieri diuiſio.*

8 ß per 2ʒ + 4N || 8ʒ — 9℞ per 4℞ + 3N

Quotientes ſunt.

8 ß / 2ʒ + 4N || 8ʒ — 9℞ / 4℞ + 3N

Quid autem faciendum ſit cum fractionibus huiuſmodi, infra cap. 10. docebimus, cum de reductione æquationum inter minutias inuentarum agemus. Eodem modo fractio conſtituitur, cum numerus Coſſicus ſimplex, vel compoſitus per Coſſicum numerum ſimplicem maioris denominationis diuiditur, vt 8ʒ. per 2ʒce. conſtituunt hanc fractionem 8ʒ / 2ʒce. Item diuiſis 9ʒ + 4. per 3℞. fit hæc fractio 9ʒ + 4 / 3℞. &c.

SVPEREST, vt tradamus examen Multiplicationis atque Diuiſionis. Hoc autem duplex eſt. Primum Multiplicatio per Diuiſionem, & contra examinari poteſt, vt in numeris abſolutis præcipitur. *Probatio Multiplicationis & Diuiſionis.*

DEINDE probatio inſtitui poteſt per reſolutionem Coſſicorum numerorum ſecundum aliquam radicem progreſſionis Geometricæ, vt dictum eſt ad finem cap. 4. Nam numeri Coſſici, qui multiplicantur inter ſe, reſoluti tantum faciant neceſſe eſt, ſi multiplicentur inter ſe, quantum numeri Coſſici producti, ſecundum eandem radicem reſoluti. Et diuidendus numerus Coſſicus reſolutus tantum debet producere diuiſus per diuiſorem reſolutum, quantum Quotiens ſecundum eandem radicem reſolutus. vt hic apparet.

Exemplum Multiplicationis.

Secundum radicem 2. faciunt 6℞ — 8. 4. & 5℞ — 3. faciunt 7. Ex multiplicatione autem 4. per 7. fiunt 28. Tantundem quoque fit ex reſolutione producti numeri ſecundum eandem radicem 2. vt patet.

6℞ — 8
5℞ — 3
— 18℞ + 24
30ʒ — 40℞
30ʒ — 58℞ + 24

Exemplum Diuiſionis.

— 18℞
30ʒ — 58℞ + 24 (5℞ — 3N
6℞ — 8
6℞ — 8

Diuidendus numerus 30ʒ — 58℞ + 24. ſecundum radicem 2. reſolutus facit 28. Diuiſor vero 6℞ — 8. facit 4. Diuiſis autem 28. per 4. producuntur 7. Perſpicuum autem eſt, quotientem hunc 5℞ — 3. ſecundum eandem radicem reſolutum efficere quoque 7.

QVOD autem eadem ſigna + & +, vel — & —, in Multiplicatione & Diuiſione producant ſemper ſignum hoc +. Diuerſa autem ſigna +, & —, vel —, & +, faciant ſemper hoc ſignum —; prætérquam quod examen Multiplicationis & Diuiſionis abunde id comprobare poſſit: tamen idipſum clare perſpicitur in numeris abſolutis. Vt in hoc exẽplo ſequenti, quis nõ videt, ſi multiplicentur 8 — 2. hoc eſt, 6. per 7. — 3. hoc eſt, per 4. produci 24. nempe 56 — 38 + 6? Nam cũ ex 7 in 8. fiunt 56. quoniã nõ multiplicatur totus hic numerus 7. in hunc 8. ſed in 8. detractis prius 2. propterea numerus hic 56. maior eſt vero producto. Vnde ex multiplicatione poſtea eiuſdem numeri 7. in — 2. fiunt 14. ſignando hoc ſigno —. atque ita ex + in —, fit —. Rurſus quia non *Quod eadẽ ſigna producant ſignum +. Diuerſa autem ſignũ —.*

8 — 2
7 — 3
56 — 14
· — 24 + 6
56 — 38 + 6

totus hic numerus 7. ſed detractis prius 3. multiplicatur in 8 — 2, fit vt productus 56 — 14. fit vero producto maior. Quare ex multiplicatione — 3, in 8. fiunt 24. notanda hoc ſigno —, atque ita rurſus ex — in + fit —. Sed quia non totum hoc, quod prouenit ex — 3. in 8. ſed quod producitur ex — 3. in 8. ſubtractis prius 2. idcirco reſtituendum eſt id, quod iniuſte ablatum eſt; atque ita poſtremo ex — 3. in 2. fiunt 6. notanda ſigno hoc +, quod additionem ſignificat, vt reſtituantur 6. quæ ablata fuerant. Eadem ratio eſt in cæteris exemplis Multiplicationis.

IAM vero cum ex multiplicatione 6. in — 4. gignatur hic numerus — 24. vt dictũ eſt, neceſſe eſt, vt ex diuiſione — 24. per — 4. producantur 6; & ex diuiſione — 24. per 6. fiant — 4. Quare in diuiſione quoq; ex —, in —, fit +, & ex —, in +, vel contra, fit —. Itaque quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant, ita ſiue Plus in Plus, ſiue Minus in Minus multiplicatum, aut diuiſum producit Plus. Item, ſicut affirmatio negationis, ſiue negatio affirmationis negat, ita ſiue Plus in Minus, ſiue Minus in Plus multiplicatum, aut diuiſum producit Minus.

DE NVMERIS FICTIS, SIue minoribus quam nihil.

CAPVT VI.

Numeri ficti, ſiue minores quã nihil.

QVEMADMODVM variæ finguntur radices numerorum, qui eas non habent, qualis eſt radix quadrata, vel cubica, vel Zenſizenſica, vel Surdeſolida huius numeri 20. fitque hæc fictio ſumma vtilitate, & commodo eorum, qui in rebus Mathematicis verſantur, vt ſuo loco dicemus: Ita etiam à ſcriptoribus Algebræ finguntur non temere numeri quidam minores quam nihil, vt 0 — 4. hoc eſt, nihil detractis prius quatuor vnitatibus. Item 6 — 10. hoc eſt, ſex vnitates minus 10. vnitatibus. Quod vnico exemplo hoc ſubtractionis perſpicuum fiet. Sint ex 8 — 2, deducenda 10 — 5. hoc eſt, 5. ex 6. Primo detraho — 5. ex — 2, hoc eſt, quia ſuperior numerus minor eſt, detraho 2. ex 5. & reliquo numero 3, tribuo contrarium ſignum +, iuxta legem ſubtractionis ſupra traditam. Nam re vera hic numerus — 2, intelligitur ſuperare hunc numerum — 5, tribus vnitatibus, cum — 2, cadat infra nihil duabus vnitatibus, at — 5. infra idẽ nihil deſcendat quinq; vnitatibus, hoc eſt, tribus vnitatibus magis, quã — 2, recedat à nihilo.

8 — 2
10 — 5
— 2 + 3

Quod etiã hinc poteſt intelligi, quod huic numero — 2, deſint tantũ duæ vnitates, vt æqualis ſit nihilo, at huic — 5, deſint quinque, vt nihilo æquiualeat. Deinde ſubtraho + 10, ex + 8, maiorem numerum ex minore, quod fieri non poteſt. Vnde non inuenio numerum aliquem verum, quem pro relicto reponam, ſi 10. ex 8. ſubducam. Nam ſi ſuperior numerus 8, maior eſſet inferiore 10, remaneret verus numerus ex illa ſubtractione: Et ſi æqualis eſſet ſuperior numerus inferiori, relinqueretur nihil. Nunc vero cum numerus ſubtrahendus 10, maior ſit numero 8, à quo fieri debet ſubtractio, efficitur, vt numerus infra 0, hoc eſt, minor nihilo relinquatur, ille nimirum, qui deeſt ſuperiori, vt ab eo inferior detractus relinquat 0, cuiuſmodi eſt numerus, qui relinquitur ex ſubtractione ſuperioris ab inferiore, notatus ſigno —. quod defectum ſignificat, nempe — 2. Vt totus numerus relictus ſit — 2 + 3. Sed quia nõ recte ad initium numeri præfigitur hoc ſignum —, ita ſtatuendus erit relictus. 32. — Eodem modo, quotieſcunque maior numerus aliquis ex minore detrahendus eſt. (quod vera fieri non poteſt) ponitur in hac ſcientia pro relicto exceſſus, quo inferior numerus ſuperiorem ſuperat, præfixo hoc ſigno —, vt ſubtractis 20, ex 12, relinquuntur — 8, &c.

VIDES igitur, quam pulchre hæc ars pro immenſa copia ſua vtatur & ijs, quæ ſunt, & ijs, quæ non ſunt, ſed tantum eſſe finguntur. Quod accuratius adhuc ex ijs, quæ ſequuntur, iam iam intelliges.

QVEMADMODVM ſupra vnitatem ponuntur numeri integri, & infra vnitatem fractiones vnitatis, vt vnitas media ſit inter numeros integros & fractos; ita ſupra 0, ſeu nihilum, ponitur vnitas cum reliquis numeris veris, & infra 0, fingitur vnitas cum reliquis numeris, præpoſito tamen ſemper ſigno hoc —, ita vt 0, ſeu nihilum, medium ſit inter numeros veros, & fictos, ſiue minores nihilo. Quod appoſitæ ſequentes duæ progreſſiones commonſtrant, quarum ſuperior eſt naturalis ſeries numerorum, inferior autem Geometrica,

&c.	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6	7	&c.
&c.	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

illiusque numeri numeros huius exponũt, vt cap. 2. diximus. Nam & hic ſuperioris progreſſionis numeri idem faciunt additione, & ſubtractione, quod inferioris progreſſionis numeri multiplicatione, atque diuiſione. Vt enim ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. in 32 fiunt 8. ita ex additione — 2, ad 5. fiunt 3. Item ſicut ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. in 8. fiunt 4, ita ex additione — 1. ad 3. fiunt 2. Rurſus, vt ex diuiſione 8, per $\frac{1}{4}$, prodeũt 32, ſic ex ſubtractione — 2, de 3, relinquuntur 5. Et quemadmodũ ex diuiſione 8, per $\frac{1}{2}$, exeunt 16, ita ex ſubtractione — 1, de 3, relinquuntur 4. &c. Vt ex ijs, quæ de additione ſubtractioneque numerorum Coſſicorum diximus, perſpicuum eſt. Immo ex hoc facile conſtat, in additione & ſubtractione diuerſa ſigna mutare ſpeciem operationis, &c. vt docuimus cap. 4. alias non reſponderet additio & ſubtractio in progreſſione naturali numerorum multiplicationi ac diuiſioni in Geometrica progreſſione.

EX his liquido conſtat, non fruſtra excogitari huiuſmodi numeros fictos, ſiue nihilo minores, quandoquidem tã conciſſine eorum additio ad numeros integros, vel ſubtractio reſpondet multiplicationi, & diuiſioni numerorũ integrorum progreſſionis Geometricæ per numeros fractos eiuſdem progreſſionis, vt dictum eſt.

EST

EST autem hoc loco obſeruatione dignum, dari poſſe numerum Coſſicum, qui habeat duas radices quadratas inæquales; ſiue (quod idem eſt) exhiberi poſſe duos numeros inæquales, quorum vterque in ſeipſum ductus producat eundem numerum. Nam ſi duo numeri, 2ℨ—3℞. & 3℞—2ℨ. ſi vterque in ſe multiplicetur, producunt 4ℨℨ+9ℨ—12ℭ. vt hic vides.

Vnum & eundem numerũ habere poſſe duas radices quadratas inæquales.

2ℨ — 3℞	3℞ — 2ℨ
2ℨ — 3℞	3℞ — 2ℨ
— 6ℭ + 9ℨ	— 6ℭ + 4ℨℨ
4ℨℨ — 6ℭ	9ℨ — 6ℭ
4ℨℨ + 9ℨ — 12ℭ	4ℨℨ + 9ℨ — 12ℭ

Cum tamen ipſi numeri multiplicati inter ſe ſint valde inæquales. Prior enim 2ℨ—3℞, ſi per radicem 2. reſoluatur, efficit 8—6. hoc eſt, 2. qui numerus in ſe ductus procreat 4. qui ęqualis eſt producto 4ℨℨ+9ℨ—12ℭ. cum hic per eandem radicem 2. reſolutus efficiat quoque 4. Poſterior vero 3℞—2ℨ. efficit 6—8. id eſt 0—2. qui numerus in ſe multiplicatus producit quoque 4. ſi leges multiplicationis ſeruentur. Itaque tam numerus 2ℨ—3℞. quam 3℞—2ℨ. radix eſt quadrati numeri 4ℨℨ+9ℨ—12ℭ. quod ſane mirum videri poſſit, & paradoxum, cum tamen ita rem ſeſe habere, reſolutiones radicum, & producti numeri euidenter comprobent.

HOC idem cernitur in numeris abſolutis. Nam vterque horum numerorum 4—1. & 1—4. id eſt 3. & 0—3. in ſe multiplicatus gignit 9. vt hic cernis.

4 — 1	1 — 4
4 — 1	1 — 4
— 4 + 1	— 4 + 16
16 — 4	1 — 4
9	9

Idemque in infinitis alijs numeris licebit experiri. Quod ſi ducantur 4—1. in 1—4. producetur numerus 8—17. hoc eſt, 0—9. At ex multiplicatione 2ℨ—3℞. in 3℞—2ℨ. procreabitur numerus 12ℭ—4ℨℨ—9ℨ. qui reſolutus per radicem 2. efficit 32—36. id eſt, 0—4. cum tamen vterque illorum in ſe ductus producat 4. Cauſa autem huius rei in multiplicationem numerorum Coſſicorum, & ſignorum + & — reiicienda videtur: & debilitas ingenij humani accuſanda, quod capere non poteſt, quo pacto id verum eſſe poſſit. Neque enim de ratione prædictæ multiplicationis dubitandum eſt, cum illa per multa exempla ſit confirmata.

DE FRACTIONIBVS numerorum Coßicorum.

CAPVT VII.

EÆDEM fere operationes ſunt in fractionibus, ſeu Minutijs Coſſicis, quæ in vulgaribus Minutijs, adhibitis tamen ijs, quæ de integris Coſſicis numeris hactenus tradidimus, quod ad characteres Coſſicos, & ſigna + & — attinet. Nam, vt de Numeratione exempla nonnulla ponamus, hæc fractio $\frac{3N}{8℞}$. ſignificat, tres vnitates diuiſas eſſe per 8℞. Et $\frac{7ℨ}{9}$. denotat 7. Zenſos eſſe diuiſos per 9, vnitates. Item $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$. indicat hunc numerum 9ℨℨ+8ℨ. diuiſum eſſe per 6ℭ. Et $\frac{9ℨℨ-8ℨ}{6ℭ}$. vult numerum hunc 9ℨℨ—8ℨ eſſe diuiſum per 6ℭ. &c.

Numeratio fractionum Coſſicarum.

Abbreuiatio duobus modis fieri poteſt. Aut enim ſolum abbreuiantur numeri, vt in Minutijs vulgaribus fit, intactis characteribus Coſſicis, aut etiam characteres Coſſici abbreuiantur. Vt fractio hæc $\frac{8ℨ}{2ℨℭ}$. quod ad numeros attinet, reducitur ad hanc $\frac{4ℨ}{1ℨℭ}$. Hæc autem $\frac{9ℨ+36}{81}$. reducitur ad hanc $\frac{1ℨ+4}{9}$. quia maxima menſura communis eſt 9. Modus autem inueniendi maximam menſuram trium aut plurium numerorum colligitur ex propoſ.3, lib.7. Euclid. Si enim ſunt tres numeri, inuenta maxima menſura duorum, ſi hæc metiatur quoque tertium, erit ipſa maxima menſura omnium; ſi vero non metiatur tertium, erit maxima menſura illius maximæ menſuræ, & tertij numeri, omnium trium menſura maxima. Eodem modo, datis quatuor numeris, inuenta maxima menſura trium, ſi hæc metiatur & quartum numerum, erit ipſa maxima omnium quatuor menſura; ſi vero non metiatur, erit maxima menſura menſuræ illius maximæ, & quarti numeri, maxima menſura omnium quatuor. Et ſic de reliquis. Similiter hæc minutia $\frac{8ℨ}{2ℨ-4}$. ad hanc reducitur $\frac{4ℨ}{1ℨ-2}$. Hæc autem $\frac{18ℨ-9℞}{[illegible]℞+3ℨ}$. reducitur ad hanc $\frac{6ℨ-3℞}{2℞+1ℨ}$. &c.

Abbreuiatio fractionum Coſſicarum.

AT vero abbreuiatio characterum Coſſicorum fit per ſubtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus aliorum characterum. Nam ſi reliquis numeris proprij characteres tribuantur, peracta erit abbreuiatio, quod ad characteres attinet. Hinc perſpicuum eſt, numerum minoris characteris Coſſici fieri in hac abbreuiatione Abſolutum. Itẽ Minutiam, in quo Abſolutus numerus reperitur, nõ poſſe abbreuiari, quod ad characteres attinet. Vt hæc Minutia $\frac{7}{3+4ℨ}$. abbreuiari non poteſt, quod ſpectat ad characteres: ſed quod ad

numeros attinet, reducetur per abbreuiationem ad hanc, $\frac{1}{2ℨß}$. At vero hæc Minutia $\frac{8ℨ}{2ℨℭ}$, quod ad characteres ſpectat, ad hanc reducitur. $\frac{8}{2ℨℨ}$. Deinde quod ad numeros attinet, ad hanc $\frac{4}{1ℨℨ}$. Hæc autem $\frac{18ℨ-9℞}{6℞+3ℨ}$. reducitur ad iſtam, quod ad numeros & characteres attinet, $\frac{6℞-3}{2+1℞}$.

Demonſtratio abbreuiationis fractionũ Coſſicarũ. FACILIS autem eſt demonſtratio huiuſce abbreuiationis. Nam quod ſpectat ad numeros, cum Minutiæ propoſitæ numeri diuidantur per eundem numerum, per maximam videlicet eorum menſuram, erit eadem proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuiſos. Quare æquales erunt hæ fractiones, $\frac{8ℨ}{2ℨℭ}$. $\frac{4ℨ}{1ℨℭ}$. Quod vero ad characteres attinet, cum ſinguli characteres per eundem exponentem deprimantur, ita vt eadẽ prorſus ſit diſtantia inter characteres, ad quos facta eſt reductio, quæ inter characteres initio propoſitos, habebunt eandem proportionem characteres, ad quos facta eſt reductio, quam priores characteres propoſiti. Æquales itaq; erunt hæ Minutiæ, $\frac{4ℨ}{1ℨℭ}$. $\frac{4N}{1ℨℨ}$. [a] Nam eadem proportio eſt 4ℨ. ad 1ℨℭ, quæ 4. ad 1ℨℨ. cum idem numerus fiat ex multiplicatione 4ℨ, primi numeri, in 1ℨℨ, numerũ quartum, qui ex 4. numero tertio in 1ℨℭ, numerum ſecundum. Vtrobique enim producitur hic numerus 4ℨℭ. &c. Vel certe, cum & inter ℨ, ac ℨℭ, & inter N, ac ℨℨ, tres medij termini cadant proportionales, propterea quod ℨ, & ℨℭ, æqualiter ſunt depreſſi, nempe per 2. exponentem huius characteris minoris ℨ, &c.

[a] 19.7.

Reductio fractionũ Coſſicarũ. REDVCTIO fractionum ad eundem denominatorem abſoluitur multiplicando numeratores in denominatores per crucẽ, & denominatores inter ſe, vt in Minutijs vulgaribus. Vt hæc fractiones $\frac{3℞}{4ℨ}$. ⋈ $\frac{4ℭ}{5ℨℭ}$. reducuntur ad has. $\frac{15Bß}{20ℨℨℨ}$. $\frac{16ß}{20ℨℨℨ}$.

Demonſtratio reductionis fractionũ Coſſicarum. RATIO autem huius reductionis perfacilis eſt. Quoniam enim idem numerus 5ℨℭ, multiplicans duos numeros 3℞, & 4ℨ, produxit 15Bß, & 20ℨℨℨ. [b] eadem proportio erit 15Bß, ad 20ℨℨℨ. quæ 3℞, ad 4ℨ. ac propterea eundem habebunt valorem fractiones hæ $\frac{3℞}{4ℨ}$. & $\frac{15Bß}{20ℨℨℨ}$. Eodem modo æquales erunt hæ fractiones $\frac{4ℭ}{5ℨℭ}$. & $\frac{16ß}{20ℨℨℨ}$. Nam hic numerus 4ℨ, multiplicans duos 4ℭ, & 5ℨℭ, genuit hos duos 16ß, & 20ℨℨℨ.

[b] 17.7.

QVOD ſi numerus aliquis integer, & fractio ad eandem denominationem ſint reducenda, ſupponenda eſt vnitas numero integro pro denominatore, & reliqua peragenda, vt prius. Vt 6. & $\frac{4℞}{7ℨ}$. hoc modo $\frac{6}{1}$. ⋈ $\frac{4℞}{7ℨ}$. reducentur ad has fractiones $\frac{42ℨ}{7ℨ}$. & $\frac{4℞}{7ℨ}$. Et hæ duæ $\frac{5ℨ}{1}$. $\frac{4ℭ}{3ℨ}$. ad has $\frac{15ℨℨ}{3ℨ}$. $\frac{4ℭ}{3ℨ}$. Nam huic numero Coſſico integro 5ℨ, ſuppoſita eſt vnitas pro denominatore.

SI vero integris adhęreat fractio aliqua, reducenda erunt prius integra ad eam fractionem; quod quidem fit multiplicando integra per denominatorem fractionis, & numerum productum numeratori addendo. Vt ſi 4ℨ + $\frac{2℞}{1ℭ}$. & $\frac{3ℨ}{1ß}$. reducere velimus ad eandem denominationem, multiplicabimus prius 4ℨ, per 1ℭ, vt habeamus duas fractiones has $\frac{4ß+2℞}{1ℭ}$ $\frac{3ℨ}{1ß}$. quas ad has duas reuocabimus. $\frac{4ℨß+2ℨℭ}{1ℨℨℨ}$. $\frac{3ß}{1ℨℨℨ}$. & ſic de cæteris.

Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio fractionũ Coſſicarum. IAM vero quatuor reliquæ operationes fractionum Coſſicarum, hoc eſt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, atque Diuiſio, non differunt ab ijs, quas de Minutijs vulgaribus tradidimus, habita tamen ſemper ratione ſignorum + & −, nec non characterum Coſſicorum, quorum operationes in ſuperioribus præceptis continentur. Itaque ſolum exemplis rem abſoluemus hoc loco.

Exempla Additionis.

$\frac{1℞}{2N}$ ⋈ $\frac{4ℨ}{3ℭ}$ faciunt $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ hoc eſt, $\frac{9ℨ+8N}{6℞}$. Itẽ $\frac{48N}{7ℨ}$ ⋈ $\frac{48N}{12℞-3ℨ}$ faciũt $\frac{192ℨ+576℞}{84ℭ-21ℨℨ}$. Item $\frac{9℞+2ℨ}{36ℭ}$ ⋈ $\frac{21ℨℨ-8ℨ}{36ℭ}$. faciunt $\frac{21ℨℨ-6ℨ+9℞}{36ℭ}$. Quoniam enim in poſteriori exemplo denominatores omnino ſimiles ſunt, propterea ſolum numeratores adduntur inter ſe, & ſummæ idem denominator ſubſcribitur. Hæc autem fractio quod ad numeros & characteres ſimul ſpectat, reducetur ad hanc $\frac{7ℭ-2℞+3N}{12ℨ}$.

Exempla Subtractionis.

$\frac{3℞}{2N}$ de ⋈ $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ relinquunt $\frac{16ℨ}{12ℭ}$ hoc eſt, $\frac{4N}{3℞}$. Item $\frac{3N}{4℞}$ de ⋈ $\frac{32ℨ}{20ℭ}$ relinquunt $\frac{64ℭ}{80ℨℨ}$ hoc eſt, $\frac{4N}{5℞}$. Item $\frac{9℞}{6N}$ de $\frac{20ℨ+21℞}{24N}$ relinquunt $\frac{126℞}{144N}$ hoc eſt. $\frac{7℞}{8N}$. Item $\frac{9ℨ+8℞}{2ℭ-6N}$ de $\frac{11ℭ+16ℨ+8℞}{2ℭ-6N}$ relinquunt $\frac{11ℭ+7ℨ}{2ℭ-6N}$. Quoniam enim in poſteriori exemplo denominatores omnino ſunt ſimiles, & iidem, detrahendus eſt numerator à numeratore, & reliquo numero idem denominator ſubſcribendus,

Exempla Multiplicationis.

$\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ per $\frac{3℞}{2N}$ faciunt $\frac{27ß+24ℭ}{12ℭ}$. Item $\frac{7ℨ}{8ℨℨ}$ per 4℞ − 8N. faciunt $\frac{28ℭ-56ℨ}{8ℨℨ}$. Hic enim integro numero ſupponitur vnitas pro denominatore, vt exemplum ad Multiplicationem paretur hoc modo. $\frac{7ℨ}{8ℨℨ}$ per $\frac{4℞-8N}{1N}$. Item $\frac{7ℨ+8℞}{5ℭ-11N}$ per $\frac{4℞}{5ℨ}$ − 8N. faciunt $\frac{32ℨ-280ℨℨ-292ℭ}{25ß-55ℨ}$. Prius enim in hoc exemplo facta eſt reductio −8N, ad fractionem, cui adhærebant, multiplicando videlicet −8N, per 5ℨ, denominatorem. Quare fractiones multiplicandæ fuerunt hæ $\frac{7ℨ+8℞}{5ℭ-11N}$ per $\frac{4℞-40ℨ}{5ℨ}$.

Exempla Diuiſionis.

$\frac{27ß+24ℭ}{12ℭ}$ per $\frac{3℞}{2N}$ faciunt $\frac{54ß+48ℭ}{36ℨℨ}$. Item $\frac{8℞}{9ℨ}$ per $\frac{2N}{3℞}$ faciunt $\frac{24ℨ}{18ℨ}$ hoc eſt, $\frac{4}{3}$ ſiue $1\frac{1}{3}$. Item $\frac{7ℭ-14ℨ}{2ℨℨ}$ per 4℞ − 8N. faciunt $\frac{7ℭ-14ℨ}{8ß-16ℨℨ}$. Item $\frac{7ℭ-14ℨ}{2ℨℨ}$ per $\frac{7ℨ}{8ℨℨ}$ faciunt $\frac{56Bß-112ℨℭ}{14ℨℭ}$.

QVONIAM vero Additio, & Subtractio, Item Multiplicatio ac Diuiſio ſe mutuo probant, fit vt ſi ex additione $\frac{3℞}{2N}$ & $\frac{4ℨ}{3ℭ}$ fiunt $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ hoc eſt, $\frac{9ℨ+8N}{6℞}$; ſubductis $\frac{3℞}{2N}$ ex $\frac{9ℨℨ+8ℨ}{6ℭ}$ relinquatur $\frac{4ℨ}{3ℭ}$. Relinquuntur autem iuxta regulam $\frac{16ℨ}{12ℭ}$ hoc eſt, in minimis terminis $\frac{4N}{3℞}$. Neceſſe eſt igitur, has duas minutias $\frac{4ℨ}{3ℭ}$ & $\frac{4N}{3℞}$ eſſe æquales, hoc eſt, eandem proportionem eſſe 4ℨ. ad 3ℭ, atque 4N, ad 3℞. Quod quidem verum eſt. Nam ſi Minutiæ dictæ multiplicentur per crucem, producentur æquales numeri, hoc eſt, tantum fiet ex primo numero in quartum, nimirum ex 4ℨ, in 3℞, quantum ex ſecundo in tertium, nimirum ex 3ℭ, in 4N. Itaque

non

non eſt neceſſe vt eadem Minutia omnino proueniat, ſed ſatis eſt, vt æqualis Minutia producatur, quæ quidem æqualitas facile comprobari poteſt ex multiplicatione per crucem. Idem dicendum eſt de exemplis Multiplicationis ac Diuiſionis, vt ex ſuperioribus exemplis apparet.

Compendiariæ quædam operationes Minutiarum ad plurimas quæſtiones ſoluendas, perutiles.

I.

Dati numeri partem quamcunque, vel partes nominatas ad ipſum numerum addere. *Compendia quadã fractionum.*

SIT datus numerus $\frac{3x-16N}{2N}$ cui volo addere $\frac{3}{4}$ ipſius numeri. Vtor ergo hoc cōpendio, etiamſi ignorem quę ſint $\frac{3}{4}$ ipſius. Addo ad partem, vel partes addendas, vnitatem, (quod breuiter fit, addendo denominatorem numeratori) nimirum ad $\frac{3}{4}$ facio $\frac{7}{4}$. Hanc vero Minutiam multiplico per numerum datum efficioq; $\frac{21x-112N}{8N}$ ſummam quæſitam.

Item ſi $\frac{2}{3}$, addendæ ſint ad 12 z. addo vnitatem ad $\frac{2}{3}$, vt fiant $\frac{5}{3}$. Hanc minutiam multiplico per 12. z, facioque ſummam hanc $\frac{60z}{3N}$. hoc eſt, 20 z. Similiter ſi ad hanc minutiam $\frac{3}{5}$ addendum ſit eius dimidium; addita vnitate ad $\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{3}{2}$. Multiplico $\frac{3}{2}$ per $\frac{3}{5}$. fit ſumma tota $\frac{9}{10}$.

II.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ad partem, vel partes quaſcunque eiuſdem numeri addere.

SIT datus numerm $\frac{8x-12}{7N}$ ad cuius $\frac{1}{3}$, volo addere $\frac{3}{4}$, eiuſdem dati numeri. Addo partes propoſitas inter ſe, vt $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$, facioque $\frac{13}{12}$. Hanc minutiam multiplico in datum numerum $\frac{8x-12N}{7N}$ efficioque ſummam $\frac{104x-156N}{84}$.

Similiter ſi $\frac{2}{5}$ huius numeri 35. ad $\frac{4}{7}$ eiuſdem volo addere Addo prius $\frac{2}{5}$ & $\frac{4}{7}$ facioque $\frac{34}{35}$. Multiplico $\frac{34}{35}$ per 35. efficioque $\frac{1190}{35}$ hoc eſt, 34. &c.

III.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ab ipſo numero ſubtrahere.

SIT datus numerus $\frac{7z+8x-10}{12x}$, à quo volo ſubtrahere $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$, hoc eſt $\frac{8}{15}$ (ſunt enim prius in vnam ſummam redigendæ fractiones, ſi plures fuerint) Demo $\frac{8}{15}$ ex vnitate (quod breuiter fit, ſubtrahendo numeratorem à denominatore. Nam reliquus numerus eſt numerator) remanentque $\frac{7}{15}$. Multiplico $\frac{7}{15}$. per datum numerum $\frac{7z+8x-10}{12x}$ facioque reliquum numerum $\frac{49z+56x-70}{180x}$.

Similiter volo ſubtrahere $\frac{4}{5}$ huius numeri $\frac{9}{10}$, ab ipſo numero $\frac{9}{10}$ Detraho $\frac{4}{5}$ ex vnitate, manet $\frac{1}{5}$. Multiplico $\frac{1}{5}$ per $\frac{9}{10}$, facioq; $\frac{9}{50}$ pro ſumma reliqua, &c.

IIII.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque à parte, vel partibus quibuſcunque eiuſdem numeri ſubtrahere.

SIT datus numerus $\frac{12x+8}{5}$ à cuius $\frac{1}{3}$ volo detrahere $\frac{1}{4}$. Demo prius $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{3}$ remanet $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$. per $\frac{12x+8}{5}$ facioque ſummam relinquam $\frac{13z x+8}{60}$.

Item volo ſubducere $\frac{3}{4}$ huius numeri 36. ex $\frac{8}{9}$ eiuſdem numeri. Demo $\frac{3}{4}$ ex $\frac{8}{9}$ manent $\frac{5}{36}$ Multiplico $\frac{5}{36}$ per 36. facioq; $\frac{186}{56}$ hoc eſt, 5. pro numero reliquo. &c.

V.

Dati numeri partem, vel partes quaſcunque inuenire.

SIT datus numerus $\frac{12x+8}{5}$. Volo ipſius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, id eſt, $\frac{7}{12}$. (quando enim plures ſunt fractiones, colligendæ ſunt prius in vnam ſummam.) Multiplico $\frac{7}{12}$ per datum numerum $\frac{12x+8}{5}$ facioque $\frac{84x+56}{60}$ atque hic numerus conſtituit $\frac{7}{12}$, hoc eſt, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. dati numeri $\frac{12x+8}{5}$.

Similiter volo $\frac{3}{4}$ huius numeri 24. Multiplico $\frac{3}{4}$ in 24. facioq; $\frac{72}{4}$ hoc eſt, 18, &c.

VI.

Numerum inuenire, cuius pars nominata data ſit, vel partes. Hoc eſt, numerum inuenire, cuius datus quilibet numerus ſit data quæuis pars, vel partes.

SIT hic numerus $\frac{12x-4}{5}$ duæ tertiæ partes alicuius numeri. Volo reperire illum numerum. Diuido $\frac{12x-4}{5}$. per $\frac{2}{3}$. facioque $\frac{36x-12}{10}$ atque hic eſt numerus, cuius $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12x-4}{5}$.

Pari ratione volo inuenire numerum, cuius hic numerus 8, ſit $\frac{4}{5}$ Diuido 8 per $\frac{4}{5}$ facioque $\frac{40}{4}$, hoc eſt, 10. atque hic eſt numerus, cuius $\frac{4}{5}$. faciunt 8. &c.

DE REGVLA ALGEBRÆ.

CAPVT VIII.

ABSOLVTO Algorithmo numerorum Coſſicorum, ordo iam poſtulat & locus, vt celeberrimam Algebræ regulam exponamus. Occaſione.n. huius omnia, quæ hactenus tradita ſunt de numeris Coſſicis, planiora fient, & reliqua, quæ ad perfectiorem huius regulæ cognitionem requiruntur, declaranda erunt. Neque enim omnia, vt debent, explicari poſſunt, niſi occaſione accepta à partibus regulæ Algebræ, vt ſuo loco dicemus. Regula igitur Algebræ, quam alij ſcriptores in plures diſtraxerunt, huiuſmodi eſt,

Regula Algebræ.

Pro numero incognito in quæſtione ponatur radix vna hoc modo, 1 ℞. (Poſſunt etiam interdum plures radices poni hoc modo 2 ℞. vel 3 ℞, &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quæſtionis propoſitæ.) Quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec Aequatio aliqua inueniatur: Hæc reducatur, ſi reductione opus fuerit: Deinde per numerum characteris Coſſici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus. Nam vel Quotiens ipſe erit numerus, qui quærebatur, pretium ſcilicet radicis in principio poſitæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet. Pulchre autem diuiſor ſuo charactere Coſſico demonſtrabit, quando radix ex Quotiente, & quænam ſit extrahenda.

HABET autem regula hæc quatuor partes. Prima eſt inuentio Æquationis: Secunda, Reductio Æquationis inuentæ: Tertia, Diuiſio alterius numeri Æquationis per numerum maioris characteris Coſſici: Quarta & vltima, Extractio radicis alicuius ex Quotiente.

HARVM duæ ſunt omnino neceſſariæ, nimirum Inuentio Æquationis, & Diuiſio. In omni enim quæſtione per hanc regulam ſoluenda inuenienda eſt Æquatio ſiue Æqualitas inter duos numeros, & Diuiſio inſtituenda. Reliquæ duæ, nimirum Reductio Æquationis, & Extractio radicis ex Quotiente, non omnino ſunt neceſſariæ. Neque enim omnis Æquatio inuenta reductionem exigit, neque ſemper ex Quotiente radix extrahenda eſt, vt ex ijs, quæ ſequuntur, manifeſtum erit. Quid porro inter vnicam hanc regulam noſtram, & multiplices aliorum regulas interſit (Plures enim alij regulas præſcribunt) cap. 13. manifeſtum erit.

SED priuſquam omnes has quatuor partes regulæ ſingulatim pertractemus, rudi quadam Minerua, & obiter regulam ipſam explanabimus, hoc propoſito problemate.

Inuenire numerum, ita vt dimidio ipſius, & tertia parte ab eo ſublatis, reliquus numerus ſit 7.

Prima pars regulæ Algebræ.

PONO hunc numerũ ignotũ, qui quæritur, eſſe 1 ℞. ita vt 1 ℞, æqualis intelligatur numero abſcõdito, quem inquirimus. Cum n. omnis numerus ſiue integer ſiue fract⁹, ſiue integer cũ fracto obtinere poſſit ſecundũ locũ alicuius progreſſionis Geometricæ ab vnitate incipientis, ita vt ſit radix illius progreſſionis: conſiſtit totum artificium huius regulæ Algebræ in eo, vt inueniat, quamnam progreſſionẽ Geometricam numerus quæſitus conſtituat; hoc eſt, in quanam progreſſione numerus, qui quæritur, locum vnitati proximum occupet. Iuxta igitur quæſtionis tenorem examino 1 ℞, hoc eſt, ſumo ipſius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, hoc eſt, $\frac{1}{2}$ ℞, & $\frac{1}{3}$ ℞, quæ partes ſimul conſtituunt $\frac{5}{6}$ ℞. Aufero $\frac{5}{6}$ ℞, ex 1 ℞, remanet $\frac{1}{6}$ ℞. Iam ſi ratiocinor. Quoniam 1 ℞, poſita eſt æqualis toti numero abſcondito, qui quæritur, erit $\frac{1}{2}$ ℞, æqualis dimidio totius numeri, & $\frac{1}{3}$ ℞, tertiæ parti eiuſdem. Et quoniam dimidio, ac tertia parte ex toto numero ſubtractis, reliquus numerus eſt 7; fit, vt $\frac{1}{2}$ ℞, & $\frac{1}{3}$ ℞ hoc eſt, $\frac{5}{6}$ ℞. detractis ex 1 ℞, reliquus numerus, nimirum $\frac{1}{6}$ ℞, æqualis ſit reliquo numero 7, quia ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia. Inuenta eſt igitur Æquatio, ſiue Æqualitas inter $\frac{1}{6}$ ℞, & hunc numerum 7. atq; ita prima pars regulæ abſoluta eſt, quæ ita habet. [*Pro numero incognito in quæſtione ponatur 1 ℞, quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur.*] Satis autem patet ex propoſito exemplo, qua ratione iuxta tenorem quæſtionis Æquatio inuenienda ſit.

In quo conſiſtat artificium regulæ Algebræ.

Æquatio quid.

Eſt autem Æquatio, vt hic ſumitur, nihil aliud, quam proportio æqualitatis inter duas quantitates, ſiue res varie denominatas. Vt in dato exemplo, proportio æqualitatis eſt inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7. quæ duo varie denominantur. Nam cum duæ res æquales dicuntur, quæ eandem habent denominationem, eſt ea æqualitas, ſiue æquatio vel falſa, vt cum dico æquationẽ eſſe inter 5, & 7, aut inter $\frac{1}{6}$ ℞, & $\frac{1}{5}$ ℞. vel certe identitas quædam ad regulam Algebræ inutilis prorſus, vt cum dico, æqualitatem eſſe, ſeu æquationem inter 4 ℞, & 4 ℞, aut inter 7. & 7. Neceſſe eſt ergo, vt æqualitas ad regulam Algebræ pertinens ſit inter duas res diuerſorum nominum.

Secũda pars regulæ Algebræ.

Sequitur deinde in regula. [*Hæc reducatur, ſi reductione opus fuerit.*] Hoc eſt, Æquatio inuenta reducatur, ſi res poſtulauerit. Quando autem, & quomodo ſit reducenda Æquatio, paulo poſt docebimus. Nunc certum ſit, noſtram Æquationem inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7. non indigere reductione.

Tertia pars regulæ Algebræ.

QVARE ſubiungit regula. [*Deinde per numerum characteris Coſſici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus.*] Quoniam in omni Æquatione reperiuntur duo numeri inæqualiter denominati, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maioris characteris Coſſici diuidatur reliquus numerus æquationis. Non iubet vt diuiſio fiat per maiorem numerum Coſſicum, ſed per maioris characteris Coſſici numerum. Nam Diuiſor in hac regula, dum diuidit, abijcit characterem ſuum, alioquin Quotiens ſemper foret vnitas. Cum enim numerus maioris characteris Coſſici, quando à charactere denominatur, æqualis ſit reliquo æquationis numero perſpicuum eſt, ſi alter per alterum ita diuidatur, produci vnitatem, propterea quod numerus quicunque in altero

numero

numero ſibi æquali ſemel duntaxat continetur. Cur autem Diuiſor huiuſmodi abijciat ſuum ſignum Coſſicum paulo inferius cap. 11. dicam, vbi hanc diuiſionem, quæ in Algebræ regula præcipitur, plenius explanabimus. In noſtra Æquatione inuenta inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7 N, maior character Coſſicus eſt ℞, hoc eſt maiorem exponentem habet, quam N, cum huius exponens ſit 0, illius vero 1. Per exponentes enim cognoſcimus, vter character Coſſicus maior ſit, vel minor. Itaque diuidendus eſt hic numerus 7 N, per $\frac{1}{6}$, relicto charactere ℞. fitque Quotiens 42.

ADDITVR autem tandem in regula. [*Nam vel quotiens ipſe erit numerus, qui quærebatur, pretium ſcilicet radicis in principio poſitæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet, &c.*] Quando, & quæ radix Quotientis manifeſtet numerum incognitum, qui quæritur, perpulchre docet maior character Coſſicus, per cuius numerum diuiſio inſtituitur, vt proprio loco docebimus. In propoſito noſtro exemplo non eſt extrahenda vlla radix, ſed ipſe Quotiens offert numerum, qui quærebatur. Itaque numerus, qui in problemate proponitur inueniendus, eſt 42. verſaturque propoſitum problema in progreſſione Geometrica ab 1. incipiente, in qua numerus vnitati proximus eſt 42 qualis eſt hæc. *Quarta pars regulæ Algebræ.*

1. 42. 1764. 74088. 3111696. &c.

In hac enim ſola apparet, veram eſſe vltimam æquationem inuentam inter $\frac{1}{6}$ ℞ & numerum 7. Iam vero ſi huius numeri 42. inuenti ſumatur $\frac{1}{2}$. nimirum 21 & $\frac{1}{3}$. videlicet 14. atq; hæ partes ex ipſo numero 42. detrahantur, ſit reliquus numerus 7. id quod in quæſtione propoſita deſiderabatur.

ATQVE hoc modo, inuento numero, qui inquirebatur, & vni radici ponebatur æqualis, inſtitui poteſt examen, ſiue probatio, iuxta problematis, vel quæſtionis propoſitæ tenorem. Sed problemate propoſito, & explicatione regulæ pingui, vt diximus, Minerua, abſoluta, declarandæ ſunt deinceps ſingulæ partes regulæ exquiſitius, ac clarius, vt facturos nos paulo ante recepimus.

DE ÆQVATIONVM VARIETATE.

CAPVT IX.

SATIS conſtat ex ijs, quæ dicta ſunt, vt ex poſitione 1 ℞, ſi ea examinetur ſecundum exempli pronuntiationem, æquatio inter duos numeros inuenienda ſit: Nunc autem de hac æquatione plura dicenda erunt, vt intelligamus, quotnam modis vna eademque æquatio poſſit variari. Inuenta enim æquatione aliqua, poterunt ex ea plurimæ aliæ conſtitui. Vt in ſuperiori exemplo, inuenta eſt æquatio inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7, Et quoniam ponebatur 1 ℞, æqualis toti numero inueniendo, fit vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ hoc eſt, $\frac{5}{6}$ ℞ & $\frac{1}{6}$ ℞, hoc eſt, 7. æquentur vni radici, ita vt æquatio ſit inter $\frac{5}{6}$ ℞ + 7, & 1 ℞. iuxta hanc communem ſententiam. Omne totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Sic etiam ſi $\frac{1}{6}$ ℞, dematur ex 1 ℞, & 7, ex toto numero 42, inuenta erit æquatio inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 35. &c.

SED vt accuratius varias æquationum commutationes cognoſcamus, ſciendum eſt, omnem calculum, qui in hac Algebræ regula inſtituitur, fieri per lineas, ſuperficies, atque corpora, quæ progrediuntur ſecundum proportionem aliquam Geometricam ab vnitate inchoatam, vt ſupra diximus. Appoſite igitur variæ æquationes ex hac ſequenti figura Geometrica intelligi poſſunt.

Eſt enim 1 ℞, linea quædam partium ſub certo quodam numero, ſeu ſeries quædam rerum quarumcunque ſub numero aliquo determinato. Vt in hac figura quadrangulari, ſex lineæ longitudinis, quarum quælibet partes habet 12; ſimiliterque duodecim lineæ latitudinis, in quarum qualibet reperiuntur partes 6, videlicet. Vides autem primo, vt 6 ℞, longitudinis æquentur huic numero 72. quia ſex lineæ, ſeu 6 ℞, longitudinis complent totam figuram continentem partes 72. Deinde cernis, vt 12 ℞, latitudinis eidem numero 72, æquales ſint. Totam enim figuram habentem partes 72, conſtituunt 12 ℞, latitudinis, ſeu 12 lineæ latitudinis, vt patet. Sed in exemplum ſumamus 12 ℞, latitudinis, vt æquatio ſit inter 12 ℞ & 72. Et quoniam, ſi ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent, æqualia ſunt; ſi ex vtroque numero æquationis auferamus 4 ℞, remanebit adhuc æquatio inter 8 ℞, & 72 − 4 ℞. Nam 8 ℞, latitudinis in figura ſuperiori continent partes 48. at 4 ℞, faciunt 24. Sublatis autem 24, ex 72. relinquuntur 48. Similiter, quoniam ſi æqualibus æqualia addantur, quæ fiunt, æqualia ſunt; ſi vtrique parti huius vltimæ æquationis inter 8 ℞, & 72 − 4 ℞ addamus 10, inueniemus æquationem inter 8 ℞ + 10, & 82 − 4 ℞. Nam 8 ℞ + 10, faciunt 58, & tantundem efficiunt 82 − 4 ℞, vt conſtat. Quod ſi rurſus vtrique parti huius æquationis inter 8 ℞ + 10, & 82 − 4 ℞, auferamus 4 ℞, remanebit æquatio inter 4 ℞ + 10, & 82 − 8 ℞. Nam ex ſuperiori figura vtraque pars conſtituit 34. Ita quoque ſi ex huius æquationis vltimæ parte vtraque detrahamus 10. conſtituetur æquatio inter 4 ℞, & 72 − 8 ℞. Vtraque enim pars facit 24. Atque hac arte ex vna æquatione inuenta ſexcentæ aliæ poſſunt conſtitui, non variato valore, ſeu pretio vnius radicis. *Variæ permutationes æquationum.*



SVMMA autem huius variationis in hoc præcepto conſiſtit.

Vtrique termino Æquationis idem commune addatur, aut ab vtroque idem commune ſubtrahatur; aut certe vterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidaturve. Ita enim remanebit illæſa æquatio ſub terminis mutatis. *Præceptum variandi quamcunque æquationem.*

IN qua quidem Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuiſione in memoriam reuocanda ſunt documenta illa, quæ de ſignis iſtis +, & −, tradidimus. Variatio ſuperiorum æquationum facta eſt per additionem, & ſubtractionem eiuſdem numeri ab vtroque termino æquationis: Nunc ſubijciemus alterum

exemplum

exemplum multiplicationis,& diuiſionis. Sit igitur ex eadem figura ſuperiori inuenta æquatio inter 3 ℞ + 12, & 72 − 7 ℞. Quod ſi vtrunque terminum multiplicemus per 2, efficiemus æquationem inter 6 ℞ + 24 & 144 − 14 ℞. Nam vterque terminus facit 60. Sic etiam, ſi vtrunque terminum huius poſterioris æquationis diuidamus per 6, prodibit æquatio inter 1 ℞ + 4, & 24 − 2⅓ ℞. Vt perſpicuum eſt.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONIS.

CAPVT X.

QVANDO in ſolutione alicuius quæſtionis ad Æquationem deuentum fuerit, ita vt per numerum, maioris characteris Coſſici reliquus Æquationis numerus diuidi non poſſit, vt regula Algebræ præcipit; reducenda eſt Æquatio inuenta prius, quam Diuiſio inſtituatur. Tunc autem Diuiſio fieri non poteſt, cum maior character Coſſicus, per cuius numerum fieri debet diuiſio, vel non ſolus ponitur in altera parte æquationis, vel etſi ſolus ponitur, tamen in reliqua quoque parte idem character reperitur, vt ex his exemplis perſpicuum fiet. Sit inuenta æquatio inter 9 ℞ − 12, & 42. Hic vides diuiſionem fieri non poſſe per 9. numerum videlicet maioris characteris Coſſici ℞, quia non ſolum 9 ℞, conſtituunt alteram æquationis partem, ſed 9 ℞ − 12. Sic quoque, ſi æquatio fuerit inter 9 ℞, & 72 − 3 ℞; non poterit diuiſio fieri per 9, numerum ſcilicet huius characteris ℞, quia licet ſolus hic numerus 9 ℞ occupet alteram partem æquationis, idem tamen character ℞, in altera quoque parte æquationis reperitur. Similiter inuenta æquatione inter 9 ℞ + 12, & 78 − 2 ℞, diuiſio nulla fieri poteſt, quod in vtraque parte æquationis reperiatur & character hic ℞, & hic N. Idem iudicium de alijs æquationibus huiuſmodi habeto, qualis eſt inter 1 ʓ − 3 ℞, & 108. Item inter 1 ʓ − 48, & 8 ℞. Item inter 108 + 8 ℞, & 2 ʓ − 12 ℞ + 60. &c.

Variæ æquationes reducendæ.

Omnes hæ æquationes, in quibus valor radicis eſt 12. & ſimiles aliæ, reducendæ ſunt ad alias, in quibus maior character Coſſicus in altera parte æquationis ſolus ſtatuatur, & in altera parte amplius non repetatur & in quibus nullus character Coſſicus bis ponatur. Fit autem hæc reductio per variationem illam, ſeu permutationem particularum æquationis, quam in præcedenti cap. deſcripſimus. Vt æquatio inter 9 ℞ − 12, & 42, reducitur per reſtaurationem huius diminuti − 12, hoc eſt, per additionem huius numeri 12, ad vtramque partem, ad hanc inter 9 ℞, & 54. Ita etiam æquatio inter 9 ℞, & 72 − 3 ℞, per reſtaurationem huius diminuti − 3 ℞, hoc eſt, per additionem 3 ℞, ad vtramque partem, reuocatur ad æquationem inter 12, ℞ & 72. Pari ratione æquatio inter 9 ℞ + 12, & 78 − 2 ℞, primo per reſtaurationem diminuti huius − 2 ℞, ſeu additionem 2 ℞, ad vtramque partem, reducitur ad æquationem inter 11 ℞ + 12, & 78. Secundo hæc per tranſpoſitionem huius additi + 12, hoc eſt, per ſubtractionem 12, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 11 ℞, & 66.

Æquationes ita reducendæ ſunt, vt maior character ſolitarie in vna parte ponatur, &c.

Reductiones variarũ æquationum.

RVRSVS æquatio inter 1 ʓ − 3 ℞, & 108, reducitur per reſtaurationem diminuti huius − 3 ℞, ad æquationem inter 1 ʓ, & 3 ℞ + 108. vtrique enim parti additæ ſunt 3 ℞. Sic etiam æquatio inter 1 ʓ − 48, & 8 ℞. reducitur per reſtaurationem huius diminuti − 48, hoc eſt, per additionem 48. ad vtramque partem, ad iſtam inter 1 ʓ, & 8 ℞ + 48. Denique æquatio inter 108 + 8 ℞, & 2 ʓ − 12 ℞ + 60, reducitur primo per reſtaurationem − 12 ℞, ad æquationem inter 108 + 20 ℞ & 2 ʓ + 60. Secundo hæc per tranſpoſitionem + 60, id eſt, per ablationem 60, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 2 ʓ, & 20 ℞ + 48. Itaque omnis reductio æquationum, vt expeditior fiat, initium ſumere debet à reſtauratione diminuti, ſi quod fuerit, hoc eſt, numerus ille, qui hoc ſignum − gerit, vtrique parti æquationis addi debet. Deinde tranſponendus eſt numerus ſignum + geſtans, ex vna parte in alteram, hoc eſt, ex vtraque parte eſt detrahendus. Quæ quidem reſtauratio, ſeu additio, & tranſpoſitio, ſeu ſubtractio, quamuis recte fiat per regulam additionis, & ſubtractionis, vt ex dictis patet. tota tamen ars reductionis continetur in his duobus præceptis, quorum primum eſt.

Primũ præceptum reductionis.

Quicquid tranſponitur, mutat ſignum. Hoc eſt particula æquationis habens ſignum −, tranſpoſita in alteram partem acquirit ſignum +, nimirum additur alteri parti. Particula vero gerens ſignum +, tranſpoſita mutat + in −, id eſt, ſubtrahitur. Quod quidem in omnibus reductionibus præmiſſis obſeruatum eſt. Quod ſi particula illa, quæ tranſponitur, habuerit ſimilem denominationem in altera parte, in quam eſt tranſponenda, vſurpandum erit ſecundum hoc præceptum.

Secundum præceptum reductionũ.

Eadem ſigna ſubtrahunt, diuerſa vero addunt. Hoc eſt, ſi particula æquationis tranſponenda gerens ſignum quodcunque ex his duobus +, −, habuerit in altera parte æquationis numerum maiorem eiuſdem denominationis cum eodem ſigno, ſubtrahendus eſt numerus illius particulæ ab hoc numero, relinquendumque eſt idem ſignum, quod habet numerus, à quo fit ſubtractio: Vnde inchoanda erit tranſpoſitio à minori numero. Si vero particula transferenda habuerit in altera parte numerum eiuſdem denominationis cum oppoſito ſigno, addendus eſt numerus illius particulæ huic numero, relinquendumque eſt idem ſignum, quod habet numerus, ad quem fit additio. Atque vt vtriuſq; regulæ vſus melius intelligatur, reducemus adhuc vnam aut alteram æquationem. Sit æquatio inter 6 ℞ − 10, & 10 ℞ − 34. quoniam igitur numeri 10. & 34. habent idem ſignũ −, propterea, vt minor 10. transferatur, auferendus eſt numerus 10, ex 34. atque ita remanebit æquatio inter 6 ℞ & 10 ℞ − 24. Rurſus quia numeri 10 ℞, & 6 ℞, idem habẽt ſignũ +, idcirco minor 6 ℞, à maiori 10, ℞ aufertur, vt maneat æquatio inter 0 ℞, & 4 ℞ − 24. Deniq; tranſponendo − 24, erit æquatio inter 24, & 4 ℞. Sit rurſum æquatio inter 54 + 4 ℞, & 1 ʓ − 6 ℞ + 30. Primũ quia + 4 ℞, & − 6 ℞, diuerſa ſigna habent, propterea adduntur 4 ℞, ad 6 ℞, vt fiant − 10 ℞. ſitque æquatio inter 54, & 1 ʓ − 10 ℞ + 30. Deinde quia 54, & + 30, idem ſignum + habent, ideo ſubtrahuntur 30, à 54, vt maneat æquatio inter 24, & 1 ʓ − 10 ℞. Tertio tranſpono − 10 ℞, vt ſit æquatio inter 1 ʓ, & 10 ℞ + 24. & ſic de cæteris.

ITAQVE

ITAQVE colligitur ex ijs, quæ diximus, totum negotium reductionis in tranſpoſitione particularum eſſe poſitum; Tranſpoſitionem autem iſtam ex proxime dictis documentis pendere. Oblata enim æquatione aliqua, in qua numerus characteris maioris Coſſici non ſolus vnam partem æquationis conſtituit, ſed ei coniunctus eſt alius numerus Coſſicus minoris denominationis, transferendus eſt hic in alteram partem, iuxta præceptum quidem primum, ſi in altera parte, in quam transfertur, non reperiatur numerus eiuſdem denominationis: At vero ſi altera pars æquationis, in quam fieri debet hæc tranſpoſitio, habuerit eiuſdem denominationis numerum, peragenda eſt hæc translatio iuxta alterum documentum, quæ omnia in ſuperioribus exemplis obſeruata eſſe vides. Denique eouſque continuanda eſt æquatio, addendo, auferendo, & tranſponendo, quoad maioris characteris numerus in vna parte ſolitarius conſpiciatur.

Summa reductionis.

VOLO autem ſtudioſum hoc loco eſſe monitum, hæc duo præcepta ſolum inuenta eſſe pro compendio reductionis. Nam qui additionis & ſubtractionis regula vult eſſe contentus, poteſt citra omne incommodum illis carere. Quod etiam nonnullis conſulerem, ne hæc præcepta cum præceptis additionis, & ſubtractionis confundant, id quod ſæpe accidere ſolet, præſertim tyronibus huius artis.

Securior eſt reductio ſine duobus præceptis prædictis.

SED agamus iam de reductione illarum æquationum, quæ inter Minutias reperiuntur. Omnis autem eiuſmodi æquatio reducitur ad æquationem integrorum per multiplicationem in crucem. Sit inuenta æquatio inter has Minutias $\frac{3℞+12}{5}$ ✕ $\frac{36ℨ-198℞}{3℞}$. Multiplicentur in crucem, nempe numerato prioris Minutiæ in denominatorem poſterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorē poſterioris; eritque facta æquatio inter 9 ℨ + 36 ℞ & 180 ℨ − 990 ℞. Hoc eſt per abbreuiationem characterū, inter 9 ℞ + 36, & 180 ℞ − 990. & per abbreuiationem numerorum, inter 1 ℞ + 4, & 20 ℞ − 110. Quod ſi fiat reductio per tranſpoſitionem, vt nuper tradidimus, erit eadem hæc æquatio inter 19 ℞. & 114.

SIC æquatio inter $\frac{4℞+18}{1℞}$ & $\frac{12℞-58}{2}$, reducitur per multiplicationem in crucē ad hanc inter 8 ℞ + 36, & 12 ℨ − 58 ℞ Quæ ſi per tranſpoſitionem reducatur, erit eadem æquatio inter 66 ℞ + 36, & 12. ℨ.

QVOD ſi æquatio inuenta ſit inter hanc minutiam $\frac{628}{186+1℞}$ & quamcunque aliam rem, vt libram, vel vnciam, vel horam, vel gradum, vel minutum, &c. ſumenda eſt hæc res tanquam integrum aliquod, & pro ea vnitas cōſtituenda, cui alia vnitas ſupponatur, vt fiat fractio. Vnde in dato exemplo erit æquatio inter $\frac{628}{186+1℞}$ & $\frac{1}{1}$ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 628, & 186 + 1 ℞.

Reductio æquationum inter Minutias, & inter numeros Coſſicos irrationales, & numeros abſolutos inuentam.

DEMONSTRATIO reductionis æquationū inter Minutias perfacilis eſt. Quoniam. n. duę Minutiæ ponuntur æquales, erit eadem proportio numeratoris Minutiæ prioris ad denominatorem eiuſdem, quæ numeratoris Minutiæ poſterioris ad denominatorem eiuſdem. Quare ſi Minutiæ per crucem multiplicentur, hoc eſt, numerator prioris Minutiæ in denominatorem poſterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorem poſterioris, nempe primus numerus in quartum, & ſecundus in tertium, producti erunt numeri æquales: atque adeo Æquatio inuenietur inter illos numeros productos, Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratio reductionis æquationum inter minutias.

QVO pacto autem æquatio inter numerum Coſſicum irrationalem, & numerum abſolutum, vt inter √ℨ 24 ℞ & 12. vel inter √ℨ 10 ℨ. & 20. reducenda ſit, docebimus ad finem cap. 26. vbi de huiuſmodi numeris acturi ſumus.

SI occurrat tandem æquatio, in qua nullus ſit numerus abſolutus, abbreuiandi erunt characteres Coſſici vt cap. 7. docuimus. Vt æquatio inter 2 ℨ, & 12 ℞ reducenda eſt ad æquationem inter 2 ℞, & 12.

SIMILITER æquatio inter 1 ℨℭ, & 1 ß + 35156 ℨℨ. reducenda eſt ad æquationem inter 1 ℨ, & 1 ℞ + 35156.

Item æquatio inter 1 ß, & 1 ℨℨ + 35156 ℭ, reducenda eſt ad æquationem inter 1 ℨ. & 1 ℞ + 35156.

Item æquatio inter 1 ℨℨ. & 1 ℭ + 35156 ℨ, reducenda eſt ad æquationem inter 1 ℨ. & 1 ℞ + 35156.

Item æquatio inter 1 ℭ. & 1 ℨ + 35156 ℞. reducenda eſt ad æquationem inter 1 ℨ. & 1 ℞ + 35156. & ſic de alijs huiuſmodi.

Characteres abbreuiandi ſunt vt habeatur numerus abſolutus in vna parte æquationis.

VERVM hæc abbreuiatio non eſt omnino neceſſaria, vt in cap. 12. dicemus ante extractiones radicum numerorum Coſſicorum ſimplicium.

POSREMO ſi facta reductione æquationis, vt maior character Coſſicus ponatur ſolus ex altera parte æquationis, qui maior ſit quā ℞, qualis eſt ℨ, vel ℭ vel ℨℨ, &c. diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum illius characteris Coſſici maioris, ſi non eſt vnitas; ita vt vnitas ab illo charactere Coſſico denominata æqualis ſit alteri parti æquationis. Vt ſi æquatio ſit inuenta inter 4 ℨ, & 8 ℞ + 96. diuidendi erunt ſinguli numeri per 4. vt reducatur æquatio ad æquationem inter 1 ℨ. & 2 ℞ + 24.

Item æquatio inter 12 ℨ. & 66 ℞ + 36. reducenda eſt per diuiſionem ad æquationem inter 1 ℨ. & $5\frac{1}{2}$ ℞ + 3. &c.

RATIO huius reductionis obſcura non eſt. Cum enim ſinguli numeri per eundem numerum diuidantur, nempe per numerum maioris characteris Coſſici, habebunt Quotientes eandem proportionem, quam numeri diuiſi. Quamobrem, quemadmodum inter numeros diuiſos, ita & inter Quotientes Æquatio neceſſario reperietur.

Reducenda eſt æquatio per diuiſionem, vt numerus maioris characteris ſolitarie poſitus ſit vnitas.

CÆTERVM hæc reductio fiet, ſi iuxta tenorē regulæ Algebræ diuiſio inſtituatur per numerum maioris characteris, ipſo charactere abiecto, retentis tamen characteribus numerorum, qui diuiduntur, vt cap. in ſequenti dicetur: adeo vt hæc reductio, de qua proxime diximus, ſuperuacanea eſſe videatur, quandoquidem Diuiſio, quæ in regula Algebræ præcipitur, eam nobis exhibeat. Quia tamen alij auctores eam reductionem neceſſariam eſſe docent, libuit eam etiam hic explicare, quamuis, vt diximus, eam diuiſio iuxta legem regulæ Algebræ, commodiſſime quoque offerat.

DE

DE DIVISIONE, QVAM PRÆCIPIT regula Algebræ.

CAPVT XI.

Explicatio plenior diuiſionis, quã regula Algebræ præcipit.

FACTA reductione æquationis, vbi id res poſtulat, quemadmodum cap. præcedenti docuimus, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maximi characteris Coſſici, abiecto charactere, totus reliquus æquationis numerus diuidatur, vna cum characteribus Coſſicis. Eſt autem hæc diuiſio compendium quoddam regulæ illius aureæ proportionum, quam trium appellant. Nam ſi exempli gratia 7 ℞. æquales ſint huic numero 42. inquirendum eſt, cui numero 1 ℞ æqualis ſit. Quare iuxta doctrinam regulæ trium, multiplicantur inter ſe 42, & 1 ℞, producunturq; 42 ℞. quibus diuiſis per 7 ℞, prodeunt 6. pro æſtimatione vnius radicis. Quando enim Coſſicus numerus per numerum Coſſicum eiuſdem characteris diuiditur, producitur numerus abſolutus, vt ex ijs conſtat, quæ cap. 5. ſcripſimus; quia nimirum exponentes æquales ſunt, ac proinde detracto vno ex altero, remanet 0, exponens numeri abſoluti. Hinc eſt, quod regula Algebræ abſolute docet, per numerum maioris characteris Coſſici diuidendum eſſe alterum numerum æquationis. Nam hac ratione idem numerus producitur, qui per proportionum regulam produceretur. Vt ex propoſito exemplo conſtat. Idem enim numerus producitur ex diuiſione 42 ℞. per 7 ℞, qui ex diuiſione 42, per 7.

SIMILITER ſi 12 ʒ. æquales ſint 66 ℞ + 36, inquirendum eſt, cui numero æqualis ſit 1 ʒ. Quare multiplicantur inter ſe 66 ℞ + 36. & 1 ʒ, producunturque 66 ℭ + 36 ʒ: quibus diuiſis per 12 ʒ, vt iubet regula trium proueniunt 5½ ℞ + 3. pro pretio vnius Zenſi, ſeu quadrati. Idem hic numerus producetur, ſi per 12 ʒ abiecto prius charactere hoc ʒ, diuidantur 66 ℞ + 36. vt conſtat: propterea ait regula Algebræ, per numerum maioris characteris Coſſici diuidendum eſſe ſimpliciter reliquum æquationis numerum, ne longior operatio per regulam trium inſtituatur. Eodem modo ſi ½ ʒ. & 6 ℞ + 13½. æquales ſint, quærendum eſt, quanta ſit æſtimatio vnius Zenſi vel quadrati. Quod quidem fiet, iuxta legem regulæ Algebræ, diuidendo ſingulos numeros per ½, numerum ſcilicet maximi characteris. Qua ratione inuenietur æquatio inter 1 ʒ. & 18 ℞ + 40. hoc eſt, pretium 1 ʒ. erit 18 ℞ + 40.

Item ſi æquatio inueniatur inter 3 ʒℭ. & 600 ℭ + 10368 indagandum eſt pretium vnius zenſicubi. quod per regulam trium fiet, ſi dicatur. Si 3 ʒℭ. dant 600 ℭ + 10368. quid dabit 1 ʒℭ? Multiplicando enim duos poſteriores numeros inter ſe, producetur numerus 600 ℭℭ + 10368 ʒℭ. quo diuiſo per primum numerum, videlicet per 3 ℭ. fiet Quotiens 200 ℭ + 3456. eritque æquatio inter 1 ʒℭ & 200 ℭ + 3456. quæ facilius inuenitur, ſi ſinguli numeri huius æquationis inter 3 ʒℭ. & 600 ℭ + 10368. diuidantur per 3. nimirum per numerum maioris characteris, vt ad finem antecedentis cap. ſcripſimus. Ita enim opus non erit adhibere regulam trium: ſed ſatis erit, vt per numerum maioris characteris, abiecto charactere, ſinguli numeri alterius partis æquationis vna cum characteribus diuidantur, vt regula Algebræ iubet.

QVOD ſi diuiſor fuerit vnitas denominata à maiore charactere Coſſico, non opus eſt diuiſione, quoniam vnitas diuidens nihil noui producit. Vt ſi 1 ʒ, æqualis ſit 3 ℞ + 18 &c. Quare operæ pretium eſt, vt æquatio reducatur, ita vt numerus maioris characteris ſit vnitas, quemadmodum ad finem præcedentis cap. docuimus.

QVOD autem, quando vnitas denominatur à maiore charactere, diuiſione non ſit opus, liquido conſtat ex regula trium. Nam in hac æquatione inter 1 ʒ. & 3 ℞ + 18. ſi dicatur. Quando 1 ʒ. dat 3 ℞ + 18. quid dabit 1 ʒ? erit identitas, & nugatio. Nam ex multiplicatione 3 ℞ + 18. per 1 ʒ. fit numerus 3 ℭ + 18 ʒ. qui diuiſus per 1 ʒ facit 3 ℞ + 18. vt ex lege multiplicationis, atque diuiſionis liquet.

DE EXTRACTIONE RADICVM CVIVS mentionem facit regula Algebræ.

CAPVT XII.

Quando quotiens indicat pretium radicis.

DOCENDVM eſt vltimo loco, quando numerus Quotiens Diuiſionis numerum ignotum, qui quæritur, patefaciat, & quando radix aliqua Quotientis, & quænam eundem numerum abſconditum indicet. Quando igitur, facta reductione characterum Coſſicorum, maior character Coſſicus fuerit ℞, tunc numerus quotiens continuo numerum, qui quæritur, manifeſtum facit. Vt ſi 5 ℞, æquales ſint 30. facta diuiſione 30. per 5. dabit Quotiens nempe 6, pretium vnius radicis; vt ad initium præcedentis cap. dictum eſt. Immo quotieſcunque numerus Coſſicus maioris denominationis æquatur numero Coſſico proximè minoris denominationis, diuiſo numero minoris denominationis per maioris denominationis numerum, dabit Quotiens valorem vnius radicis, etiamſi non ſit facta abbreuiatio characterum: quia huiuſmodi æquatio per abbreuiationem characterum reducitur ad æquationem inter ℞ & N. Vt ſi 5 ß. æquentur 30. ʒʒ. diuiſis

30. per

30. per 5. fit Quotiens 6. pro pretio vnius radicis. Nam hæc æquatio reducitur ad æquationem inter 5 ℞, & 30. ſi characteres abbreuientur. Quod etiam ex regula trium manifeſtum eſt. Nam ſi dicatur. Si 5 ß. dant 30 ʒʒ. quid dabit 1 ℞? multiplicando 30 ʒʒ. per 1 ℞. fiunt 30 ß. quibus diuiſis per 5 ß. fit Quotiens 6. numerus abſolutus. Eademque ratio eſt de cæteris numeris Coſſicis collateralibus. Ratio huius rei eſt, quod in omni progreſſione Geometrica incipiente ab 1. eadem ſemper eſt proportio cuiuſcunque numeri ad proxime antecedentem, quæ ſecundi ad primum, hoc eſt, radicis ad vnitatem.

SI vero maximus character Coſſicus æquationis, qui ſolus ex vna parte æquationis ſtatuitur, maior ſit, quam ℞, & numerus abſolutus ſit in altera parte, extrahenda eſt ex Quotiente radix, quam ipſe character ſignificat. Vt ſi character ſit ʒ, extrahenda eſt radix Zenſica, ſiue quadrata: ſi ℭ, cubica: ſi ʒʒ, Zenſizenſica: ſi ß, Surdeſolida, &c. Quia in huiuſmodi æquationibus ex diuiſione inuenitur æſtimatio vnius zenſi, vel cubi, vel zenſizenſi, &c. Exempli gratia, ſi æquatio ſit inter 2 ʒ, & 144 — 12 ℞, erit (facta prius diuiſione, vt 1 ʒ, æqualis ſit 72 — 6 ℞.) extrahenda radix quadrata ex 72 — 6 ℞. Similiter, ſi æquatio ſit inter 1 ʒ, & 6 ℞ + 72, vel 72 + 6 ℞, eruenda erit quadrata radix ex 6 ℞ + 72, vel ex 72 + 6 ℞. Sic etiam, ſi æquatio inueniatur inter 5 ʒ, & 720. erit, facta diuiſione, quærenda radix quadrata ex Quotiente hoc 144. Item ſi 10 ℭ, æquales ſint 466560, inuenienda erit, facta diuiſione, radix cubica huius Quotientis 46656. & ſic de cæteris. Vt autem generaliter ſciatur, quænam radix eruenda ſit ex quotiente, quando duo numeri Coſſici non collaterales inter ſe æquantur, quorum neuter eſt numerus abſolutus, abbreuiandi ſunt characteres, vt æquatio fiat inter N. & numerum Coſſicum. Vt ſi æquatio ſit inter 10 ʒℭ. & 466560 ℭ. reducetur ea ad æquationem inter 10 ℭ & 466560. Facta ergo diuiſione, eruenda erit radix cubica ex Quotiente 46656. Et ſic de cæteris. Ratio eſt, quia per diuiſionem inuenitur valor vnius cubi, vel alterius numeri Coſſici, ad quem facta eſt abbreuiatio per characteres. Nam ſi dicas. Si 10 ℭ dant 466560. quid dabit 1 ℭ? facies ex multiplicatione ſecundi numeri in tertium, 466560 ℭ. quibus diuiſis per 10 ℭ fit Quotiens 46656. valor vnius cubi &c.

Quãdo, & qua radix ſit extrahenda, quãdo alter numerorum æquationis eſt numerus abſolutus.

Quænam radix ſit extrahenda, quãdo duo numeri Coſſici non collaterales inter ſe æquãtur, quorũ neuter eſt numerus abſolutus.

DENIQVE quando duo numeri Coſſici non collaterales inter ſe æquantur, vt cognoſcas, quænam radix, facta diuiſione minoris numeri Coſſici per maiorem, ex Quotiente ſit eruenda, etiamſi characteres non abbreuientur: vide quot denominationes in progreſſione Geometrica inter ꝓpoſitos duos numeros Coſſicos ſint interiectæ. Nam ſi vna tantum eſt intermedia, extrahenda eſt radix quadrata: ſi duæ, cubica: ſi tres, Zenſizenſica, &c.

Qualis radix ſit extrahenda, etiamſi characteres non abbreuientur.

CÆTERVM qua arte radices ex numeris abſolutis ſint extrahendæ, copioſe ſatis in Geometria practica expoſuimus, nunc vero explicandum eſt, quonam modo ex numeris Coſſicis ſint eliciendæ.

SI igitur extrahenda eſt radix aliqua ex numero Coſſico ſimplici, ſumatur propoſita radix illius numeri, relicto charactere, ac ſi abſolutus eſſet. Deinde exponens characteris eiuſdem numeri diuidatur per exponentem characteris, à quo radix extrahenda denominatur, inuenieturque exponens characteris, à quo radix quæſita denominabitur. Vt ſit inuenda radix quadrata huius numeri 144 ʒ. Sumpta radice quadrata ipſius numeri 144. quæ eſt 12. diuidatur exponens huius characteris ʒ, per exponentem characteris ʒ, à quo videlicet radix quadrata, quæ quæritur, denominatur nimirum 2. per 2. proueniet enim 1, pro exponente characteris ℞. Eſt ergo 12 ℞. radix quadrata huius numeri 144 ʒ. Nam ſi hic numerus 12 ℞, in ſeipſum multiplicetur, producetur numerus propoſitus 144 ʒ.

Extractio radicum ex numeris Coſſicis ſimplicibus.

RVRSVS ſit eruenda radix quadrata ex 144 ʒℭ. Accepta radice quadrata numeri, nempe 12. diuidatur exponens characteris huius ʒℭ. nempe 6, per exponentem radicis quadratę, nimirum per 2, reperieturque exponens 3. cuius character eſt ℭ. Igitur 12 ℭ, radix quadrata eſt huius numeri 144 ʒℭ.

SIC quoque radix cubica huius numeri 64 ℭ. erit 4 ℞. Nam radix cubica numeri huius 64, eſt 4. & exponente huius characteris ℭ, nempe 3, diuiſo per 3. exponentem ſcilicet characteris, à quo radix cubica nomen ſumit, producitur vnitas, exponens videlicet huius characteris ℞.

Item radix quadrata huius numeri 25 ʒʒ. erit 5 ʒ.

Et radix Zenſizenſica huius numeri 16 ʒʒʒ, erit 2 ʒ.

Et radix Surdeſolida numeri huius 32 ʒß, erit 2 ʒ.

Et radix Zenſizenſica huius numeri 81 ʒʒ, erit 3 ℞. &c.

QVOD ſi vel numerus non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuiſione exponentium non producatur numerus exponens integer, carebit propoſitus numerus Coſſicus radice illa, quæ deſideratur. Vt numerus 25 ℭ non habet radicem quadratam, vel cubicam. quia etiamſi numerus 25. habeat radicem quadratam nempe 5. tamen ex diuiſione 3. exponentis ſcilicet huius characteris ℭ, per 2, exponentem quadratæ radicis, prouenit numerus $1\frac{1}{2}$, cui nullus character reſpondet. Rurſus etſi ex diuiſione 3, exponentis huius characteris ℭ, per 3. exponentem radicis cubicæ, proueniat 1, exponens characteris huis ℞. tamen numerus 25. caret radice cubica, &c.

QVOD vero attinet ad extractiones radicum ex numeris Coſſicis compoſitis, & diminutis, ſciendum eſt, tunc ſolum poſſe certa via & arte ex eiuſmodi numeris extrahi radices, quando tres numeri Coſſici æquationis habent exponentes, qui eundem inter ſe exceſſum habeant: hoc eſt, qui ſint Arithmetice proportionales. Quales ſunt ſequentes æqutiones.

Qui numeri compoſiti habeant radices.

1. ʒ.	6 ℞ + 71.	Exponentes ſunt.	2. 1. 0.
1. ʒ.	72 — 6 ℞.	Exponentes ſunt.	2. 0. 1.
1. ʒ.	14 ℞ — 48.	Exponentes ſunt.	2. 1. 0.
1. ʒʒ.	18 ʒ + 648.	Exponentes ſunt.	4. 2. 0.
1. ʒʒ.	725 — 4 ʒ.	Exponentes ſunt.	4. 0. 0.
1. ʒʒ.	433 ʒ — 41616.	Exponentes ſunt.	4. 2. 0.
1. ʒℭ	200 ℭ + 3456.	Exponentes ſunt.	6. 3. 0.
1. ʒℭ.	5120 — 16 ℭ.	Exponentes ſunt.	6. 0. 3.

1.ʒce.	800ce−156751.	Exponentes ſunt.	6. 3. 0.
1.ʒʒʒ.	2000ʒʒ+185076881.	Exponentes ſunt.	8. 4. 0.
1.ʒʒʒ.	214651701−20ʒʒ.	Exponentes ſunt.	8. 0. 4.
1.ʒʒʒ.	20000ʒʒ−7846119.	Exponentes ſunt.	8. 4. 0.
1.ʒß.	80ß+39609.	Exponentes ſunt.	10. 5. 0.
1.ʒß.	7424−200ß.	Exponentes ſunt.	10. 0. 5.
1.ʒß.	2000ß−999424.	Exponentes ſunt.	10. 5. 0. &c.

Quando exponentes Arithmeticam progreſſionem ſeruantes omnes ſunt maiores quam 0. abbreuiandi ſunt per ſubtractionem minimi numeri exponentis. Vt hæ ſequentes æquationes.

1.Cß.	725Bß−4Cce.	Exponentes ſunt.	11. 7. 9.
1.Cß.	200ʒʒʒ+3456ß.	Exponentes ſunt.	11. 8. 5.
1.ʒß.	200ʒce+14336ʒ.	Exponentes ſunt.	10. 6. 2.

reducuntur ad has.

1.ʒʒ.	725−4ʒ.	Exponentes ſunt.	4. 0. 2.
1.ʒce.	200ce+3456.	Exponentes ſunt.	6. 3. 0.
1.ʒʒʒ.	200ʒʒ+14336.	Exponentes ſunt.	8. 4. 0.

Et ſic de alijs infinitis dicendum eſt. Ita enim facile cognoſcetur, quænam radix eruenda ſit.

Qui numeri Coſſici cõpoſiti non habeat radices.

QVANDO autem exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionalitatem, hoc eſt, non habent eundẽ exceſſum, vt ſi æquatio foret inter 1 ce, & 4ʒ+16. vbi exponẽtes ſunt 3. 2. 0. Vel inter 1. ce, & 10℞+24. vbi exponentes ſunt 3. 1. 0. nondum eſt inuenta ars, qua huiuſmodi radices certo eruantur; quamuis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibuſdam exemplis ſingularibus inuenerint æſtimationem vnius radicis. Raphael autem Bombellus ex quibuſdam etiam æquationibus eiuſmodi, & alijs nonnullis putat ſe inueniſſe, quo pacto eruendæ ſint radices. Franciſcus quoque Vieta dicitur demonſtraſſe regulam generalem pro eiuſmodi radicibus extrahendis: quam quia videre hactenus non licuit, & rationes Bombelli obſcuræ valde ſunt, atque æquationes eiuſmodi, in quibus nimirum plures numeri Coſſici quam duo æquantur vni numero Coſſico, (qualis eſt V.g. æquatio inter 1 ce+3ʒ+72℞ & 34) numero fere infinitæ exiſtunt, & quæ raro in vſum vniunt, patiunturque, ipſo teſte, non paucas exceptiones, contenti erimus in hac noſtra Algebra ijs, quæ facilem, certam, atque exploratam habent ſcientiam, id eſt, explicabimus tantummodo extractiones radicum ex numeris Coſſicis prioris generis, quando nimirum vnus numerus Coſſicus duobus æquatur, exponenteſque ſeruant proportionalitatem Arithmeticam: quippe cum hæ ſatis ſint ad innumera fere numerorum ænigmata diſſoluenda.

AC primo quidem agemus de extractione radicum ex ijs numeris, quorum exponentes ſunt 2. 1. 0. vel 2. 0. 1. quæ omnes quadratæ ſunt. Deinde vero de inuentione radicum illorum numerorum dicemus, quorum exponentes ſunt 4. 2. 0. vel 6. 3. 0. vel 8. 4. 0. vel 10. 5. 0. &c. quæ quidem radices ſunt vel Zenſizenſicæ, vel Zenſicubicæ, vel Zenſizenzenſicæ, vel Zenſurdeſolidæ, &c. vt maximi characteres æquationum indicant. Hæ enim æquationes omnes exploratam, ac certiſſimam habent ſcientiam, qua earum radices inueniantur.

HAC igitur arte per Michaelem Stifelium nobilem Arithmeticum radices quadratæ eruuntur ex compoſitis, ſiue diminutis numeris Coſſicis.

Extractio radicis quadratæ ex Coſſico numero compoſito vel diminuto.

1. *Dimidium numeri radicum ſume.*
2. *Ad huius dimidij quadratum adde, vel ab eodem ſubtrahe numerum abſolutũ, prout ſigno + vel − fuerit affectus.*
3. *Ad huius ſummæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem ſubtrahe dimidium numeri radicum, prout radicum numerus ſigno + vel − fuerit notatus. Nam vltima hæc ſumma, vel relictum dabit æſtimationem, & pretium vnius radicis quadratæ.*

SIT æquatio inuenta inter 1 ʒ, & 72−6℞. Facta diuiſione 72−6℞. per 1, vt iubet regula Algebræ prodit idem numerus, pretium videlicet vnius Zenſi, cuius radicem ita inueniemus.

Primum ſumo dimidium numeri radicum, nimirum 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo abſolutum numerum 72, propterea quod gerit ſignum +, facioque 81.

Tertio à radice quadrata huius ſummæ 81, nempe à 9, detraho dimidium numeri radicum, puta 3. Nam numerus radicum ſigno − affectus eſt, relinquunturque 6. pro æſtimatione radicis quæſitæ. Quod ſic probatur. Si 1 ℞, eſt 6, erunt 6 ℞. 36, quibus ſublatis ex 72, remanent 36, quibus æqualis eſt quadratus numerus huius radicis 6.

SIT rurſus æquatio inuenta inter 1 ʒ. & 6 ℞+72. Inuenienda igitur eſt radix quadrata huius numeri 6℞+72.

Primum capio dimidium numeri radicum, puta 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo 72, propter ſignum +, quod gerit numerus abſolutus, facioque 81.

Tertio ad radicem quadratam huius ſummæ 81, nimirum ad 9, adijcio dimidium numeri radicum, nempe 3; affectus enim eſt numerus radicum ſigno +, efficioque 12, pro pretio radicis. Quod ita confirmatur. Cum 1 ℞, eſt 12, erunt 6 ℞, 72, quibus additis ad 72, fiunt 144, quibus æqualis eſt numerus quadratus radicis 12.

SIT denique inuenta æquatio inter 1ℨ. & 18℞ − 72. Quærenda ergo eſt radix huius quadrati 18℞ − 72.

Primum accipio dimidium numeri radicum, nimirum 9.

DEINDE ab huius dimidij quadrato, puta ab 81, deduco 72, propter ſignum −, quod præponitur numero abſoluto, relinquunturque 9.

Tertio ad radicem quadratam huius relicti 9, hoc eſt, ad 3, addo dimidium numeri radicum, vtpote 9. Gerit namque numerus radicum ſignum +. efficioque 12, pro valore radicis. Quod hac ratione patet. 18℞, faciunt 216, ſi 1℞. eſt 12. ablatis igitur 72, ex 216, remanent 144. quibus æqualis eſt numerus quadratus radicis inuentæ 12.

SED hoc loco monendus lector eſt, huiuſmodi numeros Coſſicos Diminutos, in quibus numerus abſolutus gerit ſignum −, habere duplicem radicem, quæ æquationi ſatisfaciat, maiorem ſcilicet & minorem. Maior inuenitur, vt proxime dictum eſt. Minor vero habebitur, ſi radix quadrata illius relicti ex dimidio numeri radicum detrahatur. Vt in dato exemplo poſtremo, ſi 3, radix quadrata huius relicti 9, ſubtrahatur à 9, dimidio numeri radicum, relinquentur 6, pro altera radice, & minore huius numeri Coſſici 18℞ − 72. Quod ita conſtat. 18℞, faciunt 108, ſi 1℞. eſt 6, ablatis igitur 72, remanent 36, quibus æqualis eſt quadratus numerus huius radicis 6.

Qui numeri Coſſici habeant duplicem radicem. Quo pacto tum maior tum minor radix inueniatur.

ITAQVE in huiuſmodi numeris liberum erit, tertio loco ad radicem quadratam inuentam ex relicto illo vel addere dimidium numeri radicum, vel eandem illam radicem inuentam ex dimidio numeri radicum ſubducere. Non tamen ſemper vtraque radix propoſitum problema ſoluet, ſed altera tantum, vt in ænigmate 25. cap. 32. manifeſtum fiet.

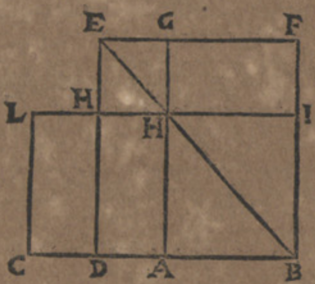
SOLVM numerus ille Coſſicus Diminutus habens numerum abſolutum ſigno − affectum. vnicam habet radicem, cuius numerus abſolutus quadrato dimidij numeri radicum æqualis eſt. Huius enim numeri Coſſici radix eſt dimidium ipſum numeri radicum. Vt ſi æquatio ſit inter 1ℨ. & 12℞ − 36. erit radix huius numeri diminuti 12℞ − 36, dimidium numeri radicum, nimirum 6: quia numerus abſolutus 36, æqualis eſt quadrato dimidij numeri radicum. Nam capiatur dimidium numeri radicum, nempe 6; & à quadrato huius dimidij, vt à 36, detrahatur 36, quo facto remanet 0, cuius radix quadrata quoq; eſt 0. Siue igitur ad hanc radicem addatur dimidium numeri radicum, puta 6, ſiue ex hoc dimidio radix dicta tollatur, ſemper inuenietur radix eſſe 6, quæ æquationi ſatisfaciat, vt conſtat.

EX his perſpicuum eſt, triplicem eſſe numerum Coſſicum, cuius radix quæritur. Aut enim compoſitus eſt, cuius tam numerus radicum, quam numerus abſolutus gerit ſignum +; Aut Diminutus, cuius vel numerus radicum, vel numerus abſolutus ſigno − eſt notatus, vt ex tribus exemplis adductis liquido conſtare poteſt.

AGE vero, aperiamus rationem huius extractionis radicum Geometricis demonſtrationibus, vt non ſolum experientia, ſed etiam certiſſima ſcientia cognoſcamus, recte hac arte erui radices quadratas ex numeris Coſſicis compoſitis, diminutiſve. Repetamus ergo primum exemplum, in quo æquatio erat inter ℨ, & N − ℞. vel ſi reſtauretur diminutum hoc − ℞, inter ℨ + ℞, & N.

Demonſtratio extractionis radicum ex Coſſicis numeris compoſitis, diminutiſve.

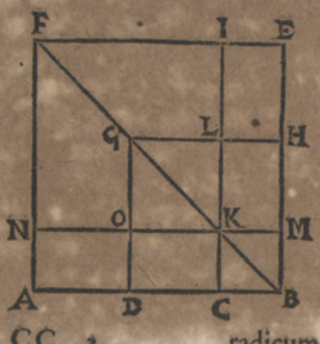
SIT AB, latus Zenſi, ſeu quadrati nobis ignotum, quod quæritur, quo producto ad partes A, ſumatur recta AC, numero radicum æqualis, quæ bifariam ſecetur in D, vt ſit AD, dimidium numeri radicum. Super rectam BD, compoſitam ex latere quadrati ignoti, & dimidio numeri radicum, deſcribatur quadratum DF, cuius Diameter BE. Ducta deinde ipſi DE, parallela AG, quæ diametrum ſecet in H, ducatur per H, recta IL, ipſi BC, parallela ſecans DE, in K, occurrensque rectæ, quæ ex C, ipſi DE, parallela ducitur, in L. Quoniam igitur AI, KG, quadrata ſunt ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. Eucl. erit rectangulum CH, contentum ſub AC, numero radicum, & AH, latere quadrati, quod quæritur, valor, ſeu pretium radicum; (Numerus enim radicum multiplicatus in valorem radicis producit omnium radicum valorem. Vt exiſtente vna radice 6, valebunt 5℞, 30.) atque adeo DH, dimidium pretij radicum, cum [a] æqualia ſint rectangula DH, DL. [b] Cum ergo rectangula, DH, HF, æqualia quoque ſint, erunt DH, HF, æqualia integro radicum pretio. Et quoniam quadratum AI, æquale ponitur alicui numero abſoluto, minus valore radicum: vel quia quadratum AI, vna cum valore radicum, quarum numerus eſt AC, ponitur æquale alicui numero abſoluto, erit gnomon GBK, illi numero abſoluto æqualis: qui ſi addatur ad GK, quadratum dimidij numeri radicum cognitum erit totum quadratum DF, à cuius latere DB, ſi auferatur AD, dimidium numeri radicum, vt præcipit regula, notum fiet latus AB. Quod eſt propoſitum.



[a] *36. primi.*
[b] *43. primi.*

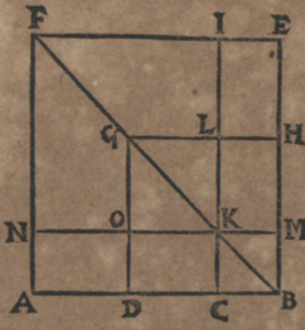
SED ſumamus iam ſecundum exemplum, vbi æquatio erat inter ℨ, & ℞ + N.

SIT rurſus AB, latus quadrati, quod inquiritur. Et quia ponitur 1ℨ, æqualis ℞ + N, erit numerus radicum minor latere AB. Sit ergo recta AC, numero radicum æqualis, cuius dimidium AD, vel DC. Deſcripto ex AB, quadrato AE, vna cũ diametro BF, ducatur DG, ipſi AF, parallela ſecans BF, in G, puncto, per q; agatur GH, ipſi AB, parallela. Deinde ducatur CI, parallela ipſi BE, ſecãs BF, in K, & GH, in L. Deniq; per K, agatur MN, parallela ipſi AB, ſecans DG, in O. Eruntque DH, OL, CM, quadrata per coroll. propoſ. 4. lib. 2. Eucl. Quoniam igitur rectangulum AI, comprehenſum ſub AF, latere quadrati ignoti, & numero radicum, AC, valor eſt omnium radicum, vt in præcedenti demonſtratione dictum eſt, poniturque quadratum AE, æquale valori



radicum, vna cum numero aliquo abſoluto, erit rectangulum CE, numero illi abſoluto æquale. [a] Et, quoniam AO, DK, æqualia ſunt, necnõ [b] & DK, KH; æqualia erũt AO, KH. Addito ergo cõmuni DM, erit rectangulum AM, gnomoni LBO, æquale. Sed AM, ipſi CE, æquale eſt, hoc eſt, numero abſoluto. [c] (Sunt enim, AK KE, æqualia, additoque communi CM, æqualia fient AM, CE.) Igitur & gnomon LBO, numero abſoluto æqualis erit: qui ſi addatur ad OL, quadratum dimidij numeri radicum cognitum erit quadratum DH, cuius lateri DB, ſi adijciatur AD, dimidium numeri radicum, vt regula extractionis radicum iubet, notum fiet latus AB. Quod eſt propoſitum.

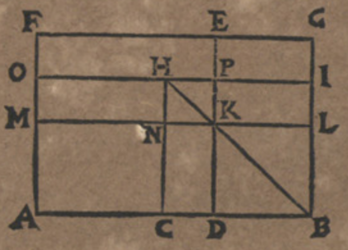
[a] 36. & 43. primi.
[b] 43. primi
[c] 43. primi



SVMAMVS denique tertium exemplum, in quo poſita fuit æquatio inter ℨ, & ℞ — N. Vel ſi reſtauretur diminutum hoc, — N, inter ℨ + N & ℞.

SIT numero radicum æqualis recta AB, quæ bifariam ſecetur in C, & non bifariam in D. Super maiorem partem AD, deſcribatur quadratum ADEF, & perficiatur rectangulum AG. Deinde ex BC, dimidio numeri radicum fiat quadratum BCHI, cuius diameter BH, ſecet DE, in K puncto, per quod agatur ipſi AB, parallela LM, ſecans CH; in N. Producta quoque IH, ſecet AF, in O, & DE, in P. Eruntque quadrata DL, NP, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. [d] & rectangulum AH, quadrato CI, æquale. Siue igitur quadratum datum, quod quæritur, ſit AE, ſiue DL, ſiue CI, ſemper vera erit æquatio, hoc eſt, erit ℨ, æqualis radicibus minus aliquo numero abſoluto, vel 1 ℨ, cum aliquo numero abſoluto æqualis radicibus. Sit enim primum quadratum propoſitum AE. Erit ergo rectangulum AG, contentum ſub latere quadrati AF, & numero radicum AB, valor omnium radicum: Atque adeo cum valori radicum æquale ſit quadratum AE, vna cum numero abſoluto, vel quadratum AE, æquale ſit valori radicum AG, minus numero abſoluto, ex hypotheſi; erit DG, rectangulũ numero abſoluto æquale. Et quoniam rectangulum DG, rectangulo AK, æquale eſt, quod latera DE, DB, lateribus DA, DK, æqualia ſint, propter quadrata AE, DL: Eſt autem AK, gnomoni PBN, æquale. [e] (Cum enim æqualia ſint complementa CK, KI; addito communi DL erit CL, ipſi DI, æquale: [f] Sed CL, ipſi AN, æquale eſt. Igitur & DI, ipſi AN, æquale erit; additoq; communi CK, fiet AK, gnomoni PBN, æquale.) Igitur & DG, hoc eſt, numerus abſolutus gnomoni PBN, æqualis erit. Qui ſi auferatur, vt præſcribit regula extractionis radicum, ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, relinquetur notum quadratum NP, cuius latus CD, additum ad AC, dimidium numeri radicum, conſtituet latus AD, quadrati AE, notum. Quod eſt propoſitum.

[d] 36. primi



[e] 43. primi
[f] 36. primi

SIT iam datum quadratum DL, eodem numero radicum, & numero abſoluto eodẽ manentibus; Erit ergo rectangulũ AL, contentum ſub numero radicum AB, & latere quadrati BL, æſtimatio omnium radicum: Acproinde, cum quadratum DL vna cũ numero aliquo abſoluto, valori radicum æquale ſit, vel quadratũ DL, æquale ſit valori radicum AL, minus aliquo numero abſoluto, ex hypotheſi; erit rectangulum AK, numero abſoluto æquale. quod cum æquale ſit gnomoni PBN, vt oſtenſum eſt, erit & numerus abſolutus gnomoni PBN, æqualis. quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, notũ remanebit quadratum NP, cuius latus CD, ex CB dimidio numeri radicum ſubtractum, notũ relinquet DB, latus quadrati dati DL. Quod eſt propoſitum.

POSREMO datum ſit quadratum CI. Erit igitur rectangulum AI, ſub AB, numero radicum, & latere BI, comprehenſum, pretium radicum propoſitarum, quibus æquale ponitur quadratum CI, vna cum dato numero abſoluto. Vel quibus æquale ponitur quadratum CI, minus numero abſoluto. Rectangulum igitur AH, numero abſoluto æquale erit. Quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicũ, nihil remanebit [g] cum æqualia ſint rectangula AH, CI, atq; adeo nihil addendum erit vel ſubtrahendum à dimidio numeri radicum, ſed ipſummet dimidium, numeri radicum, nempe CB, latus erit quadrati dati, vt ante docuimus. Quod eſt propoſitum.

[g] 36. primi

Itaque ſi ℨ æquetur ℞ — N. vel æquatio ſit inter ℨ + N, & ℞ (quod idem eſt) ſi radicem numeri, qui relinquitur, ſubtracto numero abſoluto ex quadrato dimidij numeri radicum, addamus dimidio numeri radicum, inueniemus radicem maiorem æquationi propoſitæ ſatisfacientem: Si vero eandem ex dimidio numeri radicum ſubtrahamus, reperiemus radicem minorem æquationis propoſitæ: Si denique numerus abſolutus æqualis ſit quadrato dimidij numeri radicum, erit ipſum dimidium numeri radicum radix, quæ inquiritur.

Demonſtratio alia extractionis radicũ ex numeris Coſſicis cõpoſitis, dimi nutiſue.

PETRVS Nonius cap. 4. primæ partis ſuæ Algebræ adducit alias demonſtrationes non minus elegantes, quibus prius inueſtigat Geometrice, quinam quadratus numerus, vel Zenſus, æqualis ſit cuicumque numero abſoluto, minus quotcunq; radicibus, ſiue qui vna cum quotlibet radicibus, æqualis ſit cuicunque numero abſoluto: Vel qui æqualis ſit quotcunque radicibus, vna cum quouis numero abſoluto: Vel denique qui ſit æqualis quotcunque radicibus, minus quolibet numero abſoluto, ſiue qui vna cum quocunque numero abſoluto æqualis ſit quotlibet radicibus.

PROPONATVR ergo primum hic numerus Coſſicus 55 — 6 ℞. Inueniendum eſt quadratum huic numero æquale, atque adeo demonſtrandum, recte ex ſuperioribus præceptis, eius radicem quadratam fuiſſe inuentam. Prius reſtituatur ablatum illud — 6 ℞, per tranſpoſitionem, vt ſit æquatio inter 1 ℨ + 6 ℞, & 55. Sit numerus radicum recta AB, quæ bifariam ſecetur in C, & ex C, erigatur perpendicularis CD, æqualis lateri illius quadrati, quod numero abſoluto eſt æquale. (omnis enim numerus, ẽt non quadratus, habet in quantitate continua radicem, ſeu latus, vt propoſ. 22. lib. 6. Geometriæ Practicæ docui.) connectaturq; recta BD, cui ex CB, producta æqualis abſcindatur CE. Dico quadratum rectæ BE, vna cum radicibus propoſitis, quarum numerus eſt AB, æquale eſſe numero abſoluto cuius latus quadratum eſt CD; ac proinde idem

quadratum

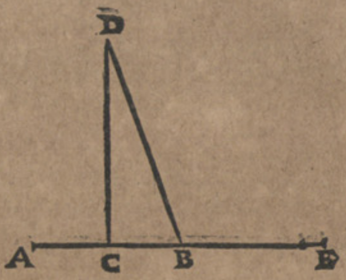
quadratum rectæ BE, æquale eſſe eidem numero, cuius latus quadratum CD, minus radicibus propoſitis, quarum numerus eſt AB. [a] Quoniam enim quadratum ex BD, æquale eſt quadratis ex CD, CB; eſtque quadratum ex BD, quadrato ex CE, æquale; erit quoque quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale. [b] Sed quadrato ex CE, quale eſt rectangulum ſub AE, BE, vna cum quadrato ex CB. Igitur & rectangulum ſub AE, BE, vna cum quadrato ex CB, æquale erit quadratis ex CD, CB: ablatoque communi quadrato rectæ, CB; æquale erit rectãgulũ ſub AE, BE, quadrato ex CD. [c] Eſt autem rectãgulũ ſub AE, BE. æquale quadrato ex BE, & rectangulo ſub AB, BE. Igitur & quadratum ex BE, vna cum rectãgulo ſub AB, BE, æquale erit quadrato ex CD. Cum igitur (poſito quadrato ex BE) rectangulum ſub AB, BE; numero radicum, & latere quadrati comprehenſum ſit valor radicum, liquido conſtat, quadratum rectæ BE, vna cum radicibus datis, quarũ numerus eſt AB, æquale eſſe numero propoſito abſoluto, cuius latus quadratum eſt CD, ideoque idem quadratum rectæ BE, æquale eſſe numero abſoluto, cuius latus quadratum eſt CD, minus valore radicum, quarum numerus eſt AB. Quod eſt propoſitum.

[a] 47. primi
[b] 6. ſecun.
[c] 3. ſecun.

EX hac demonſtratione manifeſtum eſt, præceptum ſuperius recte præſcribere modum inueniendi radicem ex numero hoc Coſſico 55—6℞. Nam ſi ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, adijciatur numerus abſolutus, nempe quadratum ex CD, nota fient duo ſimul quadrata ex CB, CD, [d] hoc eſt, quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE. Si igitur ex hoc latere CE, auferatur CB, dimidium numeri radicum, cognitum erit latus BE, hoc eſt, radix quadrata, quæ quærebatur.

[d] 47. primi

SIT rurſum Coſſicus numerus 6℞ + 55. Exhibendum eſt quadratum illi æquale, demonſtrandumque recte eius radicem eſſe extractam, iuxta præcepta ſuperiora. Sit rurſus recta AB, ſecta bifariam in C, numerus radicum, & perpendicularis CD, latus quadratum numeri abſoluti, & ductæ rectæ BD, æqualis ſit recta CE. Dico quadratum rectæ AE, æquale eſſe radicibus datis, quarum numerus AB, vna cum numero dato abſoluto, cuius quadratum latus CD. [e] Quoniam enim quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale eſt, [f] Eſt autem quadrato ex CE, æquale quadratum ex CB, vna cum rectangulo ſub AE, BE: Erit quoque quadratum ex CB, vna cum rectangulo ſub AE, BE, comprehenſum quadratis ex CD, CB, æquale; ablatoque communi quadrato rectæ CB, æquale erit rectangulum ſub AE, BE, quadrato ex CD, hoc eſt, numero abſoluto propoſito. Quare cum & rectangulum ſub AE, AB, latere quadrati, (poſito quadrato ex AE,) & numero radicum contentum ſit radicum propoſitarum valor, ſitque [g] quadratum ex AE, duobus rectangulis ſub AE, BE, & ſub AE, AB, æquale; perſpicuum eſt, quadratum rectæ AE, æquale eſſe radicibus, quarum numerus eſt AB, vna cum dato numero abſoluto, cuius latus quadratum CD. quod eſt propoſitum.

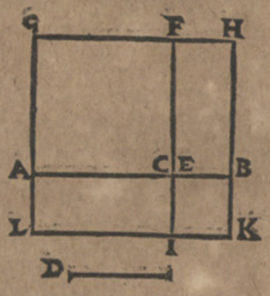


[e] 47. primi
[f] 6. ſecun.
[g] 2. ſecun.

LATVS autem AE, ita notum fiet ex ſuperioribus, & hac demonſtratione. Ad quadratũ rectæ CB, dimidij numeri radicum, addatur numerus abſolutus, quadratum videlicet rectæ CD; fientque nota duo quadrata ſimul rectarum CB, CD, [h] hoc eſt quadratum ex BD, ſeu CE. Quod ſi ad latus CE, cognitum opponatur dimidium numeri radicum, nempe recta AC, nota erit tota AE, quæ quærebatur.

[h] 47. primi

SIT denique numerus Coſſicus 18℞ —56. cui inueniendum eſt quadratum æquale, & oſtendendum, recte inuentum eſſe eius latus. Sit, vt prius, numerus radicum recta AB, ſecta bifariam in C; & recta D, latus ſit quadratum numeri abſoluti; reſtituaturque diminutum hoc, —56, vt ſit etiam æquatio inter 1 ʒ + 56, & 18℞. Sit autem primum recta D, minor dimidio numeri radicum AC, vel CB. Diuidatur recta AB, in E, ita vt D, ſit medio loco proportionalis inter ſegmenta AE, EB, ex ijs, quæ ex Peletario docuimus ad propoſ. 13. lib. 6. Eucl. [i] Erit igitur rectangulum ſub AE, EB, quadrato ex D, hoc eſt, numero abſoluto propoſito æquale. Dico tam quadratum rectæ AE, quam EB, vna cum dato numero abſoluto æquale eſſe radicibus propoſitis quarum numerus eſt AB: ideoque tam quadratum rectæ AE, quam EB, æquale eſſe valori radicum propoſitarum, minus numero abſoluto. Deſcribantur enim ex AE, EB, quadrata AF, EK, perficianturque rectangula AH, BL. Eritque tam rectangulum EH, quam EL, contentum ſub AE, EB, numero abſoluto, hoc eſt, quadrato rectæ D, æquale. Poſito igitur latere quadrati AE, erit rectangulum AH, contentum ſub AB, numero radicum, & AE, latere quadrati, valor radicum propoſitarum; Manifeſtum autem eſt, quadratum AF, vna cum EH, numero abſoluto, æquale eſſe valori radicum AH, ac proinde idem quadratum AF, æquale eſſe valori radicum AH, minus abſoluto numero EH. Poſito rurſus EB, latere quadrati, erit pretium omnium radicum rectangulum BL, ſub AB, numero radicum, & latere quadrati EB, comprehenſum, Perſpicuum autem eſt, quadratum etiam BI; vna cum EL, abſoluto numero eſſe valori radicum BL, æquale: ideoque idem quadratum BI, æquale eſſe valori radicum BL, minus numero abſoluto EL.



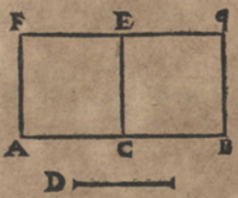
[i] 17. ſexti.

Vtrumque autem latus AE, EB, ita notum efficietur. [k] Quoniam rectangulum ſub AE, EB, vna cum quadrato ex CE, æquale eſt quadrato ex AC, vel CB; ſi ex quadrato rectæ AC, vel CB, id eſt, dimidij numeri radicum, auferatur rectangulum ſub AE, EB, nempe numerus abſolutus, relinquetur notum quadratum ex CE. Si igitur latus hoc CE, cognitum addatur ad AC, dimidium numeri radicum, notum fiet latus AE; Si vero idem latus CE, ex CB, dimidio numeri radicum dematur, notum remanebit latus EB.

[k] 5. ſecun.

SIT deinde recta D, æqualis dimidio numero radicum AC, vel CB. Dico quadratũ ex AC, dimidio numeri radicum, vna cum numero abſoluto dato æquale eſſe radicibus propoſitis. Deſcribatur enim ex AC, quadratum AE, compleaturque rectangulum AG, eritque CG, quoque quadratum. Quoniam igitur

recta D, æqualis ponitur rectæ AC, vel CB, erit quadratum CG, æquale numero abſoluto; poſitoque AC, latere quadrati æquationis, erit rectangulum AG, ſub latere AC, & numero radicum AB, contentum, æſtimatio, ſiue pretium radicum. Liquido autem conſtat, quadratum AE, vna cum CG, numero abſoluto, æquale eſſe radicibus AG: ideoque quadratum idem AE, eſſe æquale valori radicum AG, minus numero abſoluto CG.



ITAQVE cum recta D, minor eſt dimidio numeri radicum AC, vel CB, hoc eſt, cũ numerus abſolutus æquationis minor eſt quadrato dimidij numeri radicũ, inuenitur duplex radix æquationis. Cũ vero recta D, æqualis eſt dimidio numeri radicum, id eſt, numerus abſolutus propoſitus æqualis eſt quadrato dimidij numeri radicum, eſt radix æquationis ipſum dimidium numeri radicum. Neque vero recta D, maior eſſe poteſt dimidio numeri radicum AC, vel CB. Nam falſa eſſet æquatio, cum quadratum ipſius D, nempe numerus abſolutus, ex quadrato dimidij numeri radicum auferri non poſſet, atque adeo, radix, ſecundum præceptum traditum, nullo modo inueniri. Accedit etiam, quod D, ſi maior eſſet quam AC, vel CB, non poſſet eſſe medio loco proportionalis inter duo ſegmenta rectæ AB, vt patet ex demonſtratione illa, quam ex Peletario appoſuimus ad propoſ. 13. lib. 6. Eucl. Quare inueniri non poſſet quadratum æquationi ſatisfaciens.

POSSVMVS cum eodem Petro Nonio artem hanc extractionis radicum ex numeris Coſſicis compoſitis hoc etiam modo proponere.

Alius modus extrahendi radicem quadratam ex numero Coſſico compoſito, vel diminuto.

1. *Ad quadratum numeri radicum adde, vel ab eodem ſubtrahe quadruplum numeri abſoluti, prout ſigno +, vel −, fuerit affectus numerus abſolutus.*
2. *Ad huius ſummæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem ſubtrahe numerum radicum, prout radicum numerus ſigno +, vel −, fuerit notatus. Nam vltima hæc ſumma, vel relictum dabit æſtimationem, & pretium duplicatæ radicis quadratæ. Quare dimidium ipſius valor erit vnius radicis.*

SIT enim extrahenda radix ex hoc numero Coſſico, 72 − 6 ℞. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri abſoluti; & ex radice quadrata ſummæ confectæ 324, hoc eſt, ex 18, detraho numerum radicum, nempe 6; remanentq; 12, pro valore duarum radicum. Pretium ergo vnius radicis erit 6.

RVRSVS ex numero hoc Coſſico, 6 ℞ + 72, eruenda ſit radix. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri abſoluti, facioq; 324. Ad huius ſummæ deinde radicem quadratã, vt ad 18, adijcio numerum radicum, vtpote 6, facioq; 24, pro pretio duplicatæ radicis. Vnius ergo radicis pretium erit 12.

POSTREMO inuenienda ſit radix huius numeri Coſſici, 18 ℞ − 72. Ex 324, quadrato numeri radicum, ſubtraho 288, quadruplum abſoluti numeri; relinquunturque 36. Ad huius relicti radicem quadratam, nempe ad 6, adiungo 18, numerum radicum, cõficioque 24. pro duplicatæ radicis pretio. Vna ergo radix erit 12. Quod ſi radicem quadratam relicti illius, nempe 6, detraham ex 18, numero radicum, remanebunt 12, pro valore duplicatæ radicis minoris; (Huiuſmodi enim numerus Coſſicus duplicem habet radicem, vt dictum eſt,) Quare vna radix erit 6.

Commoditas huius poſterioris modi extractionis.

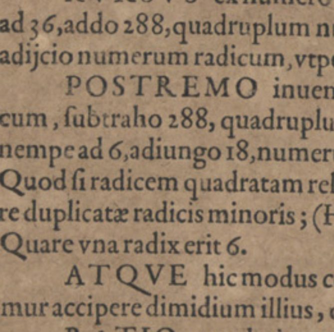
ATQVE hic modus commodiſſimus eſt, quando radicum numerus impar eſt, vel fractus, ne cogamur accipere dimidium illius, quod ſemper eſt numerus fractus, &c.

a Schol. propoſ. 4. lib. 2. b 1. quinti. c 5. quinti. d Schol. propoſ. 4. lib. 2. e 1. vel 5. quinti.

RATIO vero huius operationis hæc eſt. [a] Quoniam quadratum numeri radicum quadruplum eſt quadrati, quod ex dimidio numeri radicum gignitur, quemadmodum & numerus abſolutus quadruplicatus numeri abſoluti quadruplus eſt, [b] fit vt & ſumma, quæ fit ex quadrato numeri radicum, & quadruplo numeri abſoluti, quadrupla ſit ſummæ, quæ prius in alio modo operationis conficiebatur ex quadrato dimidij numeri radicum, & numero abſoluto: [c] efficitur quoque, vt & relictum, quod fit ex detractione quadrupli numeri abſoluti ex quadrato numeri radicum, quadruplum ſit relicti, quod antea fiebat ex detractione numeri abſoluti ex quadrato dimidij numeri radicum. [d] Quam ob rem radix quadrata huius ſummæ, vel relicti, dupla erit radicis quadratæ prioris ſummæ, vel relicti. quemadmodum & numerus radicum duplus eſt dimidij numeri radicum. Siue igitur ad hanc radicem quadratam adijciamus numerum radicum, vel ab eadem ſubtrahamus eundem, [e] fiet quoque ſumma, vel relictum duplum ſummæ, vel relicti, quod fit ex additione dimidij numeri radicum ad radicem quadratam in priore operatione inuentam, vel ex detractione dimidij numeri radicum ex priore radice quadrata. Quare dimidium ſummæ huius, vel relicti pretium erit radicis æquationi ſatisfacientis.

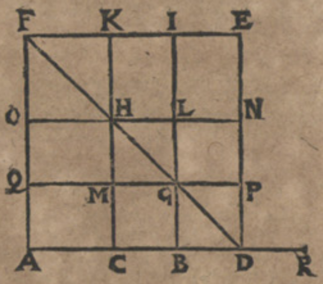
QVAM tamen operationem ita quoque Geometricè confirmabimus cum Petro Nonio. Sit primum æquatio inter ʒ, & N − ℞, hoc eſt, ſi reſtauretur diminutum, inter ʒ + ℞, & N.

Demonſtratio alterius huiuſmodi extractionis.



PONATVR AB, latus quadrati ignotum, quod quæritur, quo producto ad partes A, ſumatur recta AC, numero radicum æqualis. Sumatur quoque ex eadem AB, ad partes B, protracta, recta BD, ipſi AB, æqualis; & ex tota CD, deſcribatur quadratum CDEF, vna cum diametro DF, perficiaturque figura, vt vides, ita vt ſimilis ſit omnino figuræ propoſ. 8. lib. 2. Euclidis. Erunt igitur, vt in propoſ. 8. lib. 2. Eucl. demonſtratum eſt BP, ML, AG, GN, OK, quadrata, & gnomon ODK quadruplus rectãguli CG. Quoniam vero AG, ponitur quadratum, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum CM, contentum ſub numero radicum AC, & latere quadrati AM, valor radicum omnium. Cum ergo æquatio ſit inter ʒ + ℞, & N, erit rectangulum CG, æquale numero abſoluto, atque adeo gnomon ODK, quadruplus numeri abſoluti; qui ſi addatur ad OK, quadratum numeri radicum AC, totum quadratum CE, cognitum erit; ex cuius latere CD, cognito, ſi tollatur AC, numerus radicum, relinquetur recta AD, dupla lateris AB, quod quæritur, cognita. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde æquatio inter ℨ.& ℞+N. Ponatur AB, latus ignotum quadrati, quod quæritur, & AC, numerus radicum. Producta recta AB, ſumatur BD, ipſi BC, & DR, ipſi AC, æqualis; & ex AD, deſcribatur quadratum ADEF, vna cum diametro DF, perficiaturque figura, vt prius. Erit rurſum, vt antea, gnomon ODK, quadruplus rectanguli KG, & OK, QI, quadrata. Et quia QI, quadratum ponitur, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum QK, contentum ſub QM, numero radicum, ([a] eſt enim QM, ipſi AC, æqualis) & latere quadrati QF, valor omnium radicum. Quocirca cum ſit æquatio inter ℨ, & ℞+N, erit rectangulum KG, numero abſoluto æquale, ac propterea gnomon ODK, numeri abſoluti quadruplus; quo addito ad OK, quadratum numeri radicum, notum fiet totum quadratum AE; ad cuius latus AD, cognitum ſi addatur DR, numerus radicum (poſita enim eſt recta DR, numero radicum AC, æqualis) cognita erit tota recta AR, quæ dupla eſt lateris AB, quod quæritur. Si enim æqualibus BC, BD, æquales rectæ adiiciantur CA, DR, totæ BA, BR, æquales fient, atque adeo AR, dupla erit ipſius AB. Quod eſt propoſitum.

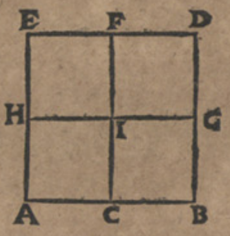


[a] *34. pri.*

DENIQVE ſit æquatio inter ℨ, & ℞−N, hoc eſt, ſi diminutum reſtauretur, inter ℨ+N, & ℞. Repetatur præcedens figura, ſitque numerus radicum recta AD, & AB, latus quadrati, quod quæritur, ſit primum maius dimidio numeri radicum. Quoniam igitur QI, ponitur quadratum, cuius latus AB, inueniendum eſt, erit rectangulum AI, contentum ſub latere quadrati AB, & numero radicum AD, vel AF, valor radicum. Cum ergo æquatio ſit inter ℨ+N, & ℞, erit rectangulum AG, numerus abſolutus, atq; adeo gnomon ODK, ipſius quadruplus, vti prius; qui ſi ex AE, quadrato numeri radicum dematur, remanebit quadratum OK, notum, cuius lateri cognito AC, vel DR, ſi adiiciatur numerus radicum AD, fiet nota tota AR, quæ dupla eſt lateris quadrati AB, vt prius eſt demonſtratum. Quod eſt propoſitum.

SIT iam BD, latus quadrati inueniendum dimidio numeri radicum minus. eritque rectangulum AP, contentum ſub latere quadrati DP, & numero radicum AD, valor radicum. Et quia æquatio eſt inter ℨ+N, & ℞, erit rectangulum AG, numerus abſolutus, ac proinde gnomon ODK, ipſius quadruplus; qui ablatus ex AE, quadrato numeri radicum relinquit quadratum OK, eiusque latus propterea AC, notum fiet. Quod ſi AC, ex AD, numero radicum dematur, remanebit nota recta CD, quæ lateris BD, dupla eſt. Quod eſt propoſitum.

IAM vero, ſi quadruplum numeri abſoluti æquale fuerit quadrato numeri radicum, erit dimidium numeri radicum latus quadrati, quod quæritur. Sit enim AB, recta numerus radicum ſecta bifariam in C; deſcriptoque quadrato AD, ducantur rectæ CF, GH, ſecantes quatuor latera bifariam, & quadratum in quatuor quadrata æqualia. Si igitur AC, dimidium numeri radicum ponatur latus quadrati, erit rectangulum AG, contentum ſub latere quadrati AH, & numero radicum AB, valor radicum; ac propterea cum æquatio ſit inter ℨ+N, & ℞, erit CG, rectangulum numero abſoluto æquale, & quadruplum eius quadrato AD, ex numero radicum AB, deſcripto æquale. Si igitur quadruplum numeri abſoluti, hoc eſt, quadratum AD, auferatur ex AD, quadrato numeri radicum AB, remanebit 0. quod ſiue addatur ad AB, numerum radicum. ſiue ab eo ſubtrahatur, nota fiet recta AB, quæ dupla eſt lateris AC. Quod eſt propoſitum.



QVOD vero ſpectat ad extractionem radicum Zenſizenſicarum, vel Zenſicubicarum, vel Zenſizenzenſicarum, vel Zenſurdeſolidarum, quando nimirum numeri Coſſici æquationis, abbreuiatis tamen eorum characteribus, habent exponentes, qui progreſſionem Arithmeticam conſtituant vnam ex his. 4.2.0. vel 4.0.2. vel 6.3.0. vel 6.0.3. vel 8.4.0. vel 8.0.4. vel 10.5.0. vel 10.0.5. &c. in quibus maior character ſemper cōponitur ex ℨ. & alio charactere Coſſico, vt ex numeris exponentibus manifeſtum eſt: extrahenda eſt prius radix quadrata, propter characterem ℨ. iuxta modum hactenus deſcriptum, accommodando omnia ea, quæ de numero radicum præcepimus, illi numero, qui affectus eſt charactere Coſſico in illa parte æquationis, ex qua radix eruenda eſt. perinde ac ſi æquatio foret inter tres numeros Coſſicos characteribus ℨ. ℞. & N. affectos. Deinde ex hac radice quadrata inuenta, ſiue ea rationalis ſit, ſiue irrationalis, elicienda eſt radix alia, iuxta reliquam partem characteris Coſſici maioris, relicto hoc charactere ℨ. (eſt enim character maior Coſſicus compoſitus) hoc eſt, eruenda eſt radix denominata à charactere Coſſico, qui in ea parte æquationis cernitur, in qua duo numeri reperiuntur, & qui medius eſt inter maximum characterem, & minimum, ſiue N. Vt ſi æquatio ſit inter 1ℨℨ. & 18ℨ+648. extrahenda erit radix quadrata ex hoc numero 18ℨ+648, propter priorem partem ſigni Coſſici ℨ. non aliter, ac ſi eſſet æquatio inter 1ℨ. & 18℞+648. quæ radix eſt 36. ex qua rurſus eruenda eſt radix quadrata, nempe 6. ob reliquam partem characteris Coſſici, nimirum ℨ. qui medium locum obtinet inter ℨℨ. & N. Igitur 6. erit radix numeri Coſſici propoſiti.

Extractio radicis Zenſizenſicæ, zenſicubicæ, &c.

EODEM modo ſi ſit æquatio inter 1ℨℭ. & 5120−16ℭ. ſumenda eſt prius radix quadrata huius numeri 5120−16ℭ, & ex hac elicienda radix cubica. Sic etiam, ſi æquatio habeatur inter 1ℨℨℨ. & 20000 ℨℨ−78461119. accipienda eſt primum quadrata radix, & ex hac eruenda deinde radix Zenſizenſica. Et ſic de cæteris.

QVOD autem ex huiuſmodi numeris Coſſicis extrahatur radix quadrata eodem artificio, quo ſuperius vſi ſumus, perſpicuum eſt. Nam maximus character Coſſicus, cum ſit compoſitus ex ℨ. & alio quodam charactere Coſſico ſiue ſimplici, ſiue compoſito, indicat vnitatem ab eo denominatam eſſe zenſum, ſeu quadratum alicuius numeri à reliqua parte maximi characteris Coſſici denominati, ita vt reliqua illa pars ſit tanquam radix prioris partis. Quare cum hæc reliqua pars reperiatur quoque in altera æquationis parte, cuius radix inueſtigatur, denominari poterit eius numerus à ℞, ſi numerus maximi characteris, nēpe vnitas, à ℨ. denominetur: atque adeo iuxta præcepta tradita recte ex illo numero æquationis radix quadrata inuenietur. V. g.

In æquatione inter ℨȼ. & ȼ + N. cum hic character ℨȼ. ſignificet zenſum vnius cubi, erit vnus cubus radix quadrata illius zenſi, ac proinde numerus cuborum in altera parte æquationis, numerus erit radicum eiuſdem zenſi. Et ſic de cæteris. Inuenta autem hac radice quadrata, extrahẽda eſt ex ea radix à reliqua parte maximi characteris Coſſici denominata, quia illa radix quadrata eſt numerus denominatus ab illa reliqua parte, & non abſolutus. Quemadmodum qui vult radicem zenſicubicam huius numeri 64. inuenire prius debet eius radicem quadratam, nempe 8. Deinde quoniam hæc radix quadrata non eſt numerus abſolutus, ſed cubus, cum numerus 64. ſit zenſus vnius cubi, ſumenda erit radicis inuentæ 8. radix cubica, nimirum 2. atque hiç numerus radix erit Zenſicubica dati numeri 64.

EXEMPLA DVO, IN QVIBVS occurrunt radices ſurdæ.

SIT æquatio inter 1. ℨȼ. & 800ȼ—156751. Dimidium cuborum, nimirum 400. quadro, efficioque 160000. Detraho 156751. & reliqui numeri 3249. quadratam radicem 57. ad dimidium numeri cuborum, nimirum ad 400. adiicio, efficioque 457. cuius radix cubica dat radicem Zenſicubicam quæſitam, quæ ſurda eſt. Eius cubus eſt 457. qui ductus in ſe facit Zenſicubum 208849. qui æqualis eſt 800ȼ. id eſt, 365600. minus 156751. vt patet. Idem fere conſtabit, ſi per radicem cubicam numeri 457. in numeris inuentam agemus. Radix enim cubica numeri 457. propinqua eſt $7\frac{7}{10}$. inuenta per appoſitionem duorum ternariorum cifrarum. Eius cubus eſt $\frac{456533}{1000}$. & Zenſicubus 208422. proxime: qui æqualis eſt ferme 800ȼ, hoc eſt, $\frac{365226400}{1000}$. minus 156751. Nam poſt detractionem reliquus fit numerus $208475\frac{2}{5}$. qui parum differt à 208422. Cauſa huius inæqualitatis eſt, quod propinqua illa radix non eſt vera radix. Felicius ergo æquatio ſuccedit, ſi operatio per ipſammet radicem ſurdam inſtituatur.

ET quoniam numerus 800ȼ—156751. duplicem radicem habet, vt ſupra diximus, propterea quod numerus abſolutus ſigno — affectus eſt; maior inuenitur, vt dictum eſt, nimirum radix cubica numeri 457. minor vero reperietur, ſi ſuperioris numeri 3249. relicti poſt detractionem numeri abſoluti ex quadrato dimidij numeri cuborum, radicem quadratam 57. ex 400. dimidio numeri cuborum detrahamus. & reliqui numeri 343. radicem cubicam ſumamus 7. Huius enim Zenſicubus eſt 117649. qui æqualis quoque eſt 800ȼ. id eſt, 274400. minus 156751. vt manifeſtum eſt. Itaque maior radix huius numeri 800ȼ—156751. ſurda eſt, nimirum radix cubica numeri 457. minor autem rationalis eſt, nimirum 7. radix videlicet cubica cubi 343.

SIT rurſus æquatio inter 1ℨ. & 8𝓇—5. Dimidium numeri radicum, nimirum 4. quadro, & ex quadrato 16. demo 5. & reliqui numeri 11. propinquam radicem quadratam $3\frac{79}{250}$. (quæ inuenta eſt per appoſitionem trium binariorum cifrarum.) addo ad dimidium numeri radicum, vt ad 4. efficioque radicem propinquam $7\frac{79}{250}$. numeri propoſiti 8𝓇—5. Eius quadratum eſt $53\frac{32741}{62500}$. quod fere æquale eſt 8𝓇—5. quippe cum 8𝓇—5. efficiant $53\frac{66}{125}$.

RADIX minor eiuſdem numeri 8𝓇—5. (Habet enim duplicem radicem, propter ſignum —. quod numerus abſolutus gerit, vt ſupra diximus) eſt $\frac{171}{250}$. quæ habetur, ſi reliqui numeri ſuperioris 11. radix propinqua $3\frac{79}{250}$. ex 4. dimidio numeri radicum detrahatur. Quadratum radicis $\frac{171}{250}$. eſt $\frac{29241}{62500}$. quod fere æquale eſt 8𝓇—5. Nam 8𝓇—5. conficiunt $\frac{59}{125}$. qui numerus illum quadratum ſuperat hoc fracto numero $\frac{259}{62500}$. qui minor eſt, quam $\frac{1}{241}$.

FELICIVS quoque æquatio ſuccedet, ſi per radices ſurdas operari velimus. Nam maior radix eſt 4+√ℨ11. Minor vero 4—√ℨ11. Illius tam quadratum, quam octuplum radicis —5. efficit 27+√ℨ704. hoc eſt, $53\frac{28}{53}$. proxime. Huius vero tam quadratum, quam octuplum radicis —5. conficit $\frac{25}{53}$. proxime, nimirum 27—√ℨ704. Ratio porro huius operationis per radices ſurdas intelligetur cap. 23. in algorithmo ſurdorum numerorum.

Multiplicationes ita formantur.

4 + √ℨ 11
4 + √ℨ 11
\+ √ℨ 176 + 11
16 + √ℨ 176
Summa. 27 + √ℨ 704

4 + √ℨ 11
8
32 + √ℨ 704

Demptis 5. remanent
27 + √ℨ 704

4 — √ℨ 11
4 — √ℨ 11
— √ℨ 176 + 11
16 — √ℨ 176
Summa. 27 — √ℨ 704.

4 — √ℨ 11
8
32 — √ℨ 704

Demptis 5. remanent
27 — √ℨ 704

Quando aliquando quæſtio aliqua nõ ſoluitur, culpa in Arithmeticã, nõ autẽ in Algebrã traſferẽda eſt.

Poſui duo hæc exempla, vt videas, non minus veram eſſe regulam Algebræ à nobis traditam in numeris ſurdis, quam in rationalibus.

IAM vero, ſi quando æquatio occurrat, quam reſoluere neſcias, culpa transferenda non eſt in artem Algebræ, ſed in te potius, qui non omnium æquationum ſcientiam perdidiciſti. Verbi gratia. Si incides in æquationem inter 1ȼ. & 3ℨ + 2𝓇 + 8. & neſcias ex hoc numero 3ℨ + 2𝓇 + 8. extrahere radicem cubicam, culpa erit tua, non autem regulæ Algebræ, quæ docet, ſi ex illo numero radix cubica extrahatur, quæſtioni ſatisfactum eſſe,

eſſe. Eſt autem radix cubica prædicta 4. Nam eius cubus eſt 64. qui æqualis eſt tribus quadratis, nimirum 48. & duabus radicibus, id eſt, 8. & octo vnitatibus. Idem iudicium habeto de æquatione inter 1ℭ. & 4ʒ+-147. Item inter 1ℭ. & 30℞+133. Quia enim exponentes denominationum non ſeruant proportionem Arithmeticam, nondum eſt inuenta ars, qua reſolui poſſint, cum tamen ſint ſolubiles. Nam in vtraque radix valet 7.

SIC etiam, quando occurrunt radices ſurdæ, quarum doctrinam non perfecte calles, non erit vitio vertendum ſcientiæ Algebræ, ſi quæſtio propoſita maneat adhuc ignota. Id quod in duobus exemplis ſuperioribus perſpicuum eſſe poteſt, in quibus, vt æquatio propoſita explicaretur, opus fuit, per numeros ſurdos, ſiue irrationales, operationem inſtituere.

SÆPENVMERO etiam accidit, vt in quęſtionibus nonnullis explicandis requiratur magna doctrina Geometrię, vel alterius cuiuſpiam ſcientię, vt infra, quando varias quęſtiones proponemus diſſoluendas, perſpicuum fiet. Qui ergo in ea doctrina ſatis non fuerit exercitatus, fruſtra ſe ad quæſtionis propoſitę explicationem accinget. Nunquam enim ea ſcientia deſtitutus illam expediet. quod quidem non culpa Algebrę, ſed ipſius accidere, pro certo tenendum eſt.

QVEMADMODVM ſi forte in regula illa aurea, quam regulam Trium dicunt, occurrant numeri ſurdi, ac irrationales, aut numeri fracti, atque is, qui per eam regulam ratiocinationem inſtituit, ignarus ſit doctrinę illorum numerorum, ac proinde quęſtionem propoſitam ſoluere nequeat; accuſanda non eſt ipſa regula, ſed artifex. Cum enim prędicta regula iubeat multiplicare ſecundū numerum per tertium, ac productum per primum diuidere, vt Quotiens exhibeat quęſtionis ſolutionem, culpa erit artificis, ſi operari neſciat per numeros ſurdos, aut fractos, non autem ipſius regulę. Vt ſi proponatur hæc quęſtio. 2. dant √ʒ3. quid ergo dabit √ʒ12? certum eſt, eum, qui neſciat multiplicare, ac diuidere radices ſurdas, quęſtionem non poſſe ſoluere. Secundus enim numerus √ʒ3. ductus in tertium, id eſt, in √ʒ12. facit √ʒ36. qua diuiſa per primum numerum 2. fit Quotiens √ʒ9, hoc eſt, numerus 3, Eadem ratione regula Algebrę docet, quid agendum ſit in qualibet quęſtione propoſita, vt ad æquationem aliquam deueniatur: quam etiamſi artifex enodare neſciat, nihil tamen Algebræ regula de ſua firmitate, ac robore amittit, ſed tota culpa in artificem reiicienda eſt.

DE MVLTITVDINE REGVLARVM Algebræ, quam alij auctores introducunt;

CAPVT XIII.

VIDISTI hactenus, opinor, ſtudioſe lector, vnicam noſtram regulam Algebræ perfecte planeque nos docere, qua ratione quamlibet quęſtionem propoſitam euoluere debeamus: quippę quæ præcipiat, vt 1℞, quæ pro numero inueſtigando ponitur, vel alium numerum, iuxta quęſtionis tenorem examinemus, donec in æquationem aliquam incidamus duorum numerorū: Deinde, æquatione huiuſmodi inuenta, ac reducta, vt cap. 10. de reductione æquationis tradidimus, per numerū maioris characteris Coſſici reliquū æquationis numerum diuidamus; ac tandē ex Quotiente radicem æquationi congruentem extrahamus, ſi opus eſt. Vt autem te nō lateat, quam varias alij ſcriptores regulas Algebræ tradant, operæ pretium duxi, eorum regulas hic proponere, vt illis collatis cum vnica noſtra, quid inter noſtram, & multiplices aliorum regulas interſit, intelligas.

ALII ergo ſcriptores æquationes illas potiſſimum conſiderant, quę inter tres primos terminos progreſſionis Geometricę ab vnitate incipientis, hoc eſt, inter Numerum, Radicem, atque Quadratum, ſiue Zenſum, reperiuntur. qui quidem tres termini ſex poſſunt modis inter ſe æquari. Aut enim æquatio eſt inter ʒ. & ℞: aut inter ℞. & N: aut inter ʒ. & N. quę tres æquationes ab illis ſimplices dicuntur, quod ſolum vnus terminus in ijs vni termino æquetur: Aut inter ʒ+℞. & N: aut inter ʒ. & ℞+N: Vel (quod idem eſt) inter ʒ. & N+℞. Aut denique inter ʒ+N & ℞; quę tres æquationes ab eiſdem compoſitę vocātur, propterea quod in ijs ſemper duo termini vni termino adęquantur. Pro his ſex æquationibus ſex regulas pręſcribunt.

Inter quos numeros alij potiſſimū æquationes obſeruent.
Tres ſimplices æquationes.
Tres compoſitæ æquationes.

REGVLA I.

QVANDO reperitur æquatio inter ʒ. & ℞. diuiſo numero ſigni ℞. per numerum ſigni ʒ. Quotiens exhibet pretium 1℞. Vt ſi 5ʒ. ęquales ſint 30℞. diuiſis 30. per 5, prodibit Quotiens 6. pro æſtimatione vnius radicis. Nam quadratum huius radicis eſt 36. atque idcirco 5ʒ. faciunt 180. quantum nimirum faciunt 30℞.

Quando æquatio eſt inter ʒ & ℞.

REGVLA II.

QVANDO æquatio reperitur inter ℞. & N. diuiſo numero abſoluto per numerum ſigni ℞. procreabitur in Quotiente pretium 1℞. quemadmodum in 1. regula. Vt ſi 5℞. æquales ſint 30. diuiſis 30. per 5. exit Quotiens 6. pro valore 1℞. Nam radix 6. quinquies ſumpta facit 30.

Quando æquatio eſt inter ℞ & N.

REGVLA III.

QVANDO inter ʒ. & N, æquatio deprehenditur, diuiſo numero abſoluto per numerum ſigno ʒ. affectum, habebitur in Quotiente valor 1ʒ. Eius ergo radix quadrata dabit pretium 1℞. Vt ſi æquatio ſit inter 4ʒ. & 144. diuiſis 144. per 4. prouenit Quotiens 36. pro valore 1ʒ. Radix ergo quadrata numeri 36. quæ eſt 6. offeret pretium 1℞. Nam quadratum numeri 6. eſt 36. quo multiplicato per 4. fit numerus 144.

Quando æquatio eſt inter ʒ & N.

REGV-

REGVLA IV.

Quando æquatio eſt inter ℨ+℞. & N.

QVANDO æquatio occurrit inter ℨ+℞. & N. multiplicanda eſt ſemiſſis numeri radicum in ſe, productoque numerus abſolutus addendus. Nam ſi ex huius aggregati radice quadrata dematur ſemiſſis numeri radicum, reliquum fiet pretium 1℞. Vt ſi æquatio conſtituatur inter 1ℨ+12℞. & 85. multiplicabimus 6. ſemiſſem videlicet numeri radicum, in ſe, productoque 36. adiiciemus 85. vt fiant 121. Ab huius enim numeri radice quadrata 11. ſi ſubducatur ſemiſſis numeri radicum, nimirum 6. remanebunt 5. pro valore 1℞. Nam 1ℨ. eſt 25. additis autem 12℞, videlicet 60. fit numerus abſolutus 85. vt proponitur.

REGVLA V.

Quando æquatio eſt inter ℨ & ℞+N.

QVANDO æquatio inſtituitur inter ℨ. & ℞+N, vel inter ℨ. & N+℞. multiplicanda eſt ſemiſſis numeri radicum in ſe, & producto numerus abſolutus adiiciendus. Nam ſi ad huius aggregati radicem quadratam addatur ſemiſſis numeri radicũ, conflabitur æſtimatio 1℞. Vt ſi æquatio ponatur inter 1ℨ. & 6℞+16. vel inter ℨ. & 16+6℞. ducemus 3. id eſt, ſemiſſem numeri ℞. in ſe, ac producto 9. adiiciemus numerum abſolutum 16. vt fiant 25. Ad huius enim numeri radicem quadratam 5. ſi addatur ſemiſſis numeri radicum, nimirum 3 conflabitur numerus 8. pro pretio 1℞. Nam eius quadratum eſt 64. qui numerus æqualis eſt 6℞. id eſt, 48. vna cum 16. vt patet.

REGVLA VI.

Quando æquatio eſt inter ℨ+N. & ℞.

QVANDO denique æquatio reperitur inter ℨ+N. & ℞; multiplicanda eſt ſemiſſis numeri radicum in ſe, & ex producto auferendus numerus abſolutus propoſitus. Nam ſi ad radicem quadratam reliqui numeri adiicias ſemiſſem numeri radicum, vel ex hac ſemiſſe eandem radicem detrahas, conficies pretium 1℞. ita vt eiuſmodi æquatio duplicem habeat radicem, maiorem ſcilicet ac minorem. Vt ſi propoſita ſit æquatio inter 1ℨ+21. & 10℞. ducemus 5. ſemiſſem numeri radicum in ſe, & ex producto numero 25. auferemus numerum abſolutum 21. Nam ſi ad reliqui numeri 4. radicem quadratam 2. addemus ſemiſſem numeri radicum, hoc eſt, 5. efficiemus 7. valorem maioris radicis: Et ſi eandem radicem 2. ſubtrahemus ex 5. nimirum ex ſemiſſe numeri radicum, reliqua fient 3. pro valore minoris radicis. Nam maioris radicis 7. quadratum eſt 49. & additis 21. fit numerus 70. qui æqualis eſt 10℞. At vero minoris radicis 3. quadratum eſt 9 & additis 21. fit numerus 30 qui æqualis eſt 10℞ vt liquet.

Quando in æquatione reperiũtur plures, paucioresue Zenſi.

PORRO quando plures, vel pauciores zenſi, quam 1. in aliqua æquatione occurrunt, diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum ſigno ℨ. affectum, vt æquatio fiat inter 1ℨ. &c. quod & nos faciendum eſſe præcepimus. V. g. ſi æquatio detur inter 3ℨ+63. & 30.℞. diuidendi erunt ſinguli numeri per 3. vt æquatio fiat inter 1ℨ+21. & 10℞: ac deinde regula 6. vſurpanda. Sic ſi detur æquatio inter $\frac{1}{2}$ℨ. & 3℞+8. Vel inter $\frac{1}{2}$ℨ. & 8+3℞. ſi numeri ſinguli diuidantur per $\frac{1}{2}$. inuenietur æquatio inter 1ℨ. & 6℞+16. vel inter 1ℨ. & 16+6℞. quæ per 5. regulam explicabitur.

Quo pacto aliæ æquationes ad 6. ſuperiores regulas reuocẽtur.

HÆ ergo ſunt 6. regulæ ab omnibus ferme auctoribus traditæ. Omnes enim aliæ æquationes inter alios numeros Coſſicos, qui diuerſi ſunt à ℨ. ℞. & N. ad prædictas 6. reducuntur; vt fruſtra nonnulli ſcriptores plures regulas præſcribant. Nam ſi huiuſmodi æquationes occurrant, in quibus numeri exponentes characterum ſeruant proportionalitatem Arithmeticam, abbreuiandi erunt characteres, vt ſupra dictum eſt, ad eum finem, vt in altera parte æquationis numerus abſolutus reperiatur: Deinde obſeruanda ea, quæ circa finem cap. 12. de extractione radicis Zenſizenſicæ, Zenſicubicæ, &c. ſcripſimus: quando videlicet exponentes ſeruant hanc proportionem Arithmeticam 4.2.0. vel 4.0.2. aut 6.3.0. vel 6.0.3. &c.

Præſtãtiorem eſſe vnicam noſtram regulam Algebræ 6. aliorũ regulis.

QVOD ſi rem attentius introſpicere velimus, facile deprehendemus, vnicam noſtram Algebræ regulam longe eſſe præſtantiorem ſupradictis 6. regulis aliorum: quippe cum in noſtra fiat ſemper reductio æquationis ad 1ℨ. in vna parte æquationis, ac proinde ſigna + & —. in altera æquationis parte plene, atque abunde nos inſtruant, quando fieri debeat additio, & quando ſubtractio. quod in ſuperioribus 6. regulis non tam clare apparet.

Æquatio ſimplex, & compoſita quæ.

QVEMADMODVM autem ſcriptores Algebræ æquationes priorum trium regularum, ſimplices appellant, trium vero poſteriorum regularum æquationes compoſitas, vt paulo ante diximus: ita quoque nos in ijs, quæ ſequuntur, æquationem, quæ inter duos numeros duntaxat occurrit, doctrinæ gratia, ſimplicem nominabimus, compoſitam vero eam, quæ inter tres numeros deprehenditur.

QVÆSTIO PROPOSITA VTRVM POSSIBILIS ſit, nec ne, an vero inepta, ac nugatoria, quo pacto ex ipſa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoſcatur.

CAPVT XIV.

Quo pacto cognoſcatur, num quæſtio ſit poſſibilis, an impoſſibilis.

QVONIAM in principio huius lib. diximus, regulam Algebræ hanc habere excellentiam, vt in ipſo opere nos edoceat, num quæſtio, quæ proponitur, ſolui poſſit, nec ne: docendum iam paucis erit, qua id ratione fiat. Quotieſcunq; igitur in diſſoluenda per Algebræ præcepta quæſtione aliqua incidimus in æquationem aliquam impoſſibilem, vel nugatoriam, atque ineptam, pronunciabimus quæſtionem ſolui nulla ratione poſſe: vel certe eſſe nugatoriam, & ineptam. quod nonnullis exemplis declarabitur.

1. Qua-

1. *Quæratur numerus, qui ductus in 3. & hic productus in ſe, tantum faciat, quantum ex ipſo numero in ſe multiplicato, & ex hoc producto in 5.* 1. quæſtio impoſſibilis.

PONATVR quæſitus numerus 1℞. quæ ducta in 3. facit 3℞. & hic productus in ſe, facit 9ʓ. qui numerus debet eſſe æqualis ei, qui fit ex 1℞, in ſe, & ex producto in 5. Fit autem ex 1℞ in ſe, 1ʓ. & hic numerus in 5. ductus facit 5ʓ. Inuenta ergo eſt æquatio inter 9ʓ. & 5ʓ. quæ eſt impoſſibilis. Quapropter enunciabimus, quæſtionem propoſitam eſſe impoſſibilem.

2. *Diuidatur numerus 12. in tales duas partes, vt $\frac{1}{3}$. vnius cum $\frac{1}{4}$. alterius efficiat 4* 2. quæſtio impoſſibilis.

PONATVR pro vna parte 1℞. eritque altera 12—1℞. Tertia pars illius eſt $\frac{1}{3}$℞. & quarta pars huius eſt 3—$\frac{1}{4}$℞. quæ ſimul efficiunt 3+$\frac{1}{12}$℞. (Nam ex +$\frac{1}{3}$℞. & —$\frac{1}{4}$℞. fit $\frac{1}{12}$℞. vt ex cap. 4. conſtat) quæ æqualia eſſe debent numero 4. Ablatis vtrinque 3. erit æqualitas inter $\frac{1}{12}$℞. & 1. Igitur diuiſa 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1℞ 12. atque hæc eſt prima pars numeri 12 & altera pars 0. quod eſt ineptum. Improprie tamen $\frac{1}{3}$. illius, nimirum 4. cum $\frac{1}{4}$. huius, id eſt, cum 0. facit 4.

QVOD ſi, poſitis eiſdem partibus 1℞. & 12—1℞. accipiamus $\frac{1}{4}$. prioris, nempe $\frac{1}{4}$℞. & $\frac{1}{3}$. poſterioris, videlicet 4—$\frac{1}{3}$℞. quæ partes ſimul conficiunt 4—$\frac{1}{12}$℞ quod $\frac{1}{4}$℞: & —$\frac{1}{3}$℞ faciant —$\frac{1}{12}$℞. vt ex cap. 4. conſtat) quæ æqualia non poſſunt eſſe numero 4. Ergo neque hoc modo quæſtio poſſibilis eſt.

3. *Diuidatur numerus 10. in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alteram producantur 26.* 3. quæſtio impoſſibilis.

PONATVR pro vna parte 1℞. eritq; altera 10—1℞. quæ partes inter ſe multiplicatæ faciunt 10℞—1ʓ. qui productus æqualis eſſe debet numero 26. Addito 1ʓ. vtrinque, fiunt 10℞. æquales 1ʓ+26: ablatiſque 26. vtrinque, erit æqualitas inter 1ʓ. & 10℞—26. Ex hoc numero, qui æqualis eſt 1ʓ. extrahemus radicem quadratam hoc modo, vt ſupra docuimus. Semiſſis radicum eſt 5. huius quadratum 25. ex quo auferri non poſſunt 26. vt vult ſignum —. Igitur dicemus, quæſtionem ſolui non poſſe.

4. *Inueniantur duo numeri, vt ex ductu vnius in alterum fiat numerus triplus ſummæ ipſorum.* 4. quæſtio impoſſibilis.

PONATVR vnus 1℞. & alter 2. vnitates. Ex 1℞ in 2. fit numerus 2℞. qui triplus eſſe debet ſummæ ipſorum, quæ eſt 1℞+2. Ergo ſumma hæc triplicata, nimirum 3℞+6. æqualis debet eſſe 2℞. quod falſum eſt. Impoſſibilis igitur eſt quæſtio propoſita, ſi alter numerorum conſtituatur 2. Si pro ſecundo numero poſitæ fuiſſent plures vnitates, quam in denominatore proportionis datæ continentur, nimirũ 4. vel 5. vel 6. &c. quæſtio ſolui poſſet. Nam poſito ſecundo numero 4. inueniretur 1℞. eſſe 12. atque ita duo numeri quæſiti eſſent 12. & 4. qui inter ſe multiplicati efficiunt 48. qui numerus triplus eſt ſummæ ipſorum, quæ eſt 16.

5. *Quæratur numerus, qui per 3. multiplicatus producat ipſius quadratum, & ſumma ex ipſo numero, & eius quadrato collecta ſit 7.* 5. quæſtio impoſſibilis.

PONAMVS numerum eſſe 1℞. quæ multiplicata per 3. facit 3℞. qui numerus æqualis debet eſſe quadrato ex 1℞. producto, nimirum 1ʓ. eritque vnius radicis pretium 3. qui numerus per 3. multiplicatus, hoc eſt, in ſeipſum, procreat eius quadratum 9. Sed quoniam hic quadratus cum ſua radice 3. conficit 12. non autem 7. dices quæſtionem eſſe impoſſibilem. quod etiam ex ipſis æquationibus conſtat. Nam 1℞. cum ſuo producto 3℞ facit 4℞. quæ æquales eſſe debent 7. atque ita 1℞. erit $\frac{7}{4}$. Et quia 1℞. cum ſuo quadrato, id eſt, cum 1ʓ. etiam æqualis debet eſſe numero 7. erit æquatio inter 1ʓ+1℞. & 7. hoc eſt, (ablata 1℞ vtrinque) inter 1ʓ. & 7—1℞. inuenieturq; 1℞. eſſe √ʓ $\frac{29}{5}$ — $\frac{1}{2}$. quæ à priori valde differt. Immo ſi tam 4℞ quam 1ʓ+1℞. æquales ſunt 7. erũt bis 7. id eſt, 14. æquales 1ʓ+5℞. hoc eſt, æquatio conſtituetur inter 1ʓ. & 14—5℞ eritq; 1℞ 2. quæ ab vtraque ſuperiori longe etiam differt. Denique ſi tam 4℞. quam 1ʓ+1℞. æquales ſunt 7. erit etiam æqualitas inter 4℞. & 1ʓ+1℞. ablataque vtrinque 1℞. erunt 3℞ æquales 1ʓ. Pretium ergo 1℞. erit 3. Quocirca cum tam variæ æſtimationes 1℞. inueniantur, quæſtio ſolui non poterit, præſertim cum per nullam radicum inuentarum quæſtioni ſatisfiat, niſi priori eius parti per radicem 3.

6. *Quæratur numerus, cuius quadratus cum numero 40. æqualis ſit 12. radicibus eiuſdem quadrati.* 6. quæſtio impoſſibilis.

PONATVR numerus eſſe 1℞. Eius quadratus erit 1ʓ. Igitur 1ʓ+40. æqualia ſunt 12℞. hoc eſt, 1ʓ, æqualis erit 12℞—40. Sumatur ſemiſſis numeri radicum, nimirum 6. Et quia ab huius ſemiſſis quadrato, id eſt, ex 36. numerus 40. detrahi non poteſt, erit quæſtio impoſſibilis.

7. IAM vero ſi quando accidat, æquationem inuentam eſſe inter duos numeros Coſſicos æquales, eiuſdemque denominationis, quæſtio ſolui poterit per quemuis numerum. 7. quæſtio poſſibilis quidẽ, ſed nugatoria.

Vt ſi

Quando quæſtio per quemuis numerum ſolui poſſit.

Vt ſi quæratur numerus, quo multiplicato per 2. & producto in ſeipſum ducto, faciat numerum æqualem ei, qui ex numero in ſeipſum ducto producitur, & ex producto in 4.

PONATVR numerus eſſe 1℞. Ex 1℞. in 2. fiunt 2℞. & ex 2℞ in ſe fiunt 4ʒ. Et quia 1℞ ducta in ſe gignit 1ʒ. & ex 1ʒ. in 4. fiunt 4ʒ inuenta erit æquatio inter 4ʒ. & 4ʒ. quæ nugatoria eſt & inepta. Quæſtio igitur exerceri poterit in omni numero. Nam V.g. ex 10. in 2. fiunt 20. & ex 20. in ſe fiunt 400. quantum videlicet fit ex 10. in ſe, & ex producto 100. in 4.

8 quæſtio poſſibilis, ſed nugatoria.

8. *Item numerus 10. diuidendus ſit in tales duas partes, vt numerus, qui fit ex vna parte in totum numerum, æqualis ſit quadrato eiuſdem partis, vna cum numero, qui ex eadem parte in alteram ducta procreatur.*

PONATVR prima pars eſſe 1℞. ideoq; altera 10—1℞. Et quia ex priori parte, id eſt, ex 1℞. in totum numerum 10. fiunt 10℞: Ex eadem autem parte in ſe fit 1ʒ. & ex 1℞ in 10—1℞ fiunt 10℞—1ʒ. quæ addita ad 1ʒ, fiunt 10℞. quia vt 1ʒ addatur ad —1ʒ. debet fieri ſubtractio, vt in additione dictum eſt. Igitur inuenta eſt æquatio inter 10℞. & 10℞. quæ ſimiliter nugatoria eſt: fierique poteſt, quod proponitur, in quolibet numero, quomodocunque in duas partes diſtributo, vt demonſtratum eſt ab Euclid. lib. 2. propoſ. 3. Quod ſi altera pars 10—1℞ ducatur in totum numerũ 10. fiunt 100—10℞. Si vero eadem pars in ſe ducatur, fiunt 100—20℞+1ʒ. & duæ partes 1℞. & 10—1℞ inter ſe multiplicatæ faciunt 10℞—1ʒ. quæ cum 100—20℞+1ʒ. faciũt 100—0℞. quæ æqualia eſſe debent 100—10℞. producto ſcilicet ſecundæ partis in 10. quæ æquatio nugatoria quoque eſt.

9. quæſtio nugatoria, quamuis poſſibilis.

9. *Sit rurſum diuidendus numerus 10. in tales duas partes, vt producti ex toto numero 10. in ipſas partes ſint ſimul æquales quadrato totius numeri.*

PONATVR vna pars 1℞. ideoque altera 10—1℞. Ex toto numero 10. in 1℞. & 10—1℞ fiunt 10℞. & 100—10℞. qui numeri ſimul efficiunt 100. vt ex regula additionis patet. Et quoniam ex 10. in ſe fiunt quoque 100. erit æquatio inter 100. & 100. quod eſt ineptum. Quæſtio ergo ſoluitur per quemcunque numerum in quaſcunque duas partes diuiſum, vt ab Eucl. lib. 2. propoſ. 2. oſtenſum eſt.

LIQVET igitur, ex ipſa operatione cognoſci poſſe, num propoſita quæſtio ſolui poſſit, nec ne; an vero ſit vana, ac nugatoria, quæ videlicet in omnem numerum conueniat.

DE SECVNDIS RADICIBVS.

CAPVT XV.

Cur excogitatæ ſint ſecundæ radices.

QVÆRVNTVR non raro duo, vel tres, aut etiam plures numeri ſub incerta proportione: idcirco poſtquam pro primo numero poſita eſt 1℞. non videtur commodum pro ſecundo numero ponere iterum 1℞: & pro tertio etiam 1℞. &c. quia cum 1℞ primo loco poſita diuerſum plerumque valorem habeat à radice ſecundo loco poſita, itemque à radice tertio loco poſita; facile eueniret, vt in operatione exempli radices inter ſe confunderentur, niſi diuerſis characteribus deſignentur. Quam ob rem excogitatæ ſunt radices ſecundæ, quas Cardanus Quantitates ſurdas, Petrus Nonius, & alij Quantitates ſimplices, aut abſolutas appellant, notantque hoc modo. 1q. 2q. &c. hoc eſt, vna quantitas, duæ quantitates, &c. Nos cum alijs appellabimus radices ſecundas, notabimusque hoc modo, 1A. hoc eſt, 1℞. ſecunda diſtincta ab ea, quæ primo loco poſita eſt. 1B, id eſt, 1℞ ſecunda diſtincta à duabus, quæ primo & ſecundo loco poſitæ ſunt. & ſic deinceps. Hac enim ratione facilius ſecundarum radicum algorithmus explicabitur.

IN numeratione quando numerus duo ſigna habet, intelligitur numerus cum priore ſigno ductus in vnitatem poſterioris ſigni. Vt 1℞A, ſignificat 1℞, ductam in 1A. & 3℞A, ſignificat 3℞. ductas in 1A. Sic 1ʒAʒ, indicat 1ʒ. ductum in 1Aʒ. &c.

Additio ſecundarum radicum.

ADDITIO vero perficitur, ſi numeri inter ſe addantur, & character idem ſecundæ radicis apponatur: quando videlicet ſecundæ radices ſunt eiuſdem generis. Vt ex 3A. & 4A, fiunt 7A, atque ex 3B, & 4B, fiunt 7B, &c. Quando vero ſecundæ radices non ſunt eiuſdem generis, fit additio per ſignum additorum +. Vt ex 3A, & 4B, fiunt 3A+4B. Item ex 3℞. & 4. A, fiunt 3℞+4A. &c.

Subtractio ſecundarũ radicum.

SVBTRACTIO quoque, quando ſecundæ radices ſunt eiuſdem generis, fit, ſi numerus à numero ſubtrahatur, & reliquo numero idem character ſecundæ radicis apponatur. Vt 3 A, ex 7 A, relinquunt 4A. & 3B, ex 7B, relinquunt 4B, &c. Quando autem ſecundæ radices ſunt diuerſæ, fit ſubtractio per ſignum ſubtractorum —. Vt 3A, ex 4B, relinquunt 4B—3A.

Multiplicatio ſecundarum radicum.

MVLTIPLICATIONES autem ita fiunt. Quando numerus radic.s primæ multiplicandus eſt cum numero radicis ſecundæ ſignatæ ſolum litera A, vel B, &c. multiplicantur numeri inter ſe, & eadem ſigna apponuntur. Vt ex 2℞. in 2A. fiunt 4℞A. id eſt, 4℞ multiplicatæ in 1A. Similiter ex 2A, in 2℞. fiunt 4A℞, hoc eſt, 4A, multiplicatæ in 1℞. Sic etiam ex 3ʒ in 4B, fiunt 12ʒB, id eſt, 12ʒ. multiplicati in 1B. &c. Sic etiam ex 1℞ in 1A, fit 1℞A, id eſt, 1℞ multiplicata in 1A. Et ex 1ʒ. in 1Aʒ. fit 1ʒAʒ. hoc eſt, 1ʒ. ductus in 1Aʒ.

QVANDO numerus abſolutus in numerum ſecundæ radicis ducitur, fit numerus ſecundæ radicis. Vt ex 6. in 3 C, fiunt 18 C. Et ex 7. in 4 B, fiunt 28 B, &c.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in numerum ſecundæ radicis diuerſæ literæ, ducitur numerus in numerum, productoque eædem literæ apponuntur. Vt ex 3 A, in 9 B, fiunt 27 AB, hoc eſt, 27 A, multiplicatæ in 1 B.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in numerũ ſecundæ radicis eiuſdem literæ, producitur character ʒ, præpoſita tamen eadem litera. Vt ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 Aʒ.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in ſe quadrate, vel cubice, &c. producitur character ʒ, vel ℭ, &c. præpoſita eadẽ litera. Vt 1 A, in ſe quadrate, facit 1 Aʒ. hoc eſt, 1. quadratum ſecundæ radicis. Rurſus ex 1℞A, in 1℞A, fit 1ʒAʒ. id eſt, 1ʒ primæ radicis ductus in 1ʒ. ſecundæ radicis. Item 3 B, in ſe quadrate faciunt 9Bʒ. Sic 3 B, in ſe cubice, faciunt 27 Bℭ.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in alium numerum eiuſdem radicis ſecundæ, quæ etiam habet characterem Coſſicum, intelligitur primus numerus habere etiam ſignum Coſſicum ℞. Vt ex 1 A, in 1 Aʒ fit 1 Aℭ. Et ex 3 B, in 4 Bℭ, fiunt 12 Bʒʒ.

QVANDO numerus Coſſicus ſimplex, abſque litera ſecundæ radicis, multiplicatur in numerum ſignatum litera, & ſigno Coſſico, ducitur numerus in numerum, & producto eadem ſigna apponuntur. Vt ex 2 ℭ. in 4 Aʒ. fiunt 8 ℭAʒ. hoc eſt, 8 ℭ multiplicati in 1 Aʒ. Item ex 1 ℭ in 1℞Aʒ. fit 1 ʒʒAʒ. id eſt, 1ʒʒ. ductus in 1Aʒ. Tantum quoque fit ex 1 ʒA, in ſe quadratè. Nam ex 1 ʒ. in ſe fit 1 ʒʒ. & ex 1 A, in ſe fit 1 Aʒ.

QVANDO numerus poſt literam ſecundæ radicis ſignum Coſſicum gerens ducitur in numerum, qui poſt eandem literam ſecundæ radicis gerit quoque ſignum Coſſicum, producitur numerus cum charactere Coſſico, quem exponentes characterum dant, cui præponenda inſuper eſt litera eadem ſecundæ radicis. Vt ex 2 Aʒ, in 5 Aℭ fiunt 10 Aß. Item ex 3 Bʒ. in 4 Bℭ. fiunt 12 Bß.

QVANDO numerus poſt literam ſecundæ radicis characterem Coſſicum gerens ducitur in numerum, qui poſt characterem Coſſicum literam quoque ſecundæ radicis habet, producitur numerus cum poſteriore charactere Coſſico, quem inſequitur litera ſecundæ radicis, deinde apponitur character Coſſicus productus ex priore charactere Coſſico in literam ſecundæ radicis, ac ſi haberet ſignum hoc ℞. Vt ex 1Aℭ, in 1ʒA, fit 1 ʒAʒʒ. Tantundem quoque fit ex 1℞Aʒ. in ſe quadratè. Item ex 3 Aʒ, in 4 ℭA, fiunt 12ℭAℭ. id eſt, 12 ℭ multiplicati in 1 Aℭ.

In diuiſione ſecundarum radicum, fit prius reductio ſignorum Coſſicorum, per ſubtractionem ſimilium ſignorum. Vt ex diuiſione 8ℭAʒ, per 4 Aʒ, reductis ſignis, diuiduntur 8 ℭ per 4. fitque Quotiens 2 ℭ. Sic 8 ℭAʒ, per 4 ℭ, fit Quotiens 2 Aʒ. *Diuiſio ſecundarum radicum.*

QVANDO autem diuiditur numerus ℞, per numerum ſecundarum radicum, fit minutia in Quotiẽte. Vt 2℞ per 4 A, fit $\frac{2\,℞}{4\,A}$.

IN extractione radicum, eruitur radix ex numero, ſi habet, eique apponitur litera ſecundæ radicis, reiecto charactere Coſſico. Vt radix quadrata numeri 25 Aʒ. eſt 5 A. Item radix cubica numeri 27 Aℭ. eſt 3 A. Et radix zenſizenſica numeri 16Dʒʒ. eſt 2D. *Extractio radicũ ex ſecundis radicibus.*

QVANDO vero numerus non habet talem radicem, vel character Coſſicus non eſt eiuſdem appellationis cum radice extrahenda, præponitur toti numero cum litera, & charactere, ſignum radicale. Vt radix cubica numeri 3Aʒ. eſt √ℭ3Aʒ. Item radix quadrata numeri 4Aℭ. eſt √ʒ4Aℭ.

PROBANTVR prædictæ multiplicationes, diuiſioneſque per progreſſiones Geometricas ab 1. incipientes. Claritatis autem gratia progreſſionem duplarum proportionum aſcribemus primis radicibus, & progreſſionem triplarum radicibus ſecundis. cuiuſmodi ſunt hæ. *Examen operationũ radicum ſecundarũ.*

N	℞	ʒ	ℭ	ʒʒ	ß	ʒℭ	Bß	ʒʒʒ	ℭℭ	ʒß	&c.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	&c.
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	&c.

Itaque vt videas, ex 2℞ in 2 A, fieri 4℞A, id eſt, 4℞. ductas in 1A. reſolutæ 2℞. faciunt 4 & 2 A, faciunt 6. at 4. in 6. efficiunt 24. quantum videlicet faciunt 4℞, id eſt, 8 ductæ in 1A, id eſt, in 3.

DEINDE ex 2A, in 2℞ diximus fieri 4A℞, hoc eſt, 4 A, ductas in 1℞. Et quia 2 A, ſunt 6. & 2℞, ſunt 4. fiunt autem 24. ex 6. in 4. quantum nimirum faciunt 4 A, id eſt 12. in 1. ℞, videlicet in 2.

PRÆTEREA ex 1. ℞ in 1 A, producitur 1℞A, quia 1℞ eſt 2. & 1 A eſt 3. fiunt autem 6. ex 2. in 3. quantum nimirum fit ex 1℞ id eſt, ex 2. in 1 A, id eſt in 3.

SIC etiam ex 1ʒ in Aʒ, fit 1ʒAʒ, nimirum 1ʒ, ductus in 1Aʒ. Et quia 1ʒ eſt 4. & 1 Aʒ, eſt 9. fiunt autem 36. ex 4. in 9. quantum nimirum fit ex 1ʒ. id eſt. ex 4. in 1Aʒ, id eſt in 9.

RVRSVS ex 3 ʒ. in 4 B, facti ſunt 12 ʒB, hoc eſt, 12 ʒ. ducti in 1 B. Nam 3 ʒ. ſunt 12. & 4B, ſunt etiam 12. fiunt autem 144. ex 12. in 12. quantum nimirum fit ex 12 ʒ, id eſt, ex 48. in 1 B. id eſt, in 3.

ITEM ex 6. in 3 C. fiunt 18 C, hoc eſt, ex 6. in 9. fiunt 54. hoc eſt, 18 C. Sic ex 7. in 4 B. factæ ſunt 28B, nimirum 84. quantum nimirum fit ex 7. in 4 B, id eſt, in 12.

EX 3 A, in 9 B, procreatæ ſunt 27 AB, id eſt, 27 A, multiplicatæ in 1 B. Nam 3 A, ſunt 9. & 9 B, ſunt 27. Fiũt autem 243. ex 9. in 27. quantum nimirum fit ex 27 A, id eſt, ex 81. in 1 B, id eſt, in 3.

ITEM ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 Aʒ. hoc eſt, 12 ʒ. ſecundæ radicis. Nam 3A, ſunt 9. & 4A, ſunt 12. Fiunt autem 108. ex 9. in 12. quantum nimirum faciunt 12ʒ. ſecundæ radicis.

PRÆTEREA ex 1 A, in ſe quadrate fit 1 Aʒ. hoc eſt, 1ʒ ſecundæ radicis. Item 3 B, in ſe quadrate faciunt 9Bʒ, id eſt, 9ʒ. ſecundæ radicis. Nam 3B, ſunt 9. at ex 9. in 9. fiunt 81. nimirum 9ʒ. ſecundæ radicis. Item ex 1℞A, in 1℞A, fit 1ʒAʒ, id eſt, 1ʒ. primæ radicis ductus in 1ʒ. ſecundæ radicis. Nam 1℞A, ſignificat 1℞. primam ductam in 1. radicem ſecundam, id eſt, 2. ducta in 3. hoc eſt, 6. Fit autem ex 6. in 6. numerus 36. quantum

nimirum fit ex 1ℨ. primæ radicis, id eſt, ex 4. in 1. quadratum ſecundæ radicis, nimirum in 9. Sic 3B, in ſe cubice faciunt 27 Bℭ, id eſt, 27ℭ ſecundæ radicis. Quia 3B, ſunt 9. & 9. in ſe cubice faciunt 729. quantum videlicet faciunt 27 ℭ ſecundæ radicis.

POST hæc, ex 1A, in 1Aℨ, fit 1Aℭ, hoc eſt, cubus ſecundæ radicis, nimirum 27. Nam 1A, valet 3, & 1ℨ. ſecundæ radicis 9. Liquet autem ex 3. in 9. gigni 27.

ITA quoque ex 3B, in 4Bℭ. fiunt 12Bℨℨ. hoc eſt, 12ℨℨ. ſecundæ radicis. Nam 3B, ſunt 9. & 4ℭ ſecundæ radicis 108. Fiunt autem 972. ex 9. in 108. quantum videlicet faciunt 12ℨℨ. ſecundæ radicis.

AMPLIVS ex 2ℭ. in 4Aℨ. fiunt 8ℭAℨ, hoc eſt, 8ℭ multiplicati in 1ℨ ſecundæ radicis. Nam 2ℭ ſunt 16. & 4ℨ ſecundæ radicis 36. Fiunt autem 576. ex 16. in 36. quantum nimirum faciunt 8ℭ, id eſt, 64. multiplicati in 1ℨ. ſecundæ radicis, videlicet in 9. Item ex 1ℭ. in 1℞Aℨ fit 1ℨℨAℨ. id eſt, 1ℨℨ. ductus in 1ℨ ſecundæ radicis. Nam 1ℭ. eſt 8. & 1℞Aℨ. id eſt, 1℞ ducta in 1ℨ ſecundæ radicis, eſt 18: Fiunt autem 144. ex 8. in 18. quantum ſcilicet facit 1ℨℨ, nimirum 16. ductus in 1ℨ. ſecundæ radicis, id eſt, in 9.

ITEM ex 2Aℨ, in 5Aℭ. fiunt 10Aß. Nam 2ℨ. ſecundæ radicis ſunt 18. & 5ℭ ſecundæ radicis ſunt 135. Fiunt autem 2430. ex 18. in 135. quantum ſcilicet faciunt 10ß. ſecundæ radicis. Item ex 3Bℨ. in 4Bℭ, fiunt 12Bß. Nam 3ℨ ſecundæ radicis faciunt 27. & 4ℭ ſecundæ radicis faciunt 108. Fiunt autem 2916. ex 27. in 108. ac tantundem faciunt 12ß. ſecundæ radicis.

POSTREMO ex 1Aℭ. in 1ℨA, fit 1ℨAℨℨ. hoc eſt, 1ℨ. ductus in 1ℨℨ. ſecundæ radicis. Nam 1ℭ ſecundæ radicis eſt 27. & 1ℨ eſt 4. Fiunt autem 108. ex 27. in 4. & ex 108. in 1℞ ſecundam, id eſt, in 3 fiunt 324. ac tantundem fit ex 1ℨ. in 1ℨℨ. ſecundæ radicis, hoc eſt, ex 4. in 81. Quod autem ex 1℞Aℨ, in ſe quadrate fiat quoque 1ℨAℨℨ ſic perſpicuum fiet. Numerus 1℞Aℨ. ſignificat 1℞ primam, id eſt, 2. ductam in 1ℨ. ſecundæ radicis, id eſt, in 9. quæ multiplicatio facit 18. At ex 18. in 18. fit numerus 324. qui æquiualet numero 1ℨAℨℨ. hoc eſt, numero producto ex 1ℨ. id eſt, ex 4. in 1ℨℨ. ſecundæ radicis, hoc eſt, in 81. Similiter ex 3Aℨ, in 4ℭA, fiunt 12ℭAℭ. Nam 3ℨ. ſecundæ radicis ſunt 27. & 4ℭA, (id eſt, 4ℭ ducti in 1A, vel in radicem ſecundam, hoc eſt, ex 32. in 3.) faciunt 96. Fiunt autem 2592. ex 27. in 96. Ac tantundem faciunt 12ℭAℭ. hoc eſt, 12ℭ multiplicati in 1ℭ ſecundæ radicis, nimirum ex 96. in 27.

IAM vero ex diuiſione 8ℭAℨ. per 4Aℨ, produci Quotientem 2ℭ. eodem modo probabimus. Nam 8ℭAℨ. (id eſt, 8ℭ multiplicati per 1Aℨ, hoc eſt, 64. per 9.) faciunt 576. qui numerus diuiſus per 4ℨ ſecundæ radicis, nimirum per 36. facit Quotientem 16. hoc eſt, 2ℭ. Item ex diuiſione 8ℭAℨ. per 4ℭ. gigni Quotientem 2Aℨ. perſpicuum etiam eſt. Nam 8ℭAℨ (id eſt, 8ℭ. ducti in 1Aℨ, videlicet 64. in 9.) ſunt 576. qui numerus diuiſus per 4ℭ, id eſt, per 32. facit Quotientem 18. nimirum 2ℨ. ſecundæ radicis.

PARI ratione, numeri 25Aℨ. radicem quadratam eſſe 5A. manifeſtum quoque eſt. Nam 5A, ſunt 15. at ex 15. in 15. fit numerus 225. cui æquales ſunt 25ℨ ſecundæ radicis. Non aliter oſtendemus, 3A, eſſe radicem cubicam numeri 27Aℭ. Nam 3A, ſunt 9. at ex 9. in ſe cubice fiunt 729. videlicet 27ℭ ſecundæ radicis. Ita quoque numeri 16Dℨℨ. radix Zenſizenſica erit 2D. quia 2D, ſunt 6. & ex 6. in ſe Zenſizenſice fiunt 1296. nimirum 16ℨℨ ſecundæ radicis.

LIBVIT omnes has operationes ſecundarum radicum examinare per progreſſiones Geometricas, vt earum veritas omnibus conſtaret: quia de illis fortaſſe non nemo dubitare poſſet, cum earum ratio ſit paulo obſcurior, quam illa operationum numerorum Coſſicorum. Vſus porro ſecundarum radicum explicabitur in ænigmatibus per regulam Algebræ diſſoluendis.

DE NVMERIS IRRATIONALIBUS, ſiue ſurdis.

CAPVT XVI.

Irrationales numeri, ſiue ſurdi, qui.

NVMERI irrationales, ſiue ſurdi ſunt radices numerorum, quæ exprimi non poſſunt numeris, ac proinde neque audiri, ob quam cauſam radices ſurdæ ſunt appellatæ, ſignanturque hoc modo. √ℨ. √ℭ. √ℨℨ. √ß. √ℨℭ. &c. vt ad finem cap. 3. declarauimus. Vt √ℨ10. hoc eſt, radix quadrati numeri 10. dicitur ſurda, vel irrationalis, quia nullus numerus dari poteſt, ſiue integer ſit, ſiue integer cum fracto, qui in ſe quadrate multiplicatus producat 10. De integro manifeſtum eſt. Nam 3. in ſe ductus producit 9. numerum minorem quam 10. At 4. in ſe multiplicatus gignit 16. numerum maiorem, quam 10. atque idcirco neque 3. neque 4. ideoque neque vllus numerus minor quam 3. neque maior quam 4. radix quadrata eſſe poteſt numeri 10. De integro cum fracto res etiam clara eſt. Radix enim illa deberet eſſe inter 3. & 4. Sed quamuis inter 3. & 4. infiniti ſint fracti, qui cum 3. conſtituant integrum cum fractis, vt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{5}$. $3\frac{5}{7}$ $3\frac{8}{11}$. &c. nullus tamen eorum in ſe ductus quadrate producere poteſt 10. numerum integrum, vt in Lemmate ad finem defin. 8. lib. 5. Euclid. demonſtrauimus. Sic etiam √ℭ10. irrationalis eſt, & √ℨℭ100. &c.

DE hiſce numeris nunc agendum eſt, vt plurimæ quæſtiones, in quibus numeri irrationales interueniunt, queant explicari. Res quidem eſt non paucis difficultatibus inuoluta, ſed quæ tamen plane intelligatur, ſi modo vehemens, ardensque ſtudium adhibeatur. Quod ſi quis ad hanc rem perfecte intelligendam minus idoneus reperiatur, is ne deſperet omnino: quippe cum ſine hac cognitione innumerabiles pene quæſtiones per Algebræ regulam enodari queant. Quocirca, omiſſa ad breue tempus tractatione hac numerorum irrationaliũ, quæ 13. capitibus continetur, conferre ſe poterit ad cap. 29. & 30. vbi innumerabilia pene ænigmata ſcitu iucundiſſima, ſine cognitione numerorũ irrationalium, enodata inueniet. Deinde poſtquam ſe aliquamdiu in Algebræ quæſtionibus exercuerit, regredi poterit ad tractationem hanc numerorum irrationalium perdiſcendam.

SOLET ante omnia à nonnullis diſputari, an numeri irrationales vere dicendi ſint numeri, nec ne. Cum enim neque integri numeri ſint, neque fracti, vt paulo ante diximus, neque certam proportionem, quæ numeris exprimi poſſit, habeant ad integros numeros, aut fractos, non videntur eſſe numeri dicendi. Quia tamen ſub regulam cadunt, cenſendi erunt aliquo modo eſſe numeri. Nam √ʒ10. in ſe multiplicata gignit numerum 10. ſicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item √ʒ3. in √ʒ12. procreat √ʒ36 hoc eſt, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationaliũ, de quo mox agemus, conſtabit. Habent autem numeri irrationales cum numeris fractis quandam affinitatem. Quemadmodum enim inter quoſuis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti. *Vtrum radices ſurdæ ſint numeri, nec ne.*

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{6}$. $2\frac{5}{6}$. &c.

ita quoque inter quoſlibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Vt inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

√ʒ5. √ʒ6. √ʒ7. √ʒ8. √ce9. √ce10. √ce11. √ce12. √ce13. √ce14. √ce15. √ce16. √ce17. √ce18. √ce19. √ce20. √ce21. √ce22. √ce23. √ce24. √ce25. √ce26. √ʒʒ17. √ʒʒ18. √ʒʒ19. √ʒʒ20. √ʒʒ21. √ʒʒ22. √ʒʒ23. &c.

Tam enim ſinguli illi fracti, quam hi ſurdi ſinguli maiores ſunt quam 2. minores autem quam 3. vt liquet.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum ſurdarum. Quædam enim ſunt ſimplices, vt √ʒ. alicuius numeri non quadrati. √ce alicuius numeri non cubi. √ʒʒ numeri alicuius non zenſizenſi. √ß alicuius numeri non ſurdeſolidi, atque ita de alijs radicibus numerorũ progreſſionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum radices numeris exprimi non poſſunt, atque has radices ſimplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap. 21. dicemus. Aliæ radices ſurdæ ſunt compoſitæ per interpoſita ſigna +. & —. quarum duo item genera ab auctoribus deſcribuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus ſummam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribusue, atque ex numero aliquo, vel ex numero Coſſico, aut pluribus collectã. Vt cum per hunc numerum √ʒ9+√ʒ4. intelligimus 5. vnitates, ſummam videlicet ex 3. radice zenſica numeri 9. & ex 2. radice zenſica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ æquiualet numero 5. Sic etiam Ligata radix erit √ʒ7+√ʒ4+3. quæ æquiualebit huic √ʒ7+5. Significamus enim ad √ʒ7. additum eſſe numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, √ʒ3+2℞. Denotamus enim 2℞ eſſe additas ad √ʒ3. Denique Ligata radix erit √ʒ49—√ce27. Item √ce100—√ʒ9. In priori namque intelligimus ex √ʒ49. hoc eſt, ex 7. ablatam eſſe √ce27. id eſt, 3. atque ita pretium eius erit 4. In poſteriori autem volumus ex √ce100. ſubtrahi √ʒ9. nimirum 3. Sed nos haſce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irrationales compoſitos, vel diminutos. Immo, vt breuitati conſulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerumque compoſitos. Alterum genus compoſitarum radicum complectitur radices ſurdas, quæ Vniuerſales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compoſiti, diminutiue. Vt huius numeri compoſiti, 22+√ʒ9. radix Vniuerſalis eſt 5. Eſt enim ſenſus, vt ad 22. addatur radix zenſica 9. quæ eſt 3. & aggregati 25. radix ſumatur, quæ eſt 5. Eodem pacto, ſi inuertantur particulæ numeri eiuſdem, vt fiat numerus √ʒ9+22. erit eius radix Vniuerſalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuerſales vocabimus ſimpliciter radices numerorum irrationalium compoſitorum, aut diminutorum, ac propterea huiuſmodi numeris præfigemus ſignum radicale √ʒ. vel √ce atque vt ſignificemus, illud ad totum numerum compoſitum referri, includemus numerum compoſitum inter duas parentheſes, hoc modo. √ʒ(22+√ʒ9.) vel ſic, quod idem eſt, √ʒ(√ʒ9+22.) Alia exempla huiuſmodi radicum ſume hæc. √ʒ(√ʒ5+1℞.) Item √ʒ(4ʒ+1℞.) Item √ʒ(√ʒ9+√ʒ4)+√ʒ(11+√ʒ25.) Eſt enim ſenſus huius poſterioris radicis, vt ſumatur ſumma conflata ex √ʒ9 & √ʒ4. nimirum ex 3. & 2. quæ eſt 5. & ad hanc ſummam adiiciatur radix aggregati ex 11. & √ʒ25, hoc eſt, aggregati 16. quæ eſt 4. vt tota ſumma fiat 9. eiuſque radix 3. Quod ſi inuertantur duo illi numeri compoſiti hoc modo. √ʒ(11+√ʒ25.)+√ʒ(√ʒ9+√ʒ4) variabitur ſenſus, quia ſignum radicale √ʒ. in principio poſitum videtur referendum eſſe ad totum illud, quod ſequitur: ita vt 11. ſumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur √ʒ9. & √ʒ4. nimirum 5. vt fiat tota ſumma 21. eiuſque radix √ʒ21. quæ multum à priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri √ʒ(7+√ʒ48) radix erit 2+√ʒ3. Nam hic numerus in ſe ductus producit 7+√ʒ48. vt ex ſequentibus patebit. Eſt & aliud genus radicis apud ſcriptores nonnullos, quam Diſtinctam dicunt, in qua videlicet particulæ ſeorſum accipiuntur, nõ autem earũ ſumma. Vt hæc radix, √ʒ16+√ʒ9. quando particulæ per ſe ſumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. quia ſic eſſet radix Ligata, quam nos ſimpliciter numerum irrationalem compoſitum nominauimus, dicitur radix Diſtincta: & multum differt à Ligata. Nam ſi accipiatur, tanquam Ligata, & in ſe ducatur, fiet numerus 49. At vt Diſtincta, fient numeri 16. & 9. qui ſimul efficiunt 25. duntaxat. Verum propriis in locis declarabimus, quiſnam ſenſus ſit harum radicum. Varie enim hac de re auctores loquuntur. Et de eiſdem plura inuenies in cap. 24.

Duo genera radicũ ſurdarum, ſimplex, & compoſita.

Numeri mediales qui.

Radix ligata quæ.

Numerus irrationalis compoſitus, vel diminutus qui.

Radix Vniuerſalis, quæ.

Radix totius numeri compoſiti, diminutiue, quæ.

Radix Diſtincta, quæ.

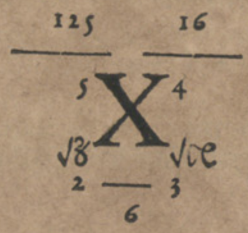
DE REDVCTIONE RADICVM SIMplicium ad eandem denominationem.

CAPVT XVII.

VT radices ſurdæ ſimplices inter ſe poſſint multiplicari, ac diuidi, neceſſe eſt illas, ſi diuerſæ ſint denominationis, ad eandem denominationem reducere. quæ reductio eodem fere modo fit, quo minutiæ diuerſorum denominatorum ad eundem denominatorem reuocantur. Poſitis enim ſignis radicalibus ſub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi ſunt ipſi numeri in ſigna radicalia per crucem, vt noui numeri procreentur: Deinde ſigna ipſa inter ſe addenda, hoc eſt, eorum

Qua ratione diuerſæ radices ad eandẽ denominationem reducantur.

eorum exponentes inter ſe multiplicandi quoque, vt ſignum commune, vel exponens ſigni communis producatur. V.g. hæ duæ radices √ℨ5. & √ℭ4. ita ad idem ſignum radicale reuocabuntur. Poſitis numeris, ac ſignis vt dictum eſt, & figura indicat, multiplicandus eſt numerus 5. cubice, propter ſignum ℭ, vt fiat nouus numerus 125. At numerus 4. zenſice propter ſignum ℨ, vt gignatur nouus numerus 16. Deinde addendum ſignum ℨ. ad ℭ, vt fiat ſignum ℨℭ. cuius nimirum exponens eſt 6. procreatus ex ductu 2. exponentis ℨ in 3. exponentem ℭ, vt cap. 2. docuimus. quod ſignum productum ℨℭ, vtrique numero prius producto præfigendum eſt: ita vt √ℨ5. & √ℭ4. reducta ſint ad √ℨℭ 125. & √ℨℭ 16. Quo facto, erit √ℨℭ125. æqualis √ℨ5. & √ℨℭ16. æqualis √ℭ4. Nam √ℨ5. eſt √ℨℭ numeri 125. propterea quod √ℨ5. in ſe quadrate efficit 5. & 5. in ſe cubice facit 125. Eadem ratione √ℭ4. eſt √ℨℭ numeri 16. propterea quod √ℭ4. in ſe cubice facit 4. & 4. in ſe quadrate facit 16. quod etiam inde patet. Quoniam √ℭ, multiplicans √ℨ. & 5. produxit √ℨℭ. & 125.[a] erit eadem proportio √ℨℭ, ad 125. quæ √ℨ, ad 5. Sic quoque, cum √ℨ, multiplicans √ℭ. & 4. faciat √ℨℭ, & 16. erit eadem proportio √ℨℭ, ad 16. quæ √ℭ. ad 4. ac proinde √ℨ5. æqualis erit √ℨℭ 125. & √ℭ4. æqualis √ℨℭ 16.



[a] 17. ſept.

Demōſtratio reductionis.

VERVM prædicto modo recte reduci radices ad eandem denominationem, hoc eſt, in dato exemplo, √ℨ5. eſſe √ℨℭ 125. & √ℭ4. æquiualere √ℨℭ 16. ita quoque Geometrice oſtendemus.

	C. 2.				F. 3.		
	A	B	G		D	E	H.
1.	√ℨ5.	5.	125	1.	√ℭ4.	4.	16.

K. 6.

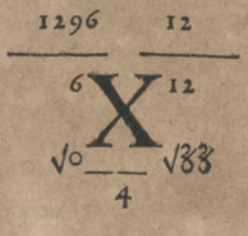
Sit A, radix Zenſica numeri B, cuius radicis exponens ſit C. Item D, ſit radix cubica numeri E, cuius exponens ſit F. Ducatur B, quadratus huius numeri √ℨ 5. in ſe cubice, propter exponentem F, vel ſignum ℭ. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus 125. ita vt B, ſit √ℭ, numeri producti 125. cuius exponens F. Item ducatur E, cubus huius numeri √ℭ4. in ſe quadrate, propter ſignum ℨ, vel exponentem C, vt fiat numerus 16. ita vt E, ſit √ℨ numeri producti 16. cuius exponens C. Poſtremo ducatur exponens C, in exponentem F, fiatque numerus K. Dico A, eſſe √ℨℭ numeri G, nimirum à 6. denominatam. Et D, √ℨℭ eſſe numeri H, ab eodem numero K, denominatam. Cum enim A, ſit radix ipſius B, denominata à C, erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot Vnitates ſunt in C, nimirum duæ, vt cap. 2. explicatum eſt, & hic perſpicuum eſt, 1. √ℨ5. 5. Item quia B, radix eſt ipſius G, denominata ab F, erunt eandem ob cauſam inter G, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem, quot ſunt vnitates in F, nimirum tres, vt hic etiam patet. 1. 5. 25. 125. hoc eſt, inter G, & B, erunt duæ proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem ſunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem ſint duæ proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt ſex huiuſmodi proportiones inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates ſunt in K, qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportiones inter G. & vnitatem, hoc eſt, ex C, in F. ac proinde G, erit zenſicubus, cuius exponens eſt 6. hoc eſt, A, erit √ℨℭ. numeri G. Non aliter demonſtrabimus, D, eſſe √ℨℭ. numeri H. Eademque ratio eſt de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

	C. 3.				F. 4.		
	A	B	G		D	E	H
1.	2.	8.	4096	1	3.	81.	531441

K. 12.

A, eſt √ℭ. numeri B, denominata à C. At vero D, eſt √ℨℨ, numeri E, denominata ab F. Ex B, in ſe zenſizenſice, propter exponentem F, fiat G, ita vt B. ſit √ℨℨ. numeri 4096. Item ex E, in ſe cubice, propter exponentem C, fiat H, ita vt E, ſit √ℭ. numeri H. Ac tandem ex C, in F, fiat K. Dico A, eſſe √ℨℨℭ. numeri G, denominatam à K, id eſt, à numero 12. Et D, eſſe √ℨℨℭ. numeri H, denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A, ſit radix ipſius B, denominata à C; erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates ſunt in C, nimirum tres, vt hic patet, 1. 2. 4. 8. Item quia B, radix eſt ipſius G, denominata ab F; erunt tot proportiones inter G, & vnitatem, quarum quælibet æqualis eſt proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates ſunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1. 8. 64. 512. 4096. hoc eſt, inter G, & B, erunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem ſunt quatuor proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem ſint tres proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erunt inter G, & vnitatem duodecim proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem: quot videlicet ſunt vnitates in numero K, nimirum 12. qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportiones inter G. & vnitatem, hoc eſt, ex C, in F: ac proinde G, erit ℨℨℭ, cuius exponens eſt 12. id eſt, A, erit √ℨℨℭ. numeri G. Eademque ratione D, erit √ℨℨℭ numeri H.

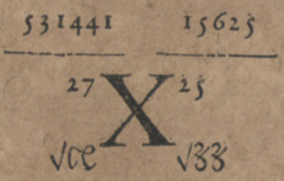
Quo pacto numerus abſolutus, & radix reducātur ad eandem denominationem.



SINT rurſus reuocandi duo numeri 6. id eſt, √o6. (quod exponens numeri abſoluti ſit o.) & √ℨℨ 12. Ducantur 6. in ſe zenſizenſice, vt fiat 1296. Sed 12. ducenda non ſunt in √o. propter exponentem o. neq; 4. exponens ℨℨ. in o, eandem ob cauſam. Quare 6. & √ℨℨ 12. reducentur ad √ℨℨ 1296. & √ℨℨ12. Atque ita, quando proponitur numerus abſolutus, & radix aliqua, multiplicandus eſt tantummodo numerus abſolutus in ſe, prout exigit character radicis. Vt in proximo exemplo numerus abſolutus 6. ductus eſt in ſe zenſizenſice, factaque eſt reductio ad √ℨℨ 1296. & √ℨℨ12.

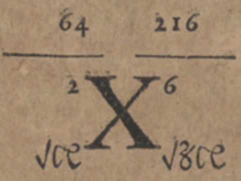
COM-

COMPENDIOSE interdum fieri poſſunt huiuſmodi reductiones, per abiectionem ſigni radicalis, quando nimirum vterque numerus habet radicem, quam ſignum radicale indicat. Tunc enim extrahitur illa radix, ſignumque eius radicale deletur. Vt ſi duæ hæ radices, √ce27. & √ʒʒ25. reuocandæ ſint ad eandem denominationem, extraho ex 25. radicem zenſicam 5. cui præpono reliquum ſignum ʒ, hoc modo. √ʒ5. Deinde ex 27. extraho radicem cubicam 3. quam multiplico zenſice, vt fiat √ʒ9. Erunt ergo datæ duæ radices reductæ ad has √ʒ9. & √ʒ5. Si prius extrahetur radix cubica ex 27. nimirum 3. deleto ſigno √ce, remanet numerus abſolutus 3. Extracta deinde radice zenſica ex 25. quæ eſt 5. præpono ei reliquum ſignum ʒ. hoc modo. √ʒ5. Quia vero prius inuentus eſt numerus abſolutus 3. ducendus eſt in ſe zenſice, vt fiat √ʒ9. atque ita rurſus facta eſt reductio ad √ʒ9. & √ʒ5. vt prius. Sine compendio reducerentur ad has duas, √ʒʒce531441. & √ʒʒce 15625. quæ tandem reducentur ad √ʒ9. & √ʒ5. hoc modo. Extraho ex 531441. radicem cubicam 81. & ex hac radicem zenſizenſicam 3. cui nullum ſignum radicale præpono, quia numerus habuit √ʒʒce. Deinde ex 15625. eruo radicem cubicam 25. & ex hac radicem zenſicam 5. cui præfigo ſignum ʒ. quod reliquum eſt, hoc modo √ʒ5. quia numerus 5. non habet √ʒ. Quoniam vero prius inuentus eſt numerus abſolutus 3. ducatur 3. in ſe zenſice, vt fiat √ʒ9. atque ita reductio facta erit ad √ʒ9. & √ʒ5. vt prius. Sic etiam ſi reducendę ſint √ʒß1024. & √ʒce216. Extraho ex 1024. radicem ſurdeſolidam 4. deletoque charactere ß. manet √ʒ4. Extracta autem radice zenſica ex 4. habebimus 2. Item ex 216. eruo radicem cubicam 6. cui præpono ſignum ʒ. Sed quia prius habuimus numerum abſolutum 2. ducemus 2. in ſe zenſice, vt fiat √ʒ4. Erunt igitur dictę radices reductę ad √ʒ4. & √ʒ6. Atque hoc modo fit compendium per abiectionem alicuius ſigni radicalis.



Compendium reductionis.

NONNVNQVAM fieri etiam poteſt compendium per aſſumptionem alicuius ſigni radicalis. Vt ſi reducendę ſint √ce2 & √ʒce6. duco 2. in ſe zenſice, propter ſignum ʒ. quod præter ce reperitur in altera radice, facioque 4. cui prępono ʒ. eritq; facta reductio ad √ʒce4. & √ʒce6. Sine compendio fieret reductio, vt hic vides, ad √ʒcece64. & √ʒcece 216. Et ſi ex his numeris eruantur radices cubicæ 4. & 6. deleanturque ſigna ce. ſingula ex ſingulis, facta erit reductio ad √ʒce4. & √ʒce6. vt prius. Sic etiam reducentur √ce 2. & √ʒce 8. ad √ʒce4. & √ʒce8. ſi nimirum 2. ducatur in ſe zenſice, & producto addatur idem ſignum radicale ce, præpoſito inſuper ſigno ʒ.



DENIQVE vt alia adhuc exempla ob oculos ponam, quotieſcunque in vtraque radice idem character reperitur, reducentur illæ radices facile ad eandem denominationem, ſi numerus minoris denominationis multiplicetur in ſe ſecundum exigentiam alterius characteris, qui in maiore denominatione reperitur, & producto addatur character ille, ſecundum quem facta eſt multiplicatio. Vt √ʒʒ9. & √ʒ4. reducentur ad √ʒʒ9. & √ʒʒ16. ſi nimirum numerus 4. minoris denominationis ducatur in ſe zenſice, propter characterem ʒ. qui in maiore denominatione pręter ʒ. reperitur.

Regula reductionis quarundā radicum facilis.

ITEM √ʒce8. & √ʒ9. reducentur ad √ʒce8. & √ʒce729. ſi nimirum numerus 9. minoris denominationis ducatur in ſe cubice, propter characterem ce, qui præter ʒ. in maiore denominatione continetur.

SIC etiam √ʒʒce20. & √ʒ10. reducentur ad √ʒʒce20. & √ʒʒce1000000. ſi nimirum numerus 10. minoris denominationis ducatur in ſe zenſicubice, propter characterem √ce. qui præter ʒ. reperitur in maiore denominatione: hoc eſt, vel prius in ſe zenſice, & productus 100. in ſe cubice: vel prius in ſe cubice, & productus 1000. in ſe zenſice. Vtroque enim modo producitur numerus 1000000.

ITA quoque √ʒce30. & √ce15. reducentur ad √ʒce30. & √ʒce225. ſi videlicet numerus 15. minoris denominationis ducatur in ſe zenſice, & producto 225. præter characterem ce. apponatur quoque character ʒ. & ſic de alijs.

ITAQVE maior character ſemper manet intactus, & ſolum minor mutatur, aſſumendo alium characterem pręter illum, quem habet; characterem inquam, ſecundum cuius exigentiam multiplicatus fuit numerus minoris denominationis, & qui in maiore denominatione reperitur vltra minoris denominationis characterem.

DE MVLTIPLICATIONE AC DIVISIOne radicum ſimplicium.

CAPVT XVIII.

VT doctrinę ordo ſeruetur, agendum erit de multiplicatione diuiſioneque radicum ſimplicium ante additionem, ſubtractionemque, quia ſine multiplicatione additio, ſubtractioq; radicum abſolui non poteſt. Quando ergo duæ radices multiplicandæ, aut diuidendæ ſunt eiuſdem generis, multiplicantur earum numeri inter ſe, aut diuiduntur, & producto numero idem ſignum radicale præponitur.

Multiplicatio, ac diuiſio radicum ſimpliciū, quo pacto fiat.

Vt ex ductu √ʒ7. in √ʒ10. fit √ʒ70.
Ex √ʒ3. in √ʒ12. fit √ʒ36. id eſt, 6.
Ex √ʒ2½. in √ʒ8. fit √ʒ18.
Ex √ce24. in √ce10. fit √ce240.
Ex √ce4. in √ce16. fit √ce64. hoc eſt, 4.

Ex √ȝȝ9. in √ȝȝ8. fit √ȝȝ72.
Ex √ß4. in √ß8. fit √ß32. id eſt, 2.
Item ex diuiſione √ȝ70. per √ȝ7. fit √ȝ10.
Ex √ȝ36. per √ȝ12. fit √ȝ3.
Ex √ȝ18. per √ȝ8. fit √ȝ2$\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$.
Ex √ce240. per √ce24. fit √ce10.
Ex √ce64. per √ce4. fit √ce16.
Ex √ȝȝ72. per √ȝȝ. 8. fit √ȝȝ9.
Ex √ß32. per √ß8. fit √ß4.

QVANDO autem propoſitæ duæ radices non ſunt eiuſdem naturæ, reducendæ ſunt ad eandem denominationem: deinde multiplicatio, aut diuiſio inſtituenda vt prius.

VT ex ductu √ȝ8. in 1$\frac{1}{2}$. fit √ȝ18. Nam numerus 1$\frac{1}{2}$. Zenſice in ſe ductus facit √ȝ2$\frac{1}{4}$. hoc eſt, √ȝ$\frac{9}{4}$. atque ita ex √ȝ8. in √ȝ$\frac{9}{4}$. fit √ȝ$\frac{72}{4}$. hoc eſt, √ȝ18.

EX √ce2. in √ȝce6. fit √ȝce24. Duæ namque illæ radices reducuntur ad has duas √ȝce4. & √ȝce6.

EX √ȝ5. in √ce4. fit √ȝce 2000. Nam datæ duæ radices reuocantur ad has, √ȝce125. & √ȝce16.

ITEM ex diuiſione √ȝ18. per 1$\frac{1}{2}$. fit √ȝ8. Numerus enim 1$\frac{1}{2}$. ductus in ſe quadrate facit 2$\frac{1}{4}$. cui præponendum eſt ſignum ȝ. vt fiat √ȝ2$\frac{1}{4}$. atque ita diuiſa √ȝ18. per √ȝ2$\frac{1}{4}$. hoc eſt, per √ȝ$\frac{9}{4}$. fit Quotiens √ȝ8.

EX √ȝce24. per √ce2. fit Quotiens √ȝce6. Nam duæ illæ radices reducuntur ad has √ȝce24. & √ȝce4. ſi nimirum numerus 2, ducatur in ſe quadrate, & producto 4. præter ſignum ce, apponatur etiam ſignum ȝ, vt fiat √ȝce4. atque ita diuiſa √ȝce24. per √ȝce4. fit Quotiens √ȝce6.

EX √ȝce2000. per √ȝ5. fit Quotiens √ce4. Duæ namq; illæ radices reducũtur ad √ȝȝce4000000. & √ȝȝce15625. Nam 2000. in ſe quadrate faciunt 4000000. & 5. in ſe Zenſicubice faciũt 15625. quibus productis præponitur commune ſignum ȝȝce. cuius exponens 12. gignitur ex 6. exponente ſigni ȝce. in 2. exponentem ſigni ȝ. atque ita ſi diuides √ȝȝce4000000. per √ȝȝce15625. facies Quotientem √ȝȝce256. hoc eſt, √ce4. Nam √ȝȝ. numeri 256. eſt 4. cuius √ce, eſt √ce4.

EX √ȝ$\frac{3}{4}$. per √ȝ$\frac{2}{3}$. fit Quotiens √ȝ$\frac{9}{8}$. id eſt, √ȝ$\frac{9}{8}$. Nam ex ductu Quotientis √ȝ$\frac{9}{8}$. in diuiſorem √ȝ$\frac{2}{3}$. fit √ȝ$\frac{18}{24}$. hoc eſt, √ȝ$\frac{3}{4}$. numerus diuiſus.

Multiplicatio radicum in ſe quadrate, cubice, Zenſizenſice, &c. QVANDO radix aliqua multiplicatur in ſe quadrate vel cubice, ſecundum exigentiam alterius ſigni radicalis, quod gerit, ſumendus eſt ipſemet numerus pro numero producto, deleto ſigno radicali.

VT √ȝ4. in ſe quadrate facit 4. Nam √ȝ4. in √ȝ4. facit √ȝ16. hoc eſt, 4.

EX √ȝ18. in ſe quadrate facit 18. id eſt, √ȝ324. quæ eſt 18.

EX √ce4. in ſe cubice facit 4. Nam √ce4. in √ce4 facit √ce16. & ex √ce4. in √ce16. facit √ce64. hoc eſt, 4. atque radix cubica huius producti eſt √ce4.

SIC √ȝȝ16. in ſe zenſizenſice facit 16. Nam ex √ȝȝ16. in √ȝȝ16 fit √ȝȝ256. & ex √ȝȝ256. in ſe fit √ȝȝ65536. nimirum 16. quia radix quadrata numeri 65536. eſt 256. & huius radix quadrata eſt 16.

AT quando radix aliqua multiplicatur in ſe ſecundum exigentiam alterius ſigni radicalis, ducendus eſt numerus in ſe ſecundum exigentiam alterius huius ſigni radicalis, ac producto ſignum radicale numeri multiplicati præponendum.

VT ex √ȝ6. in ſe cubice fit √ȝ216. Vnde radix cubica huius producti erit √ȝ6. Nam ex √ȝ6. in ſe fit √ȝ36. & ex √ȝ6. in √ȝ36. fit √ȝ216.

EX √ce8. in ſe quadrate fit √ce64. id eſt, 4. Vnde radix quadrata numeri √ce64. eſt √ce8. hoc eſt, 2.

EX √ce6. in ſe quadrate fit √ce36. Atque ita radix quadrata numeri √ce36. eſt √ce6.

EX √ȝce6. in ſe quadrate fit √ȝce36. hoc eſt, √ce6. Nam radix Zenſica numeri 36. eſt 6. & huius radix cubica eſt √ce6. Vnde radix quadrata numeri √ȝce36. vel √ce6. eſt √ȝce6.

EX √ȝce6. in ſe cubice fit √ȝce216. vel √ȝ6. quia huius numeri 216. radix cubica eſt 6 & huius radix quadrata eſt √ȝ6. Itaque radix cubica numeri √ȝce216. vel √ȝ6. eſt √ȝce6.

EX √ȝȝ6. in ſe quadrate fit √ȝȝ36. hoc eſt, √ȝ6. quia radix quadrata numeri 36. eſt 6. & huius radix quadrata eſt √ȝ6. Ex quo fit, radicem quadratam numeri √ȝȝ36 vel √ȝ6. eſſe √ȝȝ6. Itaque vt habeatur quadratum alicuius radicis zenſizenſicæ, ſatis eſt, amouere vnum ſignũ ȝ. Vt in dato exemplo quadratum √ȝȝ6. fuit √ȝ6. Sic etiam quadratum √ȝȝ8. eſt √ȝ8. & ſic de cæteris.

Facilis inuentio quadrati radicis Zenſizenſicæ. Quo modo radix dupletur, vel tripletur, &c. ITAQVE ſi radix quadrata aliqua ſurda duplanda eſt, multiplicandus eſt eius numerus per 4. Producti namque √ȝ. eſt dupla radicis datæ. Vt duplum √ȝ3. erit √ȝ12. Nam vt √ȝ3. ducatur in 2. reducendæ ſunt numeri √ȝ3. & 2. ad eandem denominationem √ȝ3. & √ȝ4. &c.

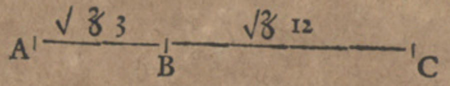
SIC etiam ſi duplanda ſit √ce10. multiplicanda erit per √ce8. fietque eius duplum √ce80. Duo namque numeri √ce10. & 2. reuocandi ſunt ad eandem denominationem, √ce10. & √ce8.

NON aliter radix quæcunque multiplicabitur per 3. 4. 5. &c. ſi dicti numeri multiplicentur zenſice, vel cubice, vel zenſizenſice, ſecundum conditionem nimirum radicis multiplicandæ. Vt √ß9. triplicabitur, ſi ducatur in √ß243. vt gignatur √ß2187. Quadruplicabitur autem, ſi multiplicetur per √ß1024. vt fiat √ß9216. quæ quadrupla eſt √ß9. &c.

Sũma quotuis radicũ æqualium. HINC facile cognoſcemus ſummam quotcunque radicum ſurdarum æqualium. Si enim vna illarum radicum multiplicetur per tot vnitates, quot ſunt radices propoſitæ, gignetur earum ſumma. Vt quinque √ȝ7. faciunt √ȝ175. Item quatuor √ce8. faciunt √ce512. hoc eſt, 8. Sic decem √ȝce4. faciunt √ȝce4000000. Nam redigere quotlibet numeros æquales in vnam ſummam, nihil eſt aliud, niſi vnum illorum numerorum ducere in ipſorum multitudinem. Vt ſumma trium horum numerorum æqualium 12. 12. 12. æqualis eſt numero producto ex 12. in 3. &c.

Demõſtratio multiplicationis RECTE autem fieri multiplicationem radicis in radice, vt diximus, ſic demonſtrabimus in radicibus quadratis. Sint duæ lineæ, AB, √ȝ3. & BC, √ȝ12. Dico √ȝ36. hoc eſt, radicem quadratam numeri 36. qui fit

qui fit ex quadrato 3. lineæ AB, in quadratum 12. lineæ BC, eſſe numerum productum ex linea AB, id eſt, ex √ʒ 3. in lineam BC, hoc eſt, in √ʒ 12. Quoniam enim ex Lemmate propoſ. 54. lib. 10. Eucl. rectangulum ſub AB, BC, medio loco proportionale eſt inter quadrata rectarum AB, BC, [a] erit id, quod fit ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, æquale ei, quod fit ex rectangulo ſub AB, BC, in ſe multiplicato: ideoque productum ex AB, in BC, radix quadrata erit producti ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, quod erat demonſtrandum. *radicum quadratarum.* *a 20. ſept.*



IN alijs autem omnibus radicibus, etiam non quadratis, idem hoc modo demonſtrabimus. Sit A, √ʒ. numeri B: & C, √ʒ numeri D: atque ex A, in B, fiat cubus E, vt A, ſit √cc numeri E: Et ex C, in D, fiat cubus F, vt C, ſit √cc numeri F. Item ex A, in E, fiat zenſizenſus G, vt A, ſit √ʒʒ numeri G: Et ex C, in F, fiat zenſizenſus H, vt C, ſit √ʒʒ, numeri H. Ac tandem ex A, in C, fiat I: Et ex quadrato B, in quadratum D, fiat quadratus K: Et ex cubo E, in cubum F, fiat cubus L: Et ex Zenſizenſo G, in Zenſizenſum H, fiat Zenſizenſus M. Dico numerum I, productum ex A, √ʒ B, in C, √ʒ D, eſſe √ʒ numeri K, producti ex ʒB, in ʒD. Item eundem numerum I, productum ex A, √cc E, in C, √cc F; eſſe √cc numeri L, producti ex ccE, in ccF. Denique eundem numerum I, productum ex A, √ʒʒ G, in C, √ʒʒ H, eſſe √ʒʒ numeri M, producti ex ʒʒG, in ʒʒH. *Demonſtratio generalis multiplicationis omnium radicum.*

		M,	1296.		
G	16			H	81
		L,	216		
E	8			F	27
		K,	36		
B	4			D	9
		I,	6		
A	2			C	3

Atq; ita deinceps, ſi A, & C, in G, & H, ducantur, vt fiant Surdeſolidi; & deinde Zenſicubi, &c. Quoniam enim A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; [b] erit B, ad I, vt A, ad C. Item quia C, multiplicans A, & C, fecit I, & D; [c] erit quoq; I, ad D, vt A, ad C, hoc eſt, vt B, ad I: ac proinde B, I, D, continue ſunt proportionales. [d] Igitur idem numerus fiet ex B, in D, qui ex I, in ſe. Fit autẽ K, ex B, in D, Igitur idem K, fiet ex I, in ſe; hoc eſt, I, erit √ʒ numeri K. *b 17. ſept. c 17. ſept. d 20. ſept.*

DEINDE quia B, multiplicans A, & D, fecit E, & K; [e] erit E, ad K, vt A, ad D. Item quia C, multiplicans A, & D, fecit I, & F; [f] erit quoque I, ad F, vt A, ad D, hoc eſt, vt E, ad K: ac proinde quatuor numeri E, K, I, F, proportionales ſunt. [g] Igitur idem numerus fiet ex E, primo in F, quartum, qui ex I, tertio in K, ſecundum. Factus eſt autem L, cubus ex E, in F. Idem igitur L, fiet ex I, in K, ſuum quadratũ: ac proinde I, erit √cc numeri L. *e 17. ſept. f 17. ſept. g 19. ſept.*

RVRSVS quoniam E, multiplicans A, & F, fecit G, & L: [h] erit G, ad L, vt A, ad F. Item quia C, multiplicans A, & F, fecit I, & H; [i] erit quoque I, ad H, vt A, ad F, hoc eſt, vt G, ad L, ac proinde quatuor numeri G, L, I, H, proportionales ſunt. [k] Igitur idem numerus fiet ex G, primo in H, quartum, qui ex I, tertio in L, ſecundum. Factus eſt autem M, Zenſizenſus ex G, in H. Idem ergo M, fiet ex I, in L, ſuum cubum: ideoque I, erit √ʒʒ numeri M. & ſic de cæteris. quod erat demonſtrandum. *h 17. ſept. i 17. ſept. k 19. ſept.*

QVAMVIS autem in exemplo poſiti ſint numeri rationales, idem tamen verum etiam eſt in numeris irrationalibus, vt Franciſcus Maurolycus in ſua Arithmetica ſpeculatiua docuit. quod & in hac formula cernitur in qua eadem demonſtratio locum habet. Nam quemadmodum propoſitiones lib. 7. Eucl. demonſtratæ ſunt in numeris fractis. ita eædem oſtendentur in numeris ſurdis. V. g. quia A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; erit ex defin. 15. lib. 7. tam B, ad A, quam I, ad C, vt A, ad vnitatem. quamuis proportio hæc ſit irrationalis. Igitur erit B, ad A, vt I, ad C: Et permutando B, ad I, vt A, ad C; ac proinde A, multiplicans duos A, & C, fecit duos B, & I, qui eandem proportionem habent, quam multiplicati A, & C, vt vult propoſ. 17. lib. 7. Eademque ratio eſt de cæteris propoſitionibus lib. 7. Eucl.

	M, 225. vel √ʒ 50625	
G, 9. vel √ʒ 81		H, 25. vel √ʒ 625
	L, √ʒ 3375	
E, √ʒ 27		F, √ʒ 125
	K, 15. vel √ʒ 225	
B, 3. vel √ʒ 9		D, 5. vel √ʒ 25
	I, √ʒ 15	
A, √ʒ 3		C, √ʒ 5

RECTE etiam diuidi radicem per radicem, ſi præceptum traditum ſeruetur, demonſtratione non indiget: quippe cum Quotiens multiplicatus per diuiſorem producat numerum diuiſum. Vt quia √ʒ 15. diuiſa per √ʒ 3. Quotientem facit √ʒ 5. Et √ʒ 5. ducta in √ʒ 3. facit √ʒ 15. vt demonſtratum eſt, dubitandum non eſt, recte factam eſſe diuiſionem.

IMMO rite fieri multiplicationem, diuiſionemque radicum ſurdarum eo modo, quem præſcripſimus abunde nos docere poſſunt radices rationales: quippe quæ eo modo multiplicatæ, atque diuiſæ procreent veros numeros productos, ac Quotientes. Nam ex √ʒ 4. in √ʒ 49. fit √ʒ 196. hoc eſt 14. Et ex diuiſione √ʒ 196. per √ʒ 4. fit Quotiens √ʒ 49. id eſt, 7. Item ex √cc 8. in √cc 27. fit √cc 216. nimirum 6. Et ex diuiſione √cc 216. per √cc 8. fit Quotiens √cc 27. nimirum 3. &c.

LEMMA.

VTRVM duæ radices ſurdæ commenſurabiles ſint nec ne; & quam proportionem inter ſe habeant cognoſcere. *An duæ radices ſint commenſurabiles, & quam habeant proportione: quo pacto cognoſcatur.*

DIVIDATVR vna radix per alteram. Si enim Quotiens fuerit rationalis, ipſæ radices commenſurabiles erunt, proportionemq; habebunt inter ſe, quam Quotiens ad vnitatẽ. Vel ſi Quotiens eſt minutia, quam numerator minutiæ ad denominatorem. Vt quoniam ſi diuidatur √ʒ 12. per √ʒ 3. fit Quotiens √ʒ 4. hoc eſt, 2. erunt √ʒ & 12. √ʒ 3. commenſurabiles, habebuntque proportionem duplam, nimirum 2. ad 1.

SIC etiam diuiſa √ʒ 3. per √ʒ 12. fit Quotiens √ʒ $\frac{3}{12}$. vel √ʒ $\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Sunt ergo √ʒ 3. & √ʒ 12. commenſurabiles, earumque proportio eadem eſt, quæ $\frac{1}{2}$. ad 1. hoc eſt 1. ad 2. numeratoris ad denominatorem. Nam per propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem eſt proportio numeratoris minutiæ cuiuſuis ad eiuſdem denominatorem, quæ ipſius minutiæ ad vnitatem.

ITEM √ʒ 18. & √ʒ 8. commenſurabiles erunt, proportionemque habebunt, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram. quod maiore diuiſa per minorem, Quotiens fit √ʒ $2\frac{1}{4}$. vel √ʒ $\frac{9}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. Diuiſa autem √ʒ 8. per √ʒ 18. fit quotiens √ʒ $\frac{4}{9}$. hoc eſt $\frac{2}{3}$. Sunt ergo √ʒ 8. & √ʒ. 18. commenſurabiles, proportionemque habent, quam 2. ad 3.

RVRSVS commenſurabiles erunt √ʒ 75. & √ʒ 48. Nam diuiſa illa per hanc, fit Quotiens √ʒ $1\frac{9}{16}$. vel √ʒ $\frac{25}{16}$. id eſt, $\frac{5}{4}$. proportionem autem habebunt, quam 5. ad 4.

ITA quoque reperientur eſſe commenſurabiles √ʒ 9. & √ʒ 4. proportionemque habere, quam 3. ad 2.

PRÆTEREA √ce 320. & √ce 135. commenſurabiles ſunt: quia illa per hanc diuiſa, fit Quotiens √ce $2\frac{10}{27}$. vel √ce $\frac{64}{27}$. id eſt, $\frac{4}{3}$. eſtque earum proportio ſeſquitertia, nimirum 4. ad 3.

EADEM ratione commenſurabiles ſunt √ce 162. & √ce 2058. habentque proportionem, quam 7. ad 3. nimirum duplam ſeſquitertiam, ſi maior cum minore conferatur. Diuiſa namque maiore per minorem, fit Quotiens √ce $12\frac{19}{27}$. vel √ce $\frac{343}{27}$. hoc eſt, $\frac{7}{3}$.

COMMENSVRABILES quoq; ſunt √ce 6000. & √ce 2058. habentque proportionem, quam 10. ad 7. Diuiſa enim priore per poſteriorem, fit Quotiens √ce $2\frac{314}{343}$. vel √ce. $\frac{1000}{343}$. hoc eſt, $\frac{10}{7}$.

NON ſecus commenſurabiles erunt √ʒʒ 3888. & √ʒʒ 243. quia ex diuiſione prioris per poſteriorem fit Quotiens √ʒʒ 16. hoc eſt 2. Habent ergo proportionem duplam.

EODEM modo commenſurabiles erunt √ʒʒ 19683. & √ʒʒ 243. habebuntq; proportionem triplam. quia ex diuiſione prioris per poſteriorem prodit Quotiens √ʒʒ 81. hoc eſt, 3.

DENIQVE commenſurabiles etiam erunt √ʒʒ 19683. & √ʒʒ 3888. proportionemque habebunt ſeſquialteram. quia ex diuiſione fit Quotiens √ʒʒ $5\frac{1}{16}$. vel √ʒʒ $\frac{81}{16}$. id eſt, $\frac{3}{2}$.

IAM vero ſi ex diuiſione gignatur numerus ſurdus, vel irrationalis, radices incommenſurabiles erunt, proportionemque habebunt irrationalem. Cuiuſmodi ſunt √ʒ 48. & √ʒ 8. quia ex diuiſione oritur Quotiens √ʒ 6. irrationalis, cum 6. non habeat radicem quadratam: habent tamen proportionem, quam √ʒ. 6. ad 1.

INCOMMENSVRABILES quoque erunt √ce 32. & √ce 18. Nam ex diuiſione gignitur Quotiens √ce $1\frac{7}{9}$. vel √ce $\frac{16}{9}$. qui licet habeat radicem quadratam $\frac{4}{3}$. cubicam tamen non habet. Erit autem earum proportio eadem, quæ √ce 16. ad √ce 9. vel √ce $\frac{16}{9}$. ad 1.

QVANDO radices ſunt diuerſorum generum, reducendæ prius ſunt ad eandem denominationem. Vt ſi dentur √ʒce 64. & √ce 27. Reductis ad eandem denominationem, nimirum ad √ʒce 64. & √ʒce 729. ſi poſterior per priorem diuidatur, fit Quotiens √ʒce $11\frac{25}{64}$. hoc eſt, √ʒce $\frac{729}{64}$. id eſt, $\frac{3}{2}$. ſunt ergo √ʒce 64. & √ce 27. commenſurabiles, habetque poſterior ad priorem proportionem, quam 3. ad 2.

EST Lemma hoc perneceſſarium ad radicum additionem, ſubtractionemque, de qua in duabus propoſitionibus ſequentibus.

DE ADDITIONE RADICVM ſimplicium.

CAPVT XIX.

Additio radicũ æqualium.

QVANDO addendæ ſunt inter ſe duæ, vel plures radices æquales, multiplicanda eſt vna earum per 2. vel 3. aut 4. &c. prout radices fuerint 2. vel 3. aut 4. &c. Productus enim numerus erit ſumma illarum radicum, vt cap. præcedenti diximus. Vt ſumma ex √ʒ 6. & √ʒ. 6. collecta eſt √ʒ 24. Nam √ʒ 6. duplicata, hoc eſt, multiplicata per √ʒ 4. facit √ʒ 24. Item √ce 6. √ce 6. √ce 6. faciunt √ce 162. propterea quod √ce 6. triplicata, id eſt, multiplicata per √ce 27. facit √ce 162. & ſic de alijs.

Additio radicum incommenſurabilium.

QVANDO autem duæ radices inæquales eiuſdem ſpeciei addendæ inter ſe ſunt, experiendũ prius eſt, per Lemma pręcedens, an ſint commenſurabiles an vero incommenſurabiles: idemq; faciendum eſt, ſi radices ſint diuerſarum denominationum, poſtquam ad eandem denominationem fuerint reuocatæ. Et ſi quidẽ deprehendentur eſſe incommenſurabiles, non poterunt in vnam ſummam colligi, ita vt ex illis vna radix ſimplex conficiatur, ſed addendæ ſunt per interpoſitionẽ ſigni additorũ +. Vt ex √ʒ 6. & √ʒ 11. fit ſumma √ʒ 6 + √ʒ 11. Vel √ʒ 11 + √ʒ 6. Item ex 8. & √ʒ 7. fit ſumma 8 + √ʒ 7. vel √ʒ 7. + 8. Sic ex √ce 9 & √ce 20. fit ſumma √ce 9 + √ce 20.

Additio radicum quadratarum per propoſ. 4. lib. 2. Eu.

RADICES tamen quadratæ incommenſurabiles addi inter ſe poſſunt, hoc etiam modo. Ad ſummam quadratorum addatur duplum eius, quod fit ex vna radice in aliam. Summæ enim huius collectæ radix quadrata erit ſumma propoſitarum duarum radicum. Sint addendæ √ʒ 6. & √ʒ 11. Quadrati numeri 6. & 11. faciunt 17. Et ex √ʒ 6. in √ʒ 11. fit √ʒ 66. cuius duplum eſt √ʒ 264. Summa ergo ex √ʒ 6. & √ʒ 11. collecta erit radix quadrata huius aggregati 17 + √ʒ 264. nimirum √ʒ (17 + √ʒ 264.) Ratio huius operationis ex propoſ. 4. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam ſi linea aliqua recta diuiſa ſit in √ʒ 6. & √ʒ 11. erunt duo quadrata harum partium 6. & 11 quibus ſi addatur productum ex √ʒ 6. in √ʒ 11. bis, fiet totum quadratum totius lineæ binomium hoc, 17 + √ʒ 264. Huius ergo radix quadrata,, nimirum √ʒ (17 + √ʒ 264) erit ſumma quęſita, ex √ʒ 6. & √ʒ 11. collecta. Quo pacto autem ex binomijs radix quadrata ſit extrahenda quando res exigit, & ratio poſtulat, c. 27. dicemus.

dicemus: quæ tamẽ hic inuenietur eſſe √ȝ 11 + √ȝ 6. quæ non differt à ſumma radicum propoſitarum, ſi per ſignum + copulentur. Hæc autem ratio addendi in numeris rationalibus euidens quoque eſt. Sint enim addendæ √ȝ 4. & √ȝ 9. vbi manifeſtum eſt, ſummam collectam eſſe 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13. Et ex √ȝ 4. in √ȝ 9. fit √ȝ 36. cuius duplum eſt √ȝ 144. Summa ergo ex √ȝ 4. & √ȝ 9. collecta erit radix quadrata huius aggregati 13 + √ȝ 144. nimirum √ȝ(13 + √ȝ 144.) Conſtat autem, 13. cum √ȝ 144. id eſt cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata eſt 5.

IMMO hoc etiam artificio addi poſſunt radices quadratæ commenſurabiles, ſed ſemper producetur radix ſimplex in ſumma. Vt ſi addendæ ſint √ȝ 3. & √ȝ 12. Diuiſa hac per illam, fit Quotiens √ȝ 4. rationalis: ac proinde commenſurabiles ſunt. Ergo ſi earum quadrati 3. & 12. in vnam ſummam colligantur, fit numerus 15. Et ſi vna radix in alteram ducatur, fit numerus √ȝ 36. cuius duplum √ȝ 144. cum 15. facit 15 + √ȝ 144. Huius igitur radix quadrata, nimirum √ȝ(15 + √ȝ 144) hoc eſt, √ȝ 27. ſumma erit collecta ex √ȝ 3. & √ȝ 12.

Additio radicum commenſurabilium.

AT vero ſi radices cuiuſcunque generis addendæ fuerint inuentæ commenſurabiles, hoc eſt, ſi diuiſa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis ſiue integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto, & ſi quidem integer ſubſcripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet ſumma ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit ſumma propoſitarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars eſt 1. minoris numeri fractionis. Quare ſi talis pars ſumatur ex minore radice, eaque multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur ſumma propoſitarum radicum. Item quam proportionem multiplicem habet ſumma ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit ſumma propoſitarum radicum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars eſt 1. maioris numeri fractionis. Quare ſi talis pars ex maiore radice accipiatur, eaque ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, producetur propoſitarum radicum ſumma.

Vt ſi addendæ ſint √ȝ 8. & √ȝ 18. Ex diuiſione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √ȝ 2 $\frac{1}{4}$. ſiue √ȝ $\frac{9}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. Quia igitur ſumma numerorũ fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad 1. ſemiſſem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, habebit quoque quintuplam proportionem ſumma datarum radicum ad ſemiſſem minoris radicis. Eſt autem √ȝ 2. ſemiſſis minoris radicis √ȝ 8. Diuiſa namq; √ȝ 8. per 2. hoc eſt, per √ȝ 4. fit Quotiens √ȝ 2. Quamobrem ſi √ȝ 2. multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc eſt, per √ȝ 25. gignetur √ȝ 50. ſumma ex √ȝ 8. & √ȝ 18. collecta.

ITEM quia ſumma numerorum fractionis $\frac{3}{2}$ id eſt, 5. ad 1. tertiam partẽ maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, eandẽ habebit ſumma radicum propoſitarũ ad tertiam partẽ, maioris radicis. Eſt autem √ȝ 2. tertia pars maioris radicis √ȝ 18. Diuiſa namque √ȝ 18. per 3. hoc eſt, per √ȝ 9. fit Quotiens √ȝ 2. Si igitur √ȝ 2. ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id eſt, in √ȝ 25. procreabitur eadem ſumma √ȝ 50.

EADEM ſumma conflabitur, ſi minor radix, √ȝ 8. diuidatur per maiorem √ȝ 18. Fiet enim Quotiens √ȝ $\frac{4}{9}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. Ergo rurſus quemadmodum 5. ſumma numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem quintuplam, ita quoque eandem habebit ſumma radicum propoſitarum ad tertiam partem maioris radicis, √ȝ 18. hoc eſt, ad √ȝ 2. Item quemadmodum 5. ſumma numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. ſemiſſem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit ſumma radicum √ȝ 8. & √ȝ 18. ad ſemiſſem minoris radicis, √ȝ 8. nimirum ad √ȝ 2. &c.

RVRSVS ſint addendæ √ȝ 3. & √ȝ 12. Diuiſa maiore per minorem, fit Quotiens √ȝ 4. hoc eſt 2. Suppoſita ergo vnitate, vt fiat fractio $\frac{2}{1}$. quoniam ſumma 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, eſtque 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoque ſumma datarum radicum ad minorem radicem √ȝ 3. proportionem triplam. Quare ſi √ȝ 3. minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in √ȝ 9. fiet ſumma √ȝ 27.

ITEM quia prædicta ſumma 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. proportionem habet triplam, eſtq; 1. ſemiſſis maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque ſumma radicum propoſitarum ad ſemiſſem maioris radicis √ȝ 12. hoc eſt, ad √ȝ 3 proportionem triplam. Si igitur √ȝ 3. ſemiſſis videlicet maioris radicis, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id eſt, in √ȝ 9. producetur eadem ſumma √ȝ 27.

Demonſtratio additionis radicũ commenſurabilium.

DEMONSTRATIO huiuſce rei eſt, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita ſe habeat ſumma priorum duorum ad maiorem vel minorem ipſorum, vt ſumma duorum poſteriorum ad maiorem, vel minorem ipſorum. Item ita ſumma priorum duorum ad quamlibet partem maioris, vel minoris, vt ſumma duorum poſteriorum ad ſimilem partem maioris, vel minoris. Vt datis numeris 6. 4. & 18. 12. proportionalibus: erit componendo, vt 10. ad 4. ita 30. ad 12. Et per conuerſionem rationis, vt 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia vero eſt quoque vt 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem: erit ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia eſt quoque, vt 6. ad 1. ſextam partem, ita 18. ad 3. ſextam partem: erit quoque ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Cum ergo ex diuiſione vnius radicis per aliam gignatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio ſit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (ſuppoſita 1. quando Quotiens eſt numerus integer) manifeſta euadit ratio additionis radicum. Et ſane admiratione dignum eſt, additionem fieri præciſam in ijs, quæ præciſam, & cognitam quantitatem non habent.

HINC fit, ſummam quoque ex duabus radicibus commenſurabilibus colligi, ſi per denominatorem proportionis, quam habet ſumma numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc eſt, per $\frac{5}{3}$. vel per $\frac{5}{2}$. multiplicetur maior radix √ȝ 18. vel minor, √ȝ 8. Ita vides ex √ȝ 18. in $\frac{5}{3}$. hoc eſt, in √ȝ $\frac{25}{9}$. Vel ex √ȝ 8. in $\frac{5}{2}$. id eſt, in √ȝ $\frac{25}{4}$. gigni √ȝ 50. vt prius.

SINT rurſus addendæ √ȝ 72. & √ȝ 18. Diuiſa illa per hanc, fit Quotiens √ȝ 4. hoc eſt, 2. & ſuppoſita 1. fit $\frac{2}{1}$. denominator proportionis duplæ. Sicut igitur ſumma 3. ad 1. habet proportionem triplam, ita quoq; ſumma duarum radicum ad minorem √ȝ 18. tripla erit. Si ergo ducatur √ȝ 18. in 3. id eſt, in √ȝ 9. fiet √ȝ 162. pro ſumma radicum √ȝ 72. & √ȝ 18. Item ſicut eadem ſumma 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 2. habet proportionem ſeſquialteram, cuius denominator eſt $\frac{3}{2}$. ita quoque ſumma quæſita erit ad maiorem radicem √ȝ 72. ſeſquialtera. Si ergo √ȝ 72. ducatur in $\frac{3}{2}$. id eſt, in √ȝ $\frac{9}{4}$. producetur eadem ſumma √ȝ 162.

POSSVNT

Pulchra ratio addendi radices cõmenſurabiles.

POSSVNT etiam addi radices commenſurabiles percommode per regulam auream, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo ſit, vt 5. ſumma numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3 ita ſumma radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt oſtendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad ſummam 5. ita minor radix, vel maior ad radicum ſummam. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ℨ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ℨ 18. ad aliud: procreabitur ſumma √ℨ 50. vt prius.

In poſtremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{3}{1}$. ſi fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ℨ 18. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ℨ 72. ad aliud: gignetur ſumma √ℨ 162. quæ prius.

SINT rurſus addendæ √ℨ 2. & √ℨ 8. Ex diuiſione √ℨ 8. per √ℨ 2. fit Quotiens rationalis √ℨ 4. id eſt, 2. & ſuppoſita 1 fit $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat.

Vt 1. ad 3. ita √ℨ 2. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ℨ 8. ad aliud: colligetur ſumma √ℨ 18.

Sint quoque addendæ √ℭ 162. & √ℭ 2058. Diuiſa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis √ℭ 12$\frac{19}{27}$. vel √ℭ $\frac{343}{27}$. hoc eſt $\frac{7}{3}$. Si igitur fiat.

Vt 3. ad 10. ita √ℭ 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita √ℭ 2058. ad aliud. reperietur ſumma √ℭ 6000.

ITEM addendæ ſint √ℭ 8. & √ℭ 27. qui numeri rationales ſunt. Ex diuiſione √ℭ 27. per √ℭ 8. fit Quotiens rationalis √ℭ 3$\frac{3}{8}$. vel √ℭ $\frac{27}{8}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. Si ergo fiat,

Vt 2 ad 5. ita √ℭ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ℭ 27. ad aliud: prodibit ſumma √ℭ 125. hoc eſt 5.

RVRSVS addendæ ſint √ℨℨ 243. & √ℨℨ 3888. Proportio eſt $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ℨℨ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ℨℨ 3888. ad aliud: exurget ſumma √ℨℨ 19683.

POSTREMO ſint addendæ √ℨ 4. & √ℭ 27. qui numeri ſunt rationales. Reductis hiſce radicibus ad eandem denominationem, vt ad √ℨℭ 64. & √ℨℭ 729. Ex diuiſione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √ℨℭ $\frac{729}{64}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$, Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ℨℭ 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ℨℭ 729. ad aliud: procreabitur ſumma √ℨℭ 15625. hoc eſt, 5.

Alia ratio pulchra addendi radices commẽſurabiles.

ADDI quoque poſſunt radices commenſurabiles hoc modo. Diuiſa maiore radice per minorem addatur Quotienti rationali vnitas. Si namque numerus conflatus ducatur in maiorem radicem, procreabitur ſumma quæſita. Nam ſi Quotiens ducatur in minorem radicem, id eſt, in diuiſorem, producetur maior radix, quæ diuiſa fuit: Et ſi vnitas ducatur in eundem diuiſorem, id eſt, in minorem radicem producetur minor radix: atque adeo duo producti ſummam duarum radicum conficient. Cum ergo, per theor. 1. ad propoſ. 14. lib. 9. Eucl. quod reſpondet propoſ. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in ſummam ex Quotiente, & vnitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & vnitatem fiunt ſeorſum; producetur quoque ſumma duarum radicum datarum ex minore radice in ſummam ex Quotiente, & vnitate collectam.

SINT enim addendæ √ℨ 8. & √ℨ 18. Diuiſa maiore per minorem, fit Quotiens rationalis √ℨ 2$\frac{1}{4}$. id eſt, $\frac{3}{2}$. & addita 1 fit $\frac{5}{2}$. Et quoniam ex $\frac{5}{2}$. in √ℨ 8. fit √ℨ 50. erit √ℨ 50. ſumma duarum radicum √ℨ 8 & √ℨ 18.

ITEM ſint addendæ √ℭ 162. & √ℭ 2058. Ex diuiſione naſcetur Quotiens rationalis $\frac{7}{3}$. & addita 1. fit numerus $\frac{10}{3}$. qui ductus in √ℭ 162. gignit √ℭ 6000. ſummam duarum radicum propoſitarum.

Addere plures radices habentes communẽ menſuram vnam radicem eiuſdem generis.

QVANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiuſdem generis radicem diuidi poſſunt, ita vt Quotientes ſint rationales, coniungentur in vnam ſummam, ſi ſumma Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit ſumma quæſita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus, qui fit ex radice diuidente in Quotientum ſummam, æqualis ſit ijs, qui ex eadem diuidente radice fiunt in ſingulos Quotientes, hoc eſt, omnibus ſimul radicibus propoſitis; liquido conſtat, ex radice diuidente in ſummam Quotientum gigni ſummam radicum propoſitarum.

Vt ſi addendæ ſint √ℨ 8. & √ℨ 18. Si vtraque diuidatur per √ℨ 2. producentur Quotientes rationales √ℨ 4. & √ℨ 9. hoc eſt 2. & 3. quorum ſumma 5. ſi ducatur in communem diuiſorem, id eſt, in √ℨ 2. procreabitur ſumma √ℨ 50.

ITEM ſint addendæ √ℨ 8. √ℨ 50. & √ℨ 72. ſi diuidantur ſingulæ per √ℨ 2. fient Quotientes rationales, √ℨ 4. √ℨ 25 & √ℨ 36. hoc eſt, 2. 5. & 6. quorum ſumma 13. ducta in √ℨ 2. communem diuiſorem, producet ſummam √ℨ 338.

SINT tandem addendæ √ℨ 8. √ℨ 32. & √ℨ 48. Diuidantur ſingulæ per √ℨ 2. fiunt Quotientes √ℨ 4. √ℨ 16. & √ℨ 24. quorum priores duo ſunt rationales, nimirum 2. & 4. at poſterior irrationalis, Non ergo hoc modo in vnam colligi ſummam poterunt, ſed ſolum duæ priores facient ſummam √ℨ 72. atque ita ex omnibus tribus fiet ſumma √ℨ 72 + √ℨ 48.

DE

DE SVBTRACTIONE RADICVM ſimplicium.

CAPVT XX.

Subtractio radicis ab æquali radice.

QVANDO radix aliqua à radice æquali ſubtrahitur, nihil relinquitur. Vt √ȝ.12.à √ȝ 12. Item √cc 100.à √cc 100.ſubtracta relinquit √ȝ 0.vel √cc 0.

Subtractio radicum inæqualium.

QVOD ſi radices fuerint incommenſurabiles, (quando nimirum, diuiſa maiore per minorem, Quotiens eſt irrationalis)non poterit fieri ſubtractio, niſi per ſignum ſubtractorum—. Vt √ȝ 3.ex √ȝ 10. relinquit √ȝ 10—√ȝ 3. Item √cc 20.ex √cc 50. relinquit √cc 50—√cc 20.

Subtractio radicũ quadratarum per propoſ.7 lib.2. Eucl.

QVANDO tamen radices ſunt quadratæ, & incommenſurabiles, poterit minor à maiore ſubtrahi hoc etiam modo. A ſumma quadratorum ſubducatur, quod ex vna radice in aliam bis fit. Radix enim quadrata eius, quod relinquitur, erit reſiduum ſubtractionis. Sit ſubtrahenda √ȝ 12.à √ȝ 20.Quadrati numeri 12.& 20.faciunt 32.Et ex √ȝ 12.in √ȝ 20.fit √ȝ 240.cuius duplum √ȝ 960.detractum ex ſumma quadratorũ relinquit 32 —√ȝ 960.Radix ergo quadrata huius relicti nimirum √ȝ(32—√ȝ 960)erit id, quod relinquitur, detracta √ȝ 12.ex √ȝ 20.Huius operationis ratio ex propoſ.7.lib.2.Eucl.colligitur.Nam ſi tota aliqua linea ſit √ȝ 20.quæ ſecetur ita, vt vna pars ſit √ȝ 12. erunt duo quadrati numeri 20.& 12. nimirum 32.æquales numero √ȝ 960.qui fit bis ex √ȝ.12.in √ȝ 20. vna cum quadrato reliquæ partis lineæ. Si ergo numerus, qui fit bis ex √ȝ 12.in √ȝ.20.dematur ex 32.ſumma quadratorum, reliquum fiet quadratum reliquæ partis lineæ.Igitur quadratum huius partis erit 32—√ȝ 960.Ac proinde reſiduum, quod relinquitur poſt ſubtractionem √ȝ 12.ex √ȝ 20.erit √ȝ(32—√ȝ 960.) Quo pacto autem radix quadrata, quando res exigit, ex Apotomis, ſiue Reſiduis ſit extrahenda, dicemus cap.27.quæ tamen hic erit √ȝ 20—√ȝ 12. non differens à reſiduo, ſi √ȝ 12. à √ȝ 20.ſubtrahatur per interpoſitionem ſigni—. Verum hæc ratio ſubtrahendi perſpicua quoque eſt in numeris rationalibus.Sit enim auferenda ȝ√ 4.à ȝ√49 vbi liquido conſtat, reſiduum eſſe 5. Quadrati 4.& 49.efficiunt 53.Et ex √ȝ 4.in ȝ√ 49.fit √ȝ 196.cuius duplum √ȝ 784.ablatum ex 53. ſumma quadratorum relinquit 53—√ȝ 784. ac proinde reſiduum quæſitum, erit √ȝ(53—√ȝ784) Conſtat autem, 53—√ȝ 784.hoc eſt, 53—28 eſſe 25.cuius radix quadrata eſt 5.

IMMO hoc eodem artificio ſubtrahi poterit radix quadrata à radice quadrata, ſi fuerint commenſurabiles:ſed tunc reſiduum erit radix ſimplex. Vt ſi ſubducenda ſit √ȝ 3.à √ȝ 27.Diuiſa hac per illam, fit Quotiens √ȝ 9.rationalis, ac proinde commenſurabiles ſunt.Summa quadratorum 3.& 27.eſt 30 à qua ſi dematur √ȝ 324 nimirum duplum eius, quod fit ex √ȝ 3.in √ȝ 27.remanebunt 30 —√ȝ 324.Igitur √ȝ (30—√ȝ 324.)hoc eſt, √ȝ 12.erit reſiduum ſubtractionis.

Subtractio radicum commenſurabilium.

SI autem radices cuiuſcunque generis propoſitæ fuerint commenſurabiles, hoc eſt, ſi diuiſa maiore per minorem, Quotiens fuerit rationalis, ita tamẽ, vt ſi fuerit numerus integer, ei ſupponatur vnitas, vt fiat fractio, ita agemus. Quam proportionem habet numerus, qui relinquitur, detracto denominatore fractionis ex numeratore, hoc eſt, quam habet differentia numerorum fractionis ad 1.eam quoque habebit reſiduum poſt detractionem minoris radicis ex maiore ad talem partem minoris, qualis pars eſt 1.denominatoris fractionis: vel eam quoq; proportionem habebit dictum reſiduum ad talem partẽ maioris radicis, qualis pars eſt 1.numeratoris fractionis. Quocirca ſi talis pars capiatur ex minore radice, vel maiore, eaque per denominatorem proportionis illius multiplicetur, producetur reſiduum, quod quæritur.

SIT ſubtrahenda √ȝ 8.ex √ȝ 50. Ex diuiſione maioris per minorem, fit Quotiens rationalis √ȝ $\frac{25}{4}$. hoc eſt, $\frac{5}{2}$.Quia ergo differentia numerorũ fractionis $\frac{5}{2}$.eſt 3.quod detracto denominatore 2.ex numeratore 5. remaneant 3.quę differentia ad 1.ſemiſſem minoris numeri fractionis, vel quintam partem maioris numeri fractionis, proportionem habet triplam: habebit quoque reſiduum, quod relinquitur, dempta √ȝ 8.ex √ȝ 50. ad ſemiſſem minoris radicis, nimirum ad √ȝ 2. vel ad quintam partem maioris radicis, videlicet ad √ȝ 2. proportionem triplam. Si igitur √ȝ 2.ducatur in 3. hoc eſt, in √ȝ 9. producetur reſiduum √ȝ 18. quod deſideratur.

IDEM reſiduum habebitur, ſi minor radix √ȝ 8. diuidatur per maiorem √ȝ 50. Fiet enim Quotiens √ȝ $\frac{4}{25}$.hoc eſt, $\frac{2}{5}$.Rurſus ergo, quemadmodum 3.differentia numerorum fractionis ad 1.ſemiſſem minoris numeri fractionis, vel ad quintam partem maioris numeri fractionis proportionem habet triplam: ita quoque differentia duarum radicum propoſitarum triplam habebit proportionem ad ſemiſſem minoris radicis, vel ad quintam partem maioris, videlicet ad √ȝ 2. Quare triplum √ȝ 2. nimirum √ȝ 18.erit differentia datarum radicum, id eſt, reſiduum poſt detractionem √ȝ 8. ex √ȝ 50. Demonſtratio eadem eſt, quæ ſupra in additione adducta eſt.

Pulchra ratio ſubtrahendi radices commenſurabiles.

HINC fit, reſiduum quoque produci, ſi per denominatorẽ proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, hoc eſt, reliquus numerus, dempto minore fractionis numero ex maiore, ad maiorem numerum fractionis, vel ad minorem, nimirum in propoſito exemplo per $\frac{3}{5}$. vel $\frac{3}{2}$.(nam $\frac{3}{5}$. eſt denominator proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, ad 5.maiorem numerum fractionis: At $\frac{3}{2}$.denominator eſt proportionis, quam eadem differentia 3. habet ad minorem numerũ fractionis) multiplicetur maior radix, vel minor.Ita vides ex ductu √ȝ 50.in $\frac{3}{5}$.vel ex ductu √ȝ 8.in $\frac{3}{2}$.gigni reſiduum √ȝ 18.idem quod prius.

SVBTRACTIO quoq; radicum commenſurabilium commodiſſime fieri poteſt per regulam auream. Cum enim ſit, vt differentia numerorum fractionis ad maiorem, vel minorẽ eiuſdem fractionis numerum, ita reſiduum, quod quæritur, ad radicem maiorem, vel minorem: Et conuertendo, vt maior numerus fractionis, vel minor, ad differentiam numerorum fractionis, ita maior radix, vel minor ad reſiduum ſubtractionis; Si in dato exemplo fiat;

Vt 5.ad 3.ita √ʒ 50.ad aliud, Vel

Vt 2.ad 3.ita √ʒ 8.ad aliud, producetur reſiduum quæſitum √ʒ 18.

SIC etiam ſi ſubtrahenda ſit √ℭ 162. ex √ℭ 6000. Diuiſa hac per illam, fit Quotiens rationalis √ℭ $\frac{1000}{27}$.id eſt, $\frac{10}{3}$.vbi differentia numerorum fractionis eſt 7.Si ergo fiat,

Vt 10.ad 7. ita √ℭ 6000.ad aliud. Vel

Vt 3.ad 7.ita √ℭ 162.ad aliud,gignetur reſiduum deſideratum √ℭ 2058.

Alia ratio pulchra ſubtrahēdi radices commenſurabiles.

SVBTRAHI etiam poteſt radix à radice,ſi ſint commenſurabiles,hac ratione.Diuiſa maiore per minorem, dematur vnitas ex Quotiente rationali. Si namque reliquus numerus in minorem radicem ducatur, prodibit reſiduum quæſitum.Nam ſi totus Quotiens in minorem radicem,id eſt,in diuiſorem ducatur,producetur maior radix,quæ diuiſa fuit.Cum ergo vnitas in minorem radicem faciat minorem radicem;liquidò conſtat,ſi Quotiens,dempta prius vnitate, ducatur in minorem radicem,gigni eandem maiorem radicem, minus minore radice,hoc eſt differentiam radicum propoſitarum.

SIT ſubtrahēda √ʒʒ 3888 à √ʒʒ 19683.Ex diuiſione fit Quotiens rationalis √ʒʒ $\frac{81}{16}$ hoc eſt, $\frac{3}{2}$.Dempta 1. remanet $\frac{1}{2}$ quæ(reuocata prius ad √ʒʒ $\frac{1}{16}$.)ducta in √ʒʒ 3888.facit √ʒʒ 243.differētiam radicū propoſitarū.

Alia ſubtrahēdi ratio quando radices propoſitæ habent aliam radicem eiuſdem generis communē menſuram.

DENIQVE fieri poterit ſubtractio hoc alio modo. Diuidatur vtraque radix per communem aliquam radicem eiuſdem generis,ita vt Quotientes ſint rationales,ſi fieri poteſt. Nam ſubtracto vno Quotiente ex alio,ſi reliquus numerus ducatur in communem illum diuiſorem,procreabitur radix reſidua. Vt ſi demenda ſit √ʒ 27.à √ʒ 75.Diuiſa vtraque per √ʒ 3.fiunt Quotientes rationales √ʒ 9.& √ʒ 25. hoc eſt,3.& 5. Quorum differentia 2.ducta in communem diuiſorem √ʒ 3. facit √ʒ 12. pro reſiduo ſubtractionis.Ratio huius operationis hæc eſt. Sint duo numeri 10. & 30.quorū differentia 20.diuidanturque per communem diuiſorem 5.Habebunt ergo Quotientes 6.& 2.eandem proportionem,quam 30.& 10. Ac proinde per conuerſionem rationis, erit 30. ad 20. exceſſum,quo antecedens 30,ſuperat conſequentem 10.vt 6. ad 4.exceſſum, quo antecedens 6.ſuperat conſequentem 2.. Et permutando erit 30.ad 6. vt 20.ad 4. Habet autem 30. ad 6 proportionem quintuplam,denominatam videlicet à communi diuiſore 5.Igitur & 20. ad 4.proportionem habebit quintuplam:ideoque 20. diuiſus per 5. faciet Quotientem 4.Ex quo conſtat ſi 4. differentia Quotientum 2.& 6. ducatur in diuiſorem communem 5. produci 20. differentiam numerorum 10.& 30.

20
10 30
5
2 6
4

INTER DATOS DVOS NVMEROS QVOTlibet medios proportionales conſtituere.

CAPVT XXI.

Quotuis medios proportionales inter duos numeros collocare.

AGENDVM iam eſſet de Algorithmo numerorum irrationalium compoſitorum; ſed libet prius exponere vſum quendam præclarum radicum ſimplicium in conſtituendis quotlibet medijs proportionalibus inter datos duos numeros.qui eſt eiuſmodi.Si conſtituendus ſit vnus medius proportionalis, aſſumendum erit ſignum radicale hoc,√ʒ. quod inter quadratum, & vnitatem cadat vnus medius proportionalis in qualibet progreſſione Geometrica,quę ab 1.incipiat.Si duo medij,accipiendum eſt ſignum radicale √ℭ: ſi tres ſignum √ʒʒ: ſi quatuor,ſignum √ß.ſi quinque ſignum √ʒℭ.& ſic deinceps.quod facile nos docebit progreſſio Geometrica in cap.2.poſita.

DEINDE diuiſo maiore numero per minorem, inſtituenda eſt progreſſio Geometrica ab 1. incipiens, & per Quotientem progrediens tot terminorum, duobus amplius, quot medij proportionales deſiderantur.

Tertio cuilibet termino huius progreſſionis præfigendum ſignum radicale, quod aſſumendum eſſe docuimus, pro ratione numeri mediorum.

Quarto,extractis radicibus,quas ſignum radicale indicat,quando extrahi poſſunt,delenda ſunt ſigna radicalia,quorum radices extractæ ſunt.

Quinto ac vltimo pro extremis progreſſionis vltimæ ponendi ſunt numeri dati,ac per minorem ſinguli termini medij multiplicandi.

V.g.ſi inter 5.& 20.ſtatuendus ſit vnus numerus medius,aſciſcendum eſt ſignum hoc radicale √ʒ.

DEINDE diuiſo maiore numero 20.per minorem 5.conſtituenda progreſſio hæc trium terminorum 1.4.16.per Quotientem 4.progrediens.

Tertio cuilibet termino præfigendum ſignum √ʒ hoc modo, √ʒ 1.√ʒ 4.√ʒ 16.eruntque hi termini continuè quoque proportionales,cum ſint radices quadratæ numerorum 1.4.16. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus quadratis,ſic ſtabit progreſſio.1. 2. 4.

[a] Schol. 18. ſeptimi.

Quinto, huius progreſſionis termini ſinguli per numerum minorem 5. multiplicandi ſunt. Vnde ſic ſtabit prgreſſio 5.10.20.inuentusque erit medius terminus proportionalis 10. [a] quia 5. 10. 20.eaſdem habent proportiones,quas 1. 2. 4.cum hos numeros idem numerus 5. multiplicans illos produxerit.

SIN T rurſus inter 6.& 18.inueniendi quinq; medij proportionales.Hic aſciſcendū eſt ſignum √ʒℭ.

DEINDE diuiſo maiore numero 18.per minorem 6. inſtituenda eſt progreſſio ſeptem terminorum per Quotientem 3.progrediens,hoc modo.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio cuilibet termino præponendum ſignum √ʒℭ.vt hic.

√ʒℭ 1. √ʒℭ 3. √ʒℭ 9. √ʒℭ 27. √ʒℭ 81. √ʒℭ 243. √ʒℭ 729.

erunt-

eruntque hi termini continue quoque proportionales, cum ſint radices Zenſicubicæ numerorum 1. 3. 9. &c. continue proportionalium.

Quarto extractis radicibus, quæ extrahi poſſunt, & deletis ſignis, quorum radices extractæ ſunt, ſic ſtabit progreſſio.

1. √ʒce 3. √ce 3. √ʒ 3. √ce 9. √ʒce 243. 3.

Quinto, ac vltimo, multiplicatis ſingulis huius progreſſionis terminis per 6. minorem numerum ex duobus propoſitis, conſtitues ſequentem progreſſionem cum quinque medijs terminis proportionalibus.

6. √ʒce 139968. √ce 648. √ʒ 108. √ce 1944. √ʒce 11337408. 18.

eruntque [a] hi termini continue proportionales, cum ſint producti ex eodem numero 6. in numeros 1. √ʒce 3. √ce 3. &c. continue proportionales. *[a] Schol. 18. ſeptimi.*

QVOD autem hi termini ſint continue proportionales, probari experiendo etiam poteſt. Nam ſumptis quibuslibet tribus proximis, tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in ſe, vt vult propoſ. 20. lib. 7. Eucl. Vt ſumptis hiſce tribus √ce 648. √ʒ 108. √ce 1944. tam ex primo in tertium, quam ex medio in ſe, gignitur numerus 108. Nam ex √ʒ 108. in ſe fit numerus 108 & ex √ce 648. in √ce 1944. fit √ce 1259712. hoc eſt, 108. Item acceptis tribus hiſce, 6. √ʒce 139968. √ce 648. Ex medio in ſe quadrate fit √ʒce 19591041024. hoc eſt extracta radice quadrata 139968. productus numerus eſt √ce 139968. (quia 139968. radicem cubicam non habet.) qui etiam producitur ex 6. in √ce 648. vt liquet.

SCHOLIVM.

SOLET ſæpenumero contingere, vt ex numero aliquo extrahenda ſit radix quadrata, vel cubica, qui eam non habet. Ne ergo fruſtra tempus inſumatur, traduntur à nonnullis, præſertim à Raphaele Bombello, regulæ quædam, quibus facile cognoſcuntur numeri non quadrati, & non cubi.

Primum omnes numeri, qui vltimam figuram ad dexteram habent 2. vel 3. vel 7. vel 8. non ſunt quadrati: quia in numeris quadratis vltima figura neceſſario debet eſſe vna ex his. 1. 4. 5. 6. 9. 0. *Qui numeri non ſint quadrati.*

Deinde nullus numerus, ex quo reiectis 9. vt in probatione nouenaria fieri conſueuit, non ſupereſt aliqua harum figurarum. 1 4 7. 0. quadratus eſt.

Tertio, numerus vltimam figuram habens 5. niſi eam præcedat figura 2. eum alia figura pari, vel cum 0. quadratus eſſe nequit. Vt hi numeri 125. 325. 67525. 89725. 100925. quadrati non ſunt.

Quarto, numeri vltimam figuram habentes 1. vel 9. niſi eam antecedat figura par, aut 0. quadrati non ſunt. Vt hi numeri 4371. 4379. 67899. 75351. quadrati non ſunt.

Quinto, numeri habentes vltimam figuram 4. niſi eam præcedat alia figura par, vel 0. quadrati non ſunt. Vt hi numeri 6934. 70014. quadrati eſſe nequeunt.

Sexto, numeri habentes figuram vltimam 6. niſi eam antecedat figura impar, quadrati non ſunt. Vt numeri 5746. 7086. 34526. quadrati non ſunt.

Septimo ac vltimo, numerus habens in fine plures figuras 0. ſub numero impari, quadratus eſſe non poteſt. Vt numeri 460. 678000. 91010. quadrati non ſunt.

QVOD vero ad cubos attinet, nullus numerus erit cubus, ſi reiectis 9. non remanet 1. vel 8. vel 0. Itaque 12000. non erit cubus, cum reiectis 9. remaneant 3. *Qui numeri non ſint cubi.*

Deinde numerus, cuius vltima figura eſt 2. niſi proxime antecedens figura ſit impar. item cuius vltima figura eſt 4. vel 8. ſi proxime antecedens figura non ſit par, vel 0. non poteſt eſſe cubus. Vt numeri 34562. 456174. 1100038. non ſunt cubi.

Tertio nullus numerus habens in fine 0. vel 00. poteſt eſſe cubus. Vt hi numeri 1230. 100. 34600. cubi non ſunt.

Quarto & vltimo, numerus habens vltimam figuram 5. niſi proxime antecedens figura ſit 2. vel 7. cubus eſſe non poterit. Vt hi numeri. 361035. 67895. 1120015. cubi non ſunt.

Itaque antequam ad extractionem radicis quadratæ, vel cubicæ aggrediaris, operæpretium feceris, ſi prius per conditiones prædictas experiaris, an propoſitus numerus poſſit eſſe quadratus, aut cubus.

DE ADDITIONE AC SVBTRActione numerorum irrationalium compoſitorum.

CAPVT XXII.

CONFICITVR Algorithmus numerorum irrationalium compoſitorum ex radicum ſimplicium Algorithmo, dummodo pro additione, & ſubtractione, in memoriam reducantur regulæ illæ duæ, quæ de ſignis + & — traditæ ſunt cap. 4. videlicet.

I

Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando numeri præpoſterè ponuntur. Tunc enim ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit — & ex — fit +. *Duæ regulæ obſeruandæ in additione, & ſubtractione.*

2

Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis. Et in additione ponitur ſignum maioris numeri: In ſubtractione vero ſuperioris, ſiue maioris ſit, ſiue minor, aut æqualis.

Quæ quidem duæ regulæ cap. 4. prædicto expoſitæ ſunt, & ex ſubiectis exemplis intelligi facile poſſunt.

Exempla Additionis.

6	+	√ȝ	18	
4	+	√ȝ	8	
10	+	√ȝ	50	

√ȝ	27	+	√ȝ	8
√ȝ	12	+	√ȝ	2
√ȝ	75	+	√ȝ	18

√ȝ	162	−	2
√ȝ	200	−	3
√ȝ	722	−	5

√ȝȝ	243	−	√ȝȝ	162
√ȝȝ	48	−	√ȝȝ	32
√ȝȝ	1875	−	√ȝȝ	1250

Exempla Subtractionis.

√ȝȝ	1875	+	√ȝȝ	1250
√ȝȝ	243	+	√ȝȝ	162
√ȝȝ	48	+	√ȝȝ	32

√ȝ	50	−	5
√ȝ	8	−	2
√ȝ	18	−	3

Exempla exceptionis in ſubtractione pro prima regula.

√ȝ	50	+	2
√ȝ	18	+	4
√ȝ	8	−	2

√ȝ	50	−	2
√ȝ	18	−	4
√ȝ	8	+	2

√ȝ	50	+	6	
√ȝ	72	+	2	
	4	−	√ȝ	2

√ȝ	72	+	2	
	6	+	√ȝ	18
√ȝ	18	−	4	

Exempla exceptionis in additione pro regula ſecunda.

√ȝ	50	+	3
√ȝ	32	−	5
√ȝ	162	−	2

√ȝ	50	−	3
√ȝ	32	+	5
√ȝ	162	+	2

Exempla exceptionis in ſubtractione pro regula ſecunda.

√ȝ	162	+	2
√ȝ	50	−	3
√ȝ	32	+	5

√ȝ	162	−	2
√ȝ	50	+	3
√ȝ	32	−	5

Alia exempla additionis.

	8	−	√ȝ	50
√ȝ	242	−	12	
√ȝ	72	−	4	

√ȝ	50	+	6	
	24	−	√ȝ	242
	30	−	√ȝ	72

Alia exempla ſubtractionis.

√ȝ	72	−	4	
	8	−	√ȝ	50
√ȝ	242	−	12	

	30	−	√ȝ	72
√ȝ	50	+	6	
	24	−	√ȝ	242

Alia Exempla ſubtractionis.

√ȝ	0	+	16	
√ȝ	320	−	8	
	24	−	√ȝ	320

√ȝ	180	+	0	
√ȝ	320	−	8	
	8	−	√ȝ	20

Obſeruanda in nonnullis ſubtractionibus.

Hic in priori exemplo quoniam numerus √ȝ 320. non habet reſpondentem in ſuperiori numero, poſitus eſt numerus √ȝ 0. cum ſigno +. Item quia in poſteriori exemplo numerus 8. in ſuperiori numero non habet reſpondentem, poſitus quoque eſt numerus 0. cum ſigno +. quod ſemper in ſubtractione obſeruandum eſt, vt ſuperiores duæ regulæ locum habeant.

VERVM

VERVM in huiuſmodi exemplis fiet hoc etiam modo ſubtractio. Poſt numerum, à quo debet fieri ſubtractio, ponatur numerus ſubtrahendus, commutatis tamen ſingulis ſignis eius in ſigna contraria, ponendo — pro +. & contra. Deinde fiat reductio per additionem. Vt ſi ſubtractio fieri debeat √ʒ320 — 8. à numero 16. ſic ſtabit exemplum. 16 — √ʒ 320 + 8
Si ergo addantur 16. ad 8. fiunt 24. & dempta √ʒ320. erit reſiduum 24 — √ʒ320.

Item ſi fiat ſubtractio √ʒ320 — 8. à √ʒ180. ſic ſtabit exemplum. √ʒ180 — √ʒ320 + 8. Si ergo addantur √ʒ 180. & — √ʒ320 hoc eſt, mutata ſpecie operationis, propter diuerſa ſigna + & —. detracta √ʒ180. de √ʒ320. erit reſiduum 8 — √ʒ20.

Rurſus ſit facienda ſubtractio √ʒ180 — 8. de √ʒ320. ſic ſtabit exemplum. √ʒ320 — √ʒ180 + 8. Si ergo addantur ſimul √ʒ320 — √ʒ180. hoc eſt, mutata ſpecie operationis, propter diuerſa ſigna + & — dempta √ʒ180 de √ʒ320. erit reſiduum 8 + √ʒ20.

Sit præterea facienda ſubtractio 8 — √ʒ12. de √ʒ72 — 4. Sic ſtabit exemplum. √ʒ72 — 4 — 8 + √ʒ12. Si ergo addantur inter ſe √ʒ72. √ʒ12. & — 4 — 8. erit reſiduum √ʒ72 + √ʒ12 — 12. quia radices illę ſunt incommenſurabiles. Quod ſi addantur per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. facient √ʒ (84 + √ʒ3456.) atque adeo reſiduum totum erit √ʒ(84 + √ʒ3456) — 12.

Hoc autem modo recte fieri ſubtractionem, liquido conſtat in numeris rationalibus. Sit enim facienda ſubtractio √ʒ49 — 3. de 8 + √ʒ9. hoc eſt, 4. de 11. vbi reſiduum eſt 7. Secundum præceptum traditum ſic ſtabit exemplum. 8 + √ʒ9 — √ʒ49 + 3. Iam ex 8. & 3. fiunt 11. & ex √ʒ9. & — √ʒ49. fit numerus — 4. Ergo reſiduum eſt 11 — 4. hoc eſt, 7. vt ratio poſtulat.

SED vt totum hoc negotium additionis, ſubtractioniſque planius intelligatur, ſubiungemus alia nonnulla exempla. *Alia exempla additionis, & ſubtractionis.* Sint ergo addenda 7 + √ʒ5. ad 4 + √ʒ3. Ex 7. & 4. fiunt 11. & ex √ʒ5. ac √ʒ3. per propoſ. 4. lib. 2. Euclid. fit √ʒ (8 + √ʒ60.) Igitur ſumma eſt 11 + √ʒ(8 + √ʒ60.)

```
 7 + √ʒ 5
 4 + √ʒ 3
11 + √ʒ(8 + √ʒ 60)
```

RVRSVS ſint addenda √ʒ5 + 3. ad √ʒ20 — 4. Ex √ʒ5. & √ʒ20. quia commenſurabiles ſunt, fit √ʒ45. & ex + 3. ac — 4. fit — 1. Tota ergo ſumma eſt √ʒ45 — 1. Eadem ſumma conſtabitur, ſi √ʒ5. ad √ʒ20. addantur per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. vt ad initium cap. 19. docuimus. Fiet enim √ʒ(25 + √ʒ400.) hoc eſt, √ʒ45. atque ita rurſus erit tota ſumma √ʒ45 — 1.

```
√ʒ  5 + 3
√ʒ 20 — 4
√ʒ 45 — 1
```

PRÆTEREA ſint addenda √ʒ5 + 7. ad √ʒ6 — 7. Ex √ʒ5. & √ʒ6. fit √ʒ (11 + √ʒ 120. & ex + 7. & — 7. fit 0. Summa ergo collecta erit √ʒ(11 + √ʒ120.)

```
√ʒ 5 + 7
√ʒ 6 — 7
√ʒ(11 + √ʒ 120)
```

AMPLIVS ſint addenda √ʒ7 + 3. ad √ʒ20 — 4. Ex √ʒ7. & √ʒ20. fit √ʒ. (27 + √ʒ560) & ex + 3. & — 4. fit — 1. Tota ergo ſumma erit √ʒ (27 + √ʒ560) — 1.

```
√ʒ  7 + 3
√ʒ 20 — 4
√ʒ(27 + √ʒ 560)
```

SINT quoque addenda √ʒ5 + 7. ad √ʒ6 — 2. Ex √ʒ5. & √ʒ6. fit √ʒ. (11 + √ʒ120.) at ex + 7. & — 2. fit + 5. Tota ergo ſumma erit √ʒ(11 + √ʒ120) + 5. Vel 5 + √ʒ(11 + √ʒ120.)

```
√ʒ 5 + 7
√ʒ 6 — 2
√ʒ(11 + √ʒ 120) + 5
```

ITEM ſint addenda 7 + √ʒ5. ad 4 — √ʒ3. Summa erit 11 + √ʒ5 — √ʒ3. Vel ſecundum regulam 2. ſubtrahemus per propoſ. 7. lib. 2. Eucl. √ʒ3. à √ʒ5. propter diuerſa ſigna +. & —. hoc modo. Quadrati numeri 5. & 3. faciunt 8. & ex + √ʒ5. in — √ʒ3. fit — √ʒ15. cuius duplum — √ʒ60. ex aggregato quadratorum 8. auferatur, remanebuntque 8 — √ʒ60. Radix ergo huius relicti eſt id, quod relinquitur poſt detractionem √ʒ3. ex √ʒ5. cui radici præfigendum eſt ſignum +, maioris numeri. Tota ergo ſumma eſt 11 + √ʒ (8 — √ʒ60.)

```
 7 + √ʒ 5
 4 — √ʒ 3
11 + √ʒ 5 — √ʒ 3
```

ITEM ſint addenda 8 — √ʒ7. ad 10 — √ʒ7. Ex 8. & 10. fiunt 18. at ex — √ʒ7. & — √ʒ7. fit — √ʒ28. Tota ergo ſumma erit 18 — √ʒ28.

```
 8 — √ʒ 7
10 — √ʒ 7
18 — √ʒ 28
```

ITEM ſint addenda 10 + √ʒ49. ad 7 — √ʒ4. Vbi manifeſtum eſt ſummam eſſe 22. ex 10. & 7. fiunt 17. Et ſubtracta √ʒ4. à √ʒ49. per propoſ. 7. lib. 2. Eucl. propter ſigna +. & — diuerſa, remanent √ʒ (53 — √ʒ784.) cui præponendum eſt ſignum + maioris numeri. Tota ergo ſumma eſt 17 + √ʒ (53 — √ʒ784.)

```
10 + √ʒ 49
 7 — √ʒ 4
17 + √ʒ(53 — √ʒ784)
```

Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ʒ784. ſit 5. (Nam 28. radix numeri 784. dempta ex 53. relinquit 25. cuius radix quadrata eſt 5.) erit tota ſumma 17 + 5. hoc eſt, 22.

10 — √ʒ 49
7 + √ʒ 4
17 — √ʒ(53 — √ʒ 784)

ITEM ſint addenda 10 — √ʒ49. ad 7 + √ʒ4. vbi etiam liquet, ſummam eſſe 12. Ex 10. & 7. fiunt 17. Et ſubtracta √ʒ4. à √ʒ 49. propoſ. 7. lib. 2. Euclid. propter diuerſa ſigna — & +. remanet √ʒ. (53 — 784) cui præfigendum eſt ſignum — maioris numeri. Tota ergo ſumma collecta eſt 17 — √ʒ(53 — √ʒ784.) Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ʒ784. ſit 5. erit tota ſumma 17 — 5. hoc eſt, 12.

ITEM ſint addenda 6. ad √ʒ 24. + 3. Fiet ſumma √ʒ 24 + 9 Vel 9 + √ʒ 24.

√ʒ 24 + 3
√ʒ 0 + 6
√ʒ 24 + 9

√ʒ 24 — 3
√ʒ 0 + 6
√ʒ 24 + 3

ITEM ſint addenda 6. ad √ʒ 24 — 3. Fiet ſumma √ʒ 24 + 3.

ITEM ſit addenda √ʒ 6. ad √ʒ 24 + 3. Ex radicibus, quia commenſurabiles ſunt, fit √ʒ 54. At ex — 3 & + 0. fit — 3. Summa igitur eſt √ʒ 54 — 3.

√ʒ 24 — 3
√ʒ 6 + 0
√ʒ 54 — 3

ITEM ſit addenda √ʒ8. ad √ʒ 32 + √ʒ 18. Ex √ʒ8. & √ʒ 32. quia commenſurabiles ſunt, fit √ʒ 72. Fit ergo ſumma √ʒ 72 + √ʒ 18. Atque ex his duabus radicibus, cum commenſurabiles ſint, fit √ʒ 162. ſumma quæſita. Vel quia commenſurabiles etiam ſunt √ʒ 8. & √ʒ 18. fiet ex illis √ʒ 50. ita vt tota ſumma ſit √ʒ 50 + √ʒ 32. Atque ex his duabus radicibus, cum ſint commenſurabiles, fit √ʒ 162. ſumma quæſita, vt prius. Itaque hi numeri √ʒ 72 + √ʒ 18. & √ʒ 50 + √ʒ 32. æquales ſunt, cum vterque æqualis ſit √ʒ 162. vt patuit.

√ʒ 8 + √ʒ 0
√ʒ 32 + √ʒ 18
√ʒ 72 + √ʒ 18

ITEM ſit addenda √cc 216 — √ʒʒ 405. ad √cc 64 — √ʒʒ 80. Ex √cc 216. & √cc 64. quia commenſurabiles ſunt, fit √cc 1000. hoc eſt, 10. At ex √ʒʒ 405. & √ʒʒ 80. quia commenſurabiles quoque ſunt, fit √ʒʒ 3125. Tota ergo ſumma eſt 10 — √ʒʒ 3125.

√cc 216 — √ʒʒ 405
√cc 64 — √ʒʒ 80
10 — √ʒʒ 3125

ITEM ſit addenda √ʒʒ 256 — √cc 27 ad √ʒʒ 81 + √cc 8. Ex √ʒʒ 256. & √ʒʒ 81. fit √ʒʒ 2401. hoc eſt, 7. at ex — √cc 27. & + √cc 8. fit — √cc 1. hoc eſt, — 1. Summa ergo tota eſt 7 — 1. hoc eſt 6. Quod ita eſſe, liquet. Nam √ʒʒ 256. eſt 4. à qua ſi tollatur √cc 27. hoc eſt, 3. remanet 1. cui ſi addatur √ʒʒ 81. id eſt 3. & inſuper √cc 8. id eſt 2. fiet ſumma 6. vt prius.

√ʒʒ 256 — √cc 27
√ʒʒ 81 + √cc 8
7 — 1

SINT denique addendæ √ʒ(5 + √ʒ6.) & √ʒ(10 — √ʒ 11.) Huiuſmodi radices, quas ſupra appellauimus radices numerorum irrationalium compoſitorum, diminutorumue, & quas alij radices Vniuerſales, dicunt, non poſſunt commodius in vnam ſummam redigi, quam per ſignum +, hoc modo √ʒ(5 + √ʒ6.) + √ʒ(10 — √ʒ11.) Sic etiam, ſi prior à poſteriori ſit ſubtrahenda, erit reſiduum √ʒ(10 — √ʒ11) — √ʒ(5 + √ʒ6.) Sed de huiuſmodi radicibus plura cap. 24. dicemus.

SIT ſubtrahenda √ʒʒ 256 — √cc 27. à √ʒʒ 2401 — √cc 1. Vbi manifeſtum eſt, reſiduum eſſe 5. Quoniam √ʒʒ 2401. & √ʒʒ 256. commenſurabiles ſunt, ſi hæc ab illa dematur, relinquetur √ʒʒ 81. hoc eſt, 3. Et ſi — √cc 27. à — √cc 1. ſubtrahatur, cum ſint etiam commenſurabiles, remanebit + √cc 8. hoc eſt, 2. Liquet autem 3. & 2. efficere 5. vt ratio poſtulat.

√ʒʒ 2401 — √cc 1
√ʒʒ 256 — √cc 27
√ʒʒ 81 + √cc 8

ITEM ſint ſubtrahenda 9 — √ʒ 50. à √ʒ 72 — 3. Quoniam + √ʒ 72. & — √ʒ 50. habent diſſimilia ſigna, mutabitur ſpecies operationis, hoc eſt, inter ſe addendæ ſunt, fietque earum ſumma √ʒ 242. Item quia — 3. & + 9. habent ſigna diuerſa, fiet etiam additio, & ſumma 12. recipiet ſignum — ſuperioris numeri. Reſiduum ergo quod quæritur, erit √ʒ 242 — 12.

√ʒ 72 — 3
9 — √ʒ 50
√ʒ 242 — 12

ITEM ſit ſubtrahendus à √cc 1000 + √ʒʒ 3125. numerus hic √cc 216 — √ʒʒ 405. Quia √cc 1000. & √cc 216. commenſurabiles ſunt, detracta hac ex illa, remanet √cc 64. hoc eſt, 4. At ex √ʒʒ 3125. & √ʒʒ 405. quæ etiam commenſurabiles ſunt, fit ſumma √ʒʒ 20480. Hæ enim inter ſe addendæ ſunt, iuxta 2. regulam, propter ſigna diſſimilia: eique ſummæ præfigendum ſignum + ſuperioris numeri.

√cc 1000 + √ʒʒ 3125
√cc 216 — √ʒʒ 405
4 + √ʒʒ 20480

DENI-

DENIQVE ſit ſubtrahenda √ce216 —— √ȝȝ405. à √ce 1000 —— √ȝȝ 3125. Reſiduum erit id, quod in hac formula deſcriptum eſt. Nam √ce216. detracta ex √ce 1000. reliquam facit √ce 64. hoc eſt, 4. &c.

√ce 1000	—	√ȝȝ	3125
√ce 216	—	√ȝȝ	405
4	—	√ȝȝ	80

CÆTERVM quando duæ particulæ numeri compoſiti ſunt omnino æquales duabus particulis numeri diminuti, breuiſſime vnus numerus ad alterum additur, vel diminutus à compoſito demitur, hac ratione. *Compendioſa additio, ſubtractioque compoſitorum & diminutorum numerorum ſimilium.*

Additio peracta erit, ſi prior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt ex additione 15 + √ȝ8. ad 15 —— √ȝ8. fit ſumma 30. Item ex additione √ȝ20 + 6. ad √ȝ20 —— 6. fit ſumma √ȝ 80. Sic etiam ex √ȝ20 + √ȝ6. ad √ȝ20 —— √ȝ 6. fit ſumma √ȝ 80. Ratio eſt, quod poſteriores particulæ ſe mutuo interimant, propter ſigna + . & —— .

Subtractio verò abſoluta erit, ſi poſterior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt 10 —— √ȝ 4. ex 10 + √ȝ 4. relinquunt √ȝ16. id eſt 4. Item √ȝ12 —— 5. ex √ȝ12 + 5. relinquunt 10. Item √ȝ12 —— √ȝ 5. ex √ȝ 12 + √ȝ 5. relinquunt √ȝ20. Ratio eſt, quod priores particulæ ex ſubtractione nil relinquant, & poſteriores addendæ ſint, quemadmodum regula 2. præcipit, propter diuerſa ſigna —— & +.

DE MVLTIPLICATIONE, AC DIVISIONE numerorum irrationalium Compoſitorum, & Diminutorum.

CAPVT XXIII.

HIC etiam in memoriam reuocanda eſt regula illa, quam cap. 5. de ſignis + & —— præſcripſimus. Videlicet.

EADEM ſigna ponunt ſignum Additorum: Diuerſa verò ſigna ponunt ſignum Subtractorum. *Regula in multiplicatione, ac diuiſione obſeruanda.*

Siue igitur plus in plus, ſiue minus in minus multiplicetur, ſemper producitur plus. Et ſiue plus in minus, ſiue minus in plus ducatur, ſemper procreatur minus. Poſito igitur ex duobus numeris vno ſub altero, fit multiplicatio, vt in numeris abſolutis, dummodo obſerues ea, quæ cap. 18. de multiplicatione radicum ſimplicium, & cap. 19. de earundem radicum additione, ſubtractioneq; tradita ſunt. id quod exempla infraſcripta docebunt. In ſequenti exemplo, ex —— √ȝ 45. in —— √ȝ20. fit + √ȝ900. hoc eſt, + 30. Et ex —— √ȝ45. in + 6. id eſt, in + √ȝ 36. fit —— √ȝ1620. Et ex —— √ȝ20. in + 8. hoc eſt, in + √ȝ64. fit —— √ȝ1280. Ac denique ex + 8. in + 6. fit + 48. Eritque totus numerus productus 48 —— √ȝ1280 —— √ȝ1620 + 30. qui, ſi fiat reductio per additionem, & ſubtractionem, erit 78 —— √ȝ 5780. Nam ex + 48. & + 30. fiunt + 78. Et ex — √ȝ1280. & — √ȝ1620. quia commenſurabiles ſunt, fit — √ȝ5780.

6 — √ȝ 20
8 — √ȝ 45
48 — √ȝ 1280 — √ȝ 1620 + 30
Per reductionem erit, 78 — √ȝ 5780

IN hoc altero exemplo, ex — √ȝȝ162. in — √ȝȝ648. fit + √ȝȝ 104976. hoc eſt, + 18. Et ex — √ȝȝ162. in + √ȝȝ 288. fit — √ȝȝ 46656. hoc eſt, √ȝ 216. Et ex — √ȝȝ 648. in + √ȝȝ128. fit — √ȝȝ 82944. id eſt, — √ȝ288. ac tandem ex + √ȝȝ128. in + √ȝȝ288. fit + √ȝȝ 36864 id eſt, √ȝ192. Eritque totus numerus productus √ȝ192 — √ȝ288 — √ȝ 216 + 18. Vel, vt maiores ſemper numeri præcedant. 18 + √ȝ192 — √ȝ 288 — √ȝ 216. vt in formula vides.

√ȝȝ 288 — √ȝȝ 648
√ȝȝ 128 — √ȝȝ 162
Productus. √ȝ 192 — √ȝ 288 — √ȝ 216 + 18
Vel 18 + √ȝ 192 — √ȝ 288 — √ȝ 216

Alia exempla multiplicationis.

√ce 7 + √ß 6
√ȝ 3
√ȝce 1323 + √ȝß 8748

√ȝ 7 + √ce 3
√ȝ 2
√ȝ 14 + √ȝce 72

IN priori exemplo reduximus √ß 6. & √ȝ 3. ad eandem denominationem, videlicet ad √ȝß 36. & √ȝß 243. atque ita ex multiplicatione facta eſt √ȝß 8748. Deinde √ȝ 3. & √ce 7. reductæ ſunt ad √ȝce. 27. & √ȝce 49. eiuſdem denominationis, procreataque eſt ex multiplicatione √ȝce 1323.

IN exemplo poſteriori reductæ ſunt √ȝ 2. & √ce 3. ad √ȝce 8. & √ȝce 9. & ex multiplicatione facta eſt √ȝce 72. atque ex √ȝ 2. in √ȝ 7. facta eſt √ȝ 14.

Aliud exemplum in numeris rationalibus.

√ȝ	9	+	√ce	27
			√ȝ	4
√ȝ	36	+	√ȝce	46656
hoc eſt,	6	+	6	

IN hoc exemplo reducuntur √ce 27. & √ȝ 4. ad √ȝce 729. & √ȝce 64. quarum multiplicatio facit √ȝce 46656. hoc eſt, 6. Deinde ex √ȝ 4. in √ȝ 9. fit √ȝ 36. id eſt, 6. ita vt totus numerus productus ſit 6 + 6. hoc eſt, 12.

Alia duo exempla.

7 + √ȝ 5
7 + √ȝ 5
49 + √ȝ 245 + √ȝ 245 + 5

7 − √ȝ 5
7 − √ȝ 5
49 − √ȝ 245 − √ȝ 245 + 5

IN priori exemplo ex numero compoſito in ſe fit productus 49 + √ȝ 245 + √ȝ 245 + 5. hoc eſt, 54 + √ȝ 980 quod ex 49. & + 5. fiant 54. & ex √ȝ 245. & √ȝ 245 hoc eſt, ex duplo √ȝ 245. fiat √ȝ 980. In poſteriori ex numero diminuto in ſe fit productus 49 − √ȝ 245 − √ȝ 245 + 5. hoc eſt, 54 − √ȝ 980.

Compendioſa multiplicatio numeri compoſiti, vel diminuti in ſe.

IMMO vt ducatur numerus compoſitus in ſeipſum, vel in alium æqualem, ſatis eſt, vt quadrata particularum ſimul addantur, & huic ſummæ adijciatur duplum eius, quod fit ex vna particula in aliam, vt in duobus proximis exemplis patet. Nam quadrata particularum conficiunt 54. Et ex vna particula in aliam fit in priori exemplo √ȝ 245. in poſteriori autem − √ȝ 245. cuius duplum eſt √ȝ 980. vel − √ȝ 980. Igitur in exemplo priori producetur numerus 54 + √ȝ 980. In poſteriori vero hic, 54 − √ȝ 980. veluti prius.

Alia duo exempla in numeris rationalibus.

5 + √ȝ 4
5 + √ȝ 4
25 + √ȝ 100 + √ȝ 100 + 4

5 − √ȝ 4
5 − √ȝ 4
25 − √ȝ 100 − √ȝ 100 + 4

IN Priori ducuntur 7. in ſe, fitque productus 49. In poſteriori vero ducuntur 3. in ſe, fitque productus 9. vt liquet. Quæ multiplicationes per compendium proxime traditum ita fient. Quadrata particularum conficiunt 29. Et ex vna particula in aliam, fit, in priori quidem exemplo, √ȝ 100. in poſteriori vero − √ȝ 100. cuius duplum eſt √ȝ 400. vel − √ȝ 400. In priori ergo exemplo productus numerus erit 29 + √ȝ 400. hoc eſt, 49. In poſteriori vero 29 − √ȝ 400. id eſt, 9.

Alia duo exempla.

6 + √ȝ 8
6 − √ȝ 8
36 + √ȝ 288 − √ȝ 288 − 8

√ȝ 10 + √ȝ 2
√ȝ 10 − √ȝ 2
10 + √ȝ 20 − √ȝ 20 − 2

Compendioſa multiplicatio numeri compoſiti quadratarum radicum per ſimilem numerum diminutum.

IN his duobus exemplis radicum quadratarum, ac ſimilibus, in quibus ducitur numerus compoſitus in ſimilem diminutum, aut contra, perficietur breuiſſime multiplicatio, ſi in alterutro numerorum ex quadrato particulæ prioris dematur quadratum poſterioris particulæ, ſiue poſterior particula minor ſit priore, ſiue maior. Vt in priori exemplo, ſi 8. quadratus numerus poſterioris particulæ √ȝ 8. dematur ex 36. numero quadrato prioris particulæ 6. reliquus fiet productus numerus 28. In poſteriori autem exemplo, ſi 2. quadratus numerus poſterioris particulæ √ȝ 2. detrahatur à 10. quadrato numero prioris particulæ √ȝ 10. relinquetur productus numerus 8.

ATQVE ita quotieſcunque numerus compoſitus, ac diminutus radicum quadratarum irrationalis, ſi ſimiles ſint, inter ſe multiplicantur, producitur ſemper vnicus numerus, & is rationalis. quod quidem Eucl. lib. 10. propoſ. 115. demonſtrauit. quia huiuſmodi numeri ſunt Binomium, ac Reſiduum, vt ex cap. 27. conſtabit.

2 + √ȝ 16
2 − √ȝ 16
4 − 16

QVANDO poſterior particula maior eſt, producitur numerus diminutus, vt in hoc appoſito exemplo apparet. Nam ſi 16. quadratus numerus poſterioris particulæ dematur ex 4. quadrato numero particulæ prioris, remanent 4 − 16.

Atque

Atque hoc ita eſſe, docet hæc altera formula multiplicationis. Et quoniam 2 + √ȝ16. faciunt 6. & 2 — √ȝ16. faciunt 2 — 4. ſi 2 — 4. ducantur in 6. fit productus numerus 12 — 24. Neceſſe igitur eſt, hoſce duos numeros 4 — 16. & 12 — 24. eſſe æquales, vt vere ſunt, cum vnus ab altero detractus relinquat 0. vt ſubſcriptæ duæ formulæ ſubtractionum demonſtrant: quia 8 — 8. æquiualent nihilo. quod etiam ex eo patet, quod tam ex 4. ad — 16. quam ex 12. ad — 24. ſemper ſumma fiat — 12. iuxta regulam 2. additionis.

2 + √ȝ 16
2 — √ȝ 16
— √ȝ 64 — 16
4 + √ȝ 64
4 — 16

2 — 4
6
12 — 24

4 — 16 | 12 — 24
12 — 24 | 4 — 16
— 8 + 8 | 8 — 8

PORRO de multiplicatione radicum numerorum compoſitorum, vel diminutorum, quas Vniuerſales dicunt, agemus cap. 24. quod ſequitur.

Exempla Diuiſionis.

Diuiſio numeri compoſiti diminutiue per radicem ſimplicem.

√cc 28 + √cc 20
per √cc 4 √cc 4
(√cc 7 + √cc 5

√cc 28 + √cc 20
per √cc 7 √cc 7
(√cc 4 + √cc 2 6/7

Alia Exempla Diuiſionis.

√ȝ 20 — √cc 10
per 3
(√ȝ 2 2/9 — √cc 10/27

√ȝȝ 8 + √ß 3
per √ȝ 2
(√ȝȝ 2 + √ȝß 9/32

IN priori exemplo, diuiſa √ȝ20. per 3. id eſt, per √ȝ9. fit Quotiens √ȝ2 2/9. Diuiſa vero — √cc10. per + 3. id eſt, per + √cc27. fit Quotiens — √cc 10/27. In poſteriori autem exemplo, reducendæ ſunt √ȝȝ8. & √ȝ2. ad √ȝȝȝ64. & √ȝȝȝ16. eiuſdem denominationis, diuiſaque illa per hanc, fit Quotiens √ȝȝȝ 4. hoc eſt, √ȝȝ2. Eodem modo √ß3. & √ȝ 2. reducendæ ſunt ad √ȝß 9. & √ȝß32. diuiſaque illa per hanc, fit Quotiens √ȝß 9/32. Quoniam autem multiplicatio probat diuiſionem, ſi poſterior Quotiens multiplicetur per √ȝ 2. diuiſorem, producetur numerus diuiſus √ȝȝ8 + √ß3. Nam √ȝß 9/32. & √ȝ2. reducuntur ad √ȝȝß 81/1024. & √ȝȝß1024. quę inter ſe multiplicatæ gignunt √ȝȝß 82944/1024. hoc eſt, √ȝȝß 81. ſiue √ß3. Item √ȝȝ2. & √ȝ2. reducuntur ad √ȝȝȝ4. & √ȝȝȝ16. quæ inter ſe multiplicatæ faciunt √ȝȝȝ 64. hoc eſt, √ȝȝ 8. Item ſi ſit diuidendus numerus √ȝȝ 23328 — √ȝȝ 10368. per 6. hoc eſt, per √ȝȝ1296. fit Quotiens √ȝȝ18 — √ȝȝ 8. hoc eſt 18 — 9. nimirum 9.

QVANDO diuiſor eſt numerus radicum quadratarum, vel zenſizenſicarum compoſitus, aut diminutus, oportet illum multiplicare per numerum ſimilem, mutato ſigno + in —, & ſigno — in +. vt gignatur numerus vnicus rationalis, vt paulo ante dictum eſt, pro diuiſore. Deinde per eundem hunc numerum ita tranſmutatum multiplicandus eſt numerus diuidendus, vt producatur nouus numerus per diuiſorem inuentum diuidendus. [a] Nam hic numerus diuidendus nouus ad diuiſorem nouum inuentum habet eandem proportionem, quam propoſitus numerus diuidendus ad diuiſorem propoſitum: propterea quod idem numerus ille tranſmutatus multiplicans vtrumque horum illos produxit: ac proinde idem Quotiens fiet, ſiue diuidendus propoſitus per propoſitum diuiſorem, ſiue nouus diuidendus inuentus per nouum diuiſorem diuidatur. Quemadmodum quia ita ſe habent 12. ad 3. vt 48. ad 12. ſemper Quotiens 4. procreatur; ſiue 12. per 3. ſiue 48. per 12. diuidantur.

Diuiſio per numerum radicum quadratarum, vel Zenſizenſicarũ compoſitũ, aut diminutũ.

[a] *17 ſept.*

SINT diuidendá 42. per √ȝ25 + √ȝ4. hoc eſt, per 7. vbi Quotiens eſt 6. ſi multiplicetur diuiſor per √ȝ 25 — √ȝ4. gignetur nouus diuiſor 21. qui nimirum remanet, ſi 4. quadratum poſterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ dematur, vt paulo ante dictum eſt. Et ſi diuidendus numerus 42. hoc eſt, √ȝ1764. per eundem numerum √ȝ25 — √ȝ4. multiplicetur, producetur nouus numerus diuidendus √ȝ 44100 — √ȝ7056. quo diuiſo per inuentum diuiſorem 21. hoc eſt, per √ȝ441. fit Quotiens 6. Nam √ȝ100. nimirum 10 — √ȝ16. id eſt, — 4. facit 6. vt manifeſtum eſt.

√ȝ 44100 — √ȝ 7056
√ȝ 441 — √ȝ 441
(√ȝ100 — √ȝ16

SINT rurſus diuidenda 54. per 2 + √ȝ 16. hoc eſt, per 6. vbi Quotiens eſt 9. Si diuiſor ducatur in 2 — √ȝ16. producetur numerus diminutus 4 — 16. quia poſterior particula priore maior eſt. Quare inuertendæ ſunt particulæ diuiſoris hoc modo √ȝ16 + 2, vt ex ductu √ȝ16 — 2. fiat numerus ſimplex 12. pro diuiſore. Quod ſi diuidendus numerus 54. ducatur in eundem numerum √ȝ16 — 2. fiet nouus diuidendus √ȝ 46656 — 108. quo diuiſo per 12. nimirum √ȝ 46656. per √ȝ 144. & — 108. per 12. fit Quotiens √ȝ324 — 9. hoc eſt, 18 — 9. nimirum 9.

ITEM ſint diuidenda 6. per $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. Ducto vtroque numero in $\sqrt{12}-\sqrt{6}$. fiunt $\sqrt{432}-\sqrt{216}$. & 6. Ex diuiſione autem $\sqrt{432}-\sqrt{216}$. per 6. hoc eſt, per $\sqrt{36}$. fit Quotiens $\sqrt{12}-\sqrt{6}$. Probatur. Nam ex Quotiente $\sqrt{12}-\sqrt{6}$. in diuiſorem $\sqrt{12}+\sqrt{6}$. fit numerus diuiſus 6.

ITEM diuidendus ſit numerus $66-\sqrt{2000}$. per $8-\sqrt{45}$. Si vterque numerus ducatur in $8+\sqrt{45}$. fit nouus diuidendus $528-\sqrt{128000}+\sqrt{196020}-\sqrt{90000}$. hoc eſt, $228+\sqrt{7220}$. (Nam detracta $\sqrt{90000}$. id eſt, 300. ex 528. reliquus fit numerus 228. & $\sqrt{128000}$. detracta ex $\sqrt{196020}$. cum hi numeri ſint commenſurabiles, relinquit $\sqrt{7220}$.) atq; nouus diuiſor 19. Fit autem ex diuiſione Quotiens $12+\sqrt{20}$. Nam ex hoc Quotiente in diuiſorem $8-\sqrt{45}$. fit numerus $96+\sqrt{1280}-\sqrt{6480}-\sqrt{900}$. qui æqualis eſt numero diuiſo $66-\sqrt{2000}$. quia $\sqrt{900}$. hoc eſt, 30. ex 96. relinquit 66. & $-\sqrt{6480}$. ex $+\sqrt{1280}$. hoc eſt, ex additione vnius ad alterum propter ſigna diuerſa, cum ſint commenſurabiles, fit numerus $-\sqrt{2000}$.

SINT quoque diuidenda 20. per $\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{81}$. hoc eſt, per 5. vbi Quotiens eſt 4. Inuertatur diuiſor ſic, $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{16}$. vt poſterior particula minor ſit priore, multipliceturque tam diuidendus 20. quam diuiſor $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{16}$. per $\sqrt[4]{81}-\sqrt[4]{16}$. fietque nouus diuidendus $\sqrt[4]{12960000}-\sqrt[4]{2560000}$. & nouus diuiſor $\sqrt[4]{6561}-\sqrt[4]{256}$. hoc eſt $9-4$. videlicet 5. Diuiſo ergo illo diuidendo per 5. hoc eſt, per $\sqrt[4]{625}$. fit Quotiens $\sqrt[4]{20736}-\sqrt[4]{4096}$. hoc eſt, $12-8$. nimirum 4. vt par eſt. Adduxi hoc exemplum in numeris rationalibus, vt intelligeres, eandem eſſe rationem in radicibus zenſizenſicis, quæ eſt in radicibus zenſicis.

SINT rurſus diuidenda 10. per $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}$. Multiplicetur vterque numerus per $\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}$. fietque nouus diuidendus $\sqrt[4]{50000}-\sqrt[4]{30000}$. & nouus diuiſor $\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{9}$. hoc eſt, $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et quoniam hic diuiſor non eſt numerus vnicus rationalis, multiplicabimus tam nouum diuidendum inuentum, quam nouum diuiſorem, per $\sqrt{5}+\sqrt{3}$. fietq; alius nouus diuidendus $\sqrt[4]{1250000}-\sqrt[4]{750000}+\sqrt[4]{450000}-\sqrt[4]{270000}$. & alius diuiſor nouus $5-3$. hoc eſt, 2. Si ergo illum diuidendum per hunc diuiſorem diuidemus, id eſt, per $\sqrt[4]{16}$. faciemus Quotientem $\sqrt[4]{78125}-\sqrt[4]{46875}+\sqrt[4]{28125}-\sqrt[4]{16875}$. Quod probatur. Si namque hic Quotiens ducatur in diuiſorem propoſitum, nimirum in $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}$. producetur numerus diuiſus 10. vt hic patet.

$$\sqrt[4]{78125}-\sqrt[4]{46875}+\sqrt[4]{28125}-\sqrt[4]{16875}$$
$$\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}$$
$$+\sqrt[4]{234375}-\sqrt[4]{140625}+\sqrt[4]{84375}-\sqrt[4]{50625}$$
$$\sqrt[4]{390625}-\sqrt[4]{234375}+\sqrt[4]{140625}-\sqrt[4]{84375}$$

Quoniam enim numeri intermedij, quorum bini æquales ſunt, & diuerſorum ſignorum, ſe mutuo tollunt, relinquetur productus $\sqrt[4]{390625}-\sqrt[4]{50625}$. hoc eſt, $25-15$. videlicet 10.

Diuiſio per numerum radicum quadratarum compoſitũ triũ particularum vel plurium.

PRÆTEREA ſint diuidenda 100. per $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$. Hic quia diuiſor habet tres particulas affectas ſigno +. vt inueniatur diuiſor ſimplex, multiplicandus eſt diuiſor in ſimilem numerum, mutata vltima particula +. in —. vt hic vides. Producetur enim numerus duarum particularum $\sqrt{60}+2$ pro nouo diuiſore, qui etiam habebitur hoc modo. Priores duæ particulæ inter ſe multiplicentur. Nam ſi productus numerus $\sqrt{15}$. duplicetur, proueniet $\sqrt{60}$. pro priore particula. Et ſi vltimæ particulæ numerus 6. dematur ex 8. ſumma numerorum 3. & 5. priorum duarum particularum, remanebit numerus $+2$. pro particula poſteriore.

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$$
$$\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$$
$$-\sqrt{18}-\sqrt{30}-6$$
$$+\sqrt{15}+5+\sqrt{30}$$
$$+3+\sqrt{15}+\sqrt{18}$$
$$\sqrt{60}+2$$

Quod ſi numerus diuidendus 100. per eundem numerum $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$. multiplicetur, gignetur nouus numerus diuidendus $\sqrt{30000}+\sqrt{50000}-\sqrt{60000}$. [a] qui ad nouum diuiſorem inuentum eandem proportionem habebit, quam numerus diuidendus propoſitus 100. ad propoſitum diuiſorem $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

[a] 17. ſept.

Sed quoniam inuentus nouus diuiſor nondum eſt ſimplex, ducemus eum in diminutum ſimilem, nimirum in $\sqrt{60}-2$. efficiemusq; $60-4$. hoc eſt, 56. pro nouo diuiſore. Et ſi nouus diuidendus $\sqrt{30000}+\sqrt{50000}-\sqrt{60000}$. ducatur in eundem numerum $\sqrt{60}-2$. procreabitur nouus numerus diuidẽdus $\sqrt{1800000}+\sqrt{3000000}+\sqrt{240000}-\sqrt{120000}-\sqrt{200000}-\sqrt{3600000}$ quo diuiſo per diuiſorem inuentum 56 prodibit idem Quotiens, qui proueniret, ſi datus numerus 100. per datum diuiſorem $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$. diuideretur.

QVOD ſi diuiſorem datum $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$. & numerum diuidendum 100. multiplicaremus per $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}$. (Nam quando omnes tres particulæ habent ſignum +. poterit quælibet earum mutari in —) produceremus nouum diuiſorem $\sqrt[4]{72}+4$. & nouum diuidendum $\sqrt{30000}-\sqrt{50000}+\sqrt{60000}$. Et ſi tam hic diuidendus, quam ille diuiſor $\sqrt{72}+4$. ducatur in $\sqrt{72}-4$. producetur nouus alius diuidendus, & nouus diuiſor ſimplex 56. [b] ad quem diuidendus nouus eandem proportionem habebit, quam datus numerus diuidendus 100 ad datum diuiſorem $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

[b] 17. ſept.

SI vero diuiſor habuerit vnam particulam cum ſigno —. vertendum erit ſignum — in +. vt fiat multiplicatio.

ATQVE hoc eodem modo, ſi diuiſor habuerit plures particulas radicum quadratarum, quam tres, mutabis ſemper vnam ex +, in —, vel contra. Nam ex prima multiplicatione gignetur numerus totidem particularum, minus vna, & in ſecunda totidem quoque, minus duabus, & ſic deinceps procedendum erit, donec fiat numerus ſimplex pro diuiſore nouo. Diuidendus quoque numerus ducendus eſt in primum numerum multiplicantem: Deinde productus numerus in ſecundum, &c. ita vt tot fiant multiplicationes, quot factæ ſunt, vt diuiſor ſimplex inueniretur.

QVAN-

Diuiſio per numerum radicum cubicarum compoſitũ.

QVANDO diuiſor habet duas particulas radicum cubicarum, inueniendus etiam eſt diuiſor ſimplex. quod ita fiet. Sint V.g. diuidenda 10. per √ce5+√ce3. Per doctrinam propoſ.2.lib.8.Eucl. reperiantur tres numeri continue proportionales (propter 3. exponentem cubi) in proportione particularum diuiſoris, nimirum √ce5. ad √ce3. hac methodo. Primum ducatur √ce5. in ſe, fietque primus numerus √ce25. Deinde ducatur √ce5. in √ce3. gigneturque ſecundus numerus √ce15. Tertio ducatur quoque √ce3. in ſe, prouenietque tertius numerus √ce9. atque ita hi tres numeri producti. √ce25. & √ce15. & √ce9. erunt continue proportionales in proportione √ce5. ad √ce3. vt in dicta propoſ.2.lib.8. ab Euclide demonſtratum fuit. Quod etiam experiri licebit per multiplicationem. Nam poſitis tribus numeris √ce25. √ce15. √ce9. tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in ſe. Item poſitis quatuor numeris √ce5. √ce3. √ce25. √ce15. tantum fit ex primo in quartum, quantum ex ſecundo in tertium. quod etiam in his quatuor √ce5. √ce3. √ce15. √ce9. cernitur. Extremi duo numeri afficiantur ſigno +, & medius ſigno —. hoc modo √ce25 — √ce15 + √ce9. Per hunc communem numerum multiplicantem ſi multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuiſor √ce5 + √ce3. fiet nouus diuidendus √ce25000 — √ce15000 + √ce9000. & nouus diuiſor √ce125 + √ce27. id eſt, 8. vt in ſubiecta formula liquet. qui diuiſor ſimplex habetur, (vt auctores docent, & quod eſt obſeruatione dignum) ſi numeri particularum diuiſoris 5. & 3. ſimul addãtur, etiam ſi nulla fiat multiplicatio.

	√ce 25 — √ce 15 + √ce 9
	√ce 5 + √ce 3
	+ √ce 75 — √ce 45 + √ce 27
	+ √ce 125 — √ce 75 + √ce 45
Summa.	√ce 125 + √ce 27

Diuiſio per numerum radicum zenſizenſicarum, ſurdeſolidarũ, &c. compoſitũ.

EADEM via tenẽda eſt in diuiſore compoſito duarum radicum zenſizenſicarum, ſurdeſolidarum, zenſicubicarum, &c. dummodo tot numeri continue proportionales, ſecundum doctrinam propoſ. 2. lib.8. Eucl. reperiantur in proportione particularum diuiſoris, quot vnitates ſunt in exponente ȝȝ. ß. ȝce. &c. nimirum quatuor in diuiſore radicum zenſizenſicarum, & quinque pro diuiſore radicum ſurdeſolidarum, & ſex pro zenſicubicis, &c. Quibus inuentis, tribuatur primo numero ſignum +. ſecundo ſignum —. tertio iterum ſignum +. & quarto iterum ſignum —. atque ita alternatim procedendo, vt numeri in locis imparibus gerant ſignum +, & in locis paribus ſignũ —. Exemplum ponam in diuiſione 10. per √ȝȝ5 + √ȝȝ3. quam ſupra alio modo expediuimus. Quoniam exponens ȝȝ. eſt 4. inuenientur hi quatuor numeri proportionales √ȝȝ125. √ȝȝ75. √ȝȝ45. √ȝȝ27. iuxta

√ȝȝ 5 + √ȝȝ 3.

√ȝȝ 25. √ȝȝ 15. √ȝȝ 9

√ȝȝ 125 — √ȝȝ 75 + √ȝȝ 45 — √ȝȝ 27

doctrinam propoſ.2.lib.8. Euclid. vt hic cernis: vbi appoſuimus ſignum + numeris locorum imparium, numeris autem locorum parium ſignum — vt diximus faciendum eſſe. Iam ſi per hunc numerum quatuor particularum multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuiſor √ȝȝ5 + √ȝȝ3. reperietur nouus numerus diuidendus √ȝȝ1250000 — √ȝȝ750000 + √ȝȝ450000. — √ȝȝ270000. & nouus diuiſor √ȝȝ625 — √ȝȝ81. hoc eſt, 2. iidem omnino, qui ſupra ante diuiſionem per numerum radicum quadratarũ compoſitum trium particularum. Atq; hic diuiſor, ſine multiplicatione, habetur, vt auctores docent, ſi minoris particulæ numerus in diuiſore dematur ex numero particulæ maioris, videlicet 3. ex 5. vt hæ formulæ indicant.

Inuentio numeri diuidendi.

10. hoc eſt, √ȝȝ 10000

√ȝȝ 125 — √ȝȝ 75 + √ȝȝ 45 — √ȝȝ 27

√ȝȝ 1250000 — √ȝȝ 750000 + √ȝȝ 450000 — √ȝȝ 270000

Inuentio diuiſoris.

√ȝȝ 125 — √ȝȝ 75 + √ȝȝ 45 — √ȝȝ 27

√ȝȝ 5 + √ȝȝ 3

+ √ȝȝ 375 — √ȝȝ 225 + √ȝȝ 135 — √ȝȝ 81

+ √ȝȝ 625 — √ȝȝ 375 + √ȝȝ 225 — √ȝȝ 135

√ȝȝ 625 — √ȝȝ 81

EADEM ratio eſt de cæteris. Sed quando numerus exponens radicum eſt par, vt √ȝ. √ȝȝ. &c. diuiſor ſimplex habetur, ſi (vt auctores docent) numerus particulæ minoris in dato diuiſore ex numero maioris particulæ ſubducatur: at vero, quando exponens numerus eſt impar, vt √ce. √ß. &c. ſimplex diuiſor habetur, ſi numeri particularum diuiſoris dati in vnam colligantur ſummam. id quod in ſuperioribus obſeruatum eſſe vides.

Diuiſio per numerum compoſitũ diuerſarũ radicum.

SED neque hoc omittendum eſt, quando diuiſor eſt duarum radicum diuerſarum, eas ad eandem denominationem eſſe reducendas, antequam operationem auſpiceris.

DENIQVE quando diuiſor eſt plurium particularum, ac diuerſarum radicum, ita vt non facile reduci poſſit ad ſimplicem diuiſorem, conſtituenda erit fractio, cuius numerator ſit numerus diuidendus, & denominator ipſemet diuiſor: non ſecus ac in numeris abſolutis fieri ſolet, quando minor numerus per maiorem diuidendus proponitur, vt 3. per 4. Fit enim fractio $\frac{3}{4}$. Verbi gratia, ſi numerus √ȝ48 + √ce3. diuidendus ſit per √ȝ15 + √ce6. — √ȝ3. fiet hæc fractio.

Numerator.	√ȝ 48 + √ce 3
Denominator.	√ȝ 15 + √ce 6 — √ȝ 3

SCHO-

SCHOLIVM.

Vter duorũ numerorũ compoſitorum maior ſit.

ACCIDIT non raro, vt inter duos numeros irrationales compoſitos ambigatur, vter eorum maior ſit. quæ ambiguitas ita tolletur. Sint propoſiti duo numeri, 4 + √ʒ 7. & 20 — √ʒ 180. Auferatur vtrobique numerus 4. remanebitque ex vna parte, √ʒ 7. & ex altera, 16 — √ʒ 180. Certum autem eſt, ſi duo numeri dati ſint æquales, reſidua etiam æqualia eſſe: Et ſi inæquales, reſidua eodem modo eſſe inæqualia. Quadretur vtrumque reſiduum, eritque prioris reſidui quadratum 7. poſterioris vero, 436 — √ʒ 184320. Certum quoque eſt, ſi reſidua ſint æqualia, eorum quadrata quoque æqualia eſſe: Et ſi illa ſint inæqualia, hæc etiam eſſe inæqualia. Addatur vtrique quadrato diminutum hoc — √ʒ 184320. fientque numeri 7 + √ʒ 184320. & 436. Auferantur vtrinque 7. eruntque reliqui numeri √ʒ 184320. & 429. qui quadrentur, vt fiant 184320. & 184041. Et quia illud quadratum maius eſt, quam hoc, pronunciabis numerum 4 — √ʒ 7. maiorem eſſe numero 20 — √ʒ 180. Eodem pacto cum alijs numeris procedes. Hoc etiam per extractiones radicum conſtat. Nam radix propinqua numeri 7. eſt $2\frac{3}{5}$. quæ cum 4. facit $6\frac{3}{5}$. At radix propinqua numeri 180. eſt $13\frac{11}{27}$. quæ dempta ex 20. relinquit $\frac{16}{27}$. Conſtat autem $\frac{3}{5}$. eſſe numerum maiorem, quam $\frac{16}{27}$. Atque ita habes aliam rationem tollendi ambiguitatem. Sed prior ratio eſt magis accurata.

DE RADICIBVS NVMERORVM IRRATIOnalium compoſitorum, vel diminutorum: quas alij Vniuerſales dicunt: & de earundem Algorithmo.

CAPVT XXIV.

Variæ radices numerorũ compoſitorum.

HÆ radices oriuntur plerunque ex additione, ac ſubtractione radicum irrationalium ſimplicium incommenſurabilium, vt in cap. 19. ac 20. patuit: quas hoc loco paulo diligentius explicare proponimus. quod exequemur, expoſitis varijs radicibus numerorum compoſitorum, vna cum earum Algorithmo. Si igitur ex hoc numero compoſito, 10 + √ʒ 7. extrahenda ſit radix quadrata, erit ea √ʒ (10 + √ʒ 7.) cuius ſenſus eſt, vt radice quadrata numeri 7. ſi haberi poſſet, addita ad 10. totius numeri radix quadrata ſumatur. In hac vero altera radice, √ce (10 + √ʒ 7.) intelligimus radicem cubicam numeri ex 10. & √ʒ 7. compoſiti. Et vt res planius percipiatur, proferemus exempla in numeris rationalibus. Vt √ʒ (10 + √ʒ 16 + 3 + √ʒ 64) nihil aliud ſignificat, quam 5. Nam √ʒ 16. eſt 4. quæ addita ad 3. facit 7. & 7. cum √ʒ 64. id eſt, cum 8. faciunt 15. quibus ſi addantur 10. fiunt 25. pretium totius numeri compoſiti, cuius radix quadrata eſt 5. Item √ce (√ʒ 25 + √ʒ 9) erit 2. Eſt enim ſenſus, vt ſumptis radicibus quadratis numerorũ 25. & 9. quæ ſunt 5. & 3. efficientes 8. extrahatur ex hac ſumma radix cubica, quæ eſt 2. Hæc vero radix, √ʒ (10 + √ʒ 36) + √ʒ (70 + √ʒ 121.) valebit 13. Significatur enim radicem quadratam compoſiti 10 + √ʒ 36. quod eſt 16. nimirum √ʒ 16. quæ eſt 4. addi ad 9. radicem quadratam compoſiti 70 + √ʒ 121. quod eſt 81.

Quadrata & cubi radicum numerorum compoſitorum.

QVEMADMODVM autem quadratum radicis quadrati cuiuſuis ſurdæ ſimplicis eſt ipſe numerus, deleto ſigno radicali √ʒ. Et cubus radicis cubicæ ſimplicis, ipſe numerus, deleto ſigno radicali √ce. Vt quadratum √ʒ 5. eſt 5. & quadratum √ʒ 25. eſt 25. Cubus vero √ce 12. eſt 12. & cubus √ce 27. eſt 27. propterea quod radix quælibet quadrata ducta in ſe quadrate producit eius radicis quadratum, ducta vero in ſe cubice gignit cubum eiuſdem radicis: Ita quoque quadratum radicis quadratæ numeri cuiuſlibet compoſiti eſt ipſemet numerus compoſitus, deleto ſigno √ʒ. Et cubus radicis cubicæ numeri compoſiti cuiuſuis eſt ipſemet numerus, deleto ſigno √ce. Vt quadratum √ʒ (11 + √ʒ 9 + √ʒ 4.) eſt 11 + √ʒ 9 + √ʒ 4. hoc eſt, 16. ita vt illa radix valeat 4.

Quadratum √ʒ (√ʒ 49 + √ʒ 36 — √ʒ 16) eſt √ʒ 49 + √ʒ 36 — √ʒ 16. hoc eſt, 9. ita vt radix illa valeat 3.

Quadratum √ʒ (√ʒ 64 + √ʒ 49 + √ʒ 36 — 5) eſt √ʒ 64 + √ʒ 49 + √ʒ 36 — 5. hoc eſt, 16. ita vt valor illius radicis ſit 4.

Quadratum √ʒ (√ce 216 + √ce 27) eſt √ce 216 + √ce 27. hoc eſt, 9. pretiumque eius radicis eſt 3.

Quadratum √ʒ (√ce 216 — √ce 27.) eſt √ce 216 — √ce 27. hoc eſt, 3. valorque eius radicis eſt √ʒ 3.

Cubus √ce (√ʒ 25 + √ʒ 9) eſt √ʒ 25 + √ʒ 9. hoc eſt, 8. ita vt radix illa valeat 2.

Cubus √ce (√ʒ 25 — √ʒ 9) eſt √ʒ 25 — √ʒ 9. id eſt, 2. pretiumque radicis illius eſt √ce 2.

Cubus √ce (√ce 64 + √ce 27.) eſt √ce 64 + √ce 27. id eſt, 7. ita vt radix illa ſit √ce 7. Idemque iudicium facies de zenſizenſis, ac ſurdeſolidis, &c. radicum zenſizenſicarum, & ſurdeſolidarum numerorum compoſitorum. Propoſui autem exempla in numeris rationalibus, vt res fieret clarior. Atque hoc modo multiplicatur radix cuiuſlibet numeri compoſiti in ſe; hoc eſt, producitur eius quadratum, vel cubus, &c.

Multiplicatio radicis numeri cõpoſiti in ſe. Multiplicatio radicũ numerorũ compoſitorum.

AT vero radix numeri compoſiti in radicem ſimplicem, vel in numerũ compoſitum, vel in numerum abſolutum, vel denique in aliam radicem numeri compoſiti, multiplicabitur hac ratione. Vterq; numerus tam multiplicandus, quam multiplicans, reducatur ad quadratum, vel cubum. Deinde fiat multiplicatio, vt ſupra traditum eſt. Nam radix totius producti erit numerus procreatus ex multiplicatione, quemadmodum ex √ʒ 5. in √ʒ 12. fit √ʒ 60. radix nimirum zenſica numeri 60. ex multiplicatione quadratorum 5. & 12. producti. Item ſicut ex √ce 9. in √ce 10. fit √ce 90. videlicet radix cubica numeri 90. qui ex multiplicatione cubi 9. in cubum 10. gignitur, vt cap. præcedenti traditum eſt. Hoc autem clarius ex ſequentibus exemplis diſces. Sit enim multi-

multiplicanda √ʒ(7+√ʒ3.) per 2. Quadrata ſunt 7+√ʒ3.& 4. Si ergo ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et ſi ducatur √ʒ3. in 4. hoc eſt, in √ʒ16. fit √ʒ48. Totus ergo numerus productus eſt √ʒ(28+√ʒ48.) Rite autem hoc modo fieri multiplicationē, diſces ex hoc altero exemplo numerorum rationalium. Sit ducenda √ʒ(7+√ʒ4.) hoc eſt, 3. (nam 7. cum √ʒ4. faciunt 9. cuius √ʒ eſt 3.) per 2. Vbi manifeſtum eſt, numerum genitum fore 6. Quadrata ſunt 7+√ʒ4. Si igitur ducãtur 4. in 7. fiunt 28. Et ſi √ʒ4. ducatur in 4. hoc eſt, in √ʒ16. fit √ʒ64. eritq; totus numerus productus √ʒ(28+√ʒ64.) hoc eſt, √ʒ36. nimirum 6. vt conuenit.

7 + √ʒ 3
4
28 + √ʒ 48

7 + √ʒ 4
4
28 + √ʒ 64

Sit rurſus multiplicanda √ʒ(7+√ʒ4) per 3. hoc eſt 3. per 3. vbi productus numerus eſt 9. Quadrata ſunt 7+√ʒ4. & 9. Ex 9. in 7. fiunt 63. & ex √ʒ4. in 9. hoc eſt, in √ʒ81. fit √ʒ324. Productus ergo numerus erit √ʒ(63+√ʒ324) hoc eſt, √ʒ81. nimirum 9.

7 + √ʒ 4
9
63 + √ʒ 324

ITEM ſit multiplicnda √ʒ(√ʒ25+√ʒ16) hoc eſt, √ʒ9. ſiue 3. per 3. vbi etiam conſtat, productum numerum fore 9. Quadrata ſunt √ʒ25+√ʒ16. & 9. Ex √ʒ25. in 9 hoc eſt, in √ʒ81. fit √ʒ2025. Et ex √ʒ16. in 9. id eſt, in √ʒ81. fit √ʒ1296. Procreatus ergo numerus erit √ʒ(√ʒ2025+√ʒ1296.) hoc eſt, √ʒ(45+36) ſiue √ʒ81. hoc eſt, 9.

√ʒ 25 + √ʒ 16
9
√ʒ 2025 + √ʒ 1296

SIT multiplicanda √ce(√ce64+√ce27.) hoc eſt, √ce7. per 2. vbi productus erit √ce56. Cubi numerorum ſunt √ce64+√ce27. & 8. Ex √ce64. in 8. hoc eſt, in √ce512 fit √ce32768. & ex √ce27. in 8. hoc eſt, in √ce512. fit √ce13824. Cū ergo √ce32768. ſit 32. Et √ce13824. ſit 24. erit productus numerus √ce(32+24) id eſt, √ce56.

√ce 64 + √ce 27
8
√ce 32768 + √ce 13824

SIT multiplicanda √ce(64+√ce27.) per 2. Cubi numerorum ſunt 64+√ce27. & 8. Ex 64. in 8. fiunt 512. Et ex √ce27. in 8. id eſt, in √ce512. fit √ce13824. quæ eſt 24. additaque ad 512. facit 536. Eſt ergo productus numerus √ce536. atque ita eſt. Nam √ce(64+√ce27) hoc eſt, √ce67. ducta in 2. hoc eſt, in √ce8. facit √ce536.

64 + √ce 27
8
512 + √ce 13824

SIT ducenda √ce(√ce64+√ʒ36+3.) in 5. Cubi numerorū ſunt √ce64+√ʒ36+3. & 125. Ex √ce64. in 125. id eſt, in √ce1953125. fit √ce125000000. At ex √ʒ36. in 125. id eſt, in √ʒ15625. fit √ʒ562500. Et ex 3. in 125. fiunt 375. Cum ergo √ce125000000. ſit 500. & √ʒ562500. ſit 750. erit procreatus numerus √ce1625. vt ratio poſtulat. Nam √ce(√ce64+√ʒ36+3) hoc eſt, √ce13. ducta in 5. hoc eſt, in √ce125. facit √ce1625.

√ce 64 + √ʒ 36 + 3
125
√ce 125000000 + √ʒ 562500 + 375

SI numerus per 5 multiplicandus, fuiſſet √ce(√ce64+√ʒ36−3.) productus fuiſſet numerus √ce(√ce125000000+√ʒ562500−375.) hoc eſt, √ce(500+750−375.) hoc eſt, √ce875. quod verum eſt. Nam √ce(√ce64+√ʒ36−3.) eſt √ce7. quæ ducta in 5. hoc eſt, in √ce125. facit √ce875.

SIT multiplicanda √ʒ(12+√ʒ6) per 6. Quadrata numerorum ſunt 12+√ʒ6. & 36. Ex 12. in 36. fiunt 432. Et ex √ʒ6. in 36. hoc eſt, in √ʒ1296. fit √ʒ7776. Productus igitur ex multiplicatione numerus eſt √ʒ(432+√ʒ7776.)

12 + √ʒ 6
36
432 + √ʒ 7776

SIT ducenda √ʒ(13+√ʒ144) hoc eſt, √ʒ25. id eſt, 5. per 6. vbi certum eſt, gigni 30. Quadrata numerorum ſunt 13+√ʒ144. & 36. Ex 13. in 36. fiunt 468. Et ex √ʒ144. in 36. id eſt, in √ʒ1296. fit √ʒ186624. Numerus ergo productus eſt √ʒ(468+√ʒ186624.) hoc eſt, √ʒ900. id eſt, 30.

13 + √ʒ 144
36
468 + √ʒ 186624

SIT multiplicãda √ʒ(13+√ʒ9) per √ʒ(5+√ʒ16) hoc eſt, √ʒ16. id eſt, 4. per √ʒ9. id eſt, per 3. vbi conſtat produci 12. Quadrata numerorū ſunt 13+√ʒ9. & 5+√ʒ16. Ex √ʒ9. in √ʒ16. fit √ʒ144. Et ex √ʒ16. in 13. id eſt, in √ʒ169. fit √ʒ2704. Deinde ex √ʒ9. in 5. hoc eſt in √ʒ25. fit 5ʒ225. Et ex 5. in 13. fiunt 65. Iam √ʒ144. id eſt, 12. cum 65. facit 77. quibus ſi addantur √ʒ2704. & √ʒ225. nimirum 52. & 15 fiunt 144. Igitur √ʒ144. id eſt, 12. eſt numerus productus, vt dictum eſt.

13 + √ʒ 9
5 + √ʒ 16
√ʒ 2704 + √ʒ 144
65 + √ʒ 225
√ʒ 2704 + √ʒ 225 + 77

SIT rurſus multiplicãda √ʒ(√ʒ1800+30) − √ʒ(√ʒ450+15) per √ʒ(√ʒ450+15.) Scribantur numeri, vt hic vides. Ex √ʒ(√ʒ450+15) in √ʒ(√ʒ450+15) fit eius quadratus √ʒ450+15. præpoſito ſigno −. cū + in − ducatur. Ex √ʒ(√ʒ1800+30) in √ʒ(√ʒ450+15) fit √ʒ810000+√ʒ1620000+450. ſi nimirū quadrata

√ʒ(√ʒ1800+30) − √ʒ(√ʒ450+15)
√ʒ(√ʒ450+15) √ʒ(√ʒ450+15)
+√ʒ4050000+450 − √ʒ450+15
√ʒ810000+√ʒ4050000
√ʒ810000+√ʒ16200000+450

nume-

numerorum inter ſe multiplicentur: hoc eſt, 1350 + √ʒ 1620000. quia √ʒ 810000. æquiualet 900. qui numerus additus ad 450. facit 1350. & præpoſito ſigno √ʒ. erit productus numerus √ʒ (1350 + √ʒ 1620000.) Eſt autem radix huius Binomij 1350 + √ʒ 1620000. numerus √ʒ 900 + √ʒ 450. vt ex cap. 28. conſtabit: hoc eſt, 30 + √ʒ 450. ex qua ſi dematur prior productus — √ʒ 450 + 15. factus ex √ʒ (√ʒ 450 + 15) in ſe, relinquetur numerus 15. vt in hac formula cernis. qui quidem gignitur ex multiplicatione √ʒ (√ʒ 1800 + 30) — √ʒ (√ʒ 450 + 15) in √ʒ (√ʒ 450 + 15)

30 + √ʒ 450
15 — √ʒ 450
15

HAC ratione rite fieri multiplicationem, perſpicuum fiet, hoc altero exemplo propoſito. vbi fit multiplicatio 1. in 3. productusque numerus eſt 3. Nam ex √ʒ (√ʒ 9 + 6) in √ʒ (√ʒ 9 + 6) fit eius quadratus √ʒ 9 + 6. præpoſito ſigno —. cum + in — ducatur. Deinde ex √ʒ (√ʒ 4 + 14) in √ʒ (√ʒ 9 + 6) fit numerus √ʒ 144. id eſt, 12. vt in præcedenti formula vides. Nam √ʒ 36. eſt 6. & √ʒ 144. eſt 12. & √ʒ 1764. eſt 42. quæ omnes cum 84. faciunt 144. & præpoſito ſigno √ʒ. fit productus √ʒ 144. nimirum 12. à quo ſi detrahatur alter productus √ʒ 9 + 6. nimirum 9, ſupererunt 3. pro toto numero producto.

√ʒ (√ʒ 4 + 14) — √ʒ (√ʒ 9 + 6)
√ʒ (√ʒ 9 + 6) √ʒ (√ʒ 9 + 6)
+ √ʒ 144 + 84 — √ʒ 9 + 6
√ʒ 36 + √ʒ 1764
√ʒ 144 — 9

SIT quoque multiplicanda √ʒ (6 + √ʒ 9) per numerum compoſitum √ʒ 4 + √ʒ 16. Quadratum prioris numeri eſt 6 + √ʒ 9. poſterioris autem 20 + √ʒ 256. vt patet, ſi √ʒ 4 + √ʒ 16. ducatur in √ʒ 4 + √ʒ 16. Multiplicatione igitur facta, vt hic vides, erit numerus productus √ʒ (√ʒ 9216 + √ʒ 3600 + √ʒ 2304 + 120) hoc eſt, √ʒ 324. nimirum 18.

6 + √ʒ 9
20 + √ʒ 256
√ʒ 9216 + √ʒ 2304
120 + √ʒ 3600
√ʒ 9216 + √ʒ 3600 + √ʒ 2304 + 120

MVLTIPLICETVR √ʒ (7 + √ʒ 4) hoc eſt √ʒ 9. nimirum 3. per √ʒ 9. hoc eſt, per 3. vbi perſpicuum eſt, numerum gigni 9. Quadrata numerorum ſunt 7 + √ʒ 4. & 9. Ex √ʒ 4. in 9. id eſt, in √ʒ 81. fit √ʒ 324. Et ex 7. in 9. fiunt 63. Igitur productus numerus erit √ʒ (63 + √ʒ 324.) hoc eſt, √ʒ 81. ſiue 9. vt diximus.

7 + √ʒ 4
9
63 + √ʒ 324

MVLTIPLICETVR √ʒ (12 + √ʒ 6) per √ʒ 12 + √ʒ 6. Quadrata numerorũ ſunt 12 + √ʒ 6. & 18 + √ʒ 288. vt conſtat, ſi √ʒ 12 + √ʒ 6. ducatur in ſe. (Producitur enim numerus iſte 12 + ʒʒ 288 + 6. conſtat autem 12. & 6. facere 18.) Ex √ʒ 288. in √ʒ 6. fit √ʒ 1728. Et ex √ʒ 288. in 12. hoc eſt, in √ʒ 144. fit √ʒ 41472. Et ex √ʒ 6. in 18. id eſt, in √ʒ 324. fit √ʒ 1944, Ac tandem ex 12. in 18. fiunt 216. Itaque totus numerus productus erit √ʒ (216 + √ʒ 1944 + √ʒ 41472 + √ʒ 1728.)

12 + √ʒ 6
18 + √ʒ 288
√ʒ 41472 + √ʒ 1728
216 √ʒ 1944
216 + √ʒ 1944 + √ʒ 41472 + √ʒ 1728

Multiplicatio radicis numeri compoſiti, vna cũ radice numeri diminuti ſimilis, in ſeipſam.

CÆTERVM quando radix zenſica numeri compoſiti, vna cum radice zenſica numeri diminuti ſimilis in ſeipſam multiplicanda proponitur. quod non raro in Binomijs, ac reſiduis (de quibus in cap. 27. & 28.) accidit, ita agemus. Sit in ſe multiplicanda √ʒ (12 + √ʒ 6) + √ʒ (12 — √ʒ 6) Scribatur numerus bis, vt in multiplicatione fieri ſolet. Et quoniam ex propoſ. 4. lib. 2. Eucl. quadrata partium √ʒ (12 + √ʒ 6) & √ʒ (12 — √ʒ 6) vna cum eo, quod ex vna parte √ʒ (12 — √ʒ 6) bis fit in alteram partem √ʒ (12 + √ʒ 6) æqualia ſunt ei, qui fit ex numero in ſe: Sunt autem quadrata partium 12 + √ʒ 6. & 12 — √ʒ 6. quæ ſimul faciunt 24. (Nã + √ʒ 6. & — √ʒ 6. ſe mutuo tollunt) Et ex vna parte in alterã fit √ʒ 138 (quia 6. quadratum √ʒ 6. demptum ex 144. quadrato numeri 12. relinquit 138. cui numero præfigendum eſt ſignum √ʒ) cuius duplum eſt √ʒ 552. Productus ergo numerus eſt 24 + √ʒ 552. Atque radix huius producti eſt etiam ſumma duarum radicum √ʒ (12 + √ʒ 6) & √ʒ (12 — √ʒ 6) in vnam ſummam collectarum. Nam quando ſumma duorum numerorum in ſe ducitur, radix quadrata producti numeri eſt eorundem duorum numerorum ſumma. Ac proinde cum duæ hæ radices propoſitæ ſimul in ſe ductæ faciant 24 + √ʒ 552. erit huius producti radix, nimirum √ʒ (24 + √ʒ 552) illarum duarum radicum ſumma.

√ʒ (12 + √ʒ 6) + √ʒ (12 — √ʒ 6)
√ʒ (12 + √ʒ 6) + √ʒ (12 — √ʒ 6)
12 + √ʒ 6 + 12 — √ʒ 6
√ʒ 138
√ʒ 138
√ʒ 552.
24 + √ʒ 552

Summa ex radice numeri compoſiti, & radice numeri diminuti ſimilis collecta.

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit in ſe multiplicanda √ʒ (10 + √ʒ 36) + √ʒ (10 — √ʒ 36) hoc eſt, 6. in ſe: vbi numerus procreatur 36. Quadrata partium ſunt 10 + √ʒ 36. & 10 — √ʒ 36. quæ ſimul additæ faciunt 20. Et ex vna parte in alteram fit √ʒ 64. quæ bis ſumpta facit √ʒ 256. id eſt, 16. atque adeo productus numerus eſt 20 + 16. hoc eſt, 36. vt par eſt. Atque radix huius numeri, nimirum 6. eſt ſumma quoq; ex duabus illis radicibus collecta, vt manifeſtum eſt.

√ʒ (10 + √ʒ 36) + √ʒ (10 — √ʒ 36)
√ʒ (10 + √ʒ 36) + √ʒ (10 — √ʒ 36)
10 + √ʒ 36 + 10 — √ʒ 36
√ʒ 64
√ʒ 64
√ʒ 256
Productus 20 + √ʒ 256. hoc eſt, 36.

PRÆTEREA quando multiplicandus eſt numerus compoſitus ex radice ſimplici, & radice compoſiti numeri, hoc eſt, ex radice ſimplici, & radice Vniuerſali, per numerum diminutum ſimilem: locum etiam habet compendium cap. 23. traditum ante exempla diuiſionis, ad finem nimirum exemplorum multiplicationis.

Vt ſi ducendus ſit numerus √ʒ20 + √ʒ (20 — √ʒ5) in numerum √ʒ20 — √ʒ5) ſcribatur vnus numerus ſub alio, vt hic vides. Nam ſi 20 — √ʒ5 quadratum poſterioris particulæ numeri compoſiti, vel diminuti, detrahatur ex 20. quadrato particulæ prioris, reliquus erit numerus 0 + √ʒ5. vt in hac altera formula cernitur. quia 20. ex 20. nil relinquunt: at — √ʒ5. ex + √ʒ0. (quoniam diuerſa ſigna mutant ſpeciem, fitque additio) remanet + √ʒ5. vt in Subtractione radicum ſimplicium diximus. atque ita ex √ʒ20 + √ʒ (20 — √ʒ5.) in √ʒ (20 — √ʒ0 + √ʒ5) producitur √ʒ5.

√ʒ 20 + √ʒ (20 — √ʒ 5)
√ʒ 20 — √ʒ (20 — √ʒ 5)
√ʒ 5

20 + √ʒ 0
20 — √ʒ 5
0 + √ʒ 5

IMMO hoc compendio vti etiam licebit, quando multiplicandus eſt numerus compoſitus ex numero Coſſico, & radice numeri Coſſici compoſiti vel diminuti, per numerum diminutum ſimilem. Vt ſi ducendus ſit numerus $\frac{1}{2}$ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ + 1ʒ) in $\frac{1}{2}$ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ + 1ʒ.) Scripto vno numero ſub alio, vt hic cernis, detrahitur quadratum $\frac{1}{4}$ʒʒ + 1ʒ poſterioris particulæ ex $\frac{1}{4}$ʒʒ. quadrato particulæ prioris, vt hæc altera formula oſtendit. Nam reliquus numerus 0 — 1ʒ. erit is, qui producitur ex vno numero in alium.

$\frac{1}{2}$ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ + 1ʒ)
$\frac{1}{2}$ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ + 1ʒ)
— 1 ʒ

$\frac{1}{4}$ʒʒ + 0 ʒ
$\frac{1}{4}$ʒʒ + 1 ʒ
0 — 1 ʒ

SIC etiam ex $\frac{1}{2}$ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ — 1ʒ) in $\frac{1}{2}$ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ — 1ʒ) gignetur numerus 1ʒ. vt aliæ duæ hæ appoſitæ formulæ docent.

$\frac{1}{2}$ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ — 1 ʒ)
$\frac{1}{2}$ʒ — √ʒ ($\frac{1}{4}$ʒʒ — 1 ʒ)
1 ʒ

$\frac{1}{4}$ʒʒ + 0 ʒ
$\frac{1}{4}$ʒʒ — 1 ʒ
0 + 1 ʒ

DIVISIO radicum huiuſmodi fit hoc modo. Tam numerus diuidendus, quam diuidens reducatur ad quadratum: Deinde diuiſio fiat, vt ſupra explicatum eſt. Radix enim producti numeri erit Quotiens. vt exempla probabunt. quemadmodum, vt in cap. præcedenti diximus, ex diuiſione √ʒ12. per √ʒ3. exit √ʒ4. radix nimirum zenſica numeri 4. qui fit ex diuiſione quadrati 12. per quadratum 3. Item ſicut ex diuiſione √ß30. per √ß5. fit Quotiens √ß6. radix videlicet ſurdeſolida numeri 6. ex diuiſione ſurdeſolidi 30. per ſurdeſolidum 5. procreati. *Diuiſio radicum numerorum compoſitorum.*

SIT diuidenda √ʒ (13 + √ʒ7) per √ʒ5. Quadrata numerorum ſunt 13 + √ʒ7. & 5. Ex diuiſione 13. per 5. exeunt 2 $\frac{3}{5}$. Et ex √ʒ7. per 5. id eſt, per √ʒ25. exeunt √ʒ $\frac{7}{25}$. Totus ergo Quotiens eſt √ʒ (2$\frac{3}{5}$ + √ʒ $\frac{7}{25}$.)

13 + √ʒ 7 (2$\frac{3}{5}$ + √ʒ $\frac{7}{25}$
5 √ʒ 25

SIT diuidenda √ʒ (432 + √ʒ7776) per 6. Quadrata numerorum ſunt 432 + √ʒ7776. & 36. Diuiſis 432. per 36. exeunt 12. & diuiſa √ʒ7776. per 36. id eſt, per √ʒ1296. exit √ʒ6. Quotiens ergo totus erit √ʒ (12 + √ʒ6.)

1
17 153
432 + √ʒ 7776 (12 + √ʒ 6.
366 1296
3

SIT diuidenda √ʒ (√ʒ588 + √ʒ34848) per √ʒ (12 + √ʒ8) Quadrata numerorum ſunt 588 + √ʒ34848. & 12 + √ʒ8. Quoniam diuiſor eſt numerus compoſitus, multiplicandus erit per 12 — √ʒ8. mutato ſigno + in —. vt ſupra cap. 23. dictum eſt: vt fiat nouus diuiſor √ʒ136. Quod ſi per eundem numerum 12 — √ʒ8. multiplicetur diuidendus numerus, fiet nouus diuidendus √ʒ (6528 + √ʒ332928.) Fit enim numerus productus √ʒ (7065 + √ʒ5018112 — √ʒ2765952 — √ʒ278784) qui reducitur ad √ʒ (6528 + √ʒ332928) quia radix numeri 278784. eſt 528. quæ detracta ex 7056. relinquit 6528. Et detracta √ʒ2765952. ex √ʒ5018112. cũ ſint commẽſurabiles in proportione $\frac{66}{49}$. relinquit √ʒ332928. cui apponendum eſt ſignum + maioris numeri. Itaq; ſi diuidatur nouus diuidendus √ʒ (6528 + √ʒ332928) per nouum diuiſorem 136. fiet Quotiens √ʒ (48 + √ʒ18.) Diuiſis namq; 6528 per 136. exeunt 48. Et diuiſa √ʒ332928. per 136. hoc eſt, per √ʒ18496. exit √ʒ18. atq; adeo √ʒ [48 + √ʒ18) Quotiẽs erit diuiſionis propoſitę.

HOC exemplum quia pulchrum eſt, & ſubobſcurum, libet examinare per multiplicationem. Igitur neceſſe eſt, numerum diuiſum (√ʒ588 + √ʒ34848) redire, ſi Quotiens inuentus √ʒ (48 + √ʒ18) in diuiſorem √ʒ (12 + √ʒ8) ducatur. Fit autem ex hac multiplicatione numerus (√ʒ576 + √ʒ2592 + √ʒ18432 + √ʒ144) Quod ſi √ʒ144. addatur ad 576. fiet ſumma 588. Et ſi ſimul addantur √ʒ2592. & √ʒ18432. quæ commenſurabiles ſunt in proportione $\frac{8}{1}$ fiet √ʒ34848.

DIVIDATVR item √ʒ15. per √ʒ (3 + √ʒ5) Vt ſimplex diuiſor reperiatur, ducemus √ʒ (3 + √ʒ5) in √ʒ (3 — √ʒ5.) fietq; diuiſor √ʒ4. nouus. Quod ſi diuidendus numerus √ʒ15. ducatur quoque in √ʒ (3 — √ʒ5.) gignemus nouum diuidendum √ʒ (45 — √ʒ1125) Quadratum huius numeri diuidendi eſt 45 — √ʒ1125. Noui vero diuiſoris Quadratũ eſt 4. Si ergo partiamur 45. per 4 fit Quotiens 11$\frac{1}{4}$. Et ſi diuidamus — √ʒ1125. per 4. hoc eſt, per √ʒ16. fit Quotiens — √ʒ70$\frac{5}{16}$. Totus igitur Quotiens eſt √ʒ (11$\frac{1}{4}$ — √ʒ70$\frac{5}{16}$.)

DIVIDAMVS 20.per √ȝ (10−√ȝ5.) Multiplicetur vterque numerus per √ȝ (10+√ȝ5.) vt fiat nouus diuidendus √ȝ (4000+√ȝ800000) nouus autem diuiſor √ȝ95. Quadrata horum numerorum ſunt 4000+√ȝ800000.& 95. Si igitur partiamur 4000. per 95. exibunt 42$\frac{2}{19}$. At ex diuiſione √ȝ800000. per 95.id eſt, per √ȝ9025. prodit √ȝ88$\frac{232}{361}$. Quotiens ergo propoſitæ diuiſionis eſt √ȝ (42$\frac{2}{19}$+√ȝ88$\frac{232}{361}$.)

DIVIDAMVS √ȝ (4+√ȝ25) per √ȝ (1+√ȝ9) hoc eſt, √ȝ9.per √ȝ4. ſiue 3.per 2.vbi Quotiens eſt 1$\frac{1}{2}$. Multiplicetur tam diuidendus, quam diuiſor, per √ȝ (1−√ȝ9) vt fiat nouus diuidendus √ȝ (4+√ȝ25−√ȝ144−√ȝ225.) & nouus diuiſor √ȝ−8. Quadrata horum numerorum ſunt 4+√ȝ25−√ȝ144 −√ȝ225.& −8. Ex diuiſione 4.per −8.fit Quotiens −$\frac{1}{2}$. Et ex diuiſione √ȝ25.per −8.id eſt, per √ȝ−64. fit Quotiens √ȝ −$\frac{25}{64}$. vel (quod idem eſt) — √ȝ$\frac{25}{64}$. Et ex diuiſione −√ȝ144. per −8. id eſt, per — √ȝ 64.exit √ȝ+2$\frac{16}{64}$. vel (quod idem eſt) +√ȝ2$\frac{16}{64}$. Et ex diuiſione — √ȝ225. per — 8 hoc eſt, per — √ȝ 64.fit Quotiens +√ȝ3$\frac{33}{64}$. Quibus Quotientibus in ordinem redactis, erit totus Quotiens √ȝ (√ȝ3$\frac{33}{64}$+√ȝ 2$\frac{16}{64}$−√ȝ$\frac{25}{64}$−$\frac{1}{2}$.) qui æquiualet √ȝ2$\frac{1}{4}$. hoc eſt, 1$\frac{1}{2}$. vt diximus. Nam √ȝ3$\frac{33}{64}$. hoc eſt, √ȝ$\frac{225}{64}$. eſt $\frac{15}{8}$. & √ȝ 2$\frac{16}{64}$, ſiue √ȝ$\frac{144}{64}$. eſt $\frac{12}{8}$ quæ cum priori $\frac{15}{8}$ facit $\frac{27}{8}$. Deinde √ȝ$\frac{25}{64}$. eſt $\frac{5}{8}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. hoc eſt, cum $\frac{4}{8}$ facit $\frac{9}{8}$. atque $\frac{9}{8}$. ex $\frac{27}{8}$ relinquunt $\frac{18}{8}$. ſiue 2$\frac{1}{4}$ atque radix huius numeri eſt Quotiens ſupra inuentus, nimirum 1$\frac{1}{2}$.

IMMO ex diuiſione √ȝ (4+√ȝ25−√ȝ144−√ȝ225) per √ȝ−8. prouenire 1$\frac{1}{2}$. ita quoque fiet manifeſtum. Ex 4.& √ȝ25.fiunt 9. Et ex −√ȝ144−√ȝ225 fiunt −27. Faciunt autem −27.cum +9.numerum −18.Igitur numerus diuidendus eſt √ȝ−18.& diuiſor √ȝ−8.vbi Quotiens fit √ȝ2$\frac{1}{4}$.hoc eſt, 1$\frac{1}{2}$.

HOC exemplum ita quoque proponi poteſt, vt dicamus, diuidendam eſſe √ȝ (4+√ȝ25) per √ȝ (√ȝ 9+1) vbi iterum diuiduntur 3.per 2. Et ſi tam diuidendus, quam diuiſor multiplicetur per √ȝ (√ȝ9 − 1) fiet nouus diuidendus numerus √ȝ (√ȝ144+√ȝ225 − 4 − √ȝ25.)& nouus diuiſor √ȝ8. Quadrata horum numerorum ſunt √ȝ144+√ȝ225 − 4 − √ȝ25.& 8. Ex diuiſione autem √ȝ144.per 8.id eſt, per √ȝ64.fit Quotiens √ȝ2$\frac{16}{64}$. Et ex diuiſione √ȝ225. per 8.id eſt, per √ȝ64. fit Quotiens √ȝ3$\frac{33}{64}$. Et ex diuiſione − 4. per 8. fit Quotiens −$\frac{1}{2}$. Et ex diuiſione −√ȝ25.per 8.id eſt, per √ȝ64.fit Quotiens −√ȝ$\frac{25}{64}$.ita vt totus Quotiens ſit idem omnino, qui prius, nimirū √ȝ (√ȝ3$\frac{33}{64}$+√ȝ2$\frac{16}{64}$−√ȝ$\frac{25}{64}$−$\frac{1}{2}$.) De induſtria autem interdum longior ſum in exemplis expediendis, vt ex ijs difficultates, quæ in radicibus numerorum compoſitorum occurrere ſolent, diſcas ſuperare.

DIVIDAMVS quoque √ℭ (√ℭ32768+√ℭ13824) per 2. Cubi numerorum ſunt √ℭ32768 +√ℭ13824.& 8.Ex diuiſione √ℭ32768. per 8. hoc eſt, per √ℭ512. fit Quotiens √ȝ64. Et ex diuiſione √ℭ 13824.per 8.id eſt per √ℭ512.fit Quotiēs √ℭ27. Totusq; Quotiēs erit √ℭ(√ℭ64+√ℭ27) hoc eſt, √ℭ7.

Additio radicum numerorum compoſitorum.

DENIQVE ſit diuidenda √ȝ (33+√ȝ9) per √ȝ (3+√ȝ1) hoc eſt, 6.per 2.vbi Quotiens eſt 3. Multiplicetur vterq; numerus per √ȝ (3−√ȝ1) vt fiat nouus diuidendus √ȝ (99+√ȝ81−√ȝ1089−√ȝ9) & nouus diuiſor √ȝ (9−1.) hoc eſt, √ȝ8.Quadrata horum numerorum ſunt 99+√ȝ81−√ȝ1089−√ȝ9.& 8. Ex diuiſione 99.per 8.fit Quotiens 12$\frac{3}{8}$. Ex diuiſione √ȝ81.per 8.id eſt, per √ȝ64.fit Quotiens √ȝ1$\frac{17}{64}$. Ex diuiſione −√ȝ1089.per 8.id eſt, per √ȝ64.fit Quotiens −√ȝ17$\frac{1}{64}$. Ac tandem ex diuiſione −√ȝ9.per 8.hoc eſt, per √ȝ64. fit Quotiens −√ȝ$\frac{9}{64}$. Eritque totus Quotiens √ȝ (12$\frac{3}{8}$+√ȝ1$\frac{17}{64}$−√ȝ17$\frac{1}{64}$−√ȝ$\frac{9}{64}$.) hoc eſt 3. Nam ſi ad 12$\frac{3}{8}$. addatur √ȝ1$\frac{17}{64}$. hoc eſt, $\frac{9}{8}$. fient 12$\frac{12}{8}$. ex quibus ſi tollantur √ȝ17$\frac{1}{64}$.& √ȝ$\frac{9}{64}$. hoc eſt, $\frac{33}{8}$.& $\frac{3}{8}$. relinquentur 9. Eſt ergo Quotiens √ȝ9. id eſt, 3.

ADDITIO, & ſubtractio radicum numerorum compoſitorum commode plerunque addi non poſſunt, vel vna ab altera ſubtrahi, niſi per interpoſitionem ſigni + vel −. vt cap. 22. annotauimus. Quando tamen addenda eſt huiuſmodi radicum aliqua ad ſimilem, mutato ſigno + in −. vel − in +. commodiſſime inter ſe addentur, ſi illæ radices per ſignum + connectantur, & totum illud aggregatum in ſe ducatur, vt paulo ante monſtratum eſt. Nam √ȝ huius producti erit ſumma duarum radicum propoſitarum. Vt ſi addendæ ſint hæ duæ radices, √ȝ (12+√ȝ6) & √ȝ (12−√ȝ6) ducemus hoc compoſitum √ȝ (12+√ȝ6)+√ȝ (12−√ȝ6) in ſeipſum, produceturque numerus 24+√ȝ552. vt ſupra diximus. Huius ergo radix quadrata, nimirum √ȝ (24+√ȝ552.) erit ſumma duarum radicum propoſitarum.

EODEM modo ſupra, harum radicum, √ȝ (10+√ȝ36) & √ȝ (10−√ȝ36) ſumma inuenta fuit, √ȝ (20+√ȝ256) hoc eſt, √ȝ36.id eſt, 6.

ITEM ſint addendæ √ȝ (8+√ȝ32) & √ȝ (8−√ȝ32.) Sic ſtabit exemplum ad multiplicationem. Si ergo producto numero præfiges ſignum √ȝ. erit ſumma duarum radicum dictarum, √ȝ (16 + √ȝ 128.)

√ȝ (8 + √ȝ 32) + √ȝ (8 — √ȝ 32)
√ȝ (8 + √ȝ 32) + √ȝ (8 — √ȝ 32)
8 + √ȝ 32 + 8 — √ȝ 32
√ȝ 32
√ȝ 32
√ȝ 128
Productus. 16 + √ȝ 128

ITEM ſit addenda √ȝ (2+√ȝ3) ad √ȝ (2−√ȝ3.) Sic inſtituetur multiplicatio. fietque productus, 4+√ȝ4. hoc eſt 6. Igitur ſumma duarum radicum quæſita erit √ȝ 6.

√ȝ (2 + √ȝ 3) + √ȝ (2 — √ȝ 3)
√ȝ (2 + √ȝ 3) + √ȝ (2 — √ȝ 3)
2 + √ȝ 3 + 2 — √ȝ 3
√ȝ 1
√ȝ 1
√ȝ 4
Productus. 4 + √ȝ 4. hoc eſt, 6.

Huiuſmodi radicum additio commode etiam ſic fiet. Multiplicetur quadratum vnius radicis in quadratum alterius. quod breuiſſime fiet, ſi in alterutra radice, quadratū poſterioris particulæ dematur ex quadrato particulæ prioris, & reſidui radix adiiciatur ad priorem particulam, ſummaq; hæc duplicetur, id eſt, per 2. multiplicetur. Radix enim huius producti dabit ſummā quæſitā. Vt in

Vt in primo exemplo, ſumma $\sqrt{z}(12+\sqrt{z}6)$ & $\sqrt{z}(12-\sqrt{z}6)$ ita fiet. Dempto quadrato 6. poſterioris particulæ ex 144. quadrato particulæ prioris, ſuperſunt 138. Si igitur addatur $\sqrt{z}138$. ad 12. priorem particulam, fiet ſumma $12+\sqrt{z}138$. quæ ducta in 2. faciet ſummam quæſitam $\sqrt{z}(24+\sqrt{z}552)$ vt prius.

IN ſecundo autem exemplo, ſumma $\sqrt{z}(10+\sqrt{z}36)$ & $\sqrt{z}(10-\sqrt{z}36)$ ita nota fiet. Dempto quadrato 36. poſterioris particulæ ex 100. quadrato prioris particulæ, remanent 64. Si ergo $\sqrt{z}64$. addes ad priorem particulam 10. facies $10+\sqrt{z}64$. quæ ſumma ducta in 2. faciet ſummam deſideratam $\sqrt{z}(20+\sqrt{z}256)$ hoc eſt, $\sqrt{z}36$. hoc eſt, 6. veluti prius.

IN tertio denique exemplo, ſummam radicum $\sqrt{z}(2+\sqrt{z}3)$ & $\sqrt{z}(2-\sqrt{z}3)$ ſic cognoſcemus. Dempto quadrato 3. poſterioris particulæ ex 4. quadrato particulæ prioris, reliqua fit 1. Si ergo addemus $\sqrt{z}1$ ad 2. priorem particulam, faciemus $2+\sqrt{z}1$. hoc eſt, 3. Duplum eſt 6. Ergo $\sqrt{z}6$. eſt ſumma optata, eadem quæ prius.

QVANDO addendæ ſunt duæ radices numerorum compoſitorum diſſimilium, quorum videlicet numeri particularum non omnes æquales ſunt: addi poterunt nonnunquam per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. tum ſcilicet, cum numerus ex vna radice in alteram bis multiplicata productus reduci poteſt ad ſimplicem numerum, vel ad numerum compoſitum duarum particularum. hoc ſcilicet modo. Sit addenda $\sqrt{z}(10+\sqrt{z}36)$ ad $\sqrt{z}(11+\sqrt{z}25)$ hoc eſt, 4. ad 4. vbi ſumma eſt 8. Quadrata, duarum radicum per ſignum $+$ connexa faciunt $10+\sqrt{z}36+11+\sqrt{z}25$. Productus numerus ex vna radice in alteram, (hoc eſt, ſi quadratum vnius in quadratum alterius ducatur, & producto præfigatur ſignum $\sqrt{z}$. vt in multiplicatione radicum ſimplicium quadratarum fieri ſolet) eſt $\sqrt{z}(110+\sqrt{z}4356+\sqrt{z}2500+\sqrt{z}900)$ vt in ſubiecta formula apparet. cuius duplum (ſi nimirum per 2. multiplicetur) $\sqrt{z}(440+\sqrt{z}69696+\sqrt{z}40000+\sqrt{z}14400)$ reducitur ad $\sqrt{z}1024$. hoc eſt, ad 32. Si igitur addantur 32. ad duo ſuperiora quadrata, erit tota ſumma $\sqrt{z}(10+\sqrt{z}36+\sqrt{z}11+\sqrt{z}25+32.)$ hoc eſt, $\sqrt{z}64$. ſiue 8. vt ratio poſtulat.

$$\begin{array}{c} \sqrt{z}(10+\sqrt{z}36) \\ \underline{\sqrt{z}(11+\sqrt{z}25)} \\ \sqrt{z}2500+\sqrt{z}900 \\ \underline{110+\sqrt{z}4356} \\ \sqrt{z}(110+\sqrt{z}4356+\sqrt{z}2500+\sqrt{z}900.) \end{array}$$

SIT rurſum addenda $\sqrt{z}(12+\sqrt{z}108)$ ad $\sqrt{z}(2+\sqrt{z}3)$ Summa quadratorum eſt $12+\sqrt{z}108+2+\sqrt{z}3$. Productus numerus ex vna radice in alterã eſt $\sqrt{z}(42+\sqrt{z}1728)$ quæ radix eſt $\sqrt{z}24+\sqrt{z}18$ (vt ex cap. 27. patebit.) cuius duplum, nimirum $\sqrt{z}96+\sqrt{z}72$. additum ad prædicta duo quadrata $12+\sqrt{z}108+2+\sqrt{z}3$. hoc eſt, ad $14+\sqrt{z}108+\sqrt{z}3$. hoc eſt, ad $14+\sqrt{z}147$. (nam $\sqrt{z}108$. & $\sqrt{z}3$. ſunt commenſurabiles, conficiuntque $\sqrt{z}147$) fiet tota ſumma $\sqrt{z}(14+\sqrt{z}147+\sqrt{z}96+\sqrt{z}72.)$

SIT quoque addenda $\sqrt{z}(\sqrt{z}2+1)$ ad $\sqrt{z}(\sqrt{z}162+9.)$ Summa quadratorum eſt $\sqrt{z}2+1+\sqrt{z}162+9$. Ex vna radice in alteram fit $\sqrt{z}(27+\sqrt{z}648)$ quæ radix valet $3+\sqrt{z}18$. (quo pacto autem ex hoc quadrato $27+\sqrt{z}648$. erui debeat radix, cap. 27. docebimus) cuius duplum $6+\sqrt{z}72$. additum ad prædictam quadratorum ſummam facit $\sqrt{z}2+1+\sqrt{z}162+9+6+\sqrt{z}72$ hoc eſt $\sqrt{z}512+16$. Nam $\sqrt{z}162$. & $\sqrt{z}2$. commenſurabiles ſunt, faciuntque $\sqrt{z}200$. Item $\sqrt{z}200$. & $\sqrt{z}72$. commenſurabiles quoque ſunt, faciuntque $\sqrt{z}512$. Summa ergo quæſita erit $\sqrt{z}(\sqrt{z}512+16)$

SED quando productus numerus ex vna radice in alteram non poteſt reduci ad numerum compoſitum, quando videlicet radicem, quæ ſit vel radix ſimplex, vel numerus compoſitus, non habet, fieret hoc modo ſumma magis perplexa, & obſcura. Quare commodius fiet tunc additio per ſignum $+$ interpoſitum. V. g. ſi addenda ſit $\sqrt{z}(2+\sqrt{z}3)$ ad $\sqrt{z}(\sqrt{z}12+2)$ fit ex vna in alteram $\sqrt{z}(\sqrt{z}48+\sqrt{z}36+4+\sqrt{z}12)$ hoc eſt, $\sqrt{z}(\sqrt{z}108+10)$ propterea quod $\sqrt{z}48$. & $\sqrt{z}12$. commenſurabiles ſunt, conficiuntque $\sqrt{z}108$. ac $\sqrt{z}36$. & 4. efficiunt 10. Sed quia numerus quadratus $\sqrt{z}108+10$. radicem habet $\sqrt{z}(\sqrt{z}27+\sqrt{z}2)+\sqrt{z}(\sqrt{z}27-\sqrt{z}2.)$ vt ex cap. 27. conſtabit. quæ quidem compoſita eſt ex duabus radicibus duorum numerorũ compoſitorum. Efficiunt autem hæ duæ radices ſummam $\sqrt{z}(\sqrt{z}27+\sqrt{z}2+\sqrt{z}27-\sqrt{z}2+10$. vt in hac formula apparet. Atq; hæc ſumma reducitur ad hanc, $\sqrt{z}(\sqrt{z}108+10)$ erit hæc ſumma radix huius numeri $\sqrt{z}108+10$. quod patet, quia $\sqrt{z}(\sqrt{z}108+10)$ in ſe ducta facit $\sqrt{z}108+10$. Hæc autem radix $\sqrt{z}(\sqrt{z}108+10)$ duplicata, quod fiet, ſi eius quadratum $\sqrt{z}108+10$. ducatur in 4. quadratum binarij; Hæc, inquam, radix duplicata facit $\sqrt{z}(\sqrt{z}1728+40)$ quæ cum duobus quadratis radicum propoſitarum, nimirum cum $2+\sqrt{z}3$. & $\sqrt{z}12+2$. faciet radicum ſummam $\sqrt{z}(\sqrt{z}1728+40)+2+\sqrt{z}3+\sqrt{z}12+2)$ ſed quia $2+\sqrt{z}3+\sqrt{z}12+2$. faciunt $4+\sqrt{z}27$. erit ſumma $\sqrt{z}(\sqrt{z}1728+40)+\sqrt{z}27+14)$ quæ magis intricata eſt, quam ſi ſumma dicatur eſſe $\sqrt{z}(2+\sqrt{z}3)+\sqrt{z}(\sqrt{z}12+2.)$ Eadem illa ſumma intricata facilius reperietur, ſine inuentione radicis numeri $\sqrt{z}108+10$. cuius radix, nimirum $\sqrt{z}(\sqrt{z}108+10.)$ producta fuit ex vna radice propoſita in alteram. Nam duplum huius numeri, $\sqrt{z}(\sqrt{z}1728+40)$ cum duobus quadratis radicum propoſitarum, conficiet ex propoſ. 4. lib. 2. Eucl. duarum radicum ſummam eandem $\sqrt{z}(\sqrt{z}1728+40)+\sqrt{z}27+14.)$

$$\begin{array}{c} \sqrt{z}(\sqrt{z}27+\sqrt{z}2)+\sqrt{z}(\sqrt{z}27-\sqrt{z}2) \\ \underline{\sqrt{z}(\sqrt{z}27+\sqrt{z}2)+\sqrt{z}(\sqrt{z}27-\sqrt{z}2)} \\ \sqrt{z}27+\sqrt{z}2 \quad + \quad \sqrt{z}27-\sqrt{z}2 \\ \sqrt{z}25.\ \text{hoc eſt, } 5 \\ \underline{\sqrt{z}25.\ \text{hoc eſt, } 5} \\ \underline{\sqrt{z}100.\ \text{id eſt, } 10} \\ \sqrt{z}(\sqrt{z}27+\sqrt{z}2+\sqrt{z}27-\sqrt{z}2+10. \end{array}$$

QVANDO duę huiuſmodi radices ſunt commenſurabiles, poterunt inter ſe addi per regulam trium, veluti radices ſimplices. Vt ſi addenda proponatur $\sqrt{z}(2+\sqrt{z}3)$ ad $\sqrt{z}(8+\sqrt{z}48.)$ Diuiſa hac per illam, (inuento videlicet nouo diuiſore $\sqrt{z}1$. & nouo diuidendo $\sqrt{z}4$.) fit Quotiens $\sqrt{z}4$. hoc eſt, 2. ſiue $\frac{2}{1}$. Habent ergo illæ radices proportionem duplam: ac proinde ſi fiat, Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{z}(2+\sqrt{z}3)$ ad aliud, inuenietur ſumma $\sqrt{z}(18+\sqrt{z}243.)$

ITEM ſit addenda $\sqrt{z}(4+\sqrt{z}6)$ ad $\sqrt{z}(8+\sqrt{z}24.)$ Diuiſa hac per illam (inuento diuiſore nouo $\sqrt{z}10$. & nouo diuidendo $\sqrt{z}20$) fit Quotiens $\sqrt{z}2$. qui licet irrationalis ſit, ac proinde radices propoſitæ ſint incommenſurabiles, conabimur tamen eius beneficio illas ſimul addere, more radicum commenſurabilium. Eſt

ergo proportio vnius radicis ad alteram, quæ √ʒ2. ad 1. ita vt denominator proportionis ſit $\frac{\sqrt{ʒ}\,2}{1}$. Et denominator 1. huius fractionis additus ad √ʒ2. denominatorem, facit √ʒ2 + 1. Quare ſi fiat, Vt 1. ad √ʒ2 + 1. ita √ʒ (4+√ʒ6) ad aliud, fit √ʒ (12+√ʒ128+√ʒ54+√ʒ48) pro ſumma duarum radicum propoſitarum. Nam vt in regula trium multiplicetur √ʒ2+1. in √ʒ(4+√ʒ6) reducenda eſt √ʒ2+1. ad quadratum 3+√ʒ8. hoc eſt, ducenda in ſe, atque hoc ducendum in 4+√ʒ6. quadratum radicis √ʒ (4+√ʒ6.) Productoque 12 +√ʒ128+√ʒ54+√ʒ48. præfigendum ſignum √ʒ.

SIT præterea addenda √ʒ (√ʒ6 − √ʒ2) ad √ʒ (√ʒ96 − √ʒ32.) Diuiſa hac per illam, (inuento ſcilicet nouo diuiſore √ʒ4. & nouo diuidendo √ʒ16.) fit Quotiens √ʒ4. hoc eſt, 2. eſtque proportio vnius radicis ad alteram dupla, cuius denominator eſt $\frac{2}{1}$. Si igitur fiat, Vt 1. ad 3. ita √ʒ (√ʒ6 − √ʒ2) ad aliud: reperietur ſumma quæſita √ʒ (√ʒ486 − √ʒ162.)

Subtractio radicũ numerorum compoſitorum.

IAM vero ſi à radice numeri compoſiti detrahenda ſit alia radix ſimilis numeri diminuti, (quod ſæpe contingit in Binomiis, ac Reſiduis, eorumque radicibus) fiet id hoc modo. Sit ſubtrahenda V.g. √ʒ (12 − √ʒ6) à √ʒ (12+√ʒ6) Certum eſt, reſiduum eſſe √ʒ (12+√ʒ6) — √ʒ (12 √ʒ6.) Scribatur ergo hoc reſiduum bis, & in ſe multiplicetur, hoc eſt, iuxta propoſ. 4. lib. 2. Euclid. ad quadrata partium 12 +√ʒ6. & 12 — √ʒ6. addatur duplum numeri — √ʒ138 qui fit ex vna parte in alteram, videlicet — √ʒ552. fietque quadratum 24. — √ʒ552. quia duo quadrata efficiunt 24. Radix igitur huius quadrati, nimirum √ʒ (24 — √ʒ552) erit id, quod relinquitur ex detractione √ʒ (12 − √ʒ6) à √ʒ (12 + √ʒ6.) Detracto enim numero ex alio numero, ſi reliquus numerus ducatur in ſe, erit radix quadrata numeri producti, numerus ille reliquus. Ac proinde cũ in dato exemplo numerus reliquus, √ʒ (12+√ʒ6) — √ʒ (12 — √ʒ6) in ſe ductus faciat 24 — √ʒ552. erit √ʒ (24 — √ʒ552) numerus, qui relinquitur ex detractione √ʒ (12 — √ʒ6) à √ʒ (12+√ʒ6.]

```
√ʒ (12+√ʒ6) — √ʒ (12 — √ʒ6)
√ʒ (12+√ʒ6) — √ʒ (12 — √ʒ6)
---------------------------------
12+√ʒ6   +   12 — √ʒ6
        — √ʒ 138
        — √ʒ 138
---------------------------------
24 — √ʒ 552
```

ALIUD exemplum in numeris rationalibus. Sit ſubtrahenda √ʒ (10 − √ʒ36) ex √ʒ (10 + √ʒ36) nimirum 2. ex 4. vbi perſpicuum eſt, reliquum numerum eſſe 2. Scripto numero √ʒ (10 + 36.) — √ʒ (10 — √ʒ36) qui nimirum relinquitur poſt detractionem √ʒ (10 — √ʒ36) ex √ʒ (10 + √ʒ36) atque eodem ducto in ſe, iuxta præſcriptum propoſ. 4 lib. 2. Euclid. fiet productus numerus 20 — √ʒ256. Ergo reſiduum quæſitum erit √ʒ (20 — √ʒ256) hoc eſt, √ʒ4. ſiue 2. quod eſt propoſitum.

```
√ʒ (10+√ʒ36) — √ʒ (10 — √ʒ36)
√ʒ (10+√ʒ36) — √ʒ (10 — √ʒ36)
---------------------------------
10+√ʒ36.   &   10 — √ʒ36
           — √ʒ 64
           — √ʒ 64
---------------------------------
20 — √ʒ 256
```

QVANDO propoſitæ radices huiuſmodi ſunt diuerſæ, poterit minor à maiore ſubtrahi, ex præſcripto propoſ. 7. lib. 2. Eucl. quando videlicet numerus productus ex vna radice in aliam multiplicata bis reduci poteſt ad numerum ſimplicem, vel compoſitum duarum particularum, hac ſcilicet ratione. Sit ſubtrahenda √ʒ (8 — √ʒ32) ex √ʒ (8+√ʒ32.) Quadrata duarum particularum ſunt 8 — √ʒ32. & 8 + √ʒ32. quæ connexa per ſignum +, faciunt 8 — √ʒ32 + 8 + √ʒ32. hoc eſt, 16. Ex vna radice in alteram fit √ʒ32. cuius duplum √ʒ128. ablatum ex 16. ſumma quadratorum, relinquit 16 — √ʒ128. Huius ergo numeri radix quadrata nimirum √ʒ (16 — √ʒ128) eſt reſiduum deſideratum.

```
√ʒ (8 + √ʒ32)
√ʒ (8 — √ʒ32)
-------------
   √ʒ 32
```

SIT rurſus auferenda √ʒ (2+√ʒ3) ex √ʒ (12 + √ʒ108.) Summa quadratorum eſt 2 + √ʒ3 + 12 +√ʒ108. hoc eſt, 14+√ʒ147. Nam √ʒ108. & √ʒ3. commenſurabiles ſunt, efficiuntque √ʒ147. Ex vna radice in alteram fit √ʒ (42+√ʒ1728) quæ radix, vt ex cap. 28. conſtabit, eſt √ʒ24+√ʒ18. cuius duplum √ʒ96 + √ʒ72. demptum ex prædicta quadratorum ſumma 14+√ʒ147. relinquit 14 + √ʒ147 — √ʒ96. & — √ʒ72. & pꝑoſito ſigno √ʒ. erit reſiduũ ſubtractionis √ʒ (14 + √ʒ147 — √ʒ96. & — √ʒ72). quod idẽ eſt, ac 14 + √ʒ147 — √ʒ96 +√ʒ72. quia ſenſus eſt, ex 14 + √ʒ147. detrahi aggregatum ex √ʒ96. & √ʒ72. vt recte dictum ſit, reſiduum eſſe 14+√ʒ147 — √ʒ96. & — √ʒ72. Eſt enim ſenſus, non ſolum ſubtrahi √ʒ96. ſed inſuper √ʒ72. ſubduci. Hoc autem perſpicue cernitur, ſi numerus rationalis detrahendus ſit, vt √ʒ100 + √ʒ4. ex 14+ √ʒ147. vbi certum eſt, ſubtrahi 10 + 2. hoc eſt, 12. reſiduumque eſſe 2 + √ʒ147. quod æquiualet huic, 14+√ʒ147 — √ʒ100. & — √ʒ4. vt perſpicuum eſt.

```
12 + √ʒ 108
 2 + √ʒ 3
---------------------------
   + √ 432 + √ʒ 324
24 + √ 432
---------------------------
√ʒ (42 + √ʒ 1728)
```

QVOD ſi productus numerus ex vna radice in alteram non habeat radicem, numerum compoſitum duarum particularum, facienda eſt ſubtractio per ſignum —. Vt ſi ſubtrahenda ſit √ʒ (2+√ʒ3) ex √ʒ (√ʒ12+2.) Ex ductu vnius radicis in alteram fit √ʒ (√ʒ108+10) quæ, vt ex cap. 28. patebit, æquiualet huic, √ʒ (√ʒ27+√ʒ2) +√ʒ (√ʒ27 — √ʒ2.) Quare commodius dicetur reſiduum ſubtractionis eſſe √ʒ (√ʒ12+2) — √ʒ (2 — √ʒ3.)

QVANDO denique huiuſmodi radices ſunt commenſurabiles, ſubtrahetur vna ab altera per regulam trium, vt de radicibus ſimplicibus diximus. Sit enim ſubtrahenda √ʒ (2+√ʒ3.) ex √ʒ (8+√ʒ48.) Diuiſa hac per illam, (inuento nimirum nouo diuiſore √ʒ1. & nouo diuidendo √ʒ4.) fit Quotiens √ʒ4. hoc eſt 2. ita vt proportio earũ ſit dupla, cuius denominator $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat, vt 1. ad 1. ita √ʒ (2 + √ʒ3) ad aliud, producetur √ʒ (2+√ʒ3) pro reſiduo ſubtractionis.

ITEM ſit auferenda √ʒ (4+√ʒ6) ex √ʒ (8+√ʒ24.) Diuiſa hac per illam, (inuento ſcilicet nouo diuiſore √ʒ10. & nouo diuidẽdo √ʒ20.) fit Quotiẽs √ʒ2. ita vt denominator proportionis maioris ad minorem ſit $\frac{\sqrt{ʒ}\,2}{1}$.

ſit $\frac{\surd z\,2}{1}$ Si ergo fiat, vt 1. ad √ʒ 2 — 1. ita √ʒ (4 + √ʒ 6) ad aliud, prodibit reſiduum Subtractionis √ʒ (12 + √ʒ 54 — √ʒ 128 — √ʒ 48.) Nam vt in regula trium multiplicetur √ʒ (4 + √ʒ 6) per √ʒ 2 — 1. reducendus eſt prius hic numerus ad quadratum 3 — √ʒ 8 &c.

Poſtremo ſit ſubducenda √ʒ (√ʒ 6 — √ʒ 2) à √ʒ (√ʒ 486 — √ʒ 162) Diuiſa hac per illam, (inuento ſcilicet diuiſore nouo √ʒ 4. nouoque diuidendo √ʒ 36) fit Quotiens √ʒ 9. hoc eſt, 3. ita vt radices propoſitæ habeant proportionem triplam, cuius denominator $\frac{3}{1}$. Si igitur fiat, vt 1. ad 2. ita √ʒ (√ʒ 6 — √ʒ 2) ad aliud, prodibit reſiduum quæſitum √ʒ (√ʒ 96 — √ʒ 32.) Vt enim in regula trium ſecundus numerus in tertium multiplicetur, reducendi ſunt ambo ad quadrata 4. & √ʒ 6 — √ʒ 2. & vnum in alterum ducendum, vt hic factũ eſſe vides, & producto præfigendum ſignum √ʒ. vt reſiduum fiat √ʒ (√ʒ 96 — √ʒ 32.) Item reſiduum reperietur, ſi fiat, vt 3. ad 2. ita √ʒ (√ʒ 486 — √ʒ 162) ad aliud. Nam reuocato ſecundo numero regulæ trium 2. & tertio √ʒ (√ʒ 486 — √ʒ 162) ad quadrata 4. & √ʒ 486 — √ʒ 162. ſi inter ſe multiplicentur, gignetur numerus √ʒ 7776 — √ʒ 2592. qui vt per 3. primum numerum regulæ trium diuidatur, reducendus erit ad quadratum 9. Si ergo √ʒ 7776. diuidatur per 9. id eſt, per √ʒ 81. fiet Quotiens √ʒ 96. Et ſi — √ʒ 2592. diuidatur per 9. hoc eſt, per √ʒ 81. fiet Quotiens — √ʒ 32. &c.

√ʒ 6 — √ʒ 2
4
√ʒ 96 — √ʒ 32

√ʒ 486 — √ʒ 162
4
√ʒ 7776 — √ʒ 2592

DE MINVTIIS NVMERORVM IRRATIONALIUM, ac de earundem Algorithmo.

CAPVT XXV.

NVMERATIO harum minutiarum facilis eſt. Quando enim ſignum radicale ponitur ante medium minutiæ, refertur ſignum illud ad vtrumque terminum, tam ſcilicet ad numeratorem, quam ad denominatorem. Vt hæc minutia √ʒ $\frac{9}{16}$. ſignificat √ʒ 9. diuiſam eſſe per √ʒ 16. æquiualetque $\frac{3}{4}$. Sic √ce $\frac{8}{27}$. ſignificat √ce 8. diuiſam eſſe per √ce 27. æquiualetque $\frac{2}{3}$. Ita quoque √ʒ $\frac{6}{8}$ denotat, √ʒ 6. eſſe diuiſam per √ʒ 8. *Numeratio minutiarũ irrationalium.*

QVANDO ſignum radicale ponitur ante numerum integrum cum fractione, reducendus eſt totus numerus ad vnicam fractionem, vt eius valor exprimi poſſit. Vt √ce 1 $\frac{67}{125}$. reducitur ad √ce $\frac{192}{125}$. ſignificatque √ce 192. diuiſam eſſe per √ce 125. hoc eſt, per 5. poteſtque ita repræſentari $\frac{\surd ce\,192}{5}$. ita vt ſignificet √ce 192. eſſe diuiſam per 5. Quod ſi termini huius minutiæ √ce $\frac{192}{125}$. multiplicentur per eundem aliquem numerum, nimirum per √ce 192. producetur minutia √ce $\frac{36864}{24000}$. æquiualens minutiæ √ce $\frac{192}{125}$. Et ſi rurſus termini productæ minutiæ ducantur in eandem √ce 192. fiet minutia æquiualens √ce $\frac{7077888}{4608000}$. hoc eſt, $\frac{192}{\surd ce\,4608000}$. ſignificatque cubum 192. (qui videlicet producitur ex √ce 192. ducta in ſe cubice) diuiſum eſſe per √ce 4608000. quia radix cubica numeratoris 7077888. eſt 192. Rurſus minutia √ʒ $\frac{16}{64}$. ſignificat √ʒ 16. nimirum 4. diuiſam eſſe per √ʒ 64. nimirum per 8. æquiualetque minutiæ $\frac{1}{2}$. At minutia $\frac{\surd z\,16}{64}$. ſignificat √ʒ 16. id eſt, 4. diuiſam eſſe per 64. æquiualetque minutiæ $\frac{4}{64}$. vel $\frac{1}{16}$. Sic minutia $\frac{16}{\surd z\,64}$. ſignificat numerum 16. diuiſum eſſe per √ʒ 64. id eſt, per 8. æquiualetque numero 2.

QVANDO eadem eſt proportio numeratorum ad denominatores, minutiæ æquales ſunt, quemadmodum in minutijs vulgaribus. Itaque omnes hæ minutiæ $\frac{\surd z\,64}{2}$. √ʒ $\frac{64}{4}$. $\frac{64}{\surd z\,256}$. eiuſdem ſunt valoris: quia in omnibus numerator ad denominatorem proportionem ſeruat quadruplam, vt conſtat, ſi numeratores ſinguli per ſingulos denominatores diuidantur.

MINVTIÆ irrationales reducuntur ad minimos terminos, quando reduci poſſunt, vt reduci ſolent minutiæ vulgares. Vt hæc minutia √ʒce $\frac{4}{8}$ reducitur ad hãc √ʒce $\frac{1}{2}$. & √ʒ $\frac{144}{36}$. ad √ʒ $\frac{4}{1}$. Poſſunt quoque nonnunquam reduci ad minora ſigna radicalia. Vt √ʒce $\frac{4}{8}$. reducitur ad $\frac{\surd ce\,2}{\surd z\,2}$. quia numerator 4. habet radicem quadratam 2. ſed hæc non habet cubicam: At denominator 8. habet radicem cubicam 2. ſed hæc quadratam non habet. Eſſe autem has minutias √ʒce $\frac{4}{8}$. & $\frac{\surd ce\,2}{\surd z\,2}$. æquales probari poteſt ex multiplicatione in crucem. *Abbreuiatio minutiarum irrationaliũ.*

ADDITIO, atque ſubtractio fit in hunc modum. Si denominator eſt idem, adduntur denominatores, vt ſupra traditum eſt, vel vnus ab altero ſubtrahitur, & ſummæ, vel reſiduo communis denominator ſupponitur. Vt ex additione $\frac{\surd z\,4}{7}$. ad $\frac{\surd z\,9}{7}$. fit ſumma $\frac{\surd z\,25}{7}$. hoc eſt, $\frac{5}{7}$. At ſubtracta $\frac{\surd z\,4}{7}$. ex $\frac{\surd z\,9}{7}$. relinquitur $\frac{\surd z\,1}{7}$. id eſt $\frac{1}{7}$. *Additio & ſubtractio minutiarũ irrationalium.*

Additio.

$\frac{\surd z\,4}{7}$. — $\frac{\surd z\,9}{7}$.
$\frac{\surd z\,25}{7}$. vel $\frac{5}{7}$.

Subtractio.

$\frac{\surd z\,4}{7}$. — $\frac{\surd z\,9}{7}$.
$\frac{\surd z\,1}{7}$. vel $\frac{1}{7}$.

QVANDO autẽ denominatores ſunt diuerſi, fit reductio ad eundẽ denominatorem per multiplicationem in crucem, quemadmodũ in minutijs vulgaribus fieri conſueuit. Deinde eodem modo numeratores adduntur inter ſe, vel vnus ab altero ſubtrahitur, & ſummæ, vel reliquo numero idem denominator communis ſubſcribitur. Vt ſi addi debent √ʒ $\frac{16}{49}$. ad √ʒ $\frac{4}{9}$. vel illa ex hac auferenda, reducentur, vt formula appoſita

Reductio.

$\frac{\surd z\,144}{\surd z\,16}$. — $\frac{\surd z\,196}{\surd z\,4}$.
√ʒ 49 — √ʒ 9
√ʒ 441

Additio.

$\frac{\surd z\,144}{\surd z\,441}$ — $\frac{\surd z\,196}{\surd z\,441}$
$\frac{26}{21}$

monſtrat, ad $\frac{\surd z\,144}{\surd z\,441}$. & $\frac{\surd z\,196}{\surd z\,441}$. fit autem ex additione ſumma $\frac{26}{21}$. hoc eſt, 1 $\frac{5}{21}$. Nam numeratores commen-

ſurabiles ſunt: in proportione $\frac{7}{6}$. efficiuntque ſummam √ȝ 676. cui ſupponitur denominator communis √ȝ 441. vt fiat ſumma $\frac{\text{√ȝ 676}}{\text{√ȝ 441}}$. hoc eſt, $\frac{26}{21}$. id eſt, 1 $\frac{5}{21}$. At ſubtracta $\frac{\text{√ȝ 16}}{\text{√ȝ 49}}$. ex $\frac{\text{√ȝ 4}}{\text{√ȝ 9}}$. remanent $\frac{2}{21}$. Nam numerator √ȝ 144. ſubtractus à numeratore √ȝ 196. relinquit $\frac{\text{√ȝ 4}}{\text{√ȝ 441}}$. hoc eſt, $\frac{2}{21}$.

EODEM modo, ſi addendæ ſunt $\frac{\text{√ȝ 50 + √ce 24}}{5}$. & $\frac{\text{√ce 24 + √ȝ 8}}{2}$. reduco eas prius ad eandem denominationem, videlicet ad $\frac{\text{√ȝ 200 + √ce 192}}{10}$. & $\frac{\text{√ce 3000 + √ȝ 200}}{10}$. Additis deinde numeratoribus, ac ſuppoſito eodem denominatore 10. fit ſumma $\frac{\text{√ȝ 800 + √ce 8232}}{10}$. At vero ex ſubtractione minoris minutiæ ex maiore relinquitur $\frac{\text{√ce 648}}{10}$. quia √ȝ 200. ex √ȝ 200. nihil relinquit.

ITEM ſi addendæ ſunt $\frac{\text{√ȝ 4}}{9}$. & $\frac{\text{√ȝ 49}}{9}$. vel illa minutia ex hac detrahenda, non eſt opus reductione ad eandem denominationem. Fit autem ex numeratoribus ſumma √ȝ 81. & ſuppoſito denominatore 9. fit ſumma ex duabus propoſitis minutijs $\frac{\text{√ȝ 81}}{9}$. hoc eſt, 1. At detracto numeratore √ȝ 4. ex numeratore √ȝ 49. relinquitur √ȝ 25. Eſt ergo reſiduum $\frac{\text{√ȝ 25}}{9}$. hoc eſt, $\frac{5}{9}$.

QVANDO numeratores ſunt incommenſurabiles, additio eorum fit per interpoſitionem ſigni +, ſubtractio autem per interiectionem ſigni —. Vt ſumma ex √ȝ $\frac{7}{8}$. & √ȝ $\frac{5}{8}$. fit ſumma √ȝ $\frac{7}{8}$ + √ȝ $\frac{5}{8}$. Et √ȝ $\frac{5}{8}$. dempta ex √ȝ $\frac{7}{8}$. reliquam facit √ȝ $\frac{7}{8}$ — √ȝ $\frac{5}{8}$.

Multiplicatio ac diuiſio minutiarum irrationaliũ.

IN multiplicatione, ac diuiſione minutiarum irrationalium ſolum opus eſt reductione ad eadem ſigna radicalia. Reliqua enim perficiuntur, vt in minutijs vulgaribus traditum eſt. Vt ſi ducenda ſit $\frac{\text{√ȝ 3}}{4}$ per $\frac{\text{√ȝ 6}}{7}$. fit $\frac{\text{√ȝ 18}}{28}$. At ſi prior per poſteriorem diuidenda ſit, inuerſis terminis diuiſoris, ſtabit exemplum, vt vides. Fit autem Quotiens $\frac{\text{√ȝ 147}}{\text{√ȝ 96}}$. hoc eſt √ȝ 1 $\frac{51}{96}$. Nam ex √ȝ 3. in 7. fit √ȝ 147. & ex 4. in √ȝ 6. fit √ȝ 96. In diuiſione tamen fieri poteſt reductio ad eandem denominationem, ſed tunc, relicto denominatore, facienda eſt diuiſio numeratoris per numeratorem. Vt in dato exemplo, minutiæ $\frac{\text{√ȝ 3}}{4}$. & $\frac{\text{√ȝ 6}}{7}$. reducentur ad $\frac{\text{√ȝ 147}}{28}$. & $\frac{\text{√ȝ 96}}{28}$. Diuiſo autem numeratore √ȝ 147. per numeratorem √ȝ 96. fit Quotiens √ȝ 1 $\frac{51}{96}$. vt prius.

Multiplicatio	Diuiſio
$\frac{\text{√ȝ 3}}{4}$. per $\frac{\text{√ȝ 6}}{7}$.	$\frac{\text{√ȝ 3}}{4}$. per $\frac{7}{\text{√ȝ 6}}$.

SINT quoque multiplicanda inter ſe $\frac{\text{√ȝ 800 + √ce 5184}}{10}$. & $\frac{\text{√ce 1536}}{10}$. Primũ reducenda ſunt ad eadem ſigna radicalia, retento eodem denominatore communi 10. Numeratores ergo √ȝ 800. & √ce 5184. reducentur ad √ȝce 512000000. & √ȝce 26873856. Deinde ſi numerator √ce 1536. multiplicetur zenſice, reducetur ad √ȝce 2359296. Itaque ſic ſtabunt minutiæ reductæ. Ex √ȝce 2359296. in √ȝce 512000000. hoc eſt,

$$\frac{\text{√ȝce 512000000 + √ȝce 26873856}}{10}. \qquad \frac{\text{√ȝce 2359296}}{10}.$$

in √ȝce 512. (Nam √ȝce 512. & $\frac{\text{√ȝce 512000000}}{10}$. idem prorſus ſunt, cum idem numerus fiat ex √ȝce 512. in 10. hoc eſt, in √ȝce 1000000. qui ex 1. in √ȝce 512000000) producitur √ȝce 1207959552. Et ex √ȝce 2359296. in √ȝce 26873856. fit √ȝce 63403380965376, hoc eſt, √ce 7962624. cum hic numerus ſit illius producti radix zenſica. Et quoniam denominatores multiplicati faciunt 100. erit productus numerus

$$\frac{\text{√ȝce 1207959552}}{10} + \frac{\text{√ce 7962624}}{100}.$$

AD extremum ſit diuidenda $\frac{\text{√ȝce 512000000 + √ȝce 26873856}}{10}$. per $\frac{\text{√ȝce 2359296}}{10}$. Quoniam eundem habent denominatorem, ſatis eſt, diuidere numeratores. Ex diuiſione √ȝce 512000000, per √ȝce 2359296. fit Quotiens √ȝce 217 $\frac{1}{72}$. nimirum √ȝce $\frac{15625}{72}$. hoc eſt, $\frac{5}{\text{√ȝce 72}}$. propterea quod numerator √ȝce 15625. æquiualet numero 5. cum numeri 15625. radix Zenſica ſit 125. & huius radix cubica 5. Vel (quod idem eſt) quod numeri 15625. radix cubica ſit 25. & huius radix Zenſica 5. At ex diuiſione √ȝce 26873856. per √ȝce 2359296. fit Quotiens √ȝce 11 $\frac{921600}{2359296}$. ſiue √ȝce 11 $\frac{25}{64}$. vel √ȝce $\frac{729}{64}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. ſiue 1 $\frac{1}{2}$. Ex diuiſione ergo propoſita fit Quotiens √ȝce 217 $\frac{1}{72}$ + 1 $\frac{1}{2}$. Vel $\frac{5}{\text{√ȝce 72}}$ + 1 $\frac{1}{2}$.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS COSSICIS, ſiue denominatis, vna cum eorum Algorithmo.

CAPVT XXVI.

Numeri Coſſici irrationales, qui.

NVMERI Coſſici, ſiue denominati fiunt irrationales, quando illis præfigitur ſignum aliquod radicale. Vt 20℞. fit irrationalis √ȝ 20℞. Item √ce 20℞. √ȝȝ 20℞. &c. Senſus autem eſt, vt ſumatur radix zenſica, vel cubica, vel zenſizenſica 20. radicum, quæ mille modis variari poteſt, pro varietate valoris vnius radicis, poteſtque aliquando eſſe rationalis, & aliquando, vt plurimum, irrationalis. Nam ſi 1℞. eſt 5. erunt 20℞. numerus 100. cuius √ȝ. eſt 10. atq; ita √ȝ 20℞. eſt numerus rationalis, æquiualens 10. At √ce 20℞. erit irrationalis, cum 100. non habeant radicem cubicam. Sic etiam √ȝȝ 20℞. erit irrationalis, quod 100. non habeant radicem Zenſizenſicam: æquiualet tamen √ȝ 10. quippe cum radix zenſica 100. ſit 10. & radix zenſica 10. ſit √ȝ 10. Quod ſi 1℞. ſit 50. erit valor 20℞. 1000. quæ habent radicem cubicam 10. Erit igitur √ce 20℞. rationalis, æquiualens 10. At √ȝ 20℞. erit irrationalis, ſicut & √ȝȝ 20℞. cum 1000. neque habeant radicem zenſicam, neque zenſizenſicam. Vides ergo, non poſſe iudicari, an huiuſmodi numeri ſint rationales, vel irrationales, niſi prius conſtet æſtimatio vnius radicis. Immo fieri poteſt, vt numerus aliquis Coſſicus, ſine ſigno radicali, inueniatur interdum eſſe irrationalis. Vt ſi æquatio reperiatur inter 1ȝ. & 20℞. & vnius zenſi pretium ſit 18. neceſſario numerus 20℞. erit irrationalis, æquiualens √ȝ 7200. Nam quadrati 18. radix eſt √ȝ 18. atque adeo 20℞. erunt √ȝ 7200. qui numerus irrationalis eſt, cum 7200. careant radice quadrata.

ALGO-

ALGORITHMVS horum numerorum ex triplici Algorithmo conficitur, ſignorum radicalium, numerorum abſolutorum, & ſignorum Coſſicorum; neque admodum difficilis eſt, cum ipſa ſigna ſatis nos inſtruant, quid agere debeamus. Additio enim vt plurimum fit per interpoſitionem ſigni +. Subtractio vero per ſignum −. Vt ex additione √ȝ36℞. ad √ȝ12ȝ. fit ſumma √ȝ36℞ + √ȝ12ȝ. Vel √ȝ12ȝ + √ȝ36℞. At demptis 36. ex √ȝ36℞. fit reliquus numerus √ȝ36℞ − 36. & ſic de alijs. *Additio, & Subtractio numerorum Coſſicorum irrationaliũ.*

QVANDO ſigna Coſſica ſunt eadem, & numeri irrationales, ſemotis ſignis Coſſicis, ſunt commenſurabiles, tunc ſigna Coſſica operationem non impediunt, ſed numeri irrationales adduntur, ac ſubtrahuntur, quemadmodum radices ſurdæ, vt cap. 19. & 20. monſtratum eſt, ac poſt operationẽ idem ſignũ Coſſicum apponitur. Vt ex √ȝ8℞. ad √ȝ18℞. fit ſumma √ȝ50℞. quia √ȝ8. & √ȝ18. commenſurabiles ſunt, efficiuntque √ȝ50. quod conſtat ita eſſe, ſi 1℞ ſtatuatur 2. Erunt enim 8℞ 16. cuius numeri radix eſt 4. Et 18℞. faciunt 36. cuius numeri radix eſt 6. Fiunt autem 10. ex 4. & 6. Liquet autem √ȝ50℞. facere etiam 10. cum 50℞ faciant 100. cuius numeri radix eſt 10.

SIC ex √ȝ8℞. ad √ȝ32℞. fit √ȝ72℞. quod per reſolutionem probari poteſt, poſita 1℞. 2. Nam √ȝ8℞ erit 4. & √ȝ32℞. erit 8. fit autem ex 4. & 8. ſumma 12. Vide iam, an ſumma collecta √ȝ72℞. faciat etiam 12. Certum autem eſt, 72℞. facere 144. cuius radix eſt 12.

ITEM ex √ȝ8ȝ. ad √ȝ32ȝ. fit ſumma √ȝ72ȝ. Et ex √ȝ16ȝ. ad √ȝ4ȝ. fit √ȝ36ȝ. Nam ſi 1℞. ſtatuatur 2. vt 1ȝ ſit 4. erunt 16ȝ 64. cuius numeri radix eſt 8. At 4ȝ. erunt 16. cuius numeri radix eſt 4. Fiunt autẽ 12. ex 8. & 4 quantum nimirum valet √ȝ36ȝ. quippe cum 36ȝ. ſint 144. cuius numeri radix eſt 12.

PRÆTEREA ex √ȝ8ȝ. ad √ȝ18ȝ. fit √ȝ50ȝ. quod etiam perbelle examini quadrat, poſita 1℞ 2. vt 1ȝ. ſit 4. Erunt enim 8ȝ. 32. cuius numeri radix eſt √ȝ32. Et 18ȝ. ſunt 72. cuius radix eſt √ȝ72. Fit autem ex √ȝ32. & √ȝ72. ſumma √ȝ200. Ac tantundẽ facit √ȝ50ȝ. quippe cum 50ȝ. ſint 200. cuius numeri radix eſt √ȝ200.

EADEM ratione, dempta √ȝ8℞. ex √ȝ18℞. ſupereſt √ȝ2℞. Atque ſubtracta √ȝ8ȝ. à √ȝ18ȝ. reliqua fit √ȝ2ȝ. Vtrumque exemplum per radicem 2. ſic examinabimus. 8℞. faciunt 16. cuius numeri radix eſt 4. Et 18℞ faciunt 36. cuius numeri radix eſt 6. Demptis autem 4. ex 6. remanent 2. Ac tantundem facit √ȝ2.℞, cum 2.℞ faciant 4. cuius numeri radix eſt 2. Rurſus 8ȝ. faciunt 32. cuius numeri radix eſt √ȝ32. Et 18ȝ. faciunt 72. cuius numeri radix eſt √ȝ72. Subtracta vero √ȝ32. ex √ȝ72. remanet √ȝ8. quantum nimirum facit √ȝ2ȝ. propterea quod 2ȝ. faciunt 8. cuius numeri radix eſt √ȝ8.

VT autem numeri Coſſici irrationales inter ſe multiplicentur, aut diuidantur, reducenda prius ſunt ſigna radicalia ad idem ſignum, vt cap. 18. docuimus: ſi nimirum multiplicatio fiat in crucem. Vt √ce4℞. & √ȝ8℞. reducuntur ad √ȝce16ȝ. & √ȝce512ce. vt ex ſubiecta formula patet. Nã 4℞ ductæ in ſe zenſice, faciunt 16ȝ. & 8℞ multiplicatæ in ſe cubice faciunt 512ce. Exponentes vero ſignorum radicalium inter ſe multiplicati faciunt 6. exponentem ſigni √ȝce. Reductionem autem eſſe rite peractam, hoc eſt, √ȝce16ȝ. æqualem eſſe √ce4℞. & √ȝce512ce. æquiualere √ȝ8℞. perſpicuum eſt. *Reductio ſignorum radicalium in numeris Coſſicis irrationalibus.*

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{ȝce}\ 16ȝ & & \sqrt{ȝce}\ 512\ ce \\ \hline 4\ ℞ & \times & 8\ ℞ \\ \sqrt{ce} & & \sqrt{ȝ} \\ \hline 3 & & 2 \\ \hline & 6 & \end{array}$$

Nam poſita 1℞ 2. erunt 4℞ 8. cuius numeri radix cubica eſt 2. Ac tantundem facit √ȝce16ȝ. ad quam reducta eſt √ce4℞. Nam 16ȝ. faciunt 64. cuius numeri radix zenſicubiça eſt 2. Item 8℞. erunt 16. cuius numeri radix zenſica eſt 4. Atque tantundem quoque facit √ȝce512ce. ad quam √ȝ8℞. reuocata eſt. Nam 512ce. faciunt 4096. cuius numeri radix zenſicubica eſt 4.

Eodẽ modo √ȝ8℞. & √ce16ȝ. reducẽtur ad √ȝce.512ce & √ȝce256ȝȝ. vt hæc altera formula docet. Eſſe autem √ȝce512ce. æqualem √ȝ8℞ & √ȝce256ȝȝ. æquiualere √ce16ȝ. facile probabimus. Nimirum √ȝ8℞ hoc eſt, √ȝ16. eſt 4. quantum videlicet facit √ȝce512ce. quippe cum 512ce faciant 4096 cuius numeri √ȝce eſt 4. Item √ce16ȝ. eſt quoque 4. quantum nimirũ facit √ȝce256ȝȝ. cum 256ȝȝ. faciant 4096. qui numerus radicem zenſicubicam habet 4. Ex quo conſtat, tam √ȝ8℞. & √ce16ȝ. inter ſe, quam √ȝce512ce. & √ȝce.256ȝȝ. inter ſe eſſe æquales.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{ȝce}\ 512\ ce & & \sqrt{ȝce}\ 256\ ȝȝ \\ \hline 8\ ℞ & \times & 16\ ȝ \\ \sqrt{ȝ} & & \sqrt{ce} \\ \hline 2 & & 3 \\ \hline & 6 & \end{array}$$

FACTA reductione, vt præcepimus, inſtitui poteſt & multiplicatio, & diuiſio. In priori ergo exemplo ex multiplicatione √ȝce512ce. in √ȝce16ȝ. fit √ȝce8192ß. quod ita probatur. √ȝce512ce. facit 4. Et √ȝce16ȝ. facit 2. Atq; ex in 4. in 2. fiunt 8. quantũ nimirũ facit √ȝce8192ß. Quoniã videlicet 8192ß. faciunt 262144 cuius √ȝce eſt 8. Item ante reductionem √ce4℞. eſt 2. & √ȝ8℞. eſt 4. vbi rurſum vides, ex 2 in 4. gigni 8. *Multiplicatio ac diuiſio numerorum Coſſicorum irrationalium.*

Item ex diuiſione √ȝce512ce per √ȝce16ȝ. fit Quotiens √ȝce32℞. hoc eſt, 2. cum 32℞ faciant 64. cuius numeri √ȝce eſt 2. quod probatur. Nam √ȝce512ce. eſt 4. & √ȝce.16ȝ. eſt 2. vbi cernis, ex diuiſione 4. per 2. Quotientem fieri 2. quod etiam ante reductionem manifeſtum eſt: quippe cum √ȝ8℞. ſit 4. & √ce4℞. ſit 2. vbi iterum ex diuiſione 4. per 2. fit Quotiens 2.

IN poſteriori vero exemplo, ex multiplicatione √ȝce512ce. in √ȝce256ȝȝ. fit √ȝce131072Bß. hoc eſt 16. propterea quod 131072Bß. faciunt 16777216. qui numerus radicem zenſicubicam habet 16. Atque hoc ita eſſe, liquet. Nam tam √ȝce512ce. quam √ȝce256ȝȝ. eſt 4. Manifeſtum autem eſt, ex 4. in 4. fieri 16. quod etiam patet ante reductionem, cum tam √ȝ8℞. quam √ce16ȝ. ſit 4. poſita 1℞ 2. &c.

Item ex diuiſione √ȝce256ȝȝ. per √ȝce512ce fit Quotiens √ȝce½℞. hoc eſt, √ȝce1. cum ½℞ ſit 1. poſita 1℞ 2. ac proinde cũ √ȝce1. ſit 1. erit Quotiens 1. vt ratio poſtulat. Cum enim √ȝce256ȝȝ. & √ȝce512. ce. æquales ſint, quod quælibet earum ſit 4. vt dictum eſt, fiet ex diuiſione vnius per alteram Quotiens 1. Pari ratione ex diuiſione √ȝce131072 Bß. per √ȝce512ce. fit Quotiens √ȝce256ȝȝ. vt probare potes.

SIC etiam, vt 1℞ ducatur in √ȝ4. quadranda erit 1℞ & quadrato 1ȝ, præponendum ſignum radicale √ȝ. vt fiat √ȝ1ȝ atque ita ex √ȝ1ȝ in √ȝ4 fit numerus √ȝ4ȝ. quod probatur, ſi 1℞. ſit 2. Nam ex 2. in √ȝ4. id eſt, in 2. fiunt 4. radix nimirum 4ȝ. id eſt, numeri 16.

Ita quoq; vt 3 ℞ ducantur in √ʒ 16. quadrandus erit numerus 3℞ vt fiant 9ʒ. Deinde √ʒ 9ʒ ducenda in √ʒ 16. gigneturque numerus √ʒ 144ʒ. quod eodem modo probabitur, ſumpto binario pro 1. radice. Nam 3℞ facient 6. & √ʒ 16. facit 4. Fiunt autem 24. ex 6. in 4. Ac radix ʒ 144ʒ. facit ſimiliter 24. cum 144ʒ faciant 576. cuius numeri radix eſt 24. &c.

Hi porro numeri producti √ʒ 4ʒ. & √ʒ 144ʒ. dicuntur numeri radicum, vt in ænigmate 12. & 28. cap. 32. conſtabit: quia videlicet prior productus eſt ex 1℞. in √ʒ 4. poſterior autem ex 3℞. in √ʒ 16. quemadmodum numerus 4. productus ex 1. aureo in 4. Item numerus 48. productus ex 3. aureis in 16. dicitur numerus aureorum. Id quod diligenter obſeruandum eſt.

Atque hoc perinde eſt, ac ſi ducatur 1. in √ʒ 4. vel 3. in √ʒ 16. Producti enim numeri √ʒ 4. & √ʒ 144. ſunt numeri vnitatum, quæ multiplicatæ ſunt. Itaque ex 1℞ in √ʒ 4. fit numerus radicum √ʒ 4ʒ. nimirum √ʒ 4. zenſorum. Et ex 3℞. in √ʒ 16. fit numerus radicum √ʒ 144ʒ. id eſt, √ʒ 144. zenſorum, atque ita de cæteris. quandoquidem in huiuſmodi multiplicationibus ſeruata eſt regula multiplicationis radicum ſurdarum, quæ in cap. 18. tradita eſt. Verum hoc melius percipietur ex ſolutione ænigmatis 12. & 28. cap. 32.

Quãdo poſt reductionẽ ſigna Coſſica abbreuiari poſſint, & quã do non.

OBSERVANDVM autem hic eſt, rem non ſuccedere, ſi ſigna Coſſica, vt cap. 7. docui, abbreuientur. Nam in priori exemplo, in quo √ce 4℞. & √ʒ 8℞ reductæ ſunt ad √ʒce 16ʒ. & √ʒce 512ce. vbi ex multiplicatione procreatus eſt numerus 8. ſi ſigna Coſſica abbreuientur, ſtabit reductio in his terminis √ʒ℞ 16. & √ce 512℞. Sed ex multiplicatione vnius in alteram fit √ʒce 8192℞. quæ valet √ce 128. propterea quod 8192℞. faciunt 16384. cuius numeri √ʒ. eſt 128. & huius √ce. eſt √ce 128. quæ æqualis non eſt priori numero producto 8. Solum quando huiuſmodi numeri reducti æquales ſunt, abbreuiari poterunt ſigna Coſſica. Tunc enim manet adhuc æqualitas, vt cap 12. diximus. Vt quia √ʒce 512ce. & √ʒce 256ʒʒ. æquales ſunt cum quælibet valeat 4. ſi abbreuientur ſigna Coſſica, cernetur adhuc æqualitas inter √ʒce 512. & √ʒce 256℞. quippe cum 256℞ faciant 512. Conſtat autem √ʒce 512. & √ʒce 512. æquales eſſe. Hoc te monere volui, ne ſigna Coſſica abbreuies, etiam poſt reductionem factam, niſi conſtet numerorum æqualitas.

DE minutijs porro horum numerorum non attinet quidquam dicere, cum ſuorum integrorum præcepta ſequantur in omnibus.

Æquatio inter numerum Coſſicum Irrationalem, & numerũ abſolutum.

CÆTERVM ſi occurrat æquatio inter numerum Coſſicum Irrationalem, & numerum abſolutum, reducetur ea æquatio hoc modo. quod quidem prope finem cap. 10. polliciti ſumus, nos hoc loco docturos. Sit, Verbi gratia, æquatio inter √ʒ 24℞. & 12. Quo poſito, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 24℞. & 144. Diuiſis ergo 144. per 24. prodibit in Quotiente vnius radicis pretium 6. quod patet. quia 24℞ facient 144. cuius numeri radix quadrata eſt 12.

Item ſi ſit æquatio inter √ʒ 10ʒ. & 20. erit etiam æquatio inter eorum quadrata 10ʒ. & 400. Diuiſis igitur 400 per 10. reperietur 1ʒ. valere 40. atque idcirco 1℞. valebit √ʒ 40. Nam 10ʒ. erunt 400. cuius numeri radix quadrata eſt 20.

Denique ſi æquatio inueniatur inter √ce 12ʒ. & 30. erit etiam æquatio inter eorum cubos 12ʒ & 27000. Diuiſis ergo 27000. per 12. prodibit pretium 1ʒ. 2250. ac propterea 12ʒ facient 27000. cuius numeri radix cubica eſt 30.

Quãdo huiuſmodi æquatio impoſſibilis ſit.

Quod ſi quis proponat æquationem inter √ce 8. & 3. erit etiam æquatio inter eorum cubos 8. & 27. quod eſt impoſſibile. Itaque in hiſce æquationibus neceſſe eſt, numerum abſolutum eſſe radicem numeri, qui gerit ſignum radicale. qualis eſt æquatio inter √ce 8. & 2. Item inter √ce 64. & 4. Item inter √ʒ 81. & 9. &c. Alioquin impoſſibilis erit æquatio.

DE BINOMIIS ATQVE APOTOMIS, Reſiduisve.

CAPVT XXVII.

Binomium & Reſiduũ: item Trinomiũ, Quatrinomium apud ſcriptores quid.

SCRIPTORES Algebræ ferme omnes, duos numeros quoſuis copulatos per ſignum +, Binomium appellare ſolent, vt √ʒ 12 + √ʒ 3. & √ʒ 18 + √ʒ 8. & 6 + √ʒ 9. Copulatos vero per ſignũ —, Reſiduum, vel Apotomen, vt √ʒ 12 — √ʒ 3. & √ʒ 18 — √ʒ 8. & 6 — √ʒ 9. Plures autem numeros ita copulatos, dicere conſueuerunt, trinomium, quatrinomium, &c. vt √ʒ 17 + √ʒ 10 + √ʒ 3. vel √ʒ 17 — √ʒ 10 + √ʒ 3. dicunt Trinomium: At √ʒ 17 + √ʒ 10 + √ʒ 3 + √ʒ 2. Vel √ʒ 17 — √ʒ 10 + √ʒ 3 — √ʒ 2. Quatrinomium, &c. Euclides aũt in lib. 10. propoſ. 37. & 74. tunc ſolum numeros binos copulatos per ſignum +. vel —, vocat Binomia, vel Reſidua, quando duo illi numeri copulati ſunt Rationales ſolum potentia commenſurabiles, quamuis alter eorum ſit radix ſurda, vel vterque. Vt 6 + √ʒ 20. Item √ʒ 18 + 4. Item √ʒ 24 + √ʒ 18. vocat Binomia: At 6 — √ʒ 20. Et √ʒ 18 — 4. Et √ʒ 24 — √ʒ 18. appellat Reſidua, vel Apotomas. Nam quilibet duo numeri copulati ſunt Rationales potentia tantum commenſurabiles; cum eorum quadrata commenſurabilia ſint quadrato cuiuſuis numeri Rationalis. Itaque neque √ʒʒ 10 + √ʒʒ 8. Binomium erit, neque √ʒʒ 10 — √ʒʒ 8. Reſiduum. quia eorum particulæ ſunt numeri Irrationales: quippe cum eorum quadrata √ʒ 10. & √ʒ 8. ſint incommenſurabilia habentia proportionem, quam √ʒ $\frac{5}{4}$. ad 1. vt ex Lemmate cap. 18. patet. Eadem ratione neque 6 + √ʒ 9. neque 20 + 6. Binomia erunt, neque 6 — √ʒ 9. neque 20 — 6. Reſidua: propterea quod bini quilibet numeri efficiunt vnum ſolum numerum rationalem, non autem duos. Nam 6 + √ʒ 9. æquivalent 9. & 20 + 6. æquivalent 26. Item 6 — √ʒ 9. æquivalent 3.

Binomium & Reſiduũ ſecundum Euclidem, quid.

Et 20

Et 20 — 6. æquiualent 14. Ratio autem eſt, quod bini quilibet ſunt Rationales longitudine commenſurabiles, & non potentia tantum: quippe cum proportio inter quoslibet duos ſit rationalis; Proportio enim 6. ad √ℨ 9. dupla eſt: ſi namque per √ℨ 9. diuidantur 6. hoc eſt, √ℨ 36. exibit in Quotiente √ℨ 4 hoc eſt, 2. denominator proportionis. Si vero diuidantur 20. per 6. fiet Quotiens $3\frac{1}{3}$. ita vt 20. ad 6. habeant proportionem triplam ſeſquitertiam. Eadem ratione neque √ℨ 12 + √ℨ 3. Binomium erit, neque √ℨ 12 — √ℨ 3. Reſiduum, licet vterque numerus ſit radix ſurda. quia numeri proportionem habent duplam, & priores duo efficiunt ſummam √ℨ 27. videlicet vnicum numerum: poſteriores vero duo æquiualent √ℨ 3. vnico etiam numero. Eandemque ob cauſam neque √ℨ 18 + √ℨ 8. Binomium erit cenſendum, neque √ℨ 18 — √ℨ 8. Reſiduum, quamuis vterque numerus radix ſurda ſit. quia numeri proportionem habent ſeſquialteram, cuius denominator eſt $1\frac{1}{2}$. ac priores duo conficiunt ſummam √ℨ 50. vnicum numerum: poſteriores vero duo huic vnico numero √ℨ 8. æquiualent. Denique propoſitis duobus numeris rationalibus, hoc eſt, quorum quadrata commenſurabilia ſunt quadrato cuiuſuis numeri rationalis, ita tamen, vt diuiſo vno per alterum, Quotiens fiat rationalis, id eſt, numerus, qui radicem habeat, non conſtituetur ex illis Binomium, aut Reſiduum: quia eiuſmodi numeri nō ſunt potentia tantū commenſurabiles, ſed etiam longitudine; ac proinde ex ipſis non fit numerus irrationalis, ſed rationalis, licet nonnunquam efficiatur radix ſurda. Vt ex 3. & √ℨ 16 fit ſumma √ℨ 49. hoc eſt, 7. numerus rationalis, qui ſurdus non eſt: At ex √ℨ 8. & √ℨ 18. fit ſumma √ℨ 50. numerus rationalis ſurdus. Atque in hoc decipiuntur non pauci, putantes omnem numerum, qui gerit ſignum √ℨ. & radicem non habet, eſſe irrationalem quod verum non eſt, atque Euclidi manifeſte repugnat. Solum quando numerus gerens ſignum √ℨ. refert ſuperficiem aliquam, vel quadratum, numerus ille irrationalis eſt [a] qualis eſt ſuperficies rectangula producta ex multiplicatione mutua duorum numerorum rationalium potentia tantum commenſurabilium. Vt ſi √ℨ 3. ducatur in √ℨ 10. producitur ſuperficies √ℨ 30. irrationalis, quæ Media dicitur. Radix autem eius quadrata eſt √ℨℨ 30. quæ vocatur linea Media. cum hæc in ſe quadrate ducta faciat √ℨℨ 900. hoc eſt, √ℨ 30. propterea quod radix zenſica numeri 900. eſt 30. & huius radix zenſica eſt √ℨ 30. Itaque quando in ſuperioribus numeros habentes præfixum ſignum √ℨ. vocauimus irrationales, id impropriè dictum accipiendum eſt, quando numeri illi rationales ſunt.

Nō omnem numerum, qui gerit ſignū √ℨ. eſſe irrationalem.

[a] *22. deci.*

Superficies, & linea Media.

Poteſt quidem omnis numerus gerens ſignum √ℨ. dici numerus irrationalis, ſi ſumatur pro ſuperficie Media, producta ex √ℨ 1. in ipſum numerum. Vt √ℨ 3. erit ſuperficies Media, & irrationalis, ſi capiatur pro producto ex √ℨ 1. in √ℨ 3. eiuſque radix quadrata erit √ℨℨ 3. Nam hæc ducta in ſe zenſice facit √ℨℨ 9. hoc eſt √ℨ 3. quippe cum radix zenſica numeri 9. ſit 3. & huius radix zenſica √ℨ 3. & ſic de alijs.

CONSTITVIT Euclides ſex genera Binomiorum, totidemque Reſiduorum. Aut enim maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini eſt commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. Item vel maius nomen cōmenſurabile eſt longitudine numero rationali expoſito, vel minus, vel neutrum. Vtrumque enim nomen expoſito numero rationali longitudine cōmenſurabile eſſe nequit. [b] quia & ipſa nomina eſſent numeri rationales longitudine commenſurabiles. quod eſt abſurdum, cum ponantur potentia tantum commenſurabiles. Quibus poſitis, fient ſex genera Binomiorum. quæ ſic definiuntur.

Sex Binomia, ac Reſidua.

[b] *12. deci.*

Binomium primum eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini eſt longitudine commenſurabilis, ipſumq; maius nomen expoſito numero rationali eſt commenſurabile longitudine. Vt 6 + √ℨ 27. quia quadratum maioris nominis 6. nimirum 36. ſuperat 27. quadratum minoris nominis, quadrato 9. cuius radix 3. longitudine commenſurabilis eſt maiori nomini 6. atque ipſum quoq; maius nomen 6. commenſurabile eſt longitudine expoſito cuiuis numero rationali.

Binomium primum.

Binomium ſecundum eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini eſt longitudine commenſurabilis, ipſumque minus nomen expoſito numero rationali eſt longitudine commenſurabile. Vt √ℨ 48 + 6. quia quadratum maioris nominis, nimirum 48. ſuperat 36. quadratum minoris nominis, quadrato 12. cuius radix, videlicet √ℨ 12. commenſurabilis eſt longitudine maiori nomini, cum √ℨ 48. ad √ℨ 12. habeat proportionem duplam; propterea quod illa per hanc diuiſa, fiat Quotiens √ℨ 4. hoc eſt, 2. Item minus nomen expoſito cuilibet numero rationali commenſurabile eſt longitudine.

Binomium ſecundum.

Binomium tertium eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini eſt longitudine commenſurabilis, ſed neutrum nomen expoſito numero rationali longitudine commenſurabile exiſtit. Vt √ℨ 24 + √ℨ 18. quia maioris nominis quadratum 24. ſuperat 18. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix nimirum √ℨ 6. commenſurabilis eſt longitudine maiori nomini: cum √ℨ 24. ad √ℨ 6. proportionem habeat duplam: quippe cum illa diuiſa per hanc, Quotiens fiat √ℨ 4. hoc eſt, 2. At neutrum nomen longitudine commenſurabile eſt expoſito numero rationali.

Binomium tertium.

Binomium quartum eſt. cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini eſt longitudine incommenſurabilis, ipſum vero maius nomē expoſito numero rationali commenſurabile eſt longitudine. Vt 4 + √ℨ 10. quia maioris nominis quadratum 16. ſuperat 10. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum √ℨ 6. longitudine incommenſurabilis eſt maiori nomini 4. quippe cū maioris nominis quadratum 16. ad 6. quadratum √ℨ 6. proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: [c] ac propterea eorum latera longitudine ſint incommenſurabilia. At maius nomen 4. longitudine commenſurabile eſt numero expoſito rationali.

Binomium quartum.

[c] *9. decim.*

Binomium quintum eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommenſurabilis eſt longitudine, nomen vero minus expoſito numero rationali longitudine eſt commenſurabile. Vt √ℨ 5 + 2. quia quadratum 5. maioris nominis ſuperat 4 quadratum minoris nominis, quadrato 1. cuius radix, nimirum √ℨ 1. longitudine incommenſurabilis eſt maiori nomini: quippe cum maioris nominis quadratum ad 1. quadratum √ℨ 1. proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad numerum quadratum: [d] ac propterea latera eorum ſint longitudine incommenſurabilia. Eſt tamen minus nomen 2. longitudine commenſurabile expoſito numero rationali cuicunque.

Binomium quintum.

[d] *9. decim*

Binomium deniq; ſextum eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato cuius radix maiori nomini incommenſurabilis eſt longitudine, ſed neutrum nomen expoſito numero rationali commenſurabile longi-

Binomium ſextum.

longitudine. Vt √ʒ 80 + √ʒ 50. quia quadratum 80. maioris nominis ſuperat 50. quadratum minoris nominis, quadrato 30. cuius radix, nimirum √ʒ 30. longitudine incommenſurabilis eſt maiori nomini. quippe cum quadratum 80. maioris nominis, & quadratum 30. proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [a] ideoque eorum latera longitudine ſint incommenſurabilia longitudine. Neutrum quoque nomen longitudine commenſurabile eſt expoſito numero rationali.

[a] 9. decim.

SEX autem reſidua, vel Apotome eodem modo ſe habent; cum ex quolibet Binomio oriatur Apotome reſpondens, interpoſito ſigno —— pro ſigno +. Nam ex Euclide Apotome nil aliud eſt, quam id, quod relinquitur, ſi duobus numeris rationalibus potentia tantum commenſurabilibus poſitis, minor de maiore detrahatur. quod quidem fit per interpoſitionem ſigni —.

Sex genera Apotomarum.

Itaque ex primo Binomio 6 + √ʒ 27. fit prima Apotome 6 − √ʒ 27.
Ex ſecundo Binomio √ʒ 48 + 6. fit Apotome ſecunda √ʒ 48 − 6.
Ex tertio Binomio √ʒ 24 + √ʒ 18. fit Apotome tertia √ʒ 24 − √ʒ 18.
Ex quarto Binomio 4 + √ʒ 10. fit quarta Apotome 4 − √ʒ 10.
Ex quinto Binomio √ʒ 5 + 2. fit quinta Apotome √ʒ 5 − 2.
Ex ſexto denique Binomio √ʒ 80 + √ʒ 50. fit ſexta Apotome √ʒ 80 − √ʒ 50. quæ omnia perſpicua ſunt ex definitionibus Apotomarum ab Euclide traditis.

QVONIAM vero intelligentia decimi libri potiſſimum in cognitione Binomiorum, ac Reſiduorum conſiſtit, libet paulo diutius in eorum tractatione immorari. Primo autem loco docebimus, qua ratione quodvis Binomium optatum, ac proinde & Reſiduum (cum hoc ſolum ſigno — ab illo differat) reperiatur: Deinde, qua arte ex quouis Binomio, aut Reſiduo radix quadrata eliciatur, & quamnam lineam Irrationalem, vel numerum cõpoſitum, diminutumve radix illa conſtituat: inſiſtentes ſemper ijs, quę ab Euclide demonſtrata ſunt.

Binomij primi, & Apotomæ primæ inuentio.

SIT ergo inueniendum primum Binomium, primumque Reſiduum Quadratus quilibet numerus A B, nimirum 9. diuidatur in BC, quadratum numerum 4. & in AC, numerum non quadratum 5. aſſumaturque numerus rationalis quicunque 6. pro primo nomine. Et fiat, vt numerus 9. AB, ad numerum 5. AC, ita 36. quadratus numerus aſſumpti numeri 6. ad aliud: inuenietur que quadratus 20 Ergo 6 + √ʒ 20. erit primum Binomium. Et 6 − √ʒ 20. erit prima Apotome, vt conſtat ex propoſ. 49. & 86. lib. 10. Eucl.

```
5       4
A.....C....B

6 + √ʒ 20
6 − √ʒ 20
```

Binomij ſecundi, & ſecundæ Apotomæ inuentio.

Binomium vero ſecundum, atque Apotome ſecunda hoc modo reperietur. Diuiſo quocunque numero quadrato AB, nimirum 9. in BC, quadratum 4 & in AC, nõ quadratum 5. aſſumatur ad libitum numerus rationalis 5. pro ſecundo nomine. Fiat vt numerus 5. AC, ad quadratum numerum 9. AB, ita 25. quadratus numerus numeri aſſumpti 5. ad aliud; inuenietur que quadratus 45. Ergo Binomium ſecundum eſt √ʒ 45 + 5. Et √ʒ 45 − 5. Apotome ſecunda, vt manifeſtum eſt ex propoſ. 50 & 87. lib. 10. Eucl.

```
5       4
A.....C....B

√ʒ 45 + 5
√ʒ 45 − 5
```

Binomij tertij, & tertiæ Apotomæ inuentio.

Binomium tertium, & Apotomam tertiam inueniemus ſic. Diuiſo quolibet numero quadrato AB, videlicet 9. in BC, quadratum 4. & in AC, non quadratum 5. ſumatur alius numerus D, nimirum 6. non quadratus proxime maior, quam AC, 5. differetque D, ab AC, vel ſola vnitate, vel binario. Vnitate quidem, quando AC, numerus talis fuerit, vt ei vnitas addita non faciat quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, facit quadratum. Vt ſi AC, ſit 8. erit proxime maior non quadratus differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. efficit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. vt in noſtro exemplo, erit non quadratus proxime maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non conficit quadratum. Sumpto deinde quocunque numero rationali 12. Fiat vt numerus D 6. ad quadratum numerum AB, 9. ita 144. quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 12. ad aliud, inuenieturque quadratus 216. cuius radix, videlicet √ʒ 216. erit maius nomen. Quod ſi rurſus fiat; vt 9. quadratus AB, ad numerum AC, 5. ita quadratus 216. inuentus ad aliud, reperietur quadratus 120. cuius radix, nimirum √ʒ 120. erit minus nomen. Binomium ergo tertium inuentum eſt √ʒ 216 + √ʒ 120. Et Apotome tertia √ʒ 216 − √ʒ 120. vt ex propoſ. 51. & 88. lib. 10. Eucl. liquet.

```
5       4
A..... C....B
   D......
     12
√ʒ 216 + √ʒ 120
√ʒ 216 √ʒ − 120
```

Binomij quarti, & quartæ Apotomæ inuentio.

Binomium quartum, & Apotomam quartam inueniemus in hunc modum. Diuiſo quocunque quadrato numero AB, nimirum 9. in duos nõ quadratos AC, CB, vtpote in 6. & 3. ſumptoque numero quolibet rationali 6. pro maiori nomine: Fiat, vt quadratus numerus AB, videlicet 9. ad AC, 6. non quadratum, ita 36. quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 6. ad aliud; reperieturque quadratus 24. cuius radix, nimirum √ʒ 24. erit minus nomen. Eſt ergo quartum Binomium 6 + √ʒ 24. Et quarta Apotome 6 − √ʒ 24. vt ex propoſ. 52. & 89. lib. 10. Eucl. colligitur.

```
6       3
A......C...B

6 + √ʒ 24
6 − √ʒ 24
```

Binomij quinti, & Apotomæ quintæ inuentio.

Binomium quintum, & Apotomam quintam ita explorabimus. Diuiſo quolibet numero quadrato AB, nimirum 9, in duos AC, CB, non quadratos, vt in 6. & 3. ſumptoque numero quouis rationali 2. pro minori nomine: Fiat, vt AC, numerus 6. ad quadratum AB, nimirum ad 9. ita 4. quadratus aſſumpti numeri rationalis 2. ad aliud. inuenieturque quadratus 6. cuius radix, nimirum √ʒ 6. erit maius nomen. Erit ergo binomium quintum √ʒ 6. + 2. & & Apotome quinta √ʒ 6 − 2. vt Euclides propoſ. 53. & 90. lib. 10. concludit.

```
6       3
A...... C...B

√ʒ 6 + 2
√ʒ 6 − 2
```

Bino-

Binomium denique ſextum, & Apotomam ſextam indagabimus hac arte. Diuiſo quolibet numero 12. non quadrato AB, in duos non quadratos AC, CB, vt in 7. & 5. ſumatur alius quadratus D, quicunque, nimirum 9. & inſuper quilibet numerus rationalis 12. Deinde fiat, vt numerus quadratus D, nimirum 9. ad numerum 12. non quadratum AB, ita 144. quadratus numerus aſſumpti numeri rationalis 12. ad aliud. Reperietur enim quadratus 192. cuius radix, nimirũ √ȝ 192. erit maius nomẽ Binomij. Et ſi rurſus fiat, vt numerus 12. AB, non quadratus ad 7. numerum AC, ita quadratus proxime inuentus 192. ad aliud, reperietur quadratus numerus 112. cuius radix, nimirum √ȝ 112. erit minus nomen: ita vt Binomium ſextum ſit √ȝ 192 + √ȝ 112. Apotome autem ſexta √ȝ 192 − √ȝ 112. vt ex propoſ. 54. & 91. lib. 10. Eucl. conſtat.

Binomij ſexti, & Apotomæ ſextæ inuẽtio.

7   5
A....... C..... B
D........
12
√ȝ 192 + √ȝ 112
√ȝ 192 − √ȝ 112

IAM vero, dato quouis Binomio, vel Apotoma, inueniemus ex eo, ſine magno labore, quotuis alia Binomia, & Apotomas eiuſdem ſpeciei. Nam pro primo, ac quarto Binomio, ſi fiat, vt maius nomen ad minus, ita quiuis numerus rationalis aſſumptus pro maiori nomine noui Binomij ad aliud. producetur minus nomẽ noui Binomij primi vel quarti. Pro ſecundo vero, ac quinto, ſi fiat, vt minus nomen ad maius, ita quiuis numerus rationalis pro minori nomine noui Binomij aſſumptus ad aliud, procreabitur maius nomẽ noui Binomij ſecundi vel quinti. Pro tertio denique ac ſexto, ſi fiat, vt maius nomen ad minus, (quorum vtrumq; numerus ſurdus eſt,) ita quiuis numerus ſurdus pro maiori nomine noui Binomij aſſumptus ad aliud, proueniet minus nomen noui Binomij tertij, vel ſexti. Rationem huius rei, ſi quis deſideret, ſciat petendam eſſe ex propoſ. 15. lib. 10. Eucl. Cum enim per conſtructionem eadem ſit proportio inter nomina dati Binomij, quæ inter nomina producti Binomij: ſi maius nomen dati Binomij plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi commenſurabilis longitudine; [a] poterit quoque maius nomen noui Binomij plus, quam minus, quadrato radicis longitudine ſibi commenſurabilis: Et ſi maius nomen illius plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoq; maius nomen huius plus, quam minus, quadrato radicis ſibi incommenſurabilis longitudine. Nam nomina Binomiorum ſunt inſtar linearum. Atque idcirco duo illa Binomia erunt eiuſdem generis, nimirum vtrumque erit vel primum, vel ſecundum, vel tertium, &c. quippe cum vel maius nomen in vtroque, vel minus numerus ſit rationalis, vel ſurdus.

Inuẽtio Binomij, vel Apotomæ cuiuſuis ſpeciei, ex dato Binomio vel Apotoma eiuſdẽ ſpecie.

[a] 15. decim.

Inuento porro Binomio nouo, iam noſti, fieri ex eo Reſiduũ, vel Apotomá, ſi ſignum +. in − cõmutetur.

Exempli cauſa, ex Binomio primo 6 + √ȝ 27. fiet ſimile Binomium, cuius maius nomẽ ſit 400. ſi fiat, vt 6. ad √ȝ 27. ita 400. ad aliud. hoc eſt, ſi multiplicetur √ȝ 27. in 400. id eſt, in √ȝ 160000. & productus numerus √ȝ 4320000. per 6. id eſt, per √ȝ 36. diuidatur. Producetur enim √ȝ 120000. Eritque nouum Binomium primum 400 + √ȝ 120000. Et noua Apotome prima 400 − √ȝ 120000. Quadratum enim 160000. maioris nominis ſuperat quadratum 120000. minoris nominis quadrato 40000. cuius radix 200. longitudine commenſurabilis eſt maiori nomini, &c. Eademque ratio eſt de cæteris.

RVRSVS ſi vtrumque nomen dati Binomij per eundem quemuis numerum multiplicetur, aut diuidatur, producentur [b] eadem de cauſa duo nomina alterius Binomij eiuſdem ſpeciei: quę etiam nomina erunt alterius Apotomæ eiuſdem ſpeciei: [c] propterea quod duo numeri procreati eandem inter ſe proportionem habent, quam duo nomina propoſiti Binomij. V. g. Dato Binomio ſecundo √ȝ 48. + 6. ſi vtrumque nomen per 3. multiplicetur, fiet alterum Binomium ſecundum √ȝ 432 + 18. & alia Apotome √ȝ 432 − 18. Et ſi vtrumque nomen eiuſdem dati Binomij ſecundi √ȝ 48 + 6. diuidatur per numerum quemuis eundem 3. fiet iterum aliud Binomium ſecundum √ȝ 5⅓ + 2. & alia Apotome ſecunda √ȝ 5⅓ − 2. Quod ſi diuiſio fiat per 2. gignetur nouum Binomium ſecundum √ȝ 12 + 3. & noua Apotome ſecunda √ȝ 12 − 3 & ſic de alijs.

[b] 15. decim

[c] 17. septi.

QVOD ſi quando iudicandum ſit de aliquo Binomio, vel reſiduo propoſito, quondam ſit ex prædictis ſex ſpeciebus, non erit id magni laboris. Nam ſi maius nomen fuerit numerus rationalis abſolutus, erit Binomium vel primum, vel quartum. Et ſi quidem, diuiſo quadrato maioris nominis per exceſſum, quo illud quadratum ſuperat quadratum nominis minoris, Quotiens fiat numerus quadratus, Binomium erit primum: Si vero Quotiens ſit numerus non quadratus, Binomium erit quartum.

Binomium vel Reſiduum propoſitum quodnam ſit ex 6. ſpeciebus iudicare.

Si autem minus nomen fuerit abſolutus numerus rationalis, erit Binomium vel ſecundum, vel quintum. Et ſi quidem, diuiſo quadrato maioris nominis per exceſſum, quo illud quadratum ſuperat quadratum minoris nominis, Quotiens gignatur numerus quadratus, Binomium erit ſecundum: Si vero Quotiens fiat numerus non quadratus, Binomium erit quintum.

Si denique neutrum nominum fuerit abſolutus numerus rationalis, ſed ſurdus, erit Binomium vel tertium, vel ſextum; Tertium quidem, quando diuiſo maioris nominis quadrato per exceſſum, quo illud quadratum ſuperat quadratum minoris nominis, Quotiens proueniat numerus quadratus: ſi verò Quotiens gignatur numerus non quadratus, Binomium erit ſextum. Idemque dices de Apotoma quacunque.

POSTREMO eſt etiam ſcitu non iniucundũ, vt Michael Stifelius aduertit, omnia ſex Binomia, ac proinde & Reſidua, vel Apotomas, reperiri in paucis lineis certo quodam artificio inter circulũ quemlibet deſcriptis. Sit enim circulus ABCD, cuius diameter BD, in tot æquales partes diſtribuatur, vt earum numerus tertiam & quartam partem habeat, nimirum in 12. Ex quarta parte diametri E, comprehendente ſcilicet BE, tres duodecimas diametri; atq; ex tertia parte diametri F, cõplectente videlicet BF, quatuor duodecimas diametri, erigãtur ad diametrum perpendiculares EA, FC, in diuerſas partes; iunganturque rectæ AB, BC, CD, DA. Harum omnium rectarum quantitates hoc modo cognoſcentur. [d] Quoniam AE, inter DE, EB, media eſt proportionalis; & CF, inter DF, FB: [e] erit tam quadratum ex AE, rectangulo ſub DE, EB, quam quadratum ex CF, rectangulo ſub DF, FB, æquale. Eſt autem rectangulum ſub DE, EB, hoc eſt, ex 9. in 3. productum 27. Igitur & quadratum ex AE, erit 27. ideoq; recta AE, √ȝ 27. Rectangulum autem ſub DF, FB, id eſt, ex 8. in 4. procreatum eſt 32. Igitur & quadratum ex CF, erit 32. & recta CF, √ȝ 32.

Qua ratione in circulo omnia 6. Binomia, & Apotomæ reperiantur.

[d] coroll. 13. ſexti.

[e] 17. ſexti.

Deinde quia quadrata ex BE, EA, nimirum 9. & 27. conficiunt 36. [f] quibus æquale eſt quadratum ex AB; erit quadratum ex AB, 36. & recta ipſa AB, √ȝ 36. hoc eſt, 6.

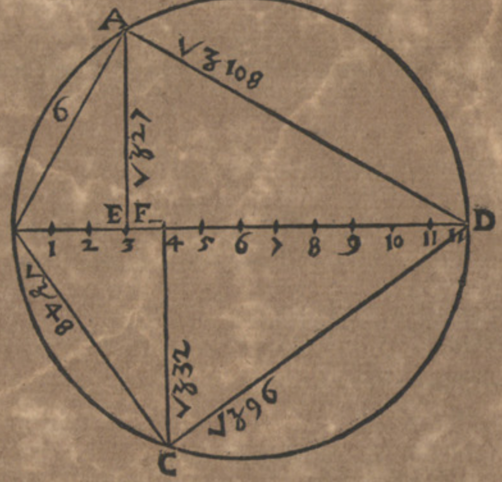
[f] 47. primi

Rurſus

[a] *47. primi* Rurſus quia quadrata ex BF, FC, nimirum 16. & 32. efficiunt 48. [a] quibus æquale eſt quadratum ex BC: erit hoc quadratum 48. & recta ipſa BC, √ȝ 48.

[b] *47. primi* Item quadrata ex DF, FC, nimirum 64. & 32. conficiunt 96. [b] quibus quadratum ex CD, æquale eſt: erit hoc quadratum 96. & recta ipſa CD, √ȝ 96.

[c] *47. primi*



Denique quia quadrata ex DE, EA, nimirum 81. & 27. efficiunt 108. [c] quibus quadratum ex DA, æquale eſt; erit hoc quadratum 108. & recta ipſa DA, √ȝ 108.

IAM rectæ AB, AE, conſtituunt Binomium primum 6 + √ȝ 27. & Apotomam primam 6 − √ȝ 27.

Rectæ AD, DE, conſtituunt Binomium ſecundum √ȝ 108 + 9. & ſecundam Apotomam √ȝ 108 − 9.

Rectæ AD, DC, conſtituunt Binomium tertium √ȝ 108 + √ȝ 96. & Apotomam tertiam √ȝ 108 − √ȝ 96.

Rectæ BD, DC, conſtituunt Binomium quartum 12 + √ȝ 96. & quartam Apotomam 12 − √ȝ 96.

Rectæ DC, DF, conſtituunt Binomium quintum √ȝ 96 + 8. & quintam Apotomam √ȝ 96 − 8.

Rectæ denique BC, CF, conſtituunt ſextum Binomium √ȝ 48 + √ȝ 32. & Apotomam ſextam √ȝ 48 − √ȝ 32.

ESSE autem hæc 6. Binomia, ac Reſidua illa, quæ ab Euclide definita ſunt, examinare poteris per earum definitiones. Nam in prioribus tribus, ſi maiora nomina diuidantur per exceſſus, quibus eorum quadrata ſuperant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri quadrati, ac proinde maiora nomina plus poſſunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine ſunt commenſurabiles. Si vero in poſterioribus tribus maiora nomina diuidantur per exceſſus, quibus eorum quadrata ſuperant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri non quadrati: ac proinde maiora nomina plus poſſunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine ſunt incommenſurabiles. Cætera ex ſe manifeſta ſunt.

QVOD ſi diametrum BD, diuiſeris in alias partes, quarum numerus habeat partem tertiam, & quartam, vt in 24. vel 36. vel 48. vel 60. vel 204. vel 360. vel 480. vel 600. &c. inuenies eodem ordine alia 6. Binomia, & Apotomas.

DE EXTRACTIONE RADICVM EX BINOMIIS, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis Irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. diſputat.

CAPVT XXVIII.

Cur nonnulli dicãt, non omnia Binomia habere radices.

SVNT nonnulli, qui affirmant, ex ſolis prioribus tribus Binomijs, atque Apotomis radices quadratas elici poſſe. quod verum non eſt, & Euclidi omnino repugnat, vt mox oſtendemus: neque ſcio, quo modo excuſari poſſint, niſi dicatur, propterea eos poſteriora tria Binomia, atque Apotomas radicibus quadratis priuare, quod horum radices ſint valde perplexę, & obſcuriores, quam ipſamet Binomia, atque Apotomæ: quippe cum ſint radices numerorum compoſitorum, quas Vniuerſales vocant, vt in exemplis patebit. Habere autem omnia Binomia atque Apotomas radices quadratas, quæ in ſe ductæ ipſa Binomia, atque Apotomas producant, euidenter ex propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. Item ex propoſ. 92. 93. 94. 95. 96. & 97. lib. 10. Eucl. colligitur. In prioribus enim 6. propoſitionibus demonſtrat Euclides, quinam numeri in ſe multiplicati producant Binomia: (vocamus lineas Irrationales, numeros Irrationales.) in poſterioribus autem 6. propoſitionibus oſtendit, quinam numeri in ſe ducti Apotomas procreent. quod ita manifeſtum fiet. In propoſ. 55. ait, Si ſpacium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur. Quis autem neſcit, ſi Rationalis illa ſit vnitas, ſpatium illud comprehẽſum, eſſe Binomium primum; quippe cum vnitas multiplicans Binomium primum, producat ipſummet Binomium primũ? Numerus ergo potens Binomium primũ, hoc eſt, radix Binomij primi, eſt Binomium, ex ſententia Eucl. Eadem ratione ex ſequentibus quinque propoſ. infertur, radicem Binomij ſecundi eſſe lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Radicem autem Binomij tertij eſſe lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur. Et radicem quarti Binomij lineam Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Ac radicem quinti Binomij eſſe lineam Irrationalem quæ Rationale & Medium potens appellatur. Radicem denique ſexti Binomij eſſe irrationalem lineam, quę bina Media potens nominatur. Non aliter ex propoſ. 92. & ſequentibus quinque colligemus, radicem primæ Apotomæ eſſe Apotomen. Radicem vero Apotomæ ſecundæ eſſe Mediæ Apotomen primam Radicem deinde tertiæ Apotomæ eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Et radicem Apotomæ quartæ eſſe lineam Irrationalem, quæ appellatur Minor. Radicem autem Apotomæ quintæ eſſe lineam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Denique radicem ſextæ Apotomæ lineam eſſe Irrationalem, quæ cum Medio Medium totum efficit. Non eſt igitur dubitandum, ex Euclidis ſententia omnia Binomia, omneſque Apotomas habere radices: cum tam perſpicue doceat, quo pacto cuiuſque Binomij, atque Apotomæ radix appelletur. Quod vt planius fiat, explicandæ ſunt obiter illæ lineæ Irrationales, quas demonſtrat radices eſſe Binomiorum, atque Apotomarum. Hactenus enim ſolum Binomium eiuſque ſex ſpecies, ſolamque Apotomen, eiuſque ſex genera. Item lineam Mediam, ſuperiori cap. expoſuimus.

Omnia Binomia ſecundum Eucl. habere radices.

Radices 6. Binomiorũ quales lineæ, vel numeri Irrationales ſint.

Radices 6 Apotomarum, quales lineæ Irrationales, vel numeri ſint.

QVEMAD-

QVEMADMODVM ergo [a] Binomium apud Eucl. eſt linea Irrationalis ex duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus compoſita: [b] ita ſi duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant, (Has lineas docuit inuenire propoſ.27.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima vocatur. Hanc nobis exhibebit radix Binomij ſecundi. [a] *37. deci.* [b] *38. deci.* *Ex binis Medijs prima.*

Et [c] ſi duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; (quæ quo pacto reperiantur, docuit propoſ.29.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur. Eamque nobis præbebit radix tertij Binomij. [c] *39. deci.* *Ex binis Medijs ſecunda.*

Et [d] ſi duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: (quas inuenire docet propoſitione 34.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Maior vocatur. quam nobis offeret radix Binomij quarti. [d] *40. deci.* *Linea Maior.*

Et [e] ſi duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; (quæ inueniuntur propoſ.35.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Rationale ac Medium potens nominatur. Hanc nobis demonſtrabit radix Binomij quinti. [e] *41. deci.* *Rationale, ac Medium potens.*

Si [f] denique duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum, (qua ratione huiuſmodi lineæ reperiantur, docuit propoſ.36.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ vocatur bina Media potens. Eamque nobis indicabit radix Binomij ſexti. [f] *42. deci.* *Bina Media potens.*

ITEM quemadmodum [g] Apotome apud Eucl. eſt linea Irrationalis, quæ reliqua eſt, ſi à Rationali auferatur Rationalis potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti [h] Ita ſi à Media auferatur Media, potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (quas quidem lineas propoſ.28. reperit.) Reliqua linea Irrationails eſt, quæ Mediæ Apotome prima vocatur. Quam quidem profert radix Apotomæ ſecundæ. [g] *74. deci.* [h] *75. deci.* *Mediæ Apotome prima.*

Et [i] ſi à Media auferatur Media, potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; (quæ lineæ propoſ.29. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis eſt, quę Mediæ Apotome ſecunda appellatur. Hæc autem apparebit in radice Apotomæ tertiæ. [i] *76. deci.* *Mediæ Apotome ſecunda.*

Et [k] ſi à recta linea, auferatur recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium; (quas lineas propoſ.34. reperit.) Recta linea reliqua irrationalis eſt, quæ Minor nominatur. Quæ quidem radix eſt Apotomæ quartæ. [k] *77. deci.* *Linea Minor.*

Et [l] ſi à recta linea auferatur recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; (quas lineas inuenit propoſ.35.) Reliqua linea irrationalis eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficiens dicitur. Qualis eſt radix Apotomæ quintæ. [l] *78. deci.* *Reliqua cũ Rationali Medium totum efficiens.*

Et [m] ſi tandem à recta detrahatur recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; (quæ lineæ propoſ.36. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis eſt, quæ cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Quam nobis exhibet radix ſextæ Apotomæ. [m] *79. deci.* *Reliqua cũ Medio Medium totũ efficiens.*

HAS porro lineas Irrationales, vel potius numeros Irrationales (quas enim Euclides lineas nominat, nos numeros dicimus) plenius, perfectiuſque declarabimus in radicibus Binomiorum, & Apotomarum.

Habes igitur ex Euclide tredecim numero lineas Irrationales inter ſe differentes, de quibus potiſſimum in lib.10. agitur. Sunt autem hæ.

1. *Media.*	8. *Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt inuentæ.*
2. *Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.*	9. *Mediæ Apotome prima.*
3. *Ex binis Medijs prima.*	10. *Mediæ Apotome ſecunda.*
4. *Ex binis Medijs ſecunda.*	11. *Minor.*
5. *Maior.*	12. *Cum Rationali Medium totum efficiens.*
6. *Rationale ac Medium potens.*	13. *Cum Medio Medium totum efficiens.*
7. *Bina Media potens.*	

QVOD ſi pro linea ex binis nominibus, ſex Binomia; & pro Apotoma ſex Apotomas accipias; habebis in vniuerſum 23. lineas Irrationales apud Euclidem.

SED iam artem præſcribamus, qua ex Binomijs, & Apotomis radices quadratæ eruantur: in quibus quidem naturæ prædictarum linearum Irrationalium planius percipientur.

PROPOSITO ergo Binomio, vel Reſiduo, cape differentiam quadratorum vtriuſque nominis. Deinde radicem quadratam huius differentiæ tum maiori nomini adijce, tum ab eodem aufer. Tertio radicem quadratam ſemiſſis illius ſummæ connecte cum radice quadrata ſemiſſis illius relicti, per ſignum +. ſi propoſitum eſt Binomium, vel per ſignum —, ſi Reſiduum. Ita enim procreata erit radix Binomij, aut Reſidui.

ALII regulam hanc ita proponunt. Sume differentiam quadratorum ſemiſſium vtriuſque nominis. Huius differentiæ radicem quadratam tum ſemiſſi maioris nominis adijce, tum ab eadem ſemiſſe ſubtrahe. Nam radix quadrata illius ſummæ connexa per ſignum +. vel — cum radice quadrata illius relicti, dabit radicem Binomij, vel Reſidui quæſitam.

ALII denique eandem ita proponunt. Ex quarta parte differentiæ quadratorum vtriuſque nominis erue radicem quadratam. Hanc etim ſi ſemiſſi maioris nominis adijcies, & ex ſumma radicem erues, procreabis priorem particulam quæſitæ radicis. Et ſi eandem hanc ſummam ex maiori nomine detrahes, dabit relicti

radix quadrata poſteriorem radicis quæſitæ particulam. Vtriſque igitur particulis per ſignum +, aut — copulatis totam radicem deſideratam habebis.

Radix Binomij primi eſt Binomium, & radix Reſidui primi eſt Reſiduum.

Atque ita habes triplicem regulam pro eruenda radice ex dato Binomio, aut Reſiduo. quæ varijs iam exemplis elucidanda erit.

Sit Binomium primum 23 + √ȝ 448. ex quo per primam regulam radicem eliciemus hoc modo. Differentia quadratorum 529. & 448. vtriuſque nominis eſt 81. cuius radicem 9. ſi maiori nomini 23. adijciemus, & ab eodem ſubtrahemus; faciemus ſummam 32. & reliquum numerum 14. Semiſſes ſummæ, & relicti numeri ſunt 16. & 7. è quibus erutæ radices 4. & √ȝ 7. copulatæ per ſignum +. dabunt radicem 4 + √ȝ 7. propoſiti Binomij primi: ac proinde 4 — √ȝ 7. radix erit Reſidui primi 23 — √ȝ 448. quarum illa eſt Binomium, hæc autem Reſiduum, vt Euclides lib. 10. propoſ. 55. & 92. demonſtrauit. Eſſe porro 4 + √ȝ 7. veram radicem Binomij primi 23 + √ȝ 448. & 4 — √ȝ 7. veram radicem Reſidui primi 23. — √ȝ 448. probari poteſt ex vtriuſque radicis multiplicatione in ſe, vt hic patet.

4 + √ȝ 7
4 + √ȝ 7
+ √ȝ 112 + 7
+ 16 + √ȝ 112
Summa 23 + √ȝ 448

4 — √ȝ 7
4 — √ȝ 7
— √ȝ 112 + 7
+ 16 — √ȝ 112
Summa 23 — √ȝ 448

Radix Binomij ſecundi eſt linea ex binis Medijs prima: Et radix Reſidui ſecundi eſt Mediæ Apotome prima.

Sit Binomium ſecundum √ȝ 448 + 14. ex quo per ſecundam regulam radix ſic eruetur. Semiſſes nominum ſunt √ȝ 112 & 7. quarum quadrata 112. 49. differentiam habent 63. cuius radix √ȝ 63. addita ſemiſſi √ȝ 112. maioris nominis, facit √ȝ 343. Detracta autem ab eadē ſemiſſe √ȝ 112. relinquit √ȝ 7. Ergo √ȝȝ 343 + √ȝȝ 7. erit radix Binomij ſecundi propoſiti. Et √ȝȝ 343 — √ȝȝ 7. radix erit Reſidui ſecundi √ȝ 448 — 14. Illa ex propoſ. 56. lib. 10. linea eſt Irrationalis ex binis Medijs prima. Hæc autem ex propoſ. 93. lib. 10. Irrationalis linea eſt, quæ Mediæ Apotome prima dicitur. Itaque √ȝȝ 343. & √ȝȝ. 7. ſunt duæ lineæ Mediæ, Rationale continentes, vt volunt propoſ. 38. & 75. lib. 10. Nam Irrationales ſunt, quæ Mediæ dicuntur. Multiplicatæ vero inter ſe producunt √ȝȝ 2401. cuius radix zenſizenſica eſt 7. numerus Rationalis.

Examen radicis inuentæ.

√ȝȝ 343 + √ȝȝ 7
√ȝȝ 343 + √ȝȝ 7
+ √ȝȝ 2401 + √ȝ 7
+ √ȝ 343 + √ȝȝ 2401
Summa √ȝ 448 + 14

√ȝȝ 343 — √ȝȝ 7
√ȝȝ 343 — √ȝȝ 7
— √ȝȝ 2401 + √ȝ 7
+ √ȝ 343 — √ȝȝ 2401
Summa √ȝȝ 448 — 14

Radix Binomij tertij eſt linea ex binis Medijs ſecunda: Et radix Reſidui tertij eſt Mediæ Apotome ſecunda.

Sit Binomium tertium √ȝ 448 + √ȝ 336. ex quo per regulam tertiam radix elicietur, hoc modo. Quarta pars differentiæ quadratorum 448. 336. eſt 28. cuius radix quadrata √ȝ 28 addita ad √ȝ 112. ſemiſſem maioris nominis facit √ȝ 252. ideoque prior particula radicis quæſitę erit √ȝȝ 252. Et ſi eadem ſumma √ȝ 252. dematur ex √ȝ 448. maiore nomine, reliqua fit √ȝ 28. ac proinde poſterior particula quæſitæ radicis erit √ȝȝ 28. totaque radix Binomij tertij erit √ȝȝ 252 + √ȝȝ 28. & radix tertij Reſidui √ȝ 448 — √ȝ 336. erit √ȝȝ 252 — √ȝȝ 28. Illa ex propoſ. 57. lib. 10. eſt linaa Irrationalis. quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur. Hæc autem ex propoſ. 94. lib. 10. Irrationalis eſt linea, quæ Mediæ Apotome ſecunda dicitur. Itaque iuxta doctrinam propoſ. 39. & 76. lib. 10. Eucl. √ȝȝ 252. & √ȝȝ 28. duæ lineæ ſunt Mediæ Medium continentes. Nam Irrationales quidem ſunt, quę Mediæ dicuntur; inter ſe vero multiplicatæ producunt ſuperficiem Mediam √ȝȝ 7056. hoc eſt √ȝ 84.

Examen radicis inuentæ

√ȝȝ 252 + √ȝȝ 28
√ȝȝ 252 + √ȝȝ 28
+ √ȝȝ 7056 + √ȝ 28
+ √ȝ 252 + √ȝȝ 7056
Summa √ȝ 448 + √ȝ 336

√ȝȝ 252 — √ȝȝ 28
√ȝȝ 252 — √ȝȝ 28
— √ȝȝ 7056 + √ȝ 28
+ √ȝ 252 — √ȝȝ 7056
Summa √ȝ 448 — √ȝ 336

Radix Binomij quarti eſt Linea Maior: Et radix Reſidui quarti eſt Linea Minor.

Sit Binomium quartum 24 + √ȝ 448. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. eſt 128. cuius radicem, nimirum √ȝ 128. maiori nomini 24. adijcio, facioque 24 + √ȝ 128. Eandem √ȝ 128. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquoque 24 — √ȝ 128. Semiſſis illius ſummæ 24 + √ȝ 128. eſt 12 + √ȝ 32. ſemiſſis vero illius numeri relicti 24 — √ȝ 128. eſt 12 — √ȝ 32. Radix ergo Binomij quarti propoſiti eſt √ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32) Radix vero quarti huius Reſidui 24 — √ȝ 448. eſt √ȝ (12 + √ȝ 32) — √ȝ (12 — √ȝ 32.) Illa iuxta propoſ. 58. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ Maior dicitur. Hæc vero ex propoſ. 95. lib. 10. Irrationalis linea eſt, quæ appellatur Minor. Itaq; ex præcepto propoſ. 40. & 77. lib. 10. √ȝ. (12 + √ȝ 32) & √ȝ (12 — √ȝ 32) ſunt duæ lineæ potentia in commenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale: quod autem ſub ipſis continetur, Medium. Eſſe enim potentia incommenſurabiles, perſpicuum eſt, cum earum quadrata 12 + √ȝ 32 & 12 — √ȝ 32. incommenſurabilia ſint. Quod etiam compoſitum ex hiſce quadratis ſit Rationale, patet cum conficiant ſimul ſumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod ſub ipſis continetur,

netur, eſſe Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur ſuperficies √ʒ 112. Media: cuius radix eſt √ʒʒ 112. linea media. Vbi obſeruatu dignum eſt, duo incommenſurabilia, qualia ſunt quadrata 12 + √ʒ 32. & 12 —— √ʒ 32. ſimul addita efficere ſummam 24. Rationalem. *Duo incommenſurabilia facere poſſunt ſummam Rationalem.*

Examen radicis inuentæ pro Binomio quarto.

√ʒ (12 + √ʒ 32) + √ʒ (12 —— √ʒ 32)
√ʒ (12 + √ʒ 32) + √ʒ (12 —— √ʒ 32)

12 + √ʒ 32 + 12 —— √ʒ 32
√ʒ 112
√ʒ 112

√ʒ 448

Tota ſumma 24 + √ʒ 448. Binomium propoſitum.

Sit Binomium quintum √ʒ 448 + 12. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semiſſes nominum ſunt √ʒ 112. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, √ʒ 76. ſemiſſi √ʒ 112. maioris nominis addita facit √ʒ 112 + √ʒ 76. Ab eadem autem ſemiſſe detracta relinquit √ʒ 112 —— √ʒ 76. Radix ergo propoſiti Binomij quinti eſt √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) + √ʒ (√ʒ 112 —— √ʒ 76) Reſidui vero reſpondentis radix erit √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) —— √ʒ (√ʒ 112 —— √ʒ 76) Illa per propoſ. 59. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propoſ. 96. lib. 10. linea Irrationalis eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq; ex doctrina propoſ. 41. & 78. lib. 10. √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) & √ʒ (√ʒ 112 —— √ʒ 76.) duæ lineæ ſunt potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale. Eſſe enim potentia incommenſurabiles, conſtat, cum earum quadrata incommenſurabilia ſint. Quod autem compoſitum ex ipſarum quadratis faciat Medium, perſpicuum etiam eſt, cum earum quadrata √ʒ 112 + √ʒ 76. & √ʒ 112 —— √ʒ 76. ſimul ſumpta faciant √ʒ 448. ſuperficiem Mediam, cuius radix eſt √ʒʒ 448. linea Media. Denique ex ipſarum multiplicatione inter ſe gigni Rationale, manifeſtum eſt, cum gignatur √ʒ 36. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommenſurabilia, videlicet √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76.) & √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) inter ſe multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum √ʒ 36. hoc eſt, 6.

Radix Binomij quinti eſt linea Rationale ac Medium potens. Et radix reſidui quinti eſt linea cū Rationali Medium totū efficiens.

Duo incommenſurabilia inter ſe multiplicata facere poſſunt numerum Rationalem.

Examen radicis inuentæ pro Reſiduo quinto.

√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76)
√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76)

√ʒ 112 + √ʒ 76 — √ʒ 112 — √ʒ 76
— √ʒ 36. id eſt, — 6
— √ʒ 36. id eſt, — 6

— 12

Tota ſumma, √ʒ 448 — 12. Reſiduum quintum.

Sit denique Binomium ſextum √ʒ 448 + √ʒ 352. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia eſt 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet √ʒ 24. addita ad ſemiſſem maioris nominis, nimirū ad √ʒ 112. facit ſummam √ʒ 112. + √ʒ 24. Ergo prior portio radicis quæſitæ eſt √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24.) Et ſi eandē ſummam √ʒ 112 + √ʒ 24. detrahas ex toto maiore nomine √ʒ 448. relinquetur √ʒ 112 — √ʒ 24. Nam √ʒ 112. dempta ex √ʒ 448. relinquit √ʒ 112. ex quo relicto ſi tollatur √ʒ 24. relinquetur √ʒ 112 — √ʒ 24. ideoque poſterior portio radicis quæſitæ eſt √ʒ (√ʒ 112 —— √ʒ 24.) totaque radix Binomij ſexti propoſiti, erit √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24) + √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24.) Reſidui vero ſexti reſpondentis radix erit √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24.) Illa concludente propoſ. 60. lib. 10. Irrationalis linea eſt, quæ bina Media potens nominatur. Hæc vero vt demoſtrat propoſ. 97. lib. 10. linea irrationalis eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit. Itaque ex demonſtratione propoſ. 42. & 79. lib. 10. duæ lineæ √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24) & √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24) potentia incommenſurabiles ſunt, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum. Quod enim potentia incommenſurabiles ſint, docent earum quadrata, quæ incommenſurabilia ſunt. Quadrata autem ſimul facere Medium, conſtat, cum ſimul faciant √ʒ 448. ſuperficiem Mediam, cuius radix eſt √ʒʒ 448. Denique ex ductu vnius in alteram procreari etiam Medium, liquido conſtat, cum producant √ʒ 88. ſuperficiem Mediam, cuius radix eſt √ʒʒ 88.

Radix Binomij ſexti eſt linea bina Media potens: Et radix Reſidui ſexti eſt linea cum Medio Medium totū efficiens.

Examen radicis inuentæ pro Binomio ſexto propoſito.

√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24) + √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24)
√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24) + √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24)

√ʒ 112 + √ʒ 24 + √ʒ 112 — √ʒ 24
√ʒ 88
√ʒ 88

352

Tota ſumma. √ 448 + √ʒ 352 Binomium propoſitum.

Differentia quadratorum nominum radicis cuiuslibet Binomij & Reſidui, qua.

IN quolibet autem Binomio, aut Reſiduo animaduertes, radicem differentiæ quadratorum vtriuſque nominis, eſſe differentiam inter quadrata nominum radicis ipſius Binomij, vel reſidui. quod mirum cuipiam videri poſſit. quod in proximis 6. Binomijs experiri licet.

In primo Binomio $23+\sqrt{z}448$. cuius radix inuenta eſt $4+\sqrt{z}7$. Quadratum numeri 23. nimirum 529. ſuperat quadratum 448. numero 81. cuius radix eſt 9. differentia videlicet inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter 16. & 7.

In Binomio ſecundo $\sqrt{z}448+14$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{zz}343+\sqrt{zz}7$. Quadratum 448. ſuperat 196. quadratum numeri 14. numero 252. cuius radix, nimirum $\sqrt{z}252$. eſt differentia inter quadrata nominum radicis. Nam ea quadrata ſunt $\sqrt{z}343$. & $\sqrt{z}7$. vt patet ex multiplicatione nominum $\sqrt{zz}343$. & $\sqrt{zz}7$. in ſe quadratè. Et ſi $\sqrt{z}7$. dematur ex $\sqrt{z}343$. reliqua fit $\sqrt{z}252$.

In tertio Binomio $\sqrt{z}448+\sqrt{z}336$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{zz}252+\sqrt{zz}28$. Quadratum 448. ſuperat quadratum 336. numero 112. cuius radix, videlicet $\sqrt{z}112$. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, quæ ſunt $\sqrt{z}252$. & $\sqrt{z}28$. Conſtat autem $\sqrt{z}28$. demptam ex $\sqrt{z}252$. relinquere $\sqrt{z}112$.

In quarto Binomio $24+\sqrt{z}448$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{z}(12+\sqrt{z}32)+\sqrt{z}(12-\sqrt{z}32.)$ Quadratum 576. numeri 24. ſuperat quadratum 448. numero 128. cuius radix, nimirum $\sqrt{z}128$. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter $12+\sqrt{z}32$. & $12-\sqrt{z}32$. vt in hac formula ſubtractionis apparet.

$$\begin{array}{r} 12+\sqrt{z}\,32 \\ 12-\sqrt{z}\,32 \\ \hline 0+\sqrt{z}\,128 \end{array}$$

Nam 12. ex 12. nihil relinquunt: ſed $-\sqrt{z}32$. ex $+\sqrt{z}32$. (cum diuerſa ſigna mutent ſpeciem) relinquit $\sqrt{z}128$. duplum ſcilicet $\sqrt{z}32$. cum ſigno + ſuperioris numeri.

In Binomio quinto $\sqrt{z}448+12$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{z}(\sqrt{z}112+\sqrt{z}76)+\sqrt{z}(\sqrt{z}112-\sqrt{z}76.)$ Quadratum 448. ſuperat 144. quadratum numeri 12. numero 304. cuius radix, nimirum $\sqrt{z}304$. differentia eſt inter quadrata nominum radicis, hoc eſt, inter $\sqrt{z}112+\sqrt{z}76$. & $\sqrt{z}112-\sqrt{z}76$. vt in hac appoſita formula ſubtractionis apparet.

$$\begin{array}{r} \sqrt{z}\,112+\sqrt{z}\,76 \\ \sqrt{z}\,112-\sqrt{z}\,76 \\ \hline 0+\sqrt{z}\,304 \end{array}$$

Nam $\sqrt{z}112$. ex $\sqrt{z}112$. nil relinquit. At $-\sqrt{z}76$. ex $+\sqrt{z}76$. (cum diuerſa ſigna mutent ſpeciem) relinquit $\sqrt{z}304$. duplum videlicet $\sqrt{z}76$. cum ſigno + ſuperioris numeri.

In Binomio denique ſexto $\sqrt{z}448+\sqrt{z}352$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{z}(\sqrt{z}112+\sqrt{z}24)+\sqrt{z}(\sqrt{z}112-\sqrt{z}24.)$ Quadratum 448. ſuperat quadratum 352. numero 96. cuius radix, nimirum $\sqrt{z}96$. differentia eſt inter quadrata nominũ radicis, hoc eſt, inter $\sqrt{z}112+\sqrt{z}24$. & $\sqrt{z}112-\sqrt{z}24$. vt in appoſita formula ſubtractionis manifeſtum eſt.

$$\begin{array}{r} \sqrt{z}\,112+\sqrt{z}\,24 \\ \sqrt{z}\,112-\sqrt{z}\,24 \\ \hline 0+\sqrt{z}\,96 \end{array}$$

Nam $\sqrt{z}112$. ex $\sqrt{z}112$. nil relinquit. At $-\sqrt{z}24$. ex $+\sqrt{z}24$ (cum diuerſa ſigna mutent ſpeciem) relinquit $\sqrt{z}96$. duplum videlicet $\sqrt{z}24$. cum ſigno + numeri ſuperioris.

Idem experieris in quouis alio Binomio, vel reſiduo, & eius radice.

Pulchra ratio multiplicādi Binomij, vel Reſidui in ſe.

EX hoc colligitur facilis ratio multiplicandi quodcunque Binomium, aut Reſiduum in ſe quadrate, quæ talis eſt. Propoſito Binomio, vel Reſiduo, accipiatur ſumma quadratorum duarum particularum Binomij, vel Reſidui, pro prima portione numeri producti. Deinde à quadrato dictæ ſumma detrahatur quadratum differentiæ quadratorum earundem particularum Binomij, vel Reſidui. Radix enim reliqui huius numeri erit altera portio producti numeri. Vt Binomium $\sqrt{z}50+6$. ductũ in ſe, facit $86+\sqrt{z}7200$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{z}\,50+6 \\ \hline 86+\sqrt{z}\,7200 \end{array}$$

Nã duo quadrata 50. & 36. faciunt 86. priorẽ particulam numeri producti. Et quadratum 7396. numeri inuenti 86. ſuperat 196. quadratum numeri 14. nimirum differentiæ inter quadrata 50. & 36. numero 7200. cuius radix, nimirum $\sqrt{z}.7200$. dabit poſteriorem particulam numeri producti: adeo vt quadratum Binomij $\sqrt{z}50+6$. ſit $86+\sqrt{z}7200$. quandoquidẽ quadratum 7396. prioris portionis 86. ſuperat 7200. quadratũ poſterioris portionis, numero 196. cuiꝰ radix 14. eſt differẽtia inter quadrata 50. & 36.

Eadem ratione quadratum. Reſidui $\sqrt{z}50-6$ erit $86-\sqrt{z}7200$.

Ita quoque Binomium $\sqrt{z}50+\sqrt{z}6$. ductũ in ſe faciet $56+\sqrt{z}1200$. quia quadratum 3136. prioris portionis 56. ſuperat 1200. quadratũ $\sqrt{z}1200$. portionis poſterioris numero 1936. cuius radix 44. differentia eſt quadratorum 50. & 6. Atq; ita de cæteris.

$$\begin{array}{r} \sqrt{z}\,50+\sqrt{z}\,6 \\ \hline 56+\sqrt{z}\,1200 \end{array}$$

TRADITUR ab auctoribus nonnullis alia ratio facilis eruendæ radicis ex propoſito Binomio, vel Reſiduo, quam viſum eſt hoc loco explicare, ſi tamen prius Lemma ſequens oſtendero.

LEMMA.

Lemma.

DATUM numerum in duas partes ſecare, vt numerus, qui ex mutua earum multiplicatione producitur, æqualis ſit dato numero, qui maior non ſit quadrato ſemiſſis dati numeri, qui diuidendus eſt, vel (quod idem eſt) quarta parte quadrati totius numeri diuidendi.

SIT V. g. numerus 20. in duas partes ſecandus, quæ inter ſe multiplicatæ producant numerum 75. qui minor eſt quadrato 100. ſemiſſis numeri 20. propoſiti vel minor, quam 100. quadrata pars quadrati 400. dati numeri 20. Ex 100. quadrato ſemiſſis numeri diuidendi auferatur datus numerus producendus 75. Et reliqui numeri 25. radix quadrata 5. tum addatur ad ſemiſſem numeri propoſiti, nimirum ad 10. tum ab eadem ſemiſſe detrahatur. Nam ſumma confecta 15. & numerus reliquus 5. erunt quæſitæ partes numeri propoſiti 20. quæ inter ſe multiplicatæ prrcreant datum numerum 75. Huius praxis hæc eſt demonſtratio.

A.........C.....D.....B

Sit numerus 20. AB, propoſitus diuiſus in partes AD, DB, ſua multiplicatione producentes datum numerum

numerum 75. quæ partes ita fient cognitæ. Diuiſo numero AB, bifariam in C; [a] *erit productus ex AB, in DB, vna cum quadrato ex CD, æqualis quadrato 100. ſemiſsis CB. Igitur ſi datus numerus 75. factus ex AD, in DB, dematur ex quadrato 100. ſemiſsis CB, reliquus erit quadratus ex CD, 25. cuius radix 5. dabit rectam CD, quæ addita ſemiſsi AC, conficiet maiorem partem AD, 15. Et detracta ex ſemiſſe CB, reliquam faciet partem minorem DB, 5.* [a] 5. ſecundi

Sit rurſus numerus √ʒ 80. diuidendus in duas partes, ita vt inter ſe multiplicatæ faciant 1. Semiſsis dati numeri eſt √ʒ 20. A quadrato cuius, nimirum à 20. detrahatur numerus 1. producendus. Ac reliqui numeri 19. radix, nimirum √ʒ 19. addatur, & dematur ex ſemiſſe √ʒ 20. propoſiti numeri: fientque partes quæſitæ √ʒ 20 + √ʒ 19. & √ʒ 20 − √ʒ 19. quæ inter ſe multiplicatæ gignunt 1. vt præcedens formula docet detrahendo videlicet quadratum 19. ex quadrato 20. vt cap. 23. ante exempla Diuiſionis docuimus.

√ʒ	20	+	√ʒ	19
√ʒ	20	−	√ʒ	19
		1		

Item ſit numerus √ʒ 80. diuidendus in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ faciant √ʒ. 5. Semiſsis numeri √ʒ 80. eſt √ʒ 20 à cuius quadrato 20, ſi ſubtrahatur √ʒ 5. remanebunt 20 − ʒ√ 5. cuius radix, nimirum √ʒ(20 − √ʒ 5.) addita ad ſemiſſem √ʒ 20. dati numeri √ʒ 80. faciet maiorem partem √ʒ 20 + √ʒ(20 − √ʒ 5) dempta vero ex eadem ſemiſſe √ʒ 20 relinquet minorem partem √ʒ 20 − √ʒ(20 − √ʒ 5.) quæ partes inter ſe multiplicatæ faciunt √ʒ 5. vt in hac formula apparet. Nam vt ex cap. 23. patet, multiplicatio fiet, ſi quadratum 20 − √ʒ 5. poſterioris partis ex 20. quadrato prioris partis auferatur. Auferetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia 20. ex 20. nihil relinquunt, & vt − √ʒ 5. tollatur ex + √ʒ 0 mutatur ſpecies, fitque additio cum ſigno +. ſuperioris numeri √ʒ 0.

√ʒ 20 + ʒ√ (20 − √ʒ 5)
√ʒ 20 − √ʒ (20 − √ʒ 5)
ʒ√ 5

20	+	√ʒ	0
20	−	√ʒ	5
0	+	√ʒ	5

Poſtremo ſit 1 ʒ. diuidẽdus in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ faciant 1 ʒ, hoc eſt, (& in idẽ recidit,) ita vt 1 ℞ ſit medio loco proportionalis inter illas duas partes. Semiſsis 1 ʒ. eſt $\frac{1}{2}$ ʒ cuius quadratũ eſt $\frac{1}{4}$ ʒʒ ex quo tollemus 1 ʒ. qui produci debet, remanebitq́; $\frac{1}{4}$ ʒʒ − 1 ʒ. cuius radix, nimirũ √ʒ($\frac{1}{4}$ ʒʒ − 1 ʒ) addita ad ſemiſſem 1 ʒ. id eſt, ad $\frac{1}{2}$ ʒ faciet vnam partẽ quæſitam $\frac{1}{2}$ ʒ + √ʒ($\frac{1}{4}$ ʒʒ − 1 ʒ.) Et ablata ex eadẽ ſemiſſe, reliquam faciet alteram partẽ $\frac{1}{2}$ ʒ − √ʒ($\frac{1}{4}$ ʒʒ − 1 ʒ.) quæ partes inter ſe multiplicatæ faciunt 1 ʒ. vt in hac formula apparet. Nam multiplicatio fiet, vt ex ſuperioribus patet, ſi $\frac{1}{4}$ ʒʒ — 1 ʒ. quadratum poſterioris portionis detrahatur ex $\frac{1}{4}$ ʒʒ quadrato portionis prioris. Detrahetur autem iuxta hanc alteram formulam quia $\frac{1}{4}$ ʒʒ ex $\frac{1}{4}$ ʒʒ. nil relinquit. Et vt − 1 ʒ. ſubtrahatur ex + 0 ʒ. mutatur ſpecies operationis, fitq́; additio, cum ſigno + ſuperioris numeri 0 ʒ. Hoc Lemma abſoluemus etiam per Algebram ænigmate 23. capitis 30.

$\frac{1}{2}$ ʒ + √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ − 1 ʒ)
$\frac{1}{2}$ ʒ − √ʒ ($\frac{1}{4}$ ʒʒ − 1 ʒ)
1 ʒ

$\frac{1}{4}$	ʒʒ	+	0	ʒ
$\frac{1}{4}$	ʒʒ	−	1	ʒ
	0	+	1	ʒ

DEMONSTRATO, & exemplis illuſtrato hoc Lemmate, eruemus, radicem ex quolibet Binomio, Reſiduoue, hac facili via. Diuidatur per Lemma antecedens maius nomen in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ procreent numerum æqualem quartæ parti quadrati nominis minoris. Radices namque harum partium copulatæ per ſignum + pro Binomio, vel per ſignum — pro Reſiduo, radicem quæſitam exhibebunt. *Alia via extrahendæ radicis ex dato Binomio, vel Reſiduo.*

Sit enim Binomium primum 20 + √ʒ 300. Secetur maius nomen 20. in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ faciant 75. qui numerus quarta pars eſt quadrati 300. minoris nominis. Erit vna pars 15. & altera 5. Igitur √ʒ 15 + √ʒ 5. radix eſt dati Binomij, quæ in ſe ducta (quod facile fiet ea ratione, quam ante Lemma præcedens explicauimus) producet Binomium datum 20 + √ʒ 300.

Sit rurſus Binomium primum 38 + √ʒ 288. Maius nomen 38. ſecabitur in duas partes ſua multiplicatione producentes 72. quartam partem quadrati 288. minoris nominis: hoc modo. Semiſſis maioris nominis eſt 19. à cuius quadrato 361. ſi detrahatur dicta quarta pars 72. reliquus fit numerus 289. cuius radix 17. addita ſemiſſi prædictæ 19. & ab eadem ſubtracta facit partes quæſitas 36. & 2. Ergo √ʒ 36. hoc eſt, 6 + √ʒ 2. radix eſt Binomij propoſiti. quod ex eius ductu in ſe examinari poteſt. Quadrata enim 36. & 2. nominum faciunt 38. maius nomen. Et ſi ex eius quadrato 1444. dematur 1156. quadratum differentiæ quadratorum 36. & 2. nimirum quadratum numeri 34. remanebit numerus 288. Ergo √ʒ 288. erit nomen minus, ita vt Binomium ſit 38 + √ʒ 288.

SIT præterea Reſiduum ſecundum √ʒ 18 − 4. Maius nomen √ʒ 18. ſecetur in duas partes, quarum vna in alteram faciat 4. quartam Partem quadrati minoris nominis − 4. hoc modo. Semiſſis maioris nominis eſt √ʒ 18 / 2. à cuius quadrato $\frac{18}{4}$. ſi detrahatur dicta quarta pars 4. remanebit $\frac{1}{2}$. cuius radix, hoc eſt, √ʒ $\frac{1}{2}$. addita ad √ʒ $\frac{18}{4}$. facit √ʒ 8. pro priori parte: ablata vero ex eadem ſemiſſe, relinquit √ʒ 2. pro poſteriore parte. Eſt ergo √ʒʒ 8 — √ʒʒ 2. radix Reſidui propoſiti. vt hic probatum eſſe vides, per multiplicationem radicis in ſe quadrate. Nam in partialibus productis, √ʒ 8. & √ʒ 2. faciunt √ʒ 18. Deinde — √ʒʒ 16. id eſt, — 2. duplicata facit — 4.

√ʒʒ 8 — √ʒʒ 2
√ʒʒ 8 — √ʒʒ 2
— √ʒʒ 16 + √ʒ 2
+ √ʒ 8 — √ʒʒ 16
√ʒ 18 — 4

Detur quoque Binomium tertium √ȝ32+√ȝ24. Maius nomen √ȝ32. ſecabitur in duas partes producentes 6. quartam partem quadrati 24. minoris nominis hoc modo. Semiſſis maioris nominis eſt √ȝ8. à cuius quadrato 8. detracta dicta quadrata pars 6. relinquit 2. cuius radix, nimirum √ȝ2. addita, & ſubtracta à ſemiſſe prędicta √ȝ8. facit partes √ȝ18. & √ȝ2. Ergo radix Binomij eſt √ȝȝ18+√ȝȝ2. Hæc enim in ſe ducta quadrate, vt hic patet, producit Binomium √ȝ32+√ȝ24. Nam in partialibus productis √ȝ18. & √ȝ2. faciunt √ȝ32. & √ȝ6. duplicata facit √ȝ24.

√ȝȝ 18 + √ȝȝ 2
√ȝȝ 18 + √ȝȝ 2
+ √ȝ 6 + √ȝ 2
√ȝ 18 + √ȝ 6
√ȝ 32 + √ȝ 24

Sit rurſus Binomium primum 72+√ȝ2880. Maius nomen 72. ſecabitur in duas partes producentes 720. quartam partem quadrati 3880. minoris nominis, hac ratione. Semiſſis maioris nominis 72. eſt 36. à cuius quadrato 1296. detracta quarta pars prædicta 720. relinquit 576. cuius radix 24. addita ad ſemiſſem nominatam 36. & detracta ab eadem, facit partes quæſitas 60. & 12. Ergo radix Binomij eſt √ȝ60+√ȝ12. quod hic probatum eſt per multiplicationem radicis in ſe quadratè.

√ȝ 60 + √ȝ 12
√ȝ 60 + √ȝ 12
+√ȝ 720 + 12
60+√ȝ720
72 + √ȝ 2880

Sit quoque elicienda radix ex hoc reſiduo ſexto √ȝ60 — √ȝ12. Maius nomen √ȝ60. diſtribuetur in duas partes producentes 3. quartam partem quadrati 12. minoris nominis, hoc pacto. Semiſſis maioris nominis, √ȝ60. eſt √ȝ.15. à cuius quadrato 15. detracta nominata pars quarta 3. relinquit 12. cuius radix √ȝ12. addita ad ſemiſſem √ȝ15. prædictam, & ab eadem ſublata facit partes √ȝ15+√ȝ12. & √ȝ15—√ȝ12. Ergo radix dicti Reſidui ſexti eſt √ȝ(√ȝ15+√ȝ12)—√ȝ(√ȝ15—√ȝ12) quod hic probatum eſt.

√ȝ (√ȝ 15 + √ȝ 12) — √ȝ (√ȝ 15 — √ȝ 12)
√ȝ (√ȝ 15 + √ȝ 12) — √ȝ (√ȝ 15 — √ȝ 12)
Quadrata partium. √ȝ 15 + √ȝ 12 & √ȝ 15 — √ȝ 12
— √ȝ 3
— √ȝ 3
Summa. √ȝ 60 — √ȝ 12

Nam quadrata partium faciunt √ȝ60. nimirum duplum √ȝ15. Et ex vna parte √ȝ(√ȝ15+√ȝ12) in alteram —√ȝ(√ȝ15—√ȝ12) fit —√ȝ3. quippe cum quadratum 12 ex quadrato 15. ſubductum relinquat 3. cui præponendum eſt ſignum √ȝ. cum ſigno —. propter Reſiduum. Duplum autem —√ȝ3. facit —√ȝ12.

SCHOLIVM.

Qui ordo ſeruetur in ænigmatibus per Algebram ſoluendis.

EMERSIMVS tandem ex numerorum Coſsicorum, & Irrationalium multiplici difficultate, & ingens eorum tractationis pelagus, ſi minus commoda, felici tamen (niſi mea me fallit opinio) velificatione vecti ſuperauimus; & aliquando portum per tot difficultatum æſtus ac turbines, per tam multarum rerum maria prolapſi tenemus; quodque ad diuinam opem eſt referendum, integri atque incolumes tenemus. Iuuat nunc, veluti in otio & quiete, eorum meminiſſe, quæ paulo ante ferre pigebat. Alia enim nobis vndarum ſpatia ſunt enauiganda, quorum tamen laborem, ſi quis erit, præteritorum iucunda commemoratio leuabit, vt ſpero maxime. Iuuat, inquam, paululum in eorum numerorum, qui hactenus explicati ſunt, Algorithmi iucundiſsimo æque, atque vberrimo fructu tantiſper immorari. Quota enim eius pars, quota præteriti laboris veluti merces periret, niſi in ipſius Algorithmi fructu exigendo operæ aliquid, ac temporis poneremus? Primo igitur ænigmata quædam, cap. nimirum 29. quod proxime ſequitur, & 30. erunt ſoluenda, ſiue mauis, problemata quædam numerorum, quos vocant abſtractos, eorum nimirum, qui ad res materiales, qualia ſunt commercia, & mercatorum negotiationes, vel ad alias rerum aliarum quæſtiones non contrahuntur. Quod & Alexandrinus Diophantus (egregius in primis ſcriptor, & de tota Algebræ ſcientia, quam qui optime, meritus) & alij grauiſsimi ſcriptores iam ante præſtiterunt. Hæc enim ſiue ænigmata, ſiue problemata placet appellare, ad ſpeculatiuam Arithmeticam ſpectant: quæ quidem ſcientia quantum dignitate præſtet inter reliquas, concors omnium vox non obſcure teſtatur. Nam & theorematum, & problematum numerorum abſtractorum, quæ in ea demonſtrantur, varietate tam multiplex, multitudine tam copioſa eſt, vt huiuſmodi ænigmatum tractatio maximam addat & dignitatem, & vero perficiat etiam quodammodo eam ſcientiam, quæ de numeris eſt. Quam multa enim ea problemata ſunt, quæ ei ſuppeditat quorum nulla eſſet cognitio penes nos, neque extrahi è tenebris vnquam poſſent, niſi Algebræ inſtitutio, veluti lumen, accederet? At enim otioſa ſunt, neque vllam habēt huiuſcemodi problemata vtilitatem. Quid quod non vtilitatem ſolum, ſed & iucunditatem ſpectare aliquando, ſapientis eſſe putamus, neque ab honeſtate alienum. Iſta enim ſi ratio placet, cedo quid eſt, cur decem Iordani libros de numeris admittamus? Quid, cur theoremata quam plurima, & problemata numerorum ab Euclide lib. 7. 8. & 9. demonſtrata probemus, in ijs legendis inſiſtamus, delectemur, eadem ſumma cum admiratione perſequamur? Quis in illis tantus vſus eſt, quæ tanta, tam ſpectata vtilitas, quæ non tota inſit & noſtris? Quantum iſta vox non de harum modo ſplendore ac dignitate, ſed de omnium ſcientiarum honeſtate, ſi admittatur, detractura eſt? Ineſt enim profecto hoc diſciplinis ijs omnibus, quæ quoniam nunquam in vſum exeunt, totæque in veritatis contemplatione occupantur, ſpeculatiuæ dicuntur, vt mentem ſua honeſtate exornent, principem animi facultatē, nempe intelligendi vim, augeant, atq; perficiant, delectent ipſæ per ſeſe, totumque, vt iam dicā, hominem mira quadam ſui iucunditate perfundant. Verum enimuero ne illud quidē diſsimulandum eſt, quod ſuis locis fiet apertius, exiſtere etiam horum problematū maximos fructus, & vtilitates, non in Geometricis modo, ſed in alijs quoque facultatibus, artibusque permultis,

permultis. quanquam non tantam vtilitatis ducendam rationem putamus, vt ſi hæc deſit, nulla continuo ſit cuiuſque facultatis dignitas, & honeſtas. Hæc ideo te quam paucis monitum volui, amice Lector, vt remota omni ſuſpicionum caligine, expeditos animos afferas ad ea, quæ duobus ſequentibus cap. ænigmata proponentur, excuſſoque procul metu omni, ac mœrore abiecto, faciliorem te, & hilariorem his euo'uendis nobis præſtes. Poſt duorum capitum ænigmata, exempla varia cap. 31. ſubiiciemus, in ijs tamen numeris, qui ad materiam contracti ſunt, vbi etiã quæſtiones nonnullas, quæ ad ſecundas radices ſpectant, accipies. Capite demum 32. multiplices de rebus Geometricis quæſtiones in medium afferemus. Facile autem ænigmatum multitudinem ſuſtinebit is, cui, quam tandem ob cauſam producantur, conſtabit. Neque enim illud ſolum laboramus, vt propoſitæ à nobis quæſtiones diſſoluantur, ſed illud præterea curandum nobis eſſe duximus, vt alias quoque illis ſimiles ab alijs quocunque tempore diſſoluendi modus intelligatur: quem certe modum ex horum ænigmatum ſolutione quiuis vel nullo negotio colliget. Quare neque illud omiſimus, vt ita ænigmata omnia, omnes quæſtiones ſolutas daremus. vt ſtudioſus Lector peculiare in ijs enodandis Algebræ artificium facile dignoſceret. Singulas enim operationes quaſi oculis ſubiecimus, ne hæſitandum foret in ſingulis, aut ſuperiora præcepta ſingulis interuallis repetenda. Quæ ratio eſt, quare Algebram ita obſcuram, & tenebricoſam plerique autument, vt ad paucos, aut etiam ad fere neminem eius intelligendæ vim pertinere confirment. Id enim in pleriſque eius ſcriptoribus deſideratum animaduerti, quod mihi maxime curandum fuit, vt quam aptiſſime omnia proferrentur: Neque, vt monuit olim Lyricus Poeta, laboro breuis eſſe, dummodo obſcurus ne ſim: Et volens libensque verboſioris notam ſubire me patiar, cæteris vt apertiſſima per me omnia fiant. Maior tamen ex ænigmatũ ſequentiũ explicatione voluptas vt deriuetur, præſtabit ea, veluti ſeſe exercendi cauſa, ad quæſtionũ normam examinare perinde ac nulla eorũ explicatio hactenus fuiſſet allata; interdum etiam numeros & exempla alia, quam ea, quæ ibi ſubiiciuntur, eorum loco ſubrogando. Atque vt plurima ænigmata adſcripſimus, quæ omnino, niſi per Algebram nequeunt explicari, ita etiam non pauca de induſtria inſeruiſſe voluimus, quæ etiam ſine Algebra ſolui poſſe non inficiamur. Placuit tamen ea cæteris apponere, non vt alijs artibus ſublata vellemus, ſed vt expeditiorem, celeriorem, iucundioremque ea indagandi Algebræ methodum agnoſceremus. Etenim, quod in alijs ſit, vt totidem ferme leges, totidemque præcepta tradantur, quot ſunt ænigmata cognoſcenda, ſingulisque ænigmatibus, non niſi ſingulæ ac ſuæ leges aptentur, & vna lex vni tantum ænigmati expediendo reſpondeat; id longe facilius, aduocata Algebra dabit effectum. Vna enim eademque lege, via, at methodo vniuerſa fere ſemper ſoluta præſtabit, eamque nobis moleſtiam eximet, quam multiplex illa regularum varietas nõ afferre non poteſt: Vt vel hac vna laude, ſi cæteræ (quæ nec paucæ ſunt, nec leues) deſint, aliis omnibus Arithmeticæ regulis Algebra antecellat. Vix enim quæſtione oblata, ipſa etiam ratio eam explicandi in Algebra ſeſe dat in conſpectum; & pæne ipſa quæſtio viam indicat, qua ipſam, veluti diu inſecuti, tandem aſſequamur. Quod quidem, ſi regulam falſi demas, nullius omnino eſt aliarum. Habet hoc igitur Algebra præ cæteris ſingulare, quod multas ipſa ſola quæſtiones ſuis legibus ſoluat, de quibus aliæ vel non laborant, vel ſi laborent, nihil efficiunt: Et quod eas, quæ ab alijs quoque aliquando longis ambagibus, & veluti in tenebris deprehenduntur, ipſa quaſi per compendia, & luce clara perficiat. Cæterum illud te non cælabo, ſtudioſe Lector, permulta à nobis afferri ænigmata, quibus ſi alij, atque alij ſubinde numeri ſupponantur, eorum haberi ſolutio non poſſit. Non tamen in longum abibis, quin ſentias, ſolui quæ poſſint, quæque non poſſint. Id te ipſa eadem docebit operatio, quam ad aperiendam quæſtionem adhibere oportebit. Vbi enim æquatio inter duos inæquales omnino inter ſe numeros incidet, eius quæſtionis ſolutio nulla eſſe poterit. Quam nos eſſe rationem diximus, quare Algebræ regula tantopere vniuerſis alijs Arithmeticæ præceptionibus præſtet. Frequentiſſimum quippe eſt, vt huiuſmodi aliqua quæſtio, quæ inextricabiles omnino nodos habeat, Algebræ imperito obiiciatur, quam ille per ſummum laborem, ſummamque & animi, & corporis contentionem, ſoluere ne quicquam connitetur: & repetito iterum, iterumque ſtudio, tempus æque atque operam omnem ſuam peſſum ire imprudens patietur. A quo certe procul abeſt Algebræ ſtudioſus, cui ipſa operatio, quæ poſſint, quæ vero non poſſint ſolui, quæſtiones indicabit. Quantum igitur hoc eſt, quo Algebræ ſtudioſus gloriari iure poteſt, vt obſirmato animo, conſtantique ſententia, propoſita quæſtio ſolui queat, nec ne, nihil hæſitans, nec dubia voce pronunciet?

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ABſtractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos tantum numeros occurrit: quæ quidem ſimplex æquatio dicitur.

CAPVT XXIX.

IN hoc cap. afferemus ænigmata, in quibus occurrunt ſimplices æquationes: In ſequenti vero ænigmata proponemus, in quibus compoſitæ æquationes reperiuntur. Quid porro ſit æquatio ſimplex, quid compoſita, ad finem cap. 13. declarauimus. Hinc igitur exordiamur.

1 *Datum numerum quemcunque diuidere in duas partes ſe mutuo ſuperantes in dato exceſſu quocunque.* I.

Sit numerus 100. diuidendus in duas partes, quarum exceſſus, vel differentia ſit 40. Ponatur minor pars 1℞. ac proinde maior 100 — 1℞. Detracta 1℞ ex 100 — 1℞ remanent 100 — 2℞. vt hic vides. Eritque inuenta æquatio inter 100 — 2℞. & 40. quippe cum dempta minore parte ex maiore, relinqui debeant 40. Additis vtrinque 2℞. erit æquatio inter 100. & 40 + 2℞. Et vtrinque ablatis 40. æquatio erit inter 60. & 2℞. Si ergo ex præſcripto regulæ Algebræ diuidantur 60. per 2. inuenietur 1℞. eſſe 30. atque hæc eſt minor pars. Ergo maior erit 70. nimirum 100 — 30. quæ maior pars etiam habebitur, ſi ad mi-

100 — 1℞
+ 1℞
100 — 2℞

norem 30. adiiciatur differentia propoſita 40. Vides ergo maiorem partem 70. ſuperare minorem 30. numero 40. vt propoſitum eſt.

QVOD ſi ſtatuamus, maiorem partem eſſe 1℞. & minorem 100 — 1℞. ſubtrahemus 100 — 1℞. ex 0 + 1℞, vt hic vides. remanebuntque — 100 + 2℞. hoc eſt, 2℞ — 100. Nam ſubtracta + 0. ex + 100. remanent — 100. quod præpoſtere poſiti ſint numeri, ideoque ex + fiat — . &c. Hic ergo numerus reliquus 2℞ — 100. æqualis eſſe debet dato exceſſui 40. Additis igitur 100. vtrinque, erit æquatio inter 2℞. & 140. Et diuiſis 140. (vt præcipit regula Algebræ) per 2. fiet 1℞ 70. quæ maior pars erit, ac propterea minor 30. nimirum 100 — 70.

0 + 1℞
100 — 1℞
— 100 + 2℞

SOLVETVR idem hoc ænigma hac alia ratione. Ponatur minor pars 1℞. ideoque maior 1℞ + 40. ſuperans nimirum minorem numero 40. Ambæ partes ſimul efficiunt 2℞ + 40. qui numerus æqualis debet eſſe dato numero 100. Demptis vtrinque 40. erit æquatio inter 2℞. & 60. Diuiſis ergo 60. per 2. erit 1℞ 30. minor ſcilicet pars, ideoque maior 70. vt prius.

QVOD ſi maior pars ponatur 1℞. ideoque minor 1℞ — 40. vt illa hanc excedat numero 40. Ambæ partes ſimul efficient 2℞ — 40. quæ ſumma æqualis eſt dato numero 100. Additis 40. vtrinque, erit æqualitas inter 2℞. & 140. Diuiſisq; 140. per 2. fiet 1℞ 70. pro maiore parte, ideoque minor erit 30. vt ſupra.

SCHOLIVM.

Diuiſio numeri Coſſici in duas partes dati exceſſus.

VSV interdum venit, vt numerus aliquis Coßicus, nimirum 1℞. vel 10℞. vel 1ℨ. vel 6ℨ. &c. in duas partes diuidendus ſit, quæ ſe dato numero excedant: vt ænigmate 61. manifeſtum erit. Quæ res ſine Algebra (nam per Algebram vix fieri poteſt) hunc in modum perficietur. Ex dato numero Coßico detrahatur datus numerus per ſignum —. Semißis namque huius numeri diminuti erit minor pars, cui ſi per regulam additionis cap. 4. traditam addatur idem numerus datus, habebitur maior pars.

SIT enim 1℞ diuidenda in duas partes, quarum maior minorem ſuperet 20. vnitatibus. Deme 20. ex 1℞. & ad ½℞ — 10. ſemiſſem reſidui 1℞ — 20. adde 20. faciesque ½℞ + 10. vt in formula appoſita vides. Partes ſunt ½℞ — 10. & ½℞ + 10. quarum hæc illam ſuperat numero 20. & ambæ conficiunt 1℞.

½℞ — 10
+ 20
½℞ + 10

SIT rurſum numerus 10℞. diuidendus in duas partes, quarum differentia 20. Deme 20. ex 10℞. Nam reſidui 10℞ — 20. ſemißis 5℞ — 10. erit minor pars: ad quam ſi addes 20. facies 5℞ + 10. maiorem partem, quarum hæc illam ſuperat 20. vnitatibus, & ambæ efficiunt 10℞.

SIT quoque 1ℨ. diuidendus in duas partes, quarum differentia 150. Deme 150. & reſidui 1ℨ — 150. ſemißis ½ℨ — 75. erit minor pars, ad quam ſi adiicies 150. facies maiorem partem ½ + 75. quæ ſimul faciunt 1ℨ. & maior minorem ſuperat numero 150.

SIT denique numerus 6ℨ. diuidendus in duas partes, quarum maior minorem ſuperat 8. vnitatibus. Deme 8. ex 6ℨ. Nam reſidui 6ℨ — 8. ſemißis 3ℨ — 4. erit prima pars: ad quam ſi addes 8. fiet maior pars 3ℨ + 4. Atque ita de cæteris.

Diuiſio numeri abſoluti in duas partes dati exceſſus, ſine Algebra.

IMMO hac eadem arte diuidemus propoſitum numerum abſolutum in duas partes dati exceſſus, ſine Algebra: Nam ſi exceſſum datum ex propoſito numero detrahemus, erit reliqui numeri ſemißis minor pars, ad quam ſi eundẽ exceſſum adiiciemus, conficiemus partem maiorem. Vt ſi numerus 100. diſtribuendus ſit in duos, quorum differentia 40. Deme 40. ex 100. Reliqui enim numeri 60 ſemißis 30. erit minor pars: ad quam ſi addes 40. conflabis maiorem partem 70.

QVOD ſi Coßicus numerus diuidendus ita ſit per Algebram, non inuenientur quidem partes numeri Coßici, ſed pretium radicis reperietur, vel zenſi, cuius partes reſpondebunt partibus per Algebram poſitis, quæſtionique ſatisfacient. Vt ſi numerus 2ℨ. ſecandus ſit in duas partes, quarum maior ſuperet minorem numero 40. Ponatur minor pars ½ℨ. (minor ſcilicet numerus, quam ſemißis dati numeri 2ℨ) eritq; maior pars ½ℨ + 40. ſuperans illam numero 40. quæ ſimul efficiunt 1ℨ + 40. qui numerus æqualis debet eſſe dato numero 2ℨ. Dempto 1ℨ. vtrinque. erit æquatio inter 40. & 1ℨ. Diuiſiſque 40. per 1. fiet 1ℨ. 40. & 2ℨ. propoſiti 80. qui numerus diuidendus proponitur. Quoniam igitur minor pars poſita eſt ½ℨ. erit minor pars 20. ſemiſſis videlicet vnius zenſi, cuius pretium inuenimus 40. ideoque maior pars erit 60. nimirum ½ℨ + 40. Vbi vides, 20. & 60. efficere 80. & maiorem partem ſuperare minorem dato numero 40. Sic etiam ſi 2℞ diſtribuendæ ſint in duas partes, quarum differentia 40. inuenietur eodem modo 1℞ 40. ideoque 2℞ 80. Eritque ½℞ 20 & ½℞ + 40. erit 60. &c.

II. 2 *Duos numeros inuenire, quorum exceſſus ſit datus quiuis numerus, & eorum ſumma conficiat quemlibet datum numerum.*

Sit datus exceſſus 40. & ſumma 100. Hoc ænigma à ſuperiori non differt. Nam ſumma 100. diſtribuenda eſt in duas partes, quarum exceſſus ſit 40.

III. 3 *Datum numerum quemlibet in duas partes diuidere, quæ inter ſe multiplicatæ gignant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcunque.*

Sit datus numerus 100. diuidendus in duas partes, vt numerus ex vna in alteram genitus ad quadratum minoris partis proportionem habeat decuplam. Ponatur minor pars 1℞. ideoque maior 100 — 1℞. Ex vna in alteram procreatur numerus 100℞ — 1ℨ. qui decuplus eſſe debet ad quadratum partis minoris, nimirum ad

rum ad 1ʒ. hoc eſt, æqualis 10ʒ. Eſt ergo æqualitas inter 100℞ — 1ʒ. & 10ʒ. Et addito 1ʒ. vtrinque, inter 100℞. & 11.ʒ. Diuiſis ergo 100. per 11. iuxta tenorem regulæ, prodibit 1℞. $9\frac{1}{11}$. pro minore parte: (quia numeri Coſſici ſunt collaterales.) qua ablata ex 100. reliqua erit maior pars $90\frac{10}{11}$. Hæ partes, nimirum $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. inter ſe multiplicatæ faciunt $\frac{100000}{121}$. hoc eſt, $826\frac{54}{121}$. qui numerus decuplus eſt ad quadratum minoris partis, videlicet ad $\frac{10000}{121}$. hoc eſt, ad $82\frac{78}{121}$. vt perſpicuum eſt.

100 — 1℞
+ 1℞
100℞ — 1ʒ

SCHOLIVM.

SCIENDVM autem eſt, duas partes numeri dati inuentas, eandem habere proportionem, quam productus numerus ex earum multiplicatione habet ad quadratum minoris partis. Ita vides partes inuentas $9\frac{1}{11}$ & $90\frac{10}{11}$. vel $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. habere proportionẽ decuplam, quemadmodũ productus numerus $826\frac{54}{121}$. ad $82\frac{78}{121}$. quadratum minoris partis, ſiue $\frac{100000}{121}$ ad $\frac{10000}{121}$. Cuius rei ratio eſt, quod eadem pars minor multiplicet & ſeipſam, vt ſuum quadratum efficiat, & maiorem partem, vt productum numerum gignat. [a] Hinc enim fit, vt producti eandem proportionem habeant, quam numeri multiplicati. [a] 17. ſepti.

Itaque ænigma hoc ita proponi poſſet.

Datum numerum in duos partiri in data proportione, qui inter ſe multiplicati gignant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat eandem datam.

Sit enim datus numerus 100. diuidendus in duos habentes quadruplam proportionem, ita vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus habeat quoque ad quadratum minoris proportionem quadruplam. Ponatur minor numerus 1℞. & maior 4℞. vt nimirum habeant proportionem quadruplam. Et quia duo hi numeri faciunt 5℞. erit æquatio inter 5℞. & 100. Diuiſis ergo 100. per 5. fiet 1℞. 20. minor ſcilicet numerus. Maior ergo erit 80. cum poſitus ſit 4℞. Vides ergo numerum 1600. productum ex 20. in 80. quadruplum eſſe quadrati 400. ex minore 20. deſcripti. Item maiorem 80. ad minorem 20. quadruplam quoque habere proportionem.

4 *Duos numeros inuenire, qui inter ſe multiplicati producant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat datam: ſimul vero additi conficiant ſummam propoſitam quamcunque.* IIII.

SIT ſumma propoſita 100 & numerus ex vno numero inuento in alterum procreatus ſit decuplus ad quadratum minoris numeri. Hoc etiam ænigma à ſuperiori non differt. Nam ſumma 100. diuidenda eſt in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ producant numerum in proportione decupla ad quadratum numeri minoris.

5 *Duos numeros inuenire in data proportione, quorum maior ſi ſubtrahatur à dato numero, & minor à minore alio dato numero, reliqui duo fiant duo numeri æquales: quando id fieri poteſt.* V.

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, quorum maiore detracto ex 30. & minore ex 16. reliqui fiant duo numeri æquales. Debent autem duo propoſiti numeri habere proportionem minorem proportione data. Vt in noſtro exemplo minor eſt proportio 30. ad 16. quam tripla.

Ponatur minor 1℞ ideoque maior 3℞. triplo maior. Si 3℞. demantur ex 30. remanent 30 — 3℞. Et ſi 1℞ dematur ex 16. remanent 16 — 1℞. Eſt ergo inuenta æquatio inter 30 — 3℞. & 16 — 1℞. Addantur vtrinque 3℞. eritque æquatio inter 30. & 16 + 2℞. propterea quod + 3℞. additæ ad — 1℞. faciant + 2℞. Et ablatis 16. vtrinque, erit æqualitas inter 14. & 2℞. Diuiſisque 14. per 2. prodibit 1℞. 7. pro minore numero. Maior ergo erit 21. triplo maior. Perſpicuum autem eſt, ſi 21. ex 30. & 7. ex 16. detrahantur, vtrobique relinqui 9.

+ 3℞
— 1℞
+ 2℞

6 *Duos numeros in proportione data inuenire, ita vt maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, vel ad eundem, efficiantur duo numeri in proportione quacunque data, quando id fieri poteſt.* VI.

Sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, quorum maiore addito ad 6. & minore ad 4. efficiantur duo numeri in proportione tripla. Ponatur minor numerus 1℞. & maior 5℞. quintuplo maior. Ex 5℞. & 6. fiunt 5℞ + 6. Et ex 1℞. & 4. fiunt 1℞ + 4. Eruntq; 5℞ + 6. in tripla proportione ad 1℞ + 4. hoc eſt, ſi triplicentur 1℞ + 4. æquatio fiet inter 5℞ + 6. & 3℞ + 12. Et ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞ + 6. & 12. Et rurſum ablatis vtrinq; 6. inter 2℞ & 6. Diuiſis ergo 6. per 2. proueniet 1℞. 3. pro minore numero, & 15. pro maiore, quintuplus illius. Iam ſi addantur 15. ad 6. & 3. ad 4. fiunt 21. & 7. in tripla proportione.

Si compoſitus numerus 5℞ + 6. ad 1℞ + 4. debeat habere proportionem quadruplam, erit æqualitas inter

inter 5℞+6.& 4℞+16. Et ablatis 4℞.vtrinque,inter 1℞+6.&16. Et rurſum ablatis 6.vtrinque,inter 1℞.&10. Diuiſiſque 10.per 1.fiet 1℞.10. minor ſcilicet numerus, ideoque maior 50. illius videlicet quintuplus. Quod ſi 50.addantur ad 6.&10.ad 4 fient numeri 56.&14.in proportione quadrupla.

Et ſi compoſitus numerus 5℞+6.ad 1℞+4.habere debeat proportionem duplam,erit æquatio inter 5℞+6.&2℞+8. Etablatis 2℞.vtrinque,inter 3℞+6.&8. Et ablatis 6. vtrinque, inter 3℞&2. Diuiſis autem 2.per 3.fiet 1℞.$\frac{2}{3}$. minor ſcilicet numerus, & maior $\frac{10}{3}$ illius quintuplus. Et ſi $\frac{10}{3}$. addantur ad 6. id eſt,ad $\frac{18}{3}$.&$\frac{2}{3}$.ad 4.id eſt,ad $\frac{12}{3}$. fient duo numeri $\frac{28}{3}$.&$\frac{14}{3}$. habentes proportionem duplam.

SED tam maior 5℞.quam minor 1℞.additus ad 6.efficere debeant duos numeros in proportione tripla.Inuenietur æquatio inter 5℞+6.&3℞+18.&ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞+6.&18. Et rurſum ablatis 6.vtrobique,inter 2℞.&12. Diuiſis ergo 12.per 2.fiet 1℞.6.minor numerus: maior autem erit 30. Si igitur vterque addatur ad 6.fient numeri 12.&36 habentes proportionem triplam.

QVOD ſi quis velit,compoſitum numerum 5℞+6. ad 1℞+4. habere proportionem etiam quintuplam, vel maiorem,aut ſeſquialteram,euadet ænigma inexplicabile,ſeu impoſſibile:quia incidemus in æquationem impoſſibilem.Vt ſi proportio inter 5℞+6.& 1℞+4. debeat eſſe quintupla,vel ſextupla, erit æquatio inter 5℞+6.&5℞+20. Vel inter 5℞+6.&6℞+24. quarum vtraque impoſſibilis eſt.

At ſi proportio inter 5℞+6.& 1℞+4. debeat eſſe ſeſquialtera, erit æquatio inter 5℞+6.& $1\frac{1}{2}$℞+6.quæ etiam impoſſibilis eſt. Vbi clare perſpicis, ex ipſa regula Algebræ cognoſci poſſe, num ænigma propoſitum ſolui poſſit,necne. id quod cap. 14. pluribus verbis docuimus.

VII. 7 *Numerum inuenire, qui additus ad quoſuis duos numeros datos, faciat duos numeros in quacunque proportione, quæ minor ſit proportione duorum numerorum propoſitorum.*

Sit inueniendus numerus,qui additus ad 100.&20. faciat duos numeros in proportione tripla. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Fient ergo numeri 1℞+100.&1℞+20.qui debent habere proportionem triplam. Igitur æquatio erit inter 1℞+100.&3℞+60. Ablata 1℞ vtrinque, remanebit æquatio inter 100.&2℞+60. Et rurſum demptis 60.vtrinque,inter 40.&2℞. Diuiſis autem 40.per 2.fiet 1℞.20. numerus quæſitus. Numeri ergo compoſiti erunt 120.&40.in proportione tripla.

DEBET autem proportio nominata minor eſſe proportione inter datos duos numeros, vt in noſtro exemplo,minor,quam quintupla. Alias occurret nobis æquatio impoſſibilis. Ratio huiuſce rei eſt, quod addito vno eodemque numero ad duos inæquales, compoſiti minorem habeant proportionem, quam duo illi inæquales.

SINT namque duo numeri inæquales AB,maior, & CD,minor; quibus addatur idem numerus, vel duo æquales BE, DF. Dico minorem eſſe proportionem AE, ad CF,quam AB,ad CD. Quoniam enim (vt ad defin. 20.lib. 7. Euclid.declarauimus) maior eſt proportio maioris numeri AE, ad BE, quam minoris CF,ad eundem BE, vel ad DF:[a] erit per conuerſionem rationis,minor proportio AE,ad AB,quam CF,ad CD: Et permutando, minor AE, ad CF,quam AB, ad CD. quod eſt propoſitum.

A . . . . B . . . . E
C . . . . . . D . . . . F

[a] *ſchol.22. ſeptimi.*

Iiſdem poſitis ſit, data proportio ſuperbipartiens quintas. Numeri compoſiti ſunt 1℞+100.&1℞+20.qui debent habere proportionem ſuperbipartientem quintas. Si ergo 1℞+20 multiplicetur per $1\frac{2}{5}$. denominatore proportionis ſuperbipartientis quintas,id eſt,per $\frac{7}{5}$. fiet numerus $\frac{7℞+140}{5}$. qui æqualis erit numero 1℞+100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem,vt hic vides,reducitur ad æquationem inter 7℞+140.&5℞+500. Et ablatis 140.vtrinque,erit æquatio inter 7℞.&5℞+360. Et rurſus ablatis 5℞ vtrinque inter 2℞.&360. Diuiſis ergo 360. per 2. fiet 1℞.180.numerus quæſitus. Hic enim cum 100.&20.faciet numeros 280.&200.qui habent proportionem ſuperbipartientem quintas. Appoſui hoc alterum exemplum, vt videas,quo pacto æquationes inter minutias ſint reducendæ. quod ad finem cap.10.docui.

$$\frac{7℞+140}{5} \qquad \frac{5℞+500}{1}$$
$$\frac{7℞+140}{5} \qquad \frac{1℞+100}{1}$$

VIII. 8 *Numerum inuenire, qui ablatus ex quibuslibet duobus numeris datis relinquat duos numeros in quacunque proportione, quæ maior ſit proportione duorum numerorum propoſitorum.*

SIT inueniendus numerus,qui ablatus eſt ex 100.&50.relinquat duos numeros in proportione ſeptupla. Ponatur quęſitus numerus 1℞. Erunt ergo duo numeri reliqui 100 — 1℞.&50 — 1℞. eritque proportio illius ad hunc ſeptupla.Quare æquatio erit inter 100 — 1℞.&350 — 7℞. Additaque 1℞.vtrinque, erit æquatio inter 100.&350 — 6℞. propterea quod +1℞.& — 7℞.faciunt — 6℞ vt hic cernis. Et rurſum additis vtrinque 6℞,erit æqualitas inter 100+6℞.&350. Et ablatis vtrinque 100. inter 6℞ &250. Diuiſis ergo 250. per 6. erit 1℞ $41\frac{2}{3}$. numerus quęſitus. Reliqui ergo numeri erunt $58\frac{1}{3}$.&$8\frac{1}{3}$. qui proportionem habent ſeptuplam.

+ 1 ℞
— 7 ℞
———
— 6 ℞

DEBET autem proportio data eſſe maior proportione, quam dati duo numeri habent, vt in propoſito exemplo maior,quam dupla. Alias incidemus in æquationem impoſſibilem. Cuius rei ratio eſt, quod ablato vno eodemque numero ex duobus inæqualibus, reliqui numeri habeant proportionem maiorem, quam duo illi inæquales.

Sint enim inæquales duo numeri A B, maior, & C D, minor, à quibus auferatur idem numerus, vel duo æquales E B, F D. Dico maiorem eſſe proportionem A E, ad C F, quam A B, ad C D. Quoniam enim (vt ex definit. 20. lib. 7. Euclid. deduximus) maior eſt proportio maioris numeri A B, ad E B, quam minoris C D, ad eundem E B, vel ad F D; [a] erit quoque permutando maior proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D: nimirum totius ad totum, quam ablati ad ablatum. erit quoque maior proportio reliqui A E, ad reliquum C F, quam totius A B, ad totum C D. quod eſt propoſitum.

A........ E.... B
C...... F.... D

[a] *ſchol. 22. ſepti.*

9. *Propoſitum numerum in duos numeros habentes datam proportionem diſtribuere.* IX.

Sit numerus 100. diuidendus in duos in proportione decupla. Ponatur minor pars 1℞. Eritque maior 10℞., decuplo videlicet maior. Ergo ſumma harum partium 11℞. æqualis erit 100. Diuiſis igitur 100. per 11. fit 1℞ $9\frac{1}{11}$. minor numerus, quo ablato ex 100. remanet maior numerus $90\frac{10}{11}$. qui illius decuplus eſt.

Aliter. Poſita 1℞. pro minore parte, erit maior pars 100 — 1℞. quæ illius decupla eſſe debet. Igitur 10℞. æquales erunt 100 — 1℞. Additaque 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 11℞. & 100. vt ſupra. Quod ſi ſtatuas maiorem partem eſſe 1℞. erit minor 100 — 1℞. qua decuplata, erit æqualitas inter 1℞. & 1000 — 10℞. Additiſque 10℞ vtrinque, æquatio erit inter 11℞. & 1000. Diuiſis ergo 1000. per 11. fiet 1℞ $90\frac{10}{11}$. pro maiore parte. qua ablata ex 100. erit minor pars $9\frac{1}{11}$. vt prius.

10 *Propoſitum numerum in duas partes ſecare, vt maior ad minorem habeat datam proportionem, & inſuper contineat datum quemcunque numerum.* X.

Sit numerus 100. ſecandus in duas partes, quarum maior minoris ſit tripla, & inſuper contineat 20. vnitates. Ponatur 1℞. pro minore parte. Maior ergo erit 3℞ + 20. Summaque 4℞ + 20. æqualis eſſe debet 100. Ablatis 20. vtrinque, erit æqualitas inter 4℞. & 80. Diuiſiſque 80. per 4. fiet 1℞. 20. pro minore parte. qua dempta ex 100. reliqua erit maior pars 80. quæ triplum numeri 20. continet, nimirum 60. & inſuper 20.

Aliter. Poſita 1℞. pro minore parte, erit maior 100 — 1℞. à qua ſi detrahantur 20. debet reliquus numerus 80 — 1℞. triplus eſſe minoris 1℞ hoc eſt, æquatio debet eſſe inter 3℞ & 80 — 1℞. Additaque 1℞. vtrinque, æqualitas erit inter 4℞. & 80. Igitur vt ſupra, erit 1℞. 20. minor pars, & maior 80.

11 *Duos numeros inuenire, quorum exceſſus datus ſit, & proportio data.* XI.

Sit datus exceſſus 20. & data proportio quintupla. Ponatur minor numerus 1℞. Erit maior 5℞. nimirum illius quintuplus. Exceſſus eorum eſt 4℞. Eſt ergo æquatio inter 4℞. & 20. Diuiſiſque 20. per 4. fiet 1℞. 5. pro minore numero. Maior autem erit 25. qui ipſius 5. quintuplus eſt, eundemque excedit numero 20.

SINT rurſus inueniendi duo numeri in proportione ſupertripartiente ſeptimas, quorum exceſſus ſit 21. Ponantur duo numeri 7℞. 10℞ in proportione ſupertripartiente ſeptimas. Horum differentia 3℞ æqualis eſſe debet numero 21. Diuiſis ergo 21. per 3. fiet 1℞ 7. Igitur 7℞ erunt 49. & 10℞ facient 70. Eſt autem differentia inter 70. & 49. datus numerus 21. habentque proportionem ſupertripartientem ſeptimas.

12 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt pars aliquota vnius data cum parte alia aliquota alterius data faciat datum quemuis numerum, qui poſitus ſit inter partes nominatas dati numeri diuidendi.* XII.

Sit numerus 100. diuidendus in duos, ita vt $\frac{1}{3}$. prioris cum $\frac{1}{5}$. poſterioris efficiat 30. qui numerus poſitus eſt inter $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. dati numeri 100. nimirum inter $33\frac{1}{3}$. & 20. hoc eſt, minor eſt, quam $33\frac{1}{3}$. & maior, quam 20. Ponatur primus numerus 1℞. ideoque ſecundus 100 — 1℞. Tertia pars primi eſt $\frac{1}{3}$℞. & quinta ſecundi 20 —— $\frac{1}{5}$℞: quæ partes ſimul conficiunt 20 —— $\frac{2}{15}$℞. quia vt addatur $\frac{1}{3}$℞ ad —— $\frac{1}{5}$℞. fit ſubtractio, propter diuerſa ſigna. Eritque æquatio inter 20 + $\frac{2}{15}$℞. & 30. Ablatiſque 20. vtrinque, inter $\frac{2}{15}$℞. & 10. Diuiſis autem 10. per $\frac{2}{15}$. prouenit 1℞. 75. pro primo numero: atque idcirco ſecundus erit 25. nimirum 100 —— 1℞. Conſtat autem, tertiam partem prioris, nimirum 25. cum quinta parte poſterioris, hoc eſt, cum 5. efficere 30.

Aliter, vt vitentur fractiones. Ponatur tertia pars primi, 1℞. ideoque totus primus 3℞. Igitur $\frac{1}{5}$. ſecundi erit 30 — 1℞. vt cum $\frac{1}{3}$. primi, id eſt, cum 1℞. conficere poſſit 30. ideoque totus ſecundus erit 150 —— 5℞. qui cum primo, hoc eſt, cum 3℞. facere debet 100. Fit autem ex ipſis 150 —— 2℞. Igitur æquatio erit inter 150 —— 2℞. & 100. Additiſque vtrinque 2℞. inter 150. & 100 + 2℞. Ablatiſque 100. vtrinque inter 50. & 2℞. Diuiſis ergo 50. per 2. fiet 1℞ 25. Et quia primus poſitus fuit 3℞. erit primus 75. atque idcirco ſecundus 25. quemadmodum prius.

QVOD ſi quis poſceret numerum $33\frac{1}{3}$. vel maiorem, aut 20. vel minorem, quem partes nominatæ efficere debeant, occurreret æquatio impoſſibilis, vt experiri poteris.

13 Da-

XIII. 13 *Datum numerum in duos partiri, ita vt prioris pars aliquota data excedat aliam partem aliquotam poſterioris datam numero quouis, qui minor ſit parte aliquota totius numeri propoſiti, eiuſdem nominis cum parte aliquota prioris numeri.*

SIT diuidendus numerus 100. in duos, ita vt prioris pars quinta excedat quartam partem poſterioris, numero 11. qui minor eſt, quinta parte diuidendi numeri 100. Ponatur prior numerus 1℞. ideoque poſterior 100 — 1℞. Pars quinta prioris $\frac{1}{5}$℞. excedere debet quartam partem poſterioris, nimirum 25 — $\frac{1}{4}$℞. numero 11. hoc eſt, æquatio eſſe debet inter $\frac{1}{5}$℞. & 25 — $\frac{1}{4}$℞ + 11. Addita $\frac{1}{4}$℞ vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{9}{20}$℞ & 25 + 11. ſiue 36. Diuiſis ergo 36. per $\frac{9}{20}$. inuenietur 1℞. 80. pro priore numero. Ergo poſterior erit 20. Et $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 16. ſuperat quartam partem poſterioris, videlicet 5. numero 11.

Aliter ſine fractionibus. Ponatur $\frac{1}{5}$. prioris numeri 1℞, ideoque totus prior 5℞. Poſterioris ergo $\frac{1}{4}$. erit 1℞ — 11. vt 1℞ ſuperet 1℞ — 11. numero 11. totusque poſterior numerus erit 4℞ — 44. Erit igitur æqualitas inter 9℞ — 44. & 100. quod ambo numeri 5℞. & 4℞ — 44. efficere debeāt 100. Additis ergo 44. vtrinque, fiet æquatio inter 9℞. & 144. Diuiſisque 144. per 9. reperietur 1℞. 16. Et quia prior numerus poſitus fuit 5℞. erit numerus prior 80. ac proinde poſterior 20. Et quinta pars prioris, nimirum 16. ſuperat 5. quartam partem poſterioris numero 11.

QVOD ſi exceſſus quintæ partis prioris numeri ſupra quartam poſterioris proponeretur 20. nimirum $\frac{1}{5}$. numeri 100. diuidendi, vel maior, quam 20. res non ſuccederet. quia incideremus in abſurdum aliquod. Nam ſi exceſſus debeat eſſe 20. reperies numerum priorem eſſe 100. ideoque poſteriorem 0. quod abſurdum eſt, &c.

XIV. 14 *Numerum inuenire, à quo ſi auferantur duo dati numeri; reſiduum minoris ad maioris reſiduum datam habeat proportionem.*

Sint à quæſito numero auferendi numeri 100. & 30. ita vt reſiduum minoris ad reſiduum maioris proportionem habeat triplam. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Eruntque reſidui 1℞ — 100. & 1℞ — 30. Debet ergo proportio eſſe tripla 1℞ — 30. ad 1℞ — 100. hoc eſt, æquatio debet eſſe inter 1℞ — 30. & 3℞ — 300. Additis 30. vtrinque, erit æquatio inter 1℞, & 3℞ — 270. Et rurſum additis 270 vtrinque, inter 1℞ + 270. & 3℞. & ablata 1℞ vtrinque, inter 270. & 2℞. Diuiſis ergo 270 per 2. emerget 1℞. 135. numerus quæſitus. Nam ſi ſubtrahantur 100. & 30. reliqui fiunt 35. & 105. Ac 105. ad 35. triplam proportionem habent.

XV. 15 *Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem, & detracto à maiore; ſumma ad reſiduum, vel reſiduum ad ſummam habeat proportionem datam minorem ea, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore; ſumma ad reſiduum proportionem habeat datam maiorem ea, quæ inter datos numeros inuenitur.*

Sint dati duo numeri 20. & 100. inueniendusque ſit primo numerus, quo addito ad 20. & ſubtracto à 100. ſumma ad reſiduum habeat proportionem quadruplam, quæ minor eſt, quam quintupla, quam habent 100. ad 20. Ponatur ille numerus 1℞. eritque ſumma 1℞ + 20. & reſiduum 100 — 1℞. Vt igitur ſumma illa huius reſidui ſit quadrupla; erit æquatio inter 1℞ + 20. & 400 — 4℞. Et additis 4℞. vtrinque, inter 5℞ + 20. & 400. Et ablatis 20. vtrinque, inter 5℞. & 380. Diuiſis igitur 380 per 5. fiet 1℞. 76. numerus quæſitus. qui additus ad 20. facit 96. & detractus ex 100. relinquit 24. Perſpicuum autem eſt, quadruplam proportionem eſſe 96. ad 24.

Sit deinde inueniendus numerus, quo addito ad 20. & ſubtracto à 100. reſiduum ad ſummam habeat proportionem quadruplam. Ponatur numerus ille 1℞. eritque vt prius, ſumma 1℞ + 20. & reſiduum 100 — 1℞. Vt igitur reſiduum iſtud illius ſummæ ſit quadruplum; erit æquatio inter 4℞ + 80. & 100 — 1℞. & addita 1℞ vtrinque. inter 5.℞ + 80. & 100. Et ablatis 80. vtrinq;, inter 5℞. & 20. Diuiſis ergo 20. per 5. fiet 1℞ 4. numerus quęſit⁹. Hic. n. additus ad 20. facit 24. Et ablatus ex 100. relinquit 96. qui numerus numeri 24. quadruplus eſt.

Sit denique inueniendus numerus, quo addito ad 100. & dempto ex 20. ſumma illa ad hoc reſiduum proportionem habeat ſeptuplam, quæ maior eſt, quam quintupla inter 100. & 20. Ponatur ille numerus 1℞. Fietque ſumma 1℞ + 100. & reſiduum 20 — 1℞. Vt igitur ſumma illa ſit ſeptupla huius reſidui; erit æqualitas inter 1℞ + 100. & 140 — 7℞. Et additis 7℞. vtrinque, inter 8℞ + 100. & 140. Et ablatis 100. vtrinque, inter 8℞ & 40. Diuiſis igitur 40. per 8. fiet 1℞. 5. numerus quæſitus. Hic enim additus ad 100. facit 105. detractus autem ex 20. relinquit 15. Habentque. 105. ad 15. proportionem ſeptuplam.

Si proportio data in vltimo exemplo eſſet quadrupla, minor videlicet proportione inter 100. & 20. incideremus in æquationem impoſſibilem: quod experiri licebit.

XVI. 16 *Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem ſi adiicietur alter datorum, & ab eodem alter detrahatur; ſumma ad reſiduum proportionem habeat datam.*

Dati numeri ſint 100. & 20. inueniendusque primo ſit numerus, ad quem ſi addantur 100. & ab eodem tollantur 20. ſumma illa ſit reſidui huius tripla. Ponatur numerus ille 1℞. Fietque ſumma 1℞ + 100. & reſiduum 1℞ — 20. Vt igitur ſumma illa ſit huius reſidui tripla; erit æquatio inter 1℞ + 100. & 3℞ — 60. Et additis vtrinq; 60. inter 1℞ + 160. & 3℞. Et ablata 1℞ vtrinque, inter 160. & 2℞. Diuiſis ergo 160. per 2. reperietur 1℞. 80.

1℞.80. numerus quæſitus. Nam ſi ei addes 100. facies 180. & ſi demas 20. remanent 60. Eſtque tripla proportio 180. ad 60.

Sit deinde inueniendus numerus, ad quem ſi addantur 20. & ab eodem deducantur 100. ſumma illa reſidui huius ſit tripla. Ponatur ille numerus 1℞. Fiet ſumma 1℞ + 20. & reſiduum 1℞ — 100. Vt ergo illa huius ſit tripla; erit æquatio inter 1℞ + 20. & 3℞ — 300. Et additis 300. vtrinque, inter 1℞ + 320. & 3℞. Et ablata 1℞ vtrinque, inter 320. & 2℞. Diuiſis igitur 320. per 2. fiet 1℞.160. numerus quæſitus. Nam ſi ei addes 20. conficies 180. & ſi demes 100. relinques 60. Eſtque inter 180. & 60. proportio tripla.

17 *Propoſitum numerum in duos diuidere bis, ita vt maior numerus primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ diuiſionis habeat datam proportionem: Item maior ſecundæ diuiſionis ad minorem primæ diuiſionis, datam quoque habeat proportionem quamcunque.* XVII.

Propoſitus numerus 100. diuidendus ſit bis in duos numeros, ita vt maior primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ diuiſionis habeat proportionem triplam; maior vero ſecundæ diuiſionis ad minorem primæ diuiſionis proportionem decuplam. Ponatur maior pars primæ diuiſionis 3℞. ideoque minor 100 — 3℞. Erit ergo minor pars ſecundæ diuiſionis 1℞. Eſt enim tripla proportio 3℞. ad 1℞. ideoque maior pars ſecundæ diuiſionis erit 100 — 1℞. Vt autem 100 — 1℞. habeant ad 100 — 3℞. proportionem decuplam, neceſſe eſt, æquationem eſſe inter 100 — 1℞. & 1000 — 30℞. Igitur additis 30℞ vtrinque, erit æquatio inter 100 + 29℞. & 1000. Ablatisque 100. vtrinque, erit æqualitas inter 29℞. & 900. Diuiſis igitur 900. per 29. deprehendetur 1℞. $31\frac{1}{29}$. Et quia maior pars primæ diuiſionis poſita fuit 3℞. erit ipſa pars maior $93\frac{3}{29}$. ac proinde minor $6\frac{26}{29}$. Rurſus quia minor pars ſecundæ diuiſionis poſita fuit 1℞. erit ipſa pars minor $31\frac{1}{29}$. ideoque maior $68\frac{28}{29}$. Eſtque numerus $93\frac{3}{29}$. ad $31\frac{1}{29}$. triplus: Et $68\frac{28}{29}$. ad $6\frac{26}{29}$. decuplus.

$93\frac{3}{29}$	$31\frac{1}{29}$
$6\frac{26}{29}$	$68\frac{28}{29}$

18 *Datum numerum in duos diuidere ter, ita vt maior pars primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ datam habeat proportionem: Item maior ſecundæ diuiſionis ad minorem tertiæ: Ac denique maior tertiæ diuiſionis ad minorem primæ.* XVIII.

Datus numerus 100. ſit ter diuidendus in duos, ita vt maior primæ diuiſionis ad minorem ſecundæ proportionem habeat triplam: Maior autem ſecundæ diuiſionis ad minorem tertiæ, proportionem duplam: Ac denique maior tertiæ diuiſionis ad minorem primæ, proportionem quadruplam. Ponatur maior pars primæ diuiſionis 3℞. ideoque minor 100 — 3℞. Erit ergo minor pars ſecundæ diuiſionis 1℞. quippe cum tripla ſit proportio 3℞. ad 1℞. ideoque maior pars ſecundæ diuiſionis erit 100 — 1℞. quæ vt dupla ſit minoris partis diuiſionis tertiæ, erit minor pars tertiæ diuiſionis 50 — $\frac{1}{2}$℞, atque idcirco maior 50 + $\frac{1}{2}$℞. Vt autem 50 + $\frac{1}{2}$℞. ad 100 — 3℞. minorem partem primæ diuiſionis proportionem habeat quadruplam, erit æquatio inter 50 + $\frac{1}{2}$℞. & 400 — 12℞. Additisque 12℞. vtrinque, æqualitas erit inter 50 + $12\frac{1}{2}$℞. & 400. Et ablatis vtrinque 50. inter $12\frac{1}{2}$℞. & 350. Diuiſis igitur 350. per $12\frac{1}{2}$. fiet 1℞. 28. Maior ergo pars primæ diuiſionis, quæ fuit poſita 3℞. erit 84. & minor 16. At minor pars ſecundæ diuiſionis, quam poſuimus 1℞. erit 28. ac maior 72. Denique minor pars tertiæ diuiſionis, quæ poſita eſt 50 — $\frac{1}{2}$℞. erit 36. & maior 64. qui numeri ſatisfaciunt ænigmati propoſito. quod experiri poteris.

3℞	1℞	50 + $\frac{1}{2}$℞
100 — 3℞	100 — 1℞	50 — $\frac{1}{2}$℞

84	28	64
16	72	36

19 *Duos numeros inuenire, qui inter ſe multiplicati procreent numerum in data proportione ad eorum ſummam.* XIX.

Sit productus ex multiplicatione ad ſummam triplus. Ponatur vnus numerus 1℞. alter vero quicunque numerus maior denominatore proportionis, V. g. 20. maior quam 3. Alias res non ſuccedet. Ex 1℞. in 20. fiunt 20℞. Et ſumma ex 1℞ & 20. collecta eſt 1℞ + 20. Vt ergo ille productus ad hanc ſummam habeat proportionem triplam, erit æquatio inter 20℞. & 3℞ + 60. Et ablatis 3℞. vtrinque, inter 17℞. & 60. Diuiſis ergo 60. per 17. fiet 1℞. $3\frac{9}{17}$. Sunt ergo duo numeri quæſiti $3\frac{9}{17}$. & 20. Ex ductu vnius in alium fit numerus $70\frac{10}{17}$. qui triplus eſt ad $23\frac{9}{17}$. eorum ſummam.

SI vnus numerus ponatur 1℞. & alter 4. maior videlicet, quam 3. denominator proportionis triplæ, inuenientur duo numeri 12. & 4. Nam ex 1℞. in 4. fit numerus 4℞ triplus ſummæ 1℞ + 4. Ergo æquatio erit inter 4℞ & 3℞ + 12. Ablatiſque 3℞ vtrinque, inter 1℞. & 12. ac proinde 1℞ erit 12. vnus numerus, alter autem erit 4. vt poſuimus.

20 *Dato numero quolibet, inuenire alium, ita vt ex hoc in illum procreetur numerus in data proportione ad eorum ſummam: ita tamen, vt denominator proportionis dato numero minor ſit.* XX.

Dato numero 20. inueniendus ſit alius, qui in illum ductus producat numerum triplum ad ſummam ex

ipſis collectam: cuius proportionis denominator 3. minor eſt dato numero 20. Alias res non ſuccedet. Non differt hoc ænigma à præcedenti. Nam ſi numerus quæſitus ponatur 1℞. & alter numerus, 20. qui datus eſt, inuenietur numerus, vt ibi, qui in 20. ductus producat numerum triplum ad ſummam, &c.

XXI. 21 *Inuenire duos numeros in data proportione, qui inter ſe multiplicati faciant numerum in data proportione ad eorum ſummam.*

HOC ænigma à 19. non differt, niſi quod hic datur proportio, quam inuenti numeri habere debent.

Sint ergo inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, vt inter ſe multiplicati faciant numerum duodecuplum ſummæ eorum. Ponantur duo numeri 4℞. & 6℞. in proportione ſeſquialtera. Ex vno in alterum fiunt 24ʒ. eorumque ſumma eſt 10℞. Vt ergo 24ʒ. ad 10℞. proportionē habeant duodecuplam: erit æquatio inter 24ʒ. & 120℞. Diuiſis ergo 120. per 24. proueniet 1℞5. quia denominationes Coſſicæ ʒ. & ℞. collaterales ſunt. Cum ergo primus numerus poſitus ſit 4℞. & ſecundus 6℞. erit primus 20. & ſecundus 30. qui multiplicati inter ſe faciunt 600. qui numerus duodecuplus eſt eorum ſummæ 50.

Si proportio inter numerum ex multiplicatione factum ad ſummam debeat eſſe ſeſquiquinta. Poſitis numeris 4℞ & 6℞. in proportione ſeſquialtera. Vt numerus 24ʒ. ex multiplicatione factus ad ſummam 10℞ proportionem habeat ſeſquiquintam: erit æquatio inter 24ʒ. & 12℞. quia 12℞ ad 10℞ habent etiam proportionem ſeſquiquintam: qui quidem numerus 12 procreatus eſt ex $1\frac{1}{5}$. denominatore proportionis ſeſquiquintæ in 10. Diuiſis igitur 12. per 24. fiet 1℞ $\frac{1}{2}$. atque adeo cum numeri poſiti ſint 4℞ & 6℞. erunt duo numeri quæſiti 2. & 3. qui multiplicati inter ſe faciunt 6. numerum ad eorum ſummam 5. ſeſquiquintam.

XXII. 22 *Inuenire duos numeros, quorum ſumma ſit datus quilibet numerus, & poſteriore diuiſo per priorem, Quotiens ſit datus etiam numerus quiuis.*

VEL

Datum numerum in duos partiri, vt poſteriore diuiſo per priorem, Quotiens ſit quilibet numerus datus.

Sit ſumma quæſitorum numerorum 100 & Quotiens 10. Sit primum prior numerus 1℞, atque idcirco poſterior 100 — 1℞. Hoc diuiſo per 1℞. fit Quotiens $\frac{100 - 1\text{℞}}{1\text{℞}}$. æqualis 10. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 100 — 1℞ & 10℞. Addita 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 100. & 11℞. Diuiſis autem 100. per 11. fit 1℞ $\frac{100}{11}$. hoc eſt, $9\frac{1}{11}$ prior numerus. Ergo poſterior erit $90\frac{10}{11}$ ſiue $\frac{1000}{11}$. Conſtat autem ſi $90\frac{10}{11}$ per $9\frac{1}{11}$ ſiue $\frac{1000}{11}$ per $\frac{100}{11}$ diuidantur, Quotientem gigni 10.

Sit deinde poſterior numerus 1℞. ideoque prior 100 — 1℞. Illo per hunc diuiſo, fit Quotiens $\frac{1\text{℞}}{100 - 1\text{℞}}$. æqualis 10. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1℞. & 1000 — 10℞. Et additis 10℞ vtrinque, erit æqualitas inter 11℞. & 1000. Diuiſis ergo 1000. per 11. fiet Quotiens $\frac{1000}{11}$. ſiue $90\frac{10}{11}$. poſterior numerus, priorque erit $9\frac{1}{11}$. ſiue $\frac{100}{11}$. vt prius.

IAM ſi numerus datus 100. ſecandus ſit in duos, vt poſteriore per priorem diuiſo, Quotiens ſit 10. ſoluetur quæſtio eodem modo ponendo 1℞. pro priore, vel poſteriore, & pro altero 100 — 1℞. vt liquet.

DENIQVE ſit diuidendus numerus 100. in duas partes, vt poſteriore per priorem diuiſa, Quotiens ſit $\frac{1}{2}$. Ponatur prior pars 1℞ & poſterior 100 — 1℞. Hac diuiſa per 1℞, fit Quotiens $\frac{100 - 1\text{℞}}{1\text{℞}}$. æqualis $\frac{1}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1℞. & 200 — 2℞. Additiſque 2℞ vtrobique, erit æqualitas inter 3℞, & 200. Diuiſis ergo 200. per 3 fiet 1℞ $\frac{200}{3}$. ſiue $66\frac{2}{3}$. pro priore parte. Poſterior autem erit $33\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{100}{3}$. Diuiſis autem $\frac{100}{3}$. per $\frac{200}{3}$. fit Quotiens $\frac{1}{2}$. vt conſtat.

XXIII. 23 *Datum numerum in quinque partes ſecare, vt ſecunda primam contineat quotieſcunque libuerit, & præterea quotlibet vnitates: Tertia ſecundam quotieſcunque etiam libuerit, ac præterea quotuis vnitates: Quarta tertiæ ſit multiplex data, minus quotuis vnitatibus: Ac tandem quinta à multiplici data quartæ deficiat quotlibet etiam vnitatibus; quando id fieri poteſt.*

DATVS numerus ſit 100. ſecandus in quinque partes, ita vt ſecunda primam contineat bis, & præterea 2. Tertia ſecundam ter, ac præterea 3. Quarta tertiæ ſit dupla minus 4. Ac tandem quinta à dupla quartæ deficiat 13 vnitatibus. Ponatur prima pars 1℞. Eritq; ſecunda 2℞ + 2. Tertia 6℞ + 9. Quarta 12℞ + 14. Et quinta 24℞ + 15. Summa omnium partium eſt 45℞ + 40. quæ æqualis debet eſſe dato numero 100. Ablatis 40. vtrinque: erit æquatio inter 45℞. & 60. Diuiſiſque 60. per 45. fiet 1℞. $1\frac{1}{3}$. prima pars. Ergo omnes quinque erunt $1\frac{1}{3}$. $4\frac{2}{3}$. 17. 30. 47.

Si numerus 100. ſecandus eſſet in quinque partes, vt ſecunda primam contineret ter, & præterea 4. Tertia ſecundam bis, & præterea 3. Quarta eſſet quintupla tertiæ, minus 6. Quinta denique eſſet quadrupla quartæ, minus 5. quæſtio foret impoſſibilis. Nam poſita prima parte 1℞ eſſet ſecunda 3℞ + 4. Tertia 6℞ + 11. Quarta 30℞ + 49. & quinta 120℞ + 191. quæ omnes partes faciunt 160℞ + 255. quæ ſumma æqualis deberet eſſe dato numero 100. totum parti, quod eſt abſurdum. Propterea diximus in ænigmate [quando id fieri poteſt.]

24 Datis

24 *Datis duobus numeris, alium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem pars aliquota quæcunque inuenti numeri cum maiore efficit.* XXIV.

Sint dati duo numeri 20.& 30. inueniendusque ſit alius, qui cum 20. ſummam faciat æqualem ſummæ ex 30.& ſexta parte inuenti numeri collectæ. Ponatur numerus quæſitus 6℞. (Pono hunc numerum, vt habeat nominatam partem ſine fractione. quod tamen opus non eſt.) Ergo 6℞ + 20. æquales ſunt 1℞ + 30. Ablata 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 5℞ + 20.& 30. Ablatisque rurſum 20. vtrinque, inter 5℞ & 10. Diuiſis ergo 10. per 5 fiet 1℞ 2. Igitur 6℞ facient 12. numerum quæſitum. Hic enim cum 20. facit 32. & eius $\frac{1}{6}$ nimirum 2. cum 30. facit etiam 32.

25 *Inuenire duos numeros in data proportione, vt tantum fiat, minore detracto ex maiore, quantum maiore diuiſo per minorem.* XXV.

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1℞. & 10℞. Detracto minore 1℞. ex maiore 10℞. ſuperſunt 9℞. Et diuiſo maiore 10℞. per minorem 1℞. fit Quotiens 10. Eſt ergo æquatio inter 9℞ & 10. Et diuiſis 10. per 9. fit 1℞. $1\frac{1}{9}$. ſiue $\frac{10}{9}$. primus numerus. Alter ergo erit $\frac{100}{9}$. ſiue $11\frac{1}{9}$. Nam ſi demantur $1\frac{1}{9}$. ex $11\frac{1}{9}$. remanent 10. Et diuiſis $11\frac{1}{9}$. per $1\frac{1}{9}$. hoc eſt, $\frac{100}{9}$. per $\frac{10}{9}$. fit Quotiens etiam 10.

26 *Inuenire duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero ex eorum multiplicatione inter ſe producto.* XXVI.

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1℞.& 10℞. Summa eorum eſt 11℞. Et ex vno in alterum fit numerus 10ʒ. Eritque æqualitas inter 11℞. & 10ʒ. Diuiſis ergo 11. per 10. fit 1℞. $1\frac{1}{10}$. primus numerus: propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Alter ergo erit 11. Tam enim ſumma eorum, quam numerus ex vno in alterum productus eſt $12\frac{1}{10}$.

27 *Duos numeros inuenire in dato exceſſu, ita vt eorum quadrati datum etiam habeant exceſſum, qui tamen maior ſit quadrato dati exceſſus numerorum.* XXVII.

Sint inueniendi duo numeri, quorum exceſſus 4. quadratorum vero exceſſus 144. qui maior eſt, quam 16. quadratus exceſſus 4. numerorũ dati. Ponatur minor numerus 1℞. ideoq; maior 1℞ + 4. quorum exceſſus 4. Quadrati ſunt 1ʒ. & 1ʒ + 8℞ + 16. Exceſſus eorum 8℞ + 16 qui æqualis debet eſſe numero 144. Ablatis 16. vtrinque, erit æquatio inter 8℞ & 128. Diuiſis ergo 128. per 8. erit 1℞. 16. minor numerus. Maior ergo erit 20. vt exceſſus ſit 4. Quadrati ſunt. 256.& 400. quorum exceſſus 144.

Si datus exceſſus numerorum ſit 1.& quadratorum 31. inuenientur numeri 15.& 16. nimirum duo numeri proximi conficientes datum exceſſum quadratorum. Atque ita quotieſcunque exceſſus numerorum datur 1.& quadratorum numerus quiuis impar, erunt duo numeri quæſiti, duo proximi conficienres datum exceſſum quadratorum.

Quando exceſſus numerorum eſt 5.& quadratorum 30. reperies numeros $\frac{1}{2}$. & $5\frac{1}{2}$.

Si numerorum exceſſus ſit 10. & quadratorum 200. inuenies numeros 5.& 15.

Si exceſſus detur 2. inter numeros, & inter quadratos 22. erunt numeri quæſiti $4\frac{1}{2}$. & $6\frac{1}{2}$.

SCHOLIVM.

HOC problema ſine Algebra ſolui etiam poteſt (quod quidem percommodum interdum erit in numeris Coſſicis) hoc modo. Exceſſus datus quadratorum diuidatur per duplum exceſſus dati numerorum. Nam ſi ex Quotiente dematur ſemiſſis dati exceſſus numerorum, reliquus fiet minor numerus, qui ad datum exceſſum numerorum adiectus faciet numerum maiorem.

Sint enim inueniendi duo numeri, quorum exceſſus 6. & quadratorum exceſſus 1℞. Diuidatur 1℞ per 12. duplum ſcilicet numerum exceſſus 6. dati numerorum. Et ex Quotiente $\frac{1}{12}$℞. dematur numerus 3. ſemiſſis eiuſdem exceſſus 6. numerorum. Nam reliquus numerus $\frac{1}{12}$℞ — 3. erit minor numerus quæſitus: ad quem ſi adiicies datum exceſſum 6. facies $\frac{1}{12}$℞ + 3. maiorem numerum. Exceſſus enim horum duorum numerorum eſt 6. Et quadrati eorundem ſunt $\frac{1}{144}$ʒ — $\frac{1}{2}$℞ + 9. & $\frac{1}{144}$ʒ + $\frac{1}{2}$℞ + 9. quorum exceſſus eſt 1℞.

28 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, quorum maior ad minorem datorum additus, tantum faciat, quantum minor ad maiorem adiectus.* XXVIII.

Sint dati numeri 9,& 30. inueniendique duo numeri in proportione quadrupla, &c. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 4℞. Erit igitur æquatio inter 4℞ + 9.& 1℞ + 30. Ablata 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 3℞ + 9.& 30. Et ablatis 9 vtrinque, inter 3℞.& 21. Diuiſis ergo 21. per 3. fiet 1℞ 7. minor numerus. Maior ergo erit 28. Et tam ex 28.& 9. quam ex 7.& 30. fiunt 37.

XXIX. 29 *Dato numero, alium inuenire, qui in datum ductus tantum faciat, quantum ad eundem additus*

Datus numerus ſit 30. Pone quæſitum eſſe 1℞. qui ductus in 30. facit 30℞. additus vero ad 30. facit 1℞+30. Eritque æquatio inter 30℞.& 1℞+30. Ablata vtrinque 1℞. erit æquatio inter 29℞. & 30. Diuiſis autem 30. per 29. erit 1℞. $\frac{30}{29}$. ſiue 1$\frac{1}{29}$. Additis enim 1$\frac{1}{29}$. ad 30. fiunt 31$\frac{1}{29}$. quantum nimirum fit ex 1$\frac{1}{29}$. in 30.

XXX. 30 *Dato numero, alium inuenire, vt eius pars aliquota data in datum numerum ducta tantum faciat, quantum totus numerus inuentus ad eundem datum numerum additus.*

Sit datus numerus 60.& data pars aliquota numeri inueniendi $\frac{1}{3}$. Ponatur $\frac{1}{3}$. numeri inueniendi 1℞. ac proinde totus numerus 3℞. Ex 1℞. id eſt, ex $\frac{1}{3}$. numeri quæſiti in 60. fit numerus 60℞. At ex 3℞. toto ſcilicet numero quæſito, & 60. fit numerus 3℞+60. Eritque æquatio inter 60℞.& 3℞+60. Ablatiſque 3℞. vtrinque, inter 57℞.& 60. Diuiſis ergo 60. per 57. fiet 1℞. 1$\frac{1}{19}$. tertia pars numeri quæſiti, ac proinde numerus quæſitus 3$\frac{3}{19}$. Nam ex 1$\frac{1}{19}$. id eſt, ex $\frac{1}{3}$. numeri inuenti, in 60. fit numerus 63$\frac{3}{19}$. æqualis ſummæ ex 3$\frac{3}{19}$. & 60. collectæ.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos partiri, ita vt minor ſit maioris pars aliquota data, vel partes aliquotæ datæ, & contineat inſuper datum alium numerum, ſi placet.*

Sit datus numerus 40. diſtribuendus primum in duos, vt minor ſit $\frac{1}{7}$. maioris. Ponatur minor 1℞. eritqee maior 7℞. qui æquales eſſe debent numero dato 40. Eſt igitur æquatio inter 8℞. & 40. Diuiſiſque 40. per 8. prodibit 1℞ 5. minor numerus. maior ergo erit 35. nimirum 7℞. Et manifeſtum eſt, 5. eſſe ſeptimam partem numeri 35.

Sit deinde idem numerus 40. ſecandus in duos, vt minor conſtituat 37. maioris. Ponatur minor 3℞. ideoque maior 7℞. vt ille huius $\frac{3}{7}$. contineat. Summa amborum eſt 10℞. æqualis dato numero 40. Diuiſis ergo 40. per 10. reperietur 1℞. 4 ac proinde cum minor numerus poſitus ſit 3℞. & maior 7℞. erit minor 12. & maior 28. continetque ille $\frac{3}{7}$. huius.

SI datus numerus 84. ſecandus ſit in duos, vt minor maioris contineat $\frac{3}{4}$. & præterea 7. vnitates. ponemus maiorem eſſe 4℞. vt continere poſſit $\frac{3}{4}$. ſine fractione. Eritque minor 3℞+7. Amborum ſumma eſt 7℞+7. æqualis dato numero 84. Ablatis 7. vtrinque, erit æquatio inter 7℞. & 77. Diuiſiſque 77. per 7. exibit 1℞. 11. Cum igitur maiorem poſuerimus 4℞.& minorem 3℞+7. erit maior 44.& minor 40. continetque hic $\frac{3}{4}$. illius, nimirum 33. ac præterea 7.

XXXII. 32 *Duos numeros inuenire, ita vt ſi numerus productus ex eorum multiplicatione diuidatur per eorundem differentiam, Quotiens fiat datus quicunque numerus.*

Inueniendi ſint duo numeri, ita vt numerus ex eorum multiplicatione productus ſi diuidatur per eorum differentiam, Quotientem faciat 30. Ponatur pro minore quilibet numerus minor dato Quotiente 30. nimirum 20.& maior ponatur 20+1℞. vt differentia eorum ſit 1℞. Ex 20. in 20+1℞. fit numerus 400+20℞. quo diuiſo per 1℞. eorum differentiam, fit Quotiens $\frac{400+20℞}{1℞}$. æqualis propoſito numero 30. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æqualitatem inter 30℞. & 400+20℞. Ablatis ergo 20. ℞ vtrobique, æquatio erit inter 10℞.& 400. Diuiſiſque 400. per 10. fiet 1℞. 40. pro differentia numerorum, qui quæruntur. Cum ergo minor ſit 20. erit maior 60. nimirum 20+1℞. Iam vero ex 20. in 60. fit numerus 1200. quo diuiſo per 40. differentiam numerorum, fit Quotiens 30.

XXXIII. 33 *Numerum inuenire, cuius duarum partium datarum quadrati ſummam conficiant, quæ ad aliam partem datam eiuſdem numeri inueniendi proportionem habeat datam quamcunque.*

Sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$.& $\frac{1}{6}$. quadratos efficiant, quorum ſumma partis $\frac{1}{4}$. eiuſdem numeri tripla ſit. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Partes datæ ſunt $\frac{1}{2}$℞. & $\frac{1}{6}$℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ʒ. & $\frac{1}{36}$ʒ. ſummam conficiunt $\frac{10}{36}$ʒ. triplam ad $\frac{1}{4}$℞. hoc eſt, æqualem $\frac{3}{4}$℞. Diuiſis ergo $\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet 1℞ $\frac{108}{40}$. id eſt, $\frac{27}{10}$. numerus quæſitus (propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt.) Huius enim $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ſunt $\frac{27}{20}$. & $\frac{27}{60}$. quarum quadrati $\frac{729}{400}$. & $\frac{729}{3600}$. faciunt ſummam $\frac{7290}{3600}$. quæ tripla eſt ad $\frac{27}{40}$. hoc eſt, ad $\frac{1}{4}$. inuenti numeri $\frac{27}{10}$.

XXXIV. 34 *Numerum inuenire, qui in ſe ductus, & productus numerus in datum quemuis numerum faciat numerum in data proportione ad cubum ex inuento numero procreatum.*

Sit datus numerus 20. inueniendusque ſit alius, qui primum in ſe, deinde productus numerus in datum 20. gignat numerum quintuplum cubi ex inuento numero procreati. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ex 1℞ in ſe fit 1ʒ. Et ex 1ʒ. in 20. fit numerus 20ʒ. Cubus autem 1℞. eſt 1ℭ. ad quem 20ʒ. habere debent quintuplam proportionem. Igitur æquatio eſt inter 20ʒ. & 5ℭ. Diuiſis ergo 20. per 5. fiet 1℞ 4. numerus quæſitus:

quia

quia numeri Coſſici ſunt collaterales. Hic enim numerus 4. ductus in ſe facit 16. Et ex 16. in 20. fit numerus 320. qui quintuplus eſt numeri 64. nimirum cubi ex inuento numero 4. procreati.

35 *Datum numerum in duos diuidere, vt alteruter eorum ductus in alium datum numerum excedat dato numero quolibet numerum productum ex altero numero in quemuis alium datum numerum.* XXXV.

Datus numerus 10. ſecandus ſit primum in duos, vt productus numerus ex primo in 4. ſuperet numerum productum ex ſecundo in 6. vnitate. Ponatur prima pars 1℞. ideoque ſecundæ 10 — 1℞. Ex 1℞. in 4. fiunt 4℞. Et ex 10 — 1℞ in 6. fiunt 60 — 6℞. Debetque hunc productum numerus 4℞. excedere Vnitate. Ac propterea æquatio erit inter 4℞. & 61 — 6.℞. Additisque 6℞ vtrinque, inter 10 ℞. & 61. Diuiſis igitur 61. per 10. fiet 1℞. $\frac{1}{10}$. primus numerus. Secundus ergo erit $3\frac{9}{10}$. Ex primo in 4. fiunt $24\frac{4}{10}$. Et ex ſecundo in 6. fiunt $18\frac{54}{10}$. hoc eſt, $23\frac{4}{10}$. qui numerus vnitate ſuperatur à $24\frac{4}{10}$.

Sit deinde idem numerus datus 10. ſecandus in duas partes, vt ſecunda pars ducta in 4. procreet numerum, qui vnitate ſuperet productũ ex prima parte in 6. Ponatur rurſum prima pars 1℞. & ſecunda 10 — 1℞. Ex 10 — 1℞. in 4. fit numerus 40 — 4℞. Et ex 1℞ in 6. fiunt 6℞. Hunc numerum ille productus ſuperare debet Vnitate. Igitur æquatio erit inter 40 — 4℞. & 6℞ + 1. Ablataque Vnitate vtrinque, inter 39 — 4℞. & 6℞. Additisque 4℞ vtrinque, inter 39. & 10℞. Diuiſis ergo 39. per 10. fiet 1℞. $3\frac{9}{10}$. primus numerus. Secundus igitur erit $6\frac{1}{10}$. Ex $6\frac{1}{10}$. in 4. fit numerus $24\frac{4}{10}$. Et ex $3\frac{9}{10}$. in 6. fiunt $18\frac{54}{10}$. ſiue $23\frac{4}{10}$. Manifeſtum autem eſt, numerum $24\frac{4}{10}$. vnitate ſuperare numerum $23\frac{4}{10}$.

QVOD ſi exceſſus debeat eſſe 20. inter productos numeros: Ponatur primus numerus 1℞. & ſecundus 10 — 1℞. Ex 1℞ in 4. fit numerus 4℞. & ex 10 — 1℞ in 6. fit numerus 60 — 6℞. quem primum ille ſuperare debeat numero 20. Erit igitur æquatio inter 4℞. & 80 — 6℞. Additisque 6℞ vtrinque, inter 10 ℞. & 80. Diuiſis ergo 80. per 10. fiet 1℞. 8. primus numerus. Secundus ergo erit 2. Perſpicuum autem eſt, numerum 32. qui fit ex primo 8. in 4. ſuperare numerum 12. qui fit ex ſecundo 2. in 6. numero 20.

SED iam numerus 40 — 4℞. factus ex ſecundo 10 — 1℞. in 4. ſuperare debeat numero 20. numerum 6℞. factum ex primo 1℞. in 6. Erit ergo æquatio inter 40 — 4℞. & 6℞ + 20. Additisque 4℞. vtrinque, inter 40. & 10℞ + 20. Ablatiſque vtrinque 20. inter 20. & 10 ℞. Diuiſis igitur 20. per 10. fiet 1℞ 2. primus numerus. Secundus ergo erit 8. Et certum eſt, numerum 32. ex ſecundo 8. in 4. factum, ſuperare numerum 12. factum ex primo 2. in 6. numero 20.

36 *Datum numerum partiri in duas partes, quæ cum ipſo progreſſionem Arithmeticam conſtituant.* XXXVI.

Datus numerus 20. diuidendus ſit in duos, qui cum eodem numero 20. conſtituant tres numeros Arithmetice proportionales. Sit minor pars 1℞. & maior 20 — 1℞. Vt igitur 1℞. 20 — 1℞. 20. ſint Arithmetice proportionales, erit idem exceſſus inter 1℞. & 20 — 1℞. qui inter 20 — 1℞. & 20. Sunt autem exceſſus 20 — 2℞. & 1℞. vt in hiſce formulis ſubtractionum patet. Ergo æquatio erit inter 20 — 2℞. & 1℞. Et additis 2℞ vtrinque, inter 20. & 3℞. Diuiſis ergo 20. per 3. fiet 1℞. $6\frac{2}{3}$. prima pars. Altera ergo erit $13\frac{1}{3}$. Conſtituuntque $6\frac{2}{3}$. $13\frac{1}{3}$. & 20. progreſſionem Arithmeticam, cum eundem exceſſum habeant $6\frac{2}{3}$.

20	—	1℞	20	+	0
	+	1℞	20	—	1℞
20	—	2℞	0	+	1℞

Aliter. Si 1℞. 20 — 1℞. 20. ſunt Arithmetice proportionales; erit (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) ſumma primi & tertij, nimirum 1℞ + 20. æqualis duplo medij, nimirum 40 — 2℞. Additis ergo 2℞ vtrinque, exiſtet æquatio inter 3℞ + 20. & 40. Ablatiſque 20. vtrinque, inter 3℞. & 20. Ergo rurſus 1℞ erit $6\frac{2}{3}$. vt prius.

37 *Inuenire duos numeros, qui inter ſe multiplicati faciant numerum, qui ad minorem habeat datam proportionem, & ad maiorem quoque proportionem datam, ſed illa minorem.* XXXVII

Proportio producti ad minorem ſit decupla, & ad maiorem ſeſquialtera. Ponatur productus 30℞. (Numerus enim 30℞ ad 3℞. habet proportionem decuplam, & ad 20 ℞. ſeſquialteram.) Erit minor numerus 3℞. & maior 20℞. qui inter ſe multiplicati debent facere 30℞. Faciunt autem 60ʒ. Eſt ergo æquatio inter 30℞. & 60ʒ. Diuiſiſque 30. per 60. exibit 1℞ $\frac{1}{2}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Ergo minor numerus, quem poſuimus 3℞. erit $1\frac{1}{2}$. Maior autem, qui poſitus eſt 20℞. erit 10. Atque ex $1\frac{1}{2}$. hoc eſt, ex 3. in 10. fit numerus $\frac{30}{2}$. ſiue 15. qui ad $1\frac{1}{2}$. vel ad $\frac{3}{2}$. habet proportionem decuplam, & ad 10. ſeſquialteram.

SCHOLIVM.

Hoc ænigma ſine Algebra ſoluatur, ſi pro numeris quæſitis accipiantur denominatores proportionum datarum: vt ſi inueniendi ſint duo numeri, qui inter ſe multiplicati producant numerum, qui ad minorem habeat proportionem ſeptuplam, & ad maiorem ſextuplam: erunt duo numeri 7. & 6. Hi enim inter ſe multiplicati faciunt 42. numerum, qui ad 6. proportionem habet ſeptuplam, & ad 7. ſextuplam, vt patet.

XXXVIII 38 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales diuidere, quarum differentia data ſit: quando id fieri poteſt.*

Datus numerus 120. diuidendus ſit in ſex partes, quæ ordine ſeſe excedant binario. Ponatur prima pars 1℞. Erit ſecunda 1℞+2. Tertia 1℞+4. Quarta 1℞+6. Quinta 1℞+8. & ſexta 1℞+10. quæ omnes ſimul faciunt ſummam 6℞+30. æqualem dato numero 120. Ablatis ergo 30. vtrinque, erit æquatio inter 6℞ & 90. Diuiſiſque 90. per 6. fiet 1℞. 15. prima pars. Sunt ergo ſex partes, 15. 17. 19. 21. 23. 25. quæ binario ſe excedunt, & ſummam faciunt 120.

DEBET autem datus numerus maior eſſe ſumma terminórum totidem Arithmeticæ progreſſionis, vno minus, in quot partes datus numerus iubetur diſtribui; quæ quidem à dato exceſſu incipiat. Vt in dato exemplo, maior quam ſumma 30. quinque terminorum 2. 4. 6. 8. 10. Alias res non ſuccedet, quia incideremus in æquationem inter duos numeros omnino inæquales. Atque idcirco diximus in ænigmate, [quando id fieri poteſt.]

XXXIX. 39 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales partiri, quarum prima data ſit: quando id fieri poteſt.*

Sit datus numerus 60. diuidendus in 11. partes Arithmeticam progreſſionem conſtituentes, cuius primus terminus ſit 5. Pone differentiam progreſſionis 1℞. Erunt ergo 11. termini hi. 5. 5+1℞. 5+2℞. 5+3℞. 5+4℞. 5+5℞. 5+6℞. 5+7℞. 5+8℞. 5+9℞. 5+10℞. quorum ſumma 55℞+55. æqualis eſſe debet dato numero 60. Ablatis ergo vtrinque 55. erit æquatio inter 55℞. & 5. Diuiſiſque 5. per 55. fiet 1℞. $\frac{1}{11}$. differentia progreſſionis. Erunt ergo 11. partes quæſitæ hæ. 5. $5\frac{1}{11}$. $5\frac{2}{11}$. $5\frac{3}{11}$. $5\frac{4}{11}$. $5\frac{5}{11}$. $5\frac{6}{11}$. $5\frac{7}{11}$. $5\frac{8}{11}$. $5\frac{9}{11}$. $5\frac{10}{11}$. quæ omnes ſimul faciunt 60.

DEBET autem datus numerus maior eſſe numero, qui fit ex numero terminorum in primum terminum datum. Vt in dato exemplo maior, quam 55. qui numerus fit ex numero terminorum, videlicet ex 11. in primum terminum 5. Hanc ob cauſam dictum eſt in ænigmate [quando id fieri poteſt.]

XL. 40 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in maiorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero ſuperet productum ex minore in minorem.*

DATI numeri ſint 5. & 9. oporteatque inuenire duos alios in proportione tripla, quorum maior ductus in 9. faciat numerum, qui ſuperet productum ex minore in 5. numero 110. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 3℞. Ex 3℞. in 9. fiunt 27℞. & ex 1℞. in 5. fiunt 5℞. Superat autem numerus 27℞. numerum 5℞. numero 22℞. qui æqualis debet eſſe numero 110. Diuiſis ergo 110. per 22. fiet 1℞5. primus numerus: ideoque maior erit 15. Ex 15. in 9. fit numerus 135. qui ſuperat 25. numerum ex 5. in 5. factum numero 110.

XLI. 41 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione: vt productus ex maiore horum in minorem illorum ſuperet dato numero eum, qui ex minore in maiorem fit. Vel certe hic productus illum dato numero excedat.*

Sint dati numeri 5. & 9. oporteatque duos alios inuenire in dupla proportione, quorum maior ductus in 5. producat numerum, qui 10. vnitatibus ſuperet productum ex minore in 9. Ponatur minor 1℞. ac propterea maior 2℞. (Debet autem hic maior in minorē datum producere numerum maiorem eo, qui ex minore in datum maiorem fit, vt nimirum ille hunc ſuperare poſſit. Vnde ſi dati numeri forent 2. & 9. quæſtio eſſet impoſſibilis; quippe cum ex 2℞. in 2. fiat numerus 4℞. minor numero 9℞. qui fit ex 1℞. in 9.) Ex 2℞ in 5. fit numerus 10℞. Et ex 1℞. in 9. fit numerus 9℞. quem ille ſuperat 1℞. Eſt igitur æquatio inter 1℞. & 10. Diuiſiſque 10. per 1. fit 1℞. 10. minor numerus, ac proinde maior erit 20. Vides ergo numerum 100. factum ex 20. in 5. ſuperare 90. numerum ex 10. in 9. factum 10. vnitatibus.

XLII. 42 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt ſumma quadratorum ex ipſis deſcriptorum ad eorum ſummam habeat datam proportionem.*

Sint inueniendi duo numeri in quintupla proportione, ita vt ſumma quadratorũ ex ipſis deſcriptorum, ad inuentorum numerorum ſummam habeat proportionem decuplam. Ponatur minor numerus 1℞. ideoq; maior 5℞. quadrati ſunt 1ʒ. & 25ʒ. eorumq; ſumma 26ʒ. decupla ſummæ eorum, quæ eſt 6℞. Erit ergo æquatio inter 26ʒ. & 60℞. Diuiſis autem 60. per 26. fiet 1℞. $2\frac{4}{13}$. ſiue $\frac{30}{13}$. minor numerus, (quod numeri Coſſici collaterales ſint.) atque adeo maior $\frac{150}{13}$. ſiue $11\frac{7}{13}$. Quadrati ſunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. quorum ſumma $\frac{23400}{169}$. decupla eſt ad $\frac{180}{13}$. ſummam inuentorum numerorum.

IISDEM poſitis, ſi proportio inuenienda ſit æqualitatis. erit æquatio inter 26ʒ. & 6℞. Diuiſis ergo 6. per 26. fiet 1℞. $\frac{3}{13}$. minor numerus. (quia Coſſici numeri ſunt collaterales.) Maior autem erit $\frac{15}{13}$. Quadrati ſunt $\frac{9}{169}$. & $\frac{225}{169}$. eorumque ſumma $\frac{234}{169}$. æqualis ſummæ $\frac{18}{13}$. ex inuentis numeris collectæ.

Et ſi proportio inuenienda ſit minoris inæqualitatis, vt ſubdupla, erit numerus 26ʒ. ſubduplus numeri 6℞, hoc eſt, hic illius erit duplus. Igitur erit æquatio inter 52ʒ. & 6℞. Vel inter 26ʒ. & 3℞. Diuiſiſque 6. per 52. vel 3. per 26. fiet 1℞. $\frac{3}{26}$. minor numerus. Maior ergo erit $\frac{15}{26}$. Quadrati ſunt $\frac{9}{676}$. & $\frac{225}{676}$. eorumque ſumma $\frac{234}{676}$. ſubdupla ſummæ $\frac{18}{26}$. ex inuentis numeris collectæ: quippe cum hæc illius ſit dupla.

43 Datis

43 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt maior horum ad maiorem datorum additus faciat numerum in data quacunque proportione ad ſummam ex minoribus collectam. dummodo hæc ſecunda proportio data ſit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam.* XLIII.

Sint dati numeri 10. & 12. oporteatque inuenire alios duos in proportione quintupla, vt ſumma ex maiore, & 12. tripla ſit ad ſummam ex minore, & 10. Eſt autem proportio tripla inter proportionem 12. ad 10. & proportionem quintuplam, hoc eſt, maior quam illa, & minor, quam hæc. Ponatur minor numerus 1℞ ideoq; maior 5℞ Ex 5℞. & 12. fit numerus 5℞ + 12. Et ex 1℞. & 10. numerus 1℞ + 10. cuius ille triplus eſſe debet. Ergo æquatio erit inter 5℞ + 12. & 3℞ + 30. Ablatiſque vtrinque 12. inter 5℞. & 3℞ + 18. Et rurſum ablatis 3℞. vtrinque, inter 2℞. & 18. Diuiſis igitur 18. per 2. fiet 1℞. 9. minor numerus, ideoq; maior 45. Ex 45. & 12. fit numerus 57. qui triplus eſt ad numerum ex 9. & 10. collectum, nimirum ad 19.

44 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt ſubtracto minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex minore, proportionem habeat datam quamcunque.* XLIIII.

Sint dati duo numeri 60. & 100. oporteatque alios duos inuenire in proportione quintupla, vt minore ex 100. ſubtracto, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex 60. proportionem habeat vigecuplam. Ponantur duo numeri in proportione quintupla, 1℞. 5℞. Dempta 1℞. ex 100. reliquus numerus eſt 100 — 1℞. Demptis autem 5℞ ex 60. remanent 60 — 5℞. eritque numerus 100 — 1℞. ad 60 — 5℞. vigecuplus: h. e. æquatio erit inter 100 — 1℞ & 1200 — 100℞. Additis 100℞. vtrinq;, erit æqualitas inter 100 + 99℞. & 1200. Ablatiſq; 100. vtrinq; inter 99℞. & 1100. Diuiſis ergo 1100. per 99. fiet 1℞. $11\frac{11}{99}$. vel $\frac{1100}{99}$. minor numerus, ac proinde maior $\frac{5500}{99}$. vel $55\frac{55}{99}$. Prior ex 100. detractus relinquit $88\frac{88}{99}$. poſterior vero ex 60. ſubtractus relinquit $4\frac{44}{99}$. Habentque $88\frac{88}{99}$. hoc eſt $\frac{8800}{99}$, ad $4\frac{44}{99}$. ſiue ad $\frac{440}{99}$. proportionem eandem quam 20. ad 1.

45 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, vt maiore ex maiore detracto, & minore ex minore, numeri remaneant æquales: debet autem proportio data eſſe maior proportione datorum numerorum.* XLV.

Sint dati duo numeri 100. & 60. oporteatque inuenire alios duos in ſeptupla proportione, vt maiore detracto ex 100. & minore ex 60. numeri reliqui ſint æquales. Ponantur numeri in proportione ſeptupla, 1℞. 7℞. eruntq; reliqui numeri 100 — 7℞. & 60 — 1℞. æquales, Additis ergo vtrinq; 7℞ erit æquatio inter 100. & 60 + 6℞. Et ablatis 60. vtrinque, inter 40 & 6℞. Diuiſis autem 40. per 6. erit 1℞. $6\frac{2}{3}$. minor numerus, maior autem huius ſeptuplus, $46\frac{2}{3}$. Ablato illo ex 60. & hoc ex 100. reliqui fiunt numeri æquales $53\frac{1}{3}$.

46 *Tres numeros in data proportione Geometrica continua inuenire, vt productus ex multiplicatione, quorumcunque duorum inter ſe, æqualis ſit reliquo, vel ad ipſum habeat quamlibet proportionem datam.* XLVI.

Sint inueniendi tres numeri in proportione tripla, ſitque primum productus ex minimo in medium, maximo æqualis. Ponantur tres numeri tripli, 1℞. 3℞. 9℞. Ex 1℞. in 3℞. fit numerus 3ʓ. æqualis 9℞. Diuiſis ergo 9. per 3: fiet 1℞. 3. quia numeri Coſſici collaterales ſunt. Tres ergo numeri quæſiti ſunt 3. 9. 27. Atque ex 3. in 9. fit numerus 27. maximo 27. æqualis.

Sit deinde productus ad maximum quadruplus, ita vt productus 3ʓ. ad 9℞. proportionem habeat quadruplam, hoc eſt, æquatio ſit inter 3ʓ. & 36℞. Diuiſis ergo 36. per 3. fiet 1℞. 12. eruntque tres numeri tripli, 12. 36. 108. Et ex 12. in 36. fit numerus 432. ad 108. quadruplus.

Sit rurſum productus ad maximum ſubduplus, ita vt productus 3ʓ. ad 9℞. proportionem habeat ſubduplam: hoc eſt, æquatio fiat inter 6ʓ. & 9℞. Diuiſis ergo 9. per 6. fiet 1℞ $\frac{3}{2}$. ſunt ergo tres numeri tripli $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{27}{2}$. Et ex $\frac{3}{2}$. in $\frac{9}{2}$. fit numerus $\frac{27}{4}$. ſubduplus ad $\frac{27}{2}$.

IAM vero ex ſecundo 3℞. in tertium 9℞. fiat numerus 27ʓ. qui æqualis debeat eſſe primo nimirum 1℞. Diuiſa 1. per 27. fit 1℞. $\frac{1}{27}$. Tres ergo numeri tripli ſunt $\frac{1}{27}$. $\frac{3}{27}$. $\frac{9}{27}$. Et ex $\frac{3}{27}$. in $\frac{9}{27}$. fit numerus $\frac{27}{729}$. æqualis primo $\frac{1}{27}$.

At ſi productus 27ʓ. ex ſecundo in tertium debeat ad primum 1℞. habere proportionem triplam, erit æqualitas inter 27ʓ & 3℞. Diuiſis ergo 3. per 27. fiet 1℞. $\frac{1}{9}$. eruntque tres numeri tripli $\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$. $\frac{9}{9}$. Et ex $\frac{3}{9}$ in $\frac{9}{9}$. hoc eſt, ex $\frac{1}{3}$. in 1. fit $\frac{1}{3}$. qui numerus triplus eſt primi $\frac{1}{9}$.

POSREMO ex primo 1℞. in tertium 9℞ produci debeat numerus æqualis ſecundo 3℞. hoc eſt, æquatio eſſe debeat inter 9ʓ. qui numerus fit ex primo in tertium. & 3℞ Diuiſis ergo 3. per 9. fiet 1℞ $\frac{1}{3}$. Eruntque tres numeri tripli $\frac{1}{3}$. 1. 3. Et ex primo $\frac{1}{3}$. in tertium 3. fit 1. æqualis ſecundo 1.

Si vero productus ex primo 1℞. in tertium 9℞. id eſt, 9ʓ. debeat habere ad ſecundum 3℞. proportionem ſextuplam, erit æquatio inter 9ʓ & 18℞. Diuiſis ergo 18. per 9. fiet 1℞. 2. Eruntque tres numeri tripli, 2. 6. 18. Atque ex 2. in 18. fit numerus 36. ſextuplus ſecundi numeri 6.

47 *Datum numerum partiri in duas partes: vt maiore diuiſa per minorem, Quotiens ſit datus idem numerus.* XKVII.

Sit datus numerus 40. & datus Quotiens itē 40. Ponatur minor pars 1℞. & maior 40. — 1℞ Hac per illā

diuiſa,fit quotiens $\frac{40-1℞}{1℞}$.æqualis 40.quę æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 40 — 1℞.& 40 ℞. Additaque 1.℞ vtrinque, erit æquatio inter 40.& 41 ℞. Diuiſis ergo 40.per 41.fiet 1℞.$\frac{40}{41}$.minor pars.Maior proinde erit 39$\frac{1}{41}$. Qua per illam diuiſa,fit Quotiens 40.

Si maior pars ponatur 1℞.& minor 40 — 1℞. Diuiſa illa per hanc,fit Quotiens $\frac{1℞}{40-1℞}$.æqualis 40.quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1℞.& 1600 — 40℞. Additiſque 40 ℞ vtrinque , inter 41℞.& 1600. Diuiſis igitur 1600. per 41. fit maior pars 39$\frac{1}{41}$. ac proinde minor $\frac{40}{41}$. vt prius.

XLVII. 48 *Duos numeros inuenire, vt primus cum quolibet multiplici ſecundi faciat numerum æqualem ei, qui conflatur ex ſecundo & quouis multiplici primi. Vel vt primus cum data parte ſecundi tantum faciat, quantum ſecundus cum data parte primi. Vel denique, vt ſi primus ſumat multiplicem quemcunque ſecundi, & ſecundus quemlibet multiplicem primi: Aut ſi primus accipiat partem datam ſecundi, & ſecundus datam partem primi; fiant duo numeri in data quauis proportione.*

Debeat primus cum triplo ſecundi facere tantum; quantum ſecundus cum quintuplo primi. Ponatur primus 1℞.& ſecundus quiuis numerus,videlicet 50. Ergo 1℞ + 150.& 50 + 5℞.æquales ſunt.Ablataq; 1℞ vtrinque, erit æquatio inter 150.& 50.+ 4℞.Et rurſum ablatis 50.vtrinq;,inter 100.& 4℞.Diuiſis igitur 100. per 4.fiet 1 ℞.25.Numeri ergo quæſiti ſunt 25.& 50.Nam primus 25 cum triplo ſecundi, hoc eſt, cum 150.facit 175.quantum ſecundus 50.cum quintuplo primi,id eſt,cum 125.

DEBEAT deinde primus cum $\frac{1}{7}$. ſecundi, & ſecundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere vnum eundemque numerum.Ponatur primus 3℞.vt habeat $\frac{1}{3}$.ſine fractione:Secundus autem quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$ ſine fractione,nimirum 21.Primus igitur cum $\frac{1}{7}$.ſecundi faciet 3℞+3.Secundus vero cum $\frac{1}{3}$.primi faciet 21 + 1℞. Eſt ergo æquatio inter 3℞+3.& 21+1℞. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 2℞+3.& 21. Ablatiſque rurſum 3. vtrinque inter 2℞.& 18. Diuiſis ergo 18.per 2.fiet 1℞ 9. Primus igitur poſitus 3℞.erit 27.& ſecundus 21.vt poſuimus.Nam & 27.cum $\frac{1}{7}$ numeri 21.& 21.cum $\frac{1}{3}$. numeri 27.facit 30.

SED iam primus cum quadruplo ſecundi, & ſecundus cum triplo primi facere debeant duos numeros in proportione dupla.Ponatur primus 1℞.& ſecundus quiuis numerus, videlicet 6. Primus igitur cum quadruplo ſecundi faciet 1℞+24.Secundus vero cum triplo primi faciet 6+3℞.Si ergo ſtatues 1℞+24.maiorem,qui duplus debet eſſe ad 6+3℞.erit æquatio inter 1℞+24.& 12 + 6℞. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 24.& 12+5℞. Ablatiſque rurſum 12. vtrinque inter 12. & 5℞. Diuiſis igitur 12.per 5.fiet 1℞.$\frac{12}{5}$.id eſt, 2$\frac{2}{5}$.primus numerus:ſecundus vero erit 6.vt poſitum fuit.Iam primus cum quadruplo ſecundi facit 26$\frac{2}{5}$.ſecundus autem cum triplo primi facit $\frac{66}{5}$.id eſt,13$\frac{1}{5}$.habetque numerus 26$\frac{2}{5}$.ad 13$\frac{1}{5}$.proportionem duplam.

Si vero ſtatues 6+3℞ maiorem, qui ad 1℞+24.duplus debet eſſe, erit æquatio inter 6+3℞.& 2℞+48.Et ablatis 2℞ vtrinque,inter 6+1℞ & 48.ablatiſq; rurſum 6.vtrinque,inter 1℞.& 42.fietque 1℞ 42. primus numerus, ſecundus autem erit 6.vt poſuimus. Primus cum quadruplo ſecundi facit 66.at vero ſecundus cum triplo primi facit 132.qui numerus ad 66.proportionem habet duplam.

DENIQVE primus cum $\frac{1}{7}$.ſecundi,& ſecundus cum $\frac{1}{3}$ primi facere debeant duos numeros in ſextupla proportione. Ponatur primus 3℞.vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione, & ſecundus quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. ſine fractione,nimirum 7.Primus ergo cum $\frac{1}{7}$.ſecundi faciet 3℞+1. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$.primi faciet 7+1℞. Et quia hi duo numeri debent habere proportionem ſextuplam,erit neceſſario 7+1℞ maior.Nam ſi ducatur in 6.vt fiat æqualis numero 3℞+1.producetur numerus 42+6℞.qui numero 3℞+1.æqualis eſſe nequit. Igitur æquatio erit inter 18℞+6.&7+1℞1.Ablataq; 1℞ vtrinque,inter 17.℞+6.&7.Ablatiſq; rurſum 6. vtrinq, inter 17℞.& 1.Diuiſa igitur 1.per 17..fiet 1℞1.$\frac{1}{17}$.Et quia primus numerus poſitus fuit 3℞.erit primus numerus $\frac{3}{17}$.& ſecundus 7.vt poſitus fuit.Primus cum $\frac{1}{7}$ ſecundi facit 1$\frac{3}{17}$.id eſt,$\frac{20}{17}$.Secundus cum $\frac{1}{3}$ primi facit 7$\frac{1}{17}$.hoc eſt, $\frac{120}{17}$. qui numerus ad $\frac{20}{17}$. proportionem habet ſextuplam.

XLIX. 49 *Datum numerum diſtribuere in quotuis partes in data proportione Geometrica continua.*

Sit datus numerus 4665.ſecandus in 5.numeros continue ſextuplos. Pone 5. numeros in ſextupla proportione.1℞.6℞.36℞.216℞.1296℞.Horum ſumma 1555℞.æqualis eſſe debet dato numero 4665.diuiſis ergo 4665. per 1555.fiet 1℞ 3.eruntque quinque numeri in proportione ſextupla continua.3.18.108.648. 3888. qui ſimul additi faciunt 4665.

Si ſecandus ſit numerus 20.in tales quinque partes, inuenies 1555℞. æquales 20. Diuiſiſque 20. per 1555.fiet 1℞.$\frac{4}{311}$. Eruntque quinque partes in proportione ſextupla.$\frac{4}{311}$.$\frac{24}{311}$.$\frac{144}{311}$.$\frac{864}{311}$.$\frac{5184}{311}$. facientes ſummam 20.

L. 50 *Inuenire quotuis numeros in data proportione Geometrica continua,quorum ſumma dato cuicunque numero ſit æqualis.*

Sint inueniendi 5.numeri in proportione continua ſextupla,facientes 4665.vel 20. Hoc ænigma à proxime præcedenti non differt. Nam ſi ſumma data ſecetur in 5.numeros in ſextupla proportione continua, factum erit, quod iubetur.

51 Datum

51 *Datum numerum in tres numeros partiri, vt minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam.* LI.

Sit datus numerus 445. & minorum differentia 10. & maiorum 20. Ponatur minimus numerus 1℞. eritque medius 1℞ + 10, ac maximus 1℞ + 30. Horum ſumma 3℞ + 40. æqualis eſſe debet dato numero 445. Ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3℞. & 405. Diuiſis igitur 405. per 3. inuenietur 1℞. 135 minimus numerus. atque idcirco medius erit 145. & maximus 165. qui ænigmati ſatisfaciunt, quod ſummam conficiant 445.

Si datus numerus ſit 200. erunt 3℞ + 40. æquales 200. & ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3℞. & 160. Diuiſiſque 160. per 3. erit 1℞. $53\frac{1}{3}$. primus numerus, ſecundus erit $63.\frac{1}{3}$. & tertius $83\frac{1}{3}$. qui habent datos exceſſus, & conficiunt 200.

Aliter. Ponatur medius 1℞. eritque minimus 1℞ — 10. & maximus 1℞ + 20. quorum ſumma 3℞ + 10. æqualis eſſe debet dato numero 445. vel 200. Ablatis 10. vtrinque, erit æquatio inter 3℞. & 435. vel 190. Facta diuiſione, erit 1℞. 145. vel $63\frac{1}{3}$. primus numerus. Ergo in primo exemplo erunt tres numeri 135. 145. 165. In ſecundo autem, $53\frac{1}{3}$. $63\frac{1}{3}$. $83\frac{1}{3}$. vt prius.

52 *Tres numeros inuenire, vt minorum differentia ſit data: Item maiorum differentia alia data: Et omnes tres datum numerum conficiant.* LII.

Sit minorum differentia 10. & maiorum 20. eorumque ſumma 445. vel 200. Hoc etiam problema non differt à proxime antecedenti. Si namque data ſumma diſtribuatur in tres partes datorum exceſſuum, factum erit, quod præcipitur.

53 *Datum numerum partiri in tres, vt vteruis extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam.* LIII.

Sit primum diuidendus datus numerus 100. in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem triplam: tertius vero cum medio ad primum quadruplam. Ponatur primus 1℞. Eruntque alij duo ſimul 4℞. vt ad primum poſſint habere proportionem quadruplam. Horum ergo ſumma 5℞. æqualis eſſe debet dato numero 100 Diuiſis igitur 100. per 5 fiet 1℞. 20. primus numerus, ideoque alij duo ſimul, 80. Ponatur deinde tertius 1℞. ideoq; medius 80 — 1℞. Igitur primus 20. cum medio 80 — 1℞. hoc eſt, 100 — 1℞. ad tertium 1℞. triplus eſt, atque idcirco æquatio erit inter 100 — 1℞. & 3℞. Additaque vtrinque 1℞. inter 100. & 4. ℞. Diuiſiſque 100. per 4. fiet 1℞. 25. tertius numerus. Medius ergo erit 55. qui relinquitur, detracto tertio 25. ex 80. Tres propterea numeri erunt 20. 55. 25. qui ſimul efficiunt 100. & primus cum medio efficit 75. numerum triplum ad tertium 25. At tertius cum medio facit 80. numerum quadruplum ad primum 20.

Si datus ſit numerus 60. ſecandus in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem noncuplam, ſed tertius cum medio ad primum, quadruplam, procedemus eodem modo. Nam ſi primus ponatur 1℞. erunt alij duo ſimul, 4℞. atque idcirco 5℞. æquales 60. dato numero. Diuiſis ergo 60. per 5. fiet 1℞. 12. primus numerus; ideoque alij duo facient 48. Rurſum ſi tertius ponatur 1℞. facient alij duo ſimul 9℞, vt ad tertium habere poſſint proportionem noncuplam. Igitur 10℞. æquales erunt dato numero 60. Diuiſiſque 60. per 10. fiet 1℞. 6. tertius numerus. Medius autem erit 42. qui relinquitur, ſi tertius 6. ex 48. dematur. Quocirca tres numeri quæſiti erunt 12. 42. 6. qui ſimul conficiunt 60. Et primus cum medio facit numerum 54. qui ad tertium 6. noncuplus eſt. Tertius vero cum ſecundo facit 48. qui numerus ad primum 12. quadruplus eſt.

Sit deinde idem numerus 100. diſtribuendus in tres, vt tam primus cum ſecundo ad tertium, quam tertius cum ſecundo ad primum habeat proportionem triplam. Ponatur primus 1℞. & ſecundus, ac tertius 3℞. vt ad primum habeant proportionem triplam. Horum ſumma 4℞. æqualis eſt 100. Diuiſis igitur 100. per 4. fiet 1℞. 25. primus numerus; ideoque ſecundus, ac tertius facient 75. Ponatur deinde tertius 1℞, ideoque ſecundus 75 — 1℞. Igitur primus cum ſecundo faciet ſummam 100 — 1℞. triplam ad tertium, id eſt, ad 1℞. ſiue æqualem 3℞. Addita 1℞. vtrobique, erit æqualitas inter 100. & 4℞. Diuiſis igitur 100. per 4. fiet 1℞. 25. tertius numerus, ac proinde ſecundus erit 50. nimirum 75 — 1℞. Itaque tres numeri erunt 25. 50. 25. Et tam ſumma primi, & ſecundi ad tertium, quam ſumma tertij ac ſecundi ad primum, proportionem habet triplam.

Si vtraque proportio deberet eſſe quadrupla, reperirentur tres numeri 20. 60. 20.

54 *Inuenire tres numeros, ita vt primus cum ſecundo proportionem ad tertium habeat datam. Item tertius cum ſecundo ad primum datam proportionem habeat: Omneſque tres conficiant ſummam datam.* LIIII.

HOC ænigma à præcedenti diuerſum non eſt. Nam ſi data ſumma diuidatur in tres numeros, vt iubetur, expeditum erit ænigma, non aliter, ac præcedens.

55 *Numerum inuenire, ita vt quadratus ex parte eius aliquota data deſcriptus, & quadratus alterius cuiuſuis partis eius aliquotæ, conficiant ipſum numerum, vel alium qui ad inuentum numerum proportionem habeat datam.* LV.

INVENIENDVS ſit numerus, ita vt quadratus ex eius ſemiſſe deſcriptus, & quadratus ex eiuſdem parte ſexta deſcriptus, efficiant ipſum numerum, vel alium, qui ad inuentum proportionem habeat octuplam ſupertripartientem quartas. Ponatur numerus eſſe 6 ℞.

vt ſine

vt ſine fractione habeat partes expreſſas. Eius ſemiſſis eſt 3℞. & ſexta pars 1℞. Harum partium quadrati ſunt 9ʓ & 1ʓ. qui faciunt 10ʓ. numerum æqualem 6℞. Diuiſis ergo 6. per 10. fiet 1℞. $\frac{3}{5}$ (quod numeri Coſſici collaterales ſint,) ac proinde 6℞. erunt $\frac{18}{5}$. numerus quæſitus. Semiſſis eius $\frac{9}{5}$. facit quadratum $\frac{81}{25}$. Et eius ſexta pars $\frac{3}{5}$ facit quadratum $\frac{9}{25}$. qui cum $\frac{81}{25}$. facit $\frac{90}{25}$. id eſt, $\frac{18}{5}$. numerum quæſitum.

SED iam duo quadrati facere debeant numerum, qui ad inuentum numerum habeat proportionem octuplam ſupertripartientē quartas. Ponatur numerus eſſe 1℞. Eius ſemiſſis eſt $\frac{1}{2}$. ℞ & ſexta pars $\frac{1}{6}$ ℞. Quadrati harum partium ſunt $\frac{1}{4}$ ʓ. & $\frac{1}{36}$ ʓ. qui ſimul faciunt $\frac{10}{36}$ ʓ. qui numerus ad 1℞. habere debet proportionem octuplam ſupertripartientem quartas, cuius videlicet denominator eſt $8\frac{3}{4}$. Hic autem ductus in 1℞. facit $8\frac{3}{4}$ ℞. cui numero æqualis eſſe debet numerus $\frac{10}{36}$ ʓ. Diuiſis ergo $8\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet 1℞. $31\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{63}{2}$. numerus inuentus (quod numeri Coſſici collaterales ſint.) eius enim ſemiſſis $\frac{63}{4}$. facit quadratum $\frac{3969}{16}$. Et eiuſdem ſexta pars $\frac{63}{12}$. facit quadratum $\frac{3969}{144}$. qui cum priori quadrato $\frac{3969}{16}$. id eſt, cum $\frac{35721}{144}$. facit numerum $\frac{39690}{144}$. qui ad inuentum $\frac{63}{2}$ proportionem habet octuplam ſupertripartientem quartas. quippe cum ille per hunc diuiſus Quotientem faciat $8\frac{3}{4}$.

LVI. 56 *Datum numerum partiri in duos, vt data pars primi cum ſecundo tantum faciat, quantum ſecundi pars alia data cum primo efficit.*

Numerus datus 44. ſecandus ſit in duos, vt $\frac{1}{5}$. primi cum ſecundo, & $\frac{1}{3}$. ſecundi cum primo, faciant duos numeros æquales. Ponatur primus 1℞. ideoque ſecundus 44−1℞. Quinta pars primi, nimirum $\frac{1}{5}$ ℞. cum ſecundo facit 44−$\frac{4}{5}$℞. Et tertia pars ſecundi. nimirum $\frac{44-1℞}{3}$ cum primo facit 1℞+$\frac{44-1℞}{3}$. Eſt ergo æquatio inter 44−$\frac{4}{5}$℞. & 1℞+$\frac{44-1℞}{3}$. Ablata 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 44−$\frac{9}{5}$℞ & $\frac{44-1℞}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem (ſuppoſita 1. priori numero, vt fiat hæc fractio $\frac{44-\frac{9}{5}℞}{1}$) reducetur ad æqualitatē inter 132−$\frac{27}{5}$℞. & 44−1℞. Et additis $\frac{27}{5}$℞. vtrinq; inter 132. & 44+$\frac{22}{5}$℞. Ablatiſq; 44. vtrinque inter 88 & $\frac{22}{5}$℞. Diuiſis igitur 88. per $\frac{22}{5}$. fiet 1℞. 20. primus numerus. Secundus vero erit 24. Vbi vides quintam partem primi, nimirum 4. cum ſecundo facere 28. quantum ſcilicet facit tertia pars ſecundi, nimirum 8. cum primo.

LVII. 57 *Duos numeros inuenire, ita vt primus, accepto quolibet numero à ſecundo, faciat numerum, qui ad reliquum ſecundi proportionem habeat datam. Item ſecundus, accepto quolibet etiam numero à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam.*

SINT inueniendi duo numeri, vt primus accipiens 40. à ſecundo faciat numerum reliqui ſecundi quadruplum. At ſecundus accipiens 30. à primo faciat numerum reſidui primi noncuplum. Ponatur primus 1℞ Si igitur accipiat 40. à ſecundo, habebit 1℞+40. ac proinde ſecundo remanent $\frac{1}{4}$. ℞+10. vt nimirum ille ad hunc proportionem habeat quadruplam. Ergo antequam ſecundus daret primo 40. habuit $\frac{1}{4}$℞+50. Ac proinde ſi accipiat 30. à primo habebit $\frac{1}{4}$℞+80. qui numerus ad reliquum primi, videlicet ad 1℞−30. debet habere proportionem noncuplam. Erit ergo æquatio inter $\frac{1}{4}$℞+80 & 9℞−270. Additiſque 270. vtrinque, inter $\frac{1}{4}$℞+350. & 9℞. Ablataque $\frac{1}{4}$℞. vtrinque. inter 350. & $8\frac{3}{4}$℞. Diuiſis igitur 350. per $8\frac{3}{4}$ fiet 1℞. 40. primus numerus. Secundus autem erit 60. nimirum $\frac{1}{4}$℞+50. Primus igitur 40. accipiens 40 à ſecundo, habebit 80. qui numerus quadruplus eſt numeri 20 qui ſecundo remanet. Secundus autem 60. accipiens 30. à primo habebit 90. qui numerus noncuplus eſt numeri 10. qui primo relinquitur, poſtquam 30. dederit ſecundo.

Si inueniendi ſint duo numeri, vt primus accipiens 10. à ſecundo habeat numerum quintuplum reliqui ſecundi, at ſecundus accipiens 5. à primo, habeat numerum duplum reliqui primi; inuenies duos numeros 15. & 15. Nam poſito primo 1℞ ſi accipiat 10. à ſecundo, habebit 1℞+10. qui numerus quintuplus eſt numeri $\frac{1}{5}$℞+2. atque hic ſecundo ſupereſt, poſtquam primo dederit 10. ergo prius habuit $\frac{1}{5}$℞+12. Si igitur accipiat 5. à primo, habebit $\frac{1}{5}$℞+17. qui numerus duplus eſſe debet numeri 1℞−5. qui primo ſupereſt, poſtquam dederit 5. ſecundo. hoc eſt, æqualitas erit inter $\frac{1}{5}$℞+17. & 2℞−10. Additiſque 10. vtrobique, inter $\frac{1}{5}$℞+27. & 2℞. Et ſi auferatur $\frac{1}{5}$℞. vtrobique, inter 27. & $1\frac{4}{5}$℞. Diuiſis igitur 27. per $1\frac{4}{5}$. hoc eſt, per $\frac{9}{5}$. fiet 1℞ 15. pro primo numero. Et quia ſecundus habebat $\frac{1}{5}$℞+12. erit quoque ſecundus numerus 15. Atque duo hi numeri 15. & 15. quæſtioni ſatisfaciunt. Nam ſi primus accipiat 10. à ſecundo, habebit 25. qui numerus quintuplus eſt reliqui, qui ſecundo ſupereſt, nimirum numeri 5. Secundus vero accipiens 5. à primo, habebit 20. numerum videlicet duplum numeri 10. qui primo ſupereſt.

LVIII. 58 *Tres numeros inuenire, vt bini quique faciant tres numeros propoſitos, dummodo ſemiſſis ſummæ propoſitorum numerorum maior ſit ſingulis propoſitis numeris.*

DEBEAT primus cum ſecundo efficere 20. ſecundus cum tertio 30. ac tertius cum primo 40. qui omnes ſimul faciunt numerum 90. cuius ſemiſſis 45. maior eſt quam 20. & quam 30. & quam 40. Quod ſi tertius numerus effectus deberet eſſe 50. vel maior, res non ſuccederet, quia omnes tres efficerent 100. vel maiorem numerum, cuius ſemiſſis eſſet vel æqualis vni eorum, nimirum 50. vel minor. Vt ſi tertius eſſet 51. vel 60. eſſent omnes tres 101. vel 110. cuius ſemiſſis $50\frac{1}{2}$. vel 55. minor eſſet tertio 51. vel 60. Sed operatio ipſa probe te docebit an quæſtio poſſibilis ſit, nec ne. Ponatur ergo ſumma trium numerorum quæſitorum eſſe 1℞. Et quia primus ac ſecundus conficiunt 20. erit tertius 1℞−20. Item quia ſecundus ac tertius faciunt 30. erit primus 1℞−30. Denique quia tertius ac primus faciunt 40. erit ſecundus 1℞−40. Hi omnes tres ſimul conficiunt 3℞−90. quę ſumma æqualis debet eſſe ſummæ omnium, quę poſita eſt 1℞. Eſt ergo æquatio inter 1℞. & 3℞−90. Additiſque 90. vtrinque, inter 1℞+90. & 3℞. Ablataque 1℞. vtrinque, inter 90. & 2℞. Diuiſis igitur 90 per 2. fiet 1℞.

fiet 1ℛ.45.ſumma omnium trium quæſitorum numerorum. Et quoniam primus inuentus fuit 1ℛ—30. erit ipſe primus 15. Secundus autem erit 5. nimirum 1ℛ—40. Ac tertius 25. videlicet 1ℛ—20. Itaque tres numeri ordine inuenti ſunt 15.5.25. manifeſtumque eſt, primum ac ſecundum efficere 20. ſecundum ac tertium 30. tertium deniqueac primum 40.

Aliter. Ponatur primus 1ℛ. eritq; propterea ſecundus 20—1ℛ vt cum primo, nimirum cum 1ℛ. facere poſſit 20. qui ſecundus numerus habebitur, ſi primus 1ℛ. ex 20. dematur. Tertius autem erit 10+1ℛ. vt cum ſecundo, id eſt, cum 10—1ℛ. facere poſſit 30. habebiturque hic tertius, ſi ſecundus 20—1ℛ. dematur ex 30. Iam tertius 10+1ℛ. cum primo 1ℛ. facit 2ℛ+10. qui numerus æqualis debet eſſe 40. Demptis igitur 10. vtrinque, erit æquatio inter 2ℛ. & 30. Diuiſiſque 30. per 2. fiet 1ℛ. 15. pro primo numero. Secundus ergo 20—1ℛ. erit 5. Et tertius 10+1ℛ. erit 25. vt prius.

59 *Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propoſitos; dummodo tertia pars ſummæ propoſitorum numerorum maior ſit ſingulis propoſitis numeris.* LIX.

DEBEAT primus, ſecundus, ac tertius facere 20. Secundus, tertius, & quartus 22. Tertius, quartus, ac primus 24. Quartus denique, primus, & ſecundus 27. qui omnes quatuor faciunt 93. cuius numeri pars tertia 31. maior eſt quam 20. & quam 22. & quam 24. & quam 27. Quod ſi quartus deberet eſſe 40. res non ſuccederet, quia omnes quatuor efficerent 106. cuius tertia pars 35⅓. non maior eſt, quam 40. ſed minor. Impoſſibilitatem porro quæſtionis ipſamet operatio indicabit. Ponatur ſumma omniũ quatuor eſſe 1ℛ. Et quia primus ſecũdus & tertius faciunt 20. erit quartus 1ℛ—20. Eadem ratione erit primus 1ℛ—22. Et ſecundus 1ℛ—24. Ac tertius denique 1ℛ—27. Hi omnes quatuor faciunt 4ℛ—93. quæ ſumma æqualis debet eſſe ſummæ omnium quam poſuimus 1ℛ. Eſt igitur æquatio inter 1ℛ. & 4ℛ—93. Additiſque 93. vtrinque, inter 1ℛ+93. & 4ℛ. Ablataque 1ℛ vtrinque, inter 93. & 3ℛ. Diuiſis igitur 93. per 3. fiet 1ℛ. 31. Et quoniam primus fuit inuentus 1ℛ—22. erit ipſe primus 9. Eademque de cauſa ſecundus 7. Tertius 4. & quartus 11. qui quatuor numeri problema efficiunt.

Hoc ænigma alio modo ſoluemus in quinque numeris in ænigmate 127.

SCHOLIVM.

EADEM arte inuenientur quinque numeri, vt quaterni quique efficiant quinque numeros propoſitos; dummodo quarta pars ſummæ propoſitorum numerorũ ſingulis numeris propoſitis maior ſit. Item ſex numeri, ſi tamen quinta pars maior ſit, &c. Et ſic deinceps quotcunque numeri, ſi modo pars ſummæ determinata à numero propoſitorum numerorum, vno minus, maior ſit ſingulis numeris propoſitis.

60 *Tres numeros inuenire, vt bini quique ſimul ſumpti excedant reliquum dato numero.* LX.

STATVATVR primum & ſecundum ſuperare tertium 20. vnitatibus: Exceſſum ſecundi ac tertij ſimul ſupra primum eſſe 30. vnitatum: Et denique exceſſum inter tertium ac primum ſimul, & ſecundum eſſe 40. vnitatum. Ponantur omnes tres eſſe 1ℛ. Et quoniam primus & ſecundus ſuperant tertium 20. vnitatibus; addito communi tertio, [a] ſuperabunt quoque primus, ſecundus & tertius ſimul, tertium duplicatum eiſdem 20. vnitatibus: ideoque omnes tres æquales erunt tertio duplicato, vna cum 20. quia numerus compoſitus ex tertio duplicato, & 20. ſuperat quoque tertium duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à ſumma omnium trium, quam poſuimus 1ℛ. auferamus 20. remanebit tertius duplicatus 1ℛ—20. atque idcirco tertius ſimplex erit ½ℛ—10. Eadem ratione primus erit ½ℛ—15. & ſecundus ½ℛ—20. Summa ergo omnium trium 3/2ℛ—45. æqualis erit ſummæ omnium trium numerorum quæſitorum, quam poſuimus eſſe 1ℛ; ita vt æquatio ſit inter 1ℛ. & 3/2ℛ—45. Additiſque 45. vtrinque, inter 1ℛ+45. & 3/2ℛ. Ablataque 1ℛ. vtrinque, inter 45. & ½ℛ. Diuiſis igitur 45. per ½. fiet 1ℛ 90. Cum ergo primus inuentus ſit ½ℛ—15. erit ipſe primus 30. Eandemq; ob cauſam erit ſecundus 25. & tertius 35. qui tres numeri problema conficiunt. [a] *16. pronũc. primi*

Aliter. Ponatur tertius 1ℛ. Et quoniam primus ac ſecundus ſuperant tertium 20. vnitatibus; erunt primus & ſecundus ſimul 1ℛ+20. cum hic numerus excedat quoque 1ℛ 20. vnitatibus. Ponatur deinde ſecundus 25. ſemiſſis videlicet ſummæ 50. ex 20. & 30. collectæ. Cum ergo primus & ſecundus ſimul inuenti ſint eſſe 1ℛ+20. ſi dematur ſecundus 25. relinquetur primus 1ℛ—5. Quia vero tertius cum primo ſuperare debet ſecundum 40. vnitatibus: Faciunt autem tertius 1ℛ. & primus 1ℛ—5. numerum 2ℛ—5. qui æqualis erit numero 65. cum hic ſecundum 25. ſuperet 40. vnitatibus: atque ita æquatio erit inter 2ℛ—5 & 65. Additiſq; 5. vtrinque, inter 2ℛ. & 70. Diuiſis igitur 70. per 2. fiet 1ℛ. 35. tertius numerus. Primus erit 30. nimirum 1ℛ—5. Et ſecundus 25. vt ſupra.

Aliter. Ponatur primus & ſecundus ſimul 1ℛ, eritque propterea tertius 1ℛ—20. vt nimirum primus & ſecundus ſimul, id eſt, 1ℛ. ſuperet tertium 20. vnitatibus: qui tertius habebitur, ſi ex primo & ſecundo 1ℛ. demantur 20. Ergo omnes tres erunt 2ℛ—20. Et quia ſecundus ac tertius ſuperare debent primum numero 30. addito communi primo, ſuperabunt omnes tres primum duplicatum eodem numero 30. Demptis igitur 30. ex omnibus tribus, id eſt, ex 2ℛ—20. remanebit primus duplicatus 2ℛ—50. ideoque ſimplex primus 1ℛ—25. Primus ergo 1ℛ—25. & tertius 1ℛ—20. faciunt ſummam 2ℛ—45. quæ ex omnibus tribus, id eſt, ex 2ℛ—20. ſubtracta relinquet ſecundum 25. Et quoniam primus ac tertius faciunt, vt dictum eſt proxime, ſummam 2ℛ—45. quæ debent ſecundum 25. ſuperare numero 40. Si ſecundus 25. ſubtrahatur à prædicta ſumma, relinquetur numerus 2ℛ—70. æqualis dicto exceſſui 40. Additis igitur 70. vtrinque, erit æquatio inter 2ℛ. & 110. Diuiſiſq; 110. per 2. fiet 1ℛ. 55. Primus ergo numerus 1ℛ—25. erit 30. Secundus vero eſt 25. & tertius 1ℛ—20. erit 35. vt prius.

SCHO-

SCHOLIVM.

SI primus ac ſecundus tertium ſuperare debent 3. vnitatibus: ſecundus vero ac tertius primum 20. vnitatibus: Denique primus ac tertius ſecundum 1. vnitate, reperietur tertius numerus 10$\frac{1}{2}$. ſecundus 11$\frac{1}{2}$. & primus 2.

LXI. 61 *Quatuor numeros inuenire, vt terni quique ſimul ſumpti excedant reliquum dato numero: dummodo ſemiſſis ſummæ ex quatuor numeris poſtulatis collectæ maior ſit ſingulis numeris datis.*

POSTVLETVR, vt primus, ſecundus, ac tertius ſimul excedant quartum 20. vnitatibus: Et ſecundus, tertius, ac quartus primum 30. vnitatibus: Et tertius, quartus, ac primus ſecundum 40. vnitatibus: Ac denique quartus, primus ac ſecundus tertium 50. vnitatibus. Vbi vides, quatuor numeros datos facere 140. cuius numeri ſemiſſis 70. maior eſt ſingulis datis. Nam ſi conditio hæc non adſit, erit quæſtio impoſſibilis. Vt ſi vltimus exceſſus detur 90. facient omnes exceſſus numerum 180. cuius ſemiſſis 90. maior non eſt dato exceſſu 90. quæſtio erit inexplicabilis. Ponantur ergo omnes quatuor numeri 1℞. Et quoniam primus, ſecundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus; addito communi quarto, [a] ſuperabunt quoque primus, ſecundus, tertius ac quartus quartum duplicatum ijſdem 20. vnitatibus: ideoque omnes quatuor æquales erunt quarto duplicato, vna cum 20. quia numerus compoſitus ex quarto duplicato, & 20. ſuperat quoque quartum duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur à ſumma omnium quatuor, quam poſuimus 1℞. auferantur 20. remanebit quartus duplicatus 1℞ — 20. atq; adeo quartus ſimplex erit $\frac{1}{2}$. ℞ — 10. Eadē ratione erit primus $\frac{1}{2}$℞ — 15. Et ſecundus $\frac{1}{2}$ — 20. Et tertius $\frac{1}{2}$℞ — 25. Summa ergo omnium quatuor 2℞ — 70. æqualis erit priori ſummæ omnium quatuor, quam poſuimus 1℞. ita vt æquatio ſit inter 1℞. & 2℞ — 70. Additiſque 70. vtrinque, inter 1℞. + 70. & 2℞. Ablataq; 1℞. vtrinque, inter 70. & 1℞. Erit igitur 1℞ 70. Cum ergo primus inuentus ſit $\frac{1}{2}$℞ — 15. erit ipſe primus 20. Eandemque ob cauſam ſecundus erit 15. Tertius 10. & quartus 25. qui omnes quæſtionem expediunt.

a 16. pronũc. primi

Aliter. Ponatur quartus 1℞. Et quoniam primus, ſecundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus: Erunt illi tres ſimul 1℞ + 20. cum hic numerus ſuperet 1℞. ſimiliter 20. vnitatibus. Rurſus quia ſecundus, tertius, & quartus excedunt primũ 30. vnitatibus; ponatur ſumma ſecũdi ac tertij 25. ſemiſſis videlicet primorũ duorum exceſſuum 20. & 30. ſimul. Quia igitur primus, ſecundus, ac tertius faciunt, vt diximus, 1℞ + 20. ſi auferatur ſecundus, ac tertius ſimul, nimirum 25. reliquus erit primus 1℞ — 5. exceditque ſumma 1℞ + 25. ex ſecundo, tertio, & quarto collecta, primum 1℞ — 5. numero 30. vt patet, ſi primus 1℞ — 5. auferatur ex 1℞ + 25 ſumma ſecundi, tertij, & quarti. Rurſus, quia primus inuentus eſt 1℞ — 5. Secundus vero ac tertius faciunt 25. quartus denique poſitus eſt 1℞. erunt omnes quatuor 2℞ + 20. Cum ergo tertius, quartus, ac primus excedant ſecundum numero 40. Addito communi ſecundo, [b] excedent omnes quatuor ſecundum duplicatum eodem numero 40. Ablatis igitur 40. ex ſumma 2℞ + 20. omnium quatuor, relinquetur ſecundus duplicatus 2℞ — 20. ipſeque ſecundus ſemel ſumptus erit 1℞ — 10. qui ſubtractus ex 25. ſumma ſecundi ac tertij, reliquum faciet tertium 35 — 1℞. Quoniam vero quartus, primus, & ſecũdus faciunt 3℞ — 15. debentq; ſuperare tertium numero 50. ſuperant autem tertium 35 — 1℞. numero 4℞ — 50. vt conſtat, ſi tertius 35 — 1℞. detrahatur ex prædicta ſumma 3℞ — 15. Eſt ergo æquatio inter 4℞ — 50. & 50. Additiſque 50. vtrinq;, inter 4℞. & 100. Diuiſis ergo 100. per 4. fiet 1℞. 25. Primus ergo 1℞ — 5. erit 20. Secundus 1℞ — 10. erit 15. Tertius 35 — 1℞. erit 10. Et quartus 1℞. erit 25. quemadmodum prius.

b 16. pronũc. primi

Aliter. Ponatur ſumma omnium 1℞. Et quia priores tres excedere debent quartum numero 20. diuidenda erit 1℞. in duas partes, quarum maior minorem ſuperet numero 20. Maior enim pars erit ſumma priorum trium, & minor pars erit quartus numerus. Diuiſio autem hæc ita fiet, vt in ſcholio ænigmatis 1. tradidimus. Dematur numerus 20. ex 1℞. vt reliquus ſit numerus 1℞ — 20. Huius enim ſemiſſis $\frac{1}{2}$℞ — 10. erit minor pars. Et ſi ad hanc addatur idem numerus 20. fiet maior pars $\frac{1}{2}$℞ + 10. Erit ergo quartus numerus $\frac{1}{2}$. ℞ — 10. & priores quatuor $\frac{1}{2}$℞ + 10. pari ratione, quia ſecundus, tertius, & quartus debent excedere primum numero 30. demantur 30. ex 1℞. Reliqui enim numeri 1℞ — 30. ſemiſſis $\frac{1}{2}$℞ — 15. erit primus numerus. Item quia tertius, quartus, & primus ſuperare debent ſecundum numero 40. ſi demantur 40. ex 1℞. erit reliqui numeri 1℞ — 40. ſemiſſis $\frac{1}{2}$℞ — 20. ſecundus numerus. Denique quia quartus, primus & ſecundus ſuperare debent tertium numero 50. ſi tollantur 50. ex 1℞. erit reliqui numeri 1℞ — 50. ſemiſſis $\frac{1}{2}$℞ — 25. tertius numerus. Omnes 4. innenti $\frac{1}{2}$℞ — 15. $\frac{1}{2}$℞ — 20. $\frac{1}{2}$℞ — 25. & $\frac{1}{2}$℞ — 10. faciunt ſummam 2℞ — 70. quę æqualis eſſe debet ſummæ omnium, quam poſuimus 1℞. Eſt ergo æquatio inter 1℞. & 2℞ — 70. Additiſq; 70. vtrinque, inter 1℞ + 70. & 2℞. Ablataque 1. ℞. vtrinque, inter 70. & 1℞. eritq; 1℞ 70. & $\frac{1}{2}$℞ 35. Primus ergo $\frac{1}{2}$℞ — 15. erit 20. Secundus $\frac{1}{2}$℞ — 20. erit 15. Tertius $\frac{1}{2}$℞ — 25. erit 10. Et quartus $\frac{1}{2}$℞ — 10. erit 25. veluti prius.

SCHOLIVM.

EODEM modo reperientur quinque numeri, vt quaterni quique ſuperent reliquum dato numero; dummodo tertia pars ſummæ ex quinque poſtulatis exceſſibus maior ſit ſingulis numeris. Pari ratione inuenientur ſex, ſi tamen quarta pars maior ſit, &c. Atque ita deinceps quotcunque numeri, ſi modo pars ſummæ denominata à numero datorum exceſſuum, minus duobus, maior ſit ſingulis exceſſibus datis.

LXII. 62 *Tres numeros inuenire, quorum maximus medium ſuperet data parte minimi: Medius quoque minimum ſuperet data parte maximi: Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.*

SVPERET maximus medium tertia parte minimi: Medius minimum tertia parte maximi: Minimus denique tertiam item partem medij excedat 10. vnitatibus. Ponatur minimus 1℞ + 10. & medius 3℞. Ita enim

minimus

minimus tertiam medij partem ſuperabit numero 10. Et quoniam medius minimum ſuperare debet tertia parte maximi. Superat autem medius 3℞. minimum 1℞+10 numero 2℞−10. vt patet, ſi ſubtractio fiat 1℞ +10. ex 3℞. Igitur tertia pars maximi erit 2℞−10. atq; idcirco maximus erit 6℞−30. Rurſus quoniam maximus medium ſuperare debet tertia parte minimi: Superat aũt maximus 6℞−30. medium 3℞. numero 3℞−30. qui æqualis erit tertiæ parti minimi: ideoq; minimus erit 9℞−90. Fuit aũt minimꝰ poſitus 1℞+10. Eſt ergo æquatio inter 9℞−90 & 1℞+10. Additiſq; 90. vtrinq;, inter 9℞ & 1℞+100. Ablataq; 1℞. vtrinq; inter 8℞. & 100. Diuiſis ergo 100. per 8. fiet 1℞. $12\frac{1}{2}$. Igitur minimꝰ 1℞+10. erit $22\frac{1}{2}$. Medius 3℞. erit $37\frac{1}{2}$. Maximus denique 6℞−30. erit 45. Nam maximus 45. ſuperat medium $37\frac{1}{2}$. numero $7\frac{1}{2}$. qui tertia pars eſt minimi $22\frac{1}{2}$. Medius vero $37\frac{1}{2}$. ſuperat minimum $22\frac{1}{2}$. numero 15. qui tertia pars eſt maximi 45. Minimus deniq; $22\frac{1}{2}$. ſuperat $12\frac{1}{2}$. tertiam partem medij $37\frac{1}{2}$. numero 10. vt propoſitum eſt.

QVOD ſi maximus medium ſuperare debeat ſemiſſe minimi: medius minimum quarta parte maximi: Et minimus tertiam partem medij numero 8. Ponatur minimus 1℞+8. Et medius 3℞. vt ille tertiam huius partem excedat octonario. Et quia medius minimum ſuperare ponitur quarta parte maximi: Superat autem medius 3℞ minimum 1℞+8. numero 2℞−8. Igitur quarta pars maximi erit 2℞−8. ac proinde maximus erit 8℞−32. Rurſus quia maximus medium ſuperare debet ſemiſſe minimi; Superat autem maximus 8℞−32. medium 3℞. numero 5℞−32. qui æqualis erit ſemiſſi minimi; proptereaque minimus erit 10℞−64. Fuit autem idem poſitus 1℞+8. Eſt ergo æquatio inter 10℞−64. & 1℞+8. Additiſque 64. vtrinque, inter 10℞. & 1℞+72. Ablataque 1℞. vtrinque, inter 9℞. & 72. Diuiſis ergo 72. per 9. fiet 1℞. 8. Ac proinde minimus 1℞+8. erit 16. Medius vero 3℞. erit 24. Maximus denique 8℞−32. erit 32.

SI quis proponeret, maximum debere ſuperare medium ſemiſſe minimi: Medium quoque minimum ſemiſſe maximi: Minimum denique ſemiſſem medij binario; quæſtio eſſet impoſſibilis, vt ipſa operatio per Algebram abunde docebit. Ponatur enim minimus 1℞+2. Et quia debet ſuperare ſemiſſem medij binario, erit medius 2℞. Quia vero minimum medius ſuperare debet ſemiſſe maximi. Superat autem medius 2℞. minimum numero 1℞−2. qui ſemiſſis debet eſſe maximi. Maximus ergo erit 2℞−4. quod eſt abſurdum, cum medius inuentus ſit 2℞. maior quam 2℞−4.

63 *Tres numeros inuenire, ita vt ſi quiſque proxime ſequenti det datam ſui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIII.

DET primus ſecundo tertiam ſui partem: Secundus tertio quartam ſui partem: Et tertius primo quintam ſui partem: Et cum ſibi mutuo dictas partes dederint, & ab alijs acceperint, fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 3℞. vt tertiam partem habeat ſine fractione. Secundus autem, 4. vnitatum, vt quartam partem ſine fractione habeat. Si ergo hic ſecundus 4. accipiat $\frac{1}{3}$ primi 3℞. nimirum 1℞. atque det $\frac{1}{4}$. nimirum 1. tertio, habebit ipſe ſecundus 3+1℞. Ac tantundem habere debet primus, vbi dederit, acceperitque, quæ iubentur.

2℞ + 0
−1℞ + 3
+1℞ + 3

At primus 3℞. ſi tertiam partem dederit 1℞. & acceperit 3−1℞. tum demum habebit 1℞+3. vel 3+1℞. vt patet, ſi addantur 3−1℞. ad 2℞. quod hæc formula docet. Inuenies autem 3−1℞. ſi reliquum primi, nimirum 2℞. dempſeris ex 3+1℞. Ergo 3−1℞. erit quinta pars tertij: quandoquidem eam dans reliquo primi, nimirum 2℞. facit 3+1℞. Igitur tertius erit 15−5℞. qui ſi dederit primo quintam ſui partem, hoc eſt, 3−1℞ remanebunt illi 12−4℞. Et ſi à ſecundo 4. acceperit quartam partem, nimirum 1. habebit 13−4℞. qui numerus æqualis eſſe debet 3+1℞. quantum ſcilicet tam primus, quam ſecundus habet, vt dictum eſt. Eſt ergo æquatio inter 13−4℞. & 3+1℞. Additiſque 4℞. vtrinque, inter 13. & 3+5℞. Ablatiſque 3. vtrinque, inter 10. & 5℞. Diuiſiſque 10. per 5. fiet 1℞ 2. Ac propterea primus numerus 3℞. erit 6. Secundus 4. vt poſuimus, & tertius 15−5℞. erit 5. Si namque primus 6. dederit tertiam ſui partem 2. acceperitque quintam partem tertij, videlicet 1. habebit 5. Ac tantundem habebit ſecundus 4. ſi dederit quartam ſui partem 1. tertio, acceperitque tertiam partem primi. Item tantum quoque habebit tertius 5. ſi dederit primo quintam partem, id eſt, 1. acceperitque à ſecundo 4. quartam partem, videlicet 1. quod eſt propoſitum.

QVOD ſi primus ſecundo debeat dare $\frac{1}{2}$. Secundus tertio $\frac{1}{4}$. & tertius primo $\frac{1}{3}$. Ponatur primus 2℞. vt habeat $\frac{1}{2}$. ſine fractione; Secundus autem 4. vt habeat $\frac{1}{4}$. ſine fractione. Secundus igitur poſtquam dederit $\frac{1}{4}$. tertio, ſumpſeritque $\frac{1}{2}$. à primo, habebit 1℞+3. Ac tantundem habere debet primus, poſtquam dederit $\frac{1}{2}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{3}$ à tertio. At primus poſtquam dederit $\frac{1}{2}$. ſecundo, habebit 1. ℞. reliquam, quæ cum 3. facit 1. ℞+3. Eſt ergo 3. tertia pars tertij, ideoque tertius erit 9. Reliquum eſt, vt tertius 9. poſtquam dederit $\frac{1}{3}$. primo, ſumpſeritque $\frac{1}{4}$. à ſecundo, habeat quoque 1℞+3. Habebit autem, ſi imperata fecerit, 7. Ergo æqualitas eſt inter 7. & 1℞+3. Ablatiſque 3. vtrinque, inter 4. & 1℞. Igitur 1℞. erit 4. ideoque primus, quem poſuimus 2℞. erit 8. Secũdus 4. & tertius 9. Nam primus 8. ſi det $\frac{1}{2}$. accipiatque $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 7. quemadmodum ſecundus, ſi det $\frac{1}{4}$. & accipiat $\frac{1}{2}$. primi. Necnon tertius, ſi det $\frac{1}{3}$. ſumatque $\frac{1}{4}$. ſecundi. Omneſque tres numeri faciunt 21. triplum videlicet numeri 7. quem quiſque facit. quemadmodum etiam in primo exemplo omnes tres numeri 6. 4. 5. faciunt 15. triplum ſcilicet numeri 5. quem quiſque facit. In ſecundo porro exemplo huius ænigmatis vides, non eſſe neceſſarium, vt partes datæ habeant denominatores, qui ſemper creſcant ordine, vt in primo exemplo contigit.

64. *Quatuor numeros inuenire ea lege, vt cum quiuis eorum proxime inſequenti datam ſui partem dederit, inter eos qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIIII.

DET primus ſecundo tertiam ſui partem: Secundus tertio quartam: Tertius quarto quintam: Et quartus primo ſextam. Ac tandem, poſtquam dederint, acceperintq; dictas partes, fiant 4. numeri æquales. Ponatur

primus 3℞.vt tertiam partem ſine fractione habeat. Secundus autem 4.vnitatum, vt quartam partem habeat ſine fractione.Si ergo hic ſecundus accipiat $\frac{1}{3}$.primi 3℞.nimirum 1℞.atque det $\frac{1}{4}$. videlicet 1.tertio, habebit ipſe 1℞+3.Ac tantundem oportet habere primum, poſtquam ſecundo dederit $\frac{1}{3}$. nimirum 1℞. acceperitq; à quarto partem ſextam.Sed ſi det $\frac{1}{3}$.videlicet 1℞. ſuperſunt illi 2℞. quæ cum 3—1℞. conſtituunt 1℞+3. vt ex hac formula colligitur.Inuenies autem 3—1℞.ſi 2℞.tolles ex 1℞+3. Ergo ſexta pars quarti erit 3—1℞.Et ipſe quartus erit 18—6℞.Hic quartus ſi det $\frac{1}{6}$.remanebunt illi 15—5℞.& ſi accipiat $\frac{1}{5}$.tertij,debet habere 1℞+3.ſicut tam primus,quam ſecundus. Sed ſi addantur 6℞—12. ad 15—5℞. fit 1℞+3.vt in hac formula apparet, Inuenies autem 6℞—12. ſi 15—5℞ demantur ex 1℞+3. Igitur $\frac{1}{5}$. tertij erit 6℞—12.ipſeque tertius erit 30℞—60.Reliquum eſt iam, tertium hunc habere quoque 1℞+3. poſtquam quarto dederit $\frac{1}{5}$.videlicet 6℞—12.acceperitque 1.ſecundi 4.At ſi det $\frac{1}{5}$.ſuperſunt illi 24℞—48. Et ſi acceperit $\frac{1}{4}$. à ſecundo,nimirum 1.habebit 24℞—47.qui numerus æqualis debet eſſe 1℞+3.Additis igitur 47. vtrinque, erit æqualitas inter 24℞.& 1℞+50.Ablataque 1℞.vtrinque, inter 23℞.& 50 Diuiſis ergo 50. per 23. fiet 1℞ $\frac{50}{23}$. Quocirca primus numerus 3℞ erit $\frac{150}{23}$.Et ſecundus 4.ſiue $\frac{92}{23}$. Ac tertius 30℞—60. erit $\frac{120}{23}$. Quartus denique 18—6℞ erit $\frac{114}{23}$.qui ænigma conficiunt. Et ſi abſtuleris denominatores, erunt quatuor numeri quæſiti integri 150.92.120.114.propterea quod numeratores eandem proportionem habent, quam

[a] 15.quinti ipſæ minutiæ,propter eundem denominatorem,vt ad finem lib.9.Eucl.demonſtrauimus. [a] Et partes in quæſtione expreſſæ ita ſe habent ad numeros integros, vt ad dictas minutias.quia ita ſe habet V.g. $\frac{1}{3}$. numeri 12. ad 12.vt $\frac{1}{3}$.numeri 90.ad 90.&c.Itaq; ſi primus 150.det $\frac{1}{3}$.nimirum 50.ſupererunt 100.& ſi accipiat $\frac{1}{6}$.quarti 114.nimirum 19.habebit 119.Item ſi ſecundus 92.det $\frac{1}{4}$.ſui numeri nimirum 23.remanebunt 69.& ſi accipiat $\frac{1}{3}$.primi 150.nimirum 50.habebit ſimiliter 119.Sic quoque ſi tertius 120.det $\frac{1}{5}$.ſui numeri,hoc eſt,24.remanebunt 96.& ſi accipiat $\frac{1}{4}$.ſecundi 92.nimirum 23.habebit 119.Denique eodem modo,ſi quartus 114.det $\frac{1}{6}$.ſui numeri,videlicet 19.ſupererunt 95.& ſi accipiat $\frac{1}{5}$.tertij 120.nimirum 24.habebit 119.

$$\begin{array}{rrrr} & 2\,℞ & + & 0 \\ - & 1\,℞ & + & 3 \\ \hline + & 1\,℞ & + & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 15 & - & 5\,℞ \\ - & 12 & + & 6\,℞ \\ \hline + & 3 & + & 1\,℞ \end{array}$$

HIC etiam omnes 4.numeri inuenti 150.92.120.114.efficiunt 476. quadruplum videlicet numeri 119. quem vnuſquiſque facit.

SCHOLIVM.

EODEM modo inuenientur 5.numeri,vel plures, ita vt, poſtquam vnuſquiſque ſequenti partem datam dederit, tandem fiant 5.numeri æquales,vel plures. Omneſque ſimul facient ſemper ſummam,quæ toties numerum, quem ſinguli faciunt, continebit, quot ſunt ipſi numeri.

Sint enim inueniendi 5.numeri, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$.ſecundo, acceperitque $\frac{1}{5}$.à quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{2}$. tertio,acceperitque $\frac{1}{3}$.à primo:Item tertius dederit $\frac{1}{7}$.quarto,acceperitque $\frac{1}{2}$.à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$.quinto,acceperitque $\frac{1}{7}$.à tertio.Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$.primo,acceperitque $\frac{1}{6}$.à quarto;fiant tandem 5.numeri æquales. Ponatur primus 3℞.vt habeat $\frac{1}{3}$.ſine fractione.Secundus vero 2.vt habeat $\frac{1}{2}$.ſine fractione.Si ergo ſecundus det $\frac{1}{2}$. tertio,id eſt,1.remanebit illi 1 Et ſi accipiat $\frac{1}{3}$.à primo,nimirum 1℞.habebit 1℞+1.quem numerum vnuſquiſque tandem habere debet.Primo autem ſi det $\frac{1}{3}$.ſecundo,ſupererunt 2℞.quæ cum $\frac{1}{5}$.quinti facere debent 1℞+1.At 2℞.cum 1—1℞.faciunt 1℞+1. vt conſtat,ſi 2℞.detrahantur ex 1℞+1.Igitur quinta pars quinti erit 1—1℞.& totus quintus 5—5℞. Huic quinto,ſi det $\frac{1}{5}$.remanebunt 4—4℞.quæ cum $\frac{1}{6}$.quarti facere debent 1℞+1.Faciunt autem 4—4℞ cum 5℞-3.numerum 1℞+1. vt patet,ſi 4—4℞.detrahantur ex 1℞+1.Igitur $\frac{1}{6}$.quarti numeri erit 5℞—3.totuſque quartus erit 30℞—18. Huic quarto ſi det $\frac{1}{6}$. quinto,ſupererunt 25℞—15.quæ cum $\frac{1}{7}$.tertij facere debent 1℞+1.Faciunt autem 25℞—15.cum 16—24℞. numerum 1℞+1.vt patet,ſi 25℞—15.demantur ex 1℞+1.Igitur 16—24℞.erunt $\frac{1}{7}$tertij numeri, totuſque tertius erit 112—168℞. Huic tertio,ſi det $\frac{1}{7}$.quarto, remanent 96—144℞. quæ cum $\frac{1}{2}$.ſecundi, id eſt,cum 1.facit 97—144℞. quæ æqualia debent eſſe 1℞+1. Additis 144℞.vtrinque, erit æquatio inter 97.& 145℞+1. Ablataque 1.vtrinque,inter 96.& 145℞. Diuiſis igitur 96.per 145.fiet 1℞.$\frac{96}{145}$.Ergo primus numerus poſitus 3℞.erit $\frac{288}{145}$.Secundus autem poſitus 2. erit $\frac{290}{145}$.Tertius deinde inuentus 112—168℞.erit $\frac{112}{145}$. Quartus deinde qui inuentus fuit 30℞—18.erit $\frac{270}{145}$. Quintus denique inuentus 5—5℞. erit $\frac{245}{145}$. Et deletis denominatoribus,erunt quinque numeri inuenti integri.288.290.112.270.245.qui problemati ſatisfaciunt. Nam ſi datas partes dent,& recipiant, vnuſquiſque habebit 241. qui numerus quintuplicatus facit 1205. ſummam omnium quinq; numerorum inuentorum.

LXV. 65 *Datum numerum in duas partes diuidere,ita vt poſterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quemlibet numerum.*

SIT numerus 60.diſtribuendus in duos, ita vt poſterior cum $\frac{1}{5}$.prioris efficiat 28.Ponatur prior pars 5.℞.vt dare poſſit $\frac{1}{5}$.ſine fractione: eritque poſterior pars 60—5℞.quæ ſi acceperit $\frac{1}{5}$ prioris, nimirum 1℞. habebit 60—4℞.qui numerus æqualis debet eſſe dato numero 28.Additis igitur 4.℞. vtrinque,erit æquatio inter 60.& 4℞+28.Ablatiſque 28.vtrinque,inter 32.& 4.℞.Diuiſis ergo 32. per 4.fiet 1℞.8. Ac propterea prior pars 5℞.erit 40.poſterior vero 20.quæ ſi acceperit $\frac{1}{5}$.prioris, nimirum 8.habebit 28.

SCHOLIVM.

Hoc idē ſine Algebra efficiet hoc modo.Dēpto numero dato,q. effici debet, à num.dato,q. diſtribuend⁹ eſt,diuidat reliquus num.p denomi-

denominatorem partis datæ, minus vno. Quotiens namque per denominatorem partis multiplicatus, exhibebit priorem numerum,&c. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 28. dematur ex diuidendo numero 60. & reliquus numerus 32. diuidatur per 4. (numerum videlicet vnitate minorem denominatore quintæ partis) fiet Quotiens 8. quo ducto in 5. denominatorem partis quintæ, producetur prior numerus 40. Poſterior ergo erit 20.

Si idem numerus 60. ſecandus ſit in duos, ita vt poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 59. Dempto numero 59. ex 60. & reliquo numero 1. diuiſo per 4 fit Quotiens $\frac{1}{4}$. qui ductus in 5. faciet $\frac{5}{4}$. priorem numerum. Poſterior ergo erit 58$\frac{3}{4}$. Nam ſi huic addatur $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum $\frac{1}{4}$. conſlabitur datus numerus 59.

66 *Duos numeros inuenire, quorum ſumma æqualis ſit dato numero, & poſterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.* LXVI.

HOC ænigma cum præcedenti coincidit. Nam ſi ſumma data ſecetur in duas partes, vt ibi imperatur, inuenti erunt duo numeri quæſiti. Vt ſi inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma 60. & poſterior numerus cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 28. diuidendus erit numerus 60 vt dictum eſt, eruntque quæſiti numeri 40. & 20.

Si vero inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma 60. & poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 59. erit prior numerus 1$\frac{1}{4}$. poſterior autem 58$\frac{3}{4}$. vt in ſcholio præcedenti patuit.

67 *Tres numeros inuenire, ita vt, cum vnuſquiſque à ſumma reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri æquales.* LXVII.

FAC, vt ſi primus ſumat à ſumma reliquorum duorum $\frac{1}{3}$. Secundus à ſumma reliquorum duorum $\frac{1}{4}$. Et tertius à ſumma duorum reliquorũ $\frac{1}{5}$. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1℞. ſumma vero reliquorum duorum ponatur numerus 3. vt habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Si igitur primus à duobus reliquis accipiat $\frac{1}{3}$. habebit 1℞+1. Et quia ſecundus à ſumma reliquorum duorum accipiens $\frac{1}{4}$. debet etiam facere 1℞+1. diuidenda erit ſumma omnium trium, nimirum 1℞+3. in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1℞+1 Poſterior enim pars erit ſecundus numerus, & pars prior ſumma primi ac tertij. Diuiſio autem hæc fiet, vt in ſcholio ænigmatis 65. docui, hoc modo. Dempto numero 1℞+1. qui effici debet, ex ſumma 1℞+3. omniũ trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quartæ, vno minus, nimirum per 3. & quotiens $\frac{2}{3}$. per denominatorem 4. multiplicetur. Procreatus enim numerus $\frac{8}{3}$. erit prior pars, quæ ablata ex ſumma 1℞ +3. omnium trium, relinquet partem poſteriorẽ 1℞+$\frac{1}{3}$. pro ſecundo numero. Huic enim ſi addatur $\frac{1}{4}$. prioris partis $\frac{8}{3}$. (quæ eſt ſumma primi ac tertij) nimirum $\frac{2}{3}$. fiet numerus 1℞+1.

Rurſus quia tertius ſumens $\frac{1}{5}$. à ſumma primi & ſecundi debet etiam facere 1℞+1. diuidenda erit ſumma 1℞+3. omnium trium eodem modo in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1℞+1. quod ita fiet. Dempto numero 1℞+1. qui effici debet, ex ſumma 1℞+3. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quintæ, vno minus, hoc eſt, per 4. Et quotiens $\frac{2}{4}$. vel $\frac{1}{2}$. in denominatorem 5 ducatur. Productus enim numerus $\frac{5}{2}$. erit prior pars, ſumma videlicet primi ac ſecundi. quæ pars ablata ex ſumma 1℞+3. omnium trium, reliquam faciet partem poſteriorem 1℞+$\frac{1}{2}$. Hæc enim accipiens $\frac{1}{5}$. ſummæ primi ac ſecundi, quæ fuit $\frac{5}{2}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. faciet quoque 1℞+1. Reliquum iam eſt, vt omnes tres numeri inuenti 1℞ 1℞ +$\frac{1}{3}$. 1℞+$\frac{1}{2}$. conficiant ſummam 1℞+3. omnium trium. Faciunt autem 3℞+$\frac{5}{6}$. Eſt ergo æquatio inter 1℞ +3. & 3℞+$\frac{5}{6}$. Et ablata 1℞ vtrinque, inter 3. & 2. ℞+ $\frac{5}{6}$. Ablatiſque $\frac{5}{6}$. vtrinque, inter 2$\frac{1}{6}$. & 2 ℞. Diuiſis igitur 2$\frac{1}{6}$ per 2. fiet 1℞ $\frac{13}{12}$. pro primo numero quæſito, qui poſitus fuit 1℞. Secundus, qui inuentus fuit 1℞+$\frac{1}{3}$. erit $\frac{51}{36}$. ſiue $\frac{17}{12}$. Tertius denique, quem inuenimus eſſe 1℞+$\frac{1}{2}$. erit $\frac{38}{24}$. hoc eſt, $\frac{19}{12}$. Et ſi neglexeris denominatores, erunt tres numeri quæſiti integri 13. 17. 19 problema propoſitum abſoluentes. Nam & primus 13. cum $\frac{1}{3}$. ſecundi & tertij, id eſt, cum 12. & ſecundus 17. cum $\frac{1}{4}$ primi & tertij, hoc eſt, cum 8. & tertius 19. cum $\frac{1}{5}$. primi & ſecundi, nimirum cum 6. facit 25.

Hic autem ſumma trium numerorum inuentorum 49. non eſt tripla numeri 25. quem vnuſquiſque facit: quemadmodum in ænigmate 63. fiebat.

68 *Quatuor numeros inuenire ea conditione, vt cum vnuſquiſque à ſumma reliquorum trium datam partem acceperit, fiant quatuor numeri æquales.* LXVIII.

STATVAMVS, vt ſi primus ſumat $\frac{1}{3}$. ſummæ aliorum trium: Secundus $\frac{1}{4}$. ſummæ aliorum trium: Tertius $\frac{1}{5}$ ſummæ trium reliquorum · Quartus denique $\frac{1}{6}$. ſummæ aliorum trium; quatuor numeri fiant æquales. Ponatur primus 1℞. & ſumma aliorum trium numerus 3. habens $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Primus igitur ſumens $\frac{1}{3}$. huius ſummæ, videlicet 1. faciet 1℞+1. Et quia ſecundus cum $\frac{1}{4}$. ſummæ reliquorum trium debet etiam facere 1℞+1. diuidenda erit ſumma 1℞+3 omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1℞+1. ſicut in præcedenti problemate. Poſterior enim pars erit ſecundus numerus, & prior ſumma primi, tertij, & quarti. Inuenta autem fuit in accedenti problemate pars poſterior 1℞+$\frac{1}{3}$. pro ſecundo numero.

DEINDE quia tertius ſumens $\frac{1}{5}$. ſummæ primi, ſecundi, & quarti debet ſimiliter conficere 1℞+1. diuidenda rurſum erit ſumma 1℞+3. omnium quatuor in duas partes, quarum poſterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1℞+1. Inuenta fuit in præcedenti problemate poſterior pars 1℞+$\frac{1}{2}$. pro tertio numero.

POSTREMO quia quartus accipiens $\frac{1}{6}$. ſummæ reliquorum trium debet etiam facere 1℞+1. diuidemus ſummam 1℞+3. omnium quatuor in duas partes, quarũ poſterior cum $\frac{1}{6}$. prioris faciat 1℞+1. quod per ſcholium ænigmatis 65. ita fiet. Dempto numero 1℞+1. qui effici debet, ex ſumma 1℞+3. omnium, quatuor, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis $\frac{1}{6}$. vno minus, nimirum per 5. & quotiens, $\frac{2}{5}$. in ipſum denominatorem 6. ducatur. Productus enim numerus $\frac{12}{5}$. erit prior pars, ſumma ſcilicet primi

ſecundi ac tertij. quæ pars ſubtracta ex ſumma 1℞+3. omnium quatuor, reliquam faciet partem poſteriorē 1℞+$\frac{3}{5}$. Hæc enim cum $\frac{1}{6}$. prioris, hoc eſt, cum $\frac{2}{5}$. faciet 1℞+1. Reliquum iam eſt, vt omnes 4. numeri inuenti 1℞ 1℞+$\frac{1}{3}$. 1℞+$\frac{1}{2}$. 1℞+$\frac{3}{5}$. integrent ſummam 1℞+3. omnium quatuor. Faciunt autem 4.℞+$\frac{43}{30}$. Eſt igitur æqualitas inter 1℞+3 & 4℞+$\frac{43}{30}$. Ablataq; 1℞ vtrinque, inter 3 & 3℞+$\frac{43}{30}$. Ablatiſq; $\frac{43}{30}$. vtrinque, inter 1$\frac{17}{30}$. & 3℞ Diuiſis ergo 1$\frac{17}{30}$. ſiue $\frac{47}{30}$. per 3. fiet 1℞. $\frac{47}{90}$. pro primo numero quæſito, quem poſuimus eſſe 1 ℞. Secundus inuentus 1℞+$\frac{1}{3}$. erit $\frac{231}{270}$ hoc eſt, $\frac{77}{90}$. Tertius aũt inuentus 1.℞+$\frac{1}{2}$. erit $\frac{184}{180}$. id eſt $\frac{92}{90}$. Quartus deniq; inuẽtus 1℞+$\frac{3}{5}$. erit $\frac{505}{450}$. ſiue $\frac{101}{90}$. Et ſi abieceris denominatores, inuẽti erunt quatuor numeri integri 47. 77. 92. 101. qui quæſtioni ſatisfaciunt. Nam & primus 47. cum $\frac{1}{3}$. ſecundi, tertij, & quarti, id eſt, cum 90. & ſecundus 77. cum $\frac{1}{4}$. primi, tertij, & quarti, hoc eſt, cum 60. & tertius 92. cum $\frac{1}{5}$. primi, ſecundi, ac quarti, id eſt, cum 45. & quartus 101. cum $\frac{1}{6}$. primi, ſecundi, & tertij, videlicet cum 36. facit 137.

Hic etiam ſumma quatuor numerorum inuentorum 317. quadrupla non eſt numeri 137. quem vnuſquiſque facit, quemadmodum in ænigmate 64. fiebat.

SCHOLIVM.

LXIX. NON *aliter inuenientur 5. numeri, vel 6. vel plures ita vt ſi vnuſquiſque à ſumma reliquorum acceperit datam partem, fiant totidem numeri æquales.*

69 *Tres numeros inuenire ea lege, vt ſi vnuſquiſque proxime inſequenti det imperatam ſui partem, poſtquam mutuo dederunt, & acceperunt, ſinguli habeant eundem numerum datum.*

SINT inueniendi tres numeri, vt ſi primus det $\frac{1}{3}$. ſecundo; ſecundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo, fiant tres numeri 30. 30. 30. In ænigmate 63. inuenimus tres numeros eadem conditione, niſi quod tres numeros æquales, qui fieri debent, non determinauimus ad certum numerum, vt hic. Ergo inuentis, per ænigma 63. tribus numeris 6. 4. 5. qui illi ænigmati ſatisfaciunt; vt inueniantur alij tres implentes conditiones huius ænigmatis: ponantur pro tribus numeris tot radices, quot vnitates ſunt in tribus numeris inuentis, nimirum 6℞. 4℞ 5℞. Si ergo primus 6℞ det $\frac{1}{3}$ ſupererunt 4℞. & ſi à tertio 5℞. accipiat $\frac{1}{5}$. habebit 5℞. qui numerus æqualis debet eſſe imperato numero 30. Quocirca diuiſis 30. per 5. fiet 1℞. 6. ac proinde primus 6℞. erit 36. ſecundus 4℞. erit 24. & tertius 5℞. erit 30. Nam primus 36. amittens $\frac{1}{3}$. habebit 24. & accipiens $\frac{1}{5}$. tertij, nimirum 6. habebit 30. Ita quoque ſecundus 24. dans $\frac{1}{4}$. habebit 18. & recipiens $\frac{1}{3}$. primi, nimirum 12 habebit 30. Ac tandem tertius 30. abijciens $\frac{1}{5}$. habebit 24. & reſumens $\frac{1}{4}$. à ſecundo, nimirum 6. habebit quoque 30. vt alij.

Aliter. Quoniam ſinguli conficere debent 30. erunt omnes tres numeri quæſiti 90. At tres numeri poſiti 6℞. 4℞. 5℞. faciunt 15℞. qui numerus æqualis eſſe debet numero 90. Diuiſis ergo 90. per 15. fiet 1. ℞. 6. veluti prius.

SCHOLIVM.

AD eundem modum in ægnimate 64. 67. & 68, determinari poterit numerus, quem ſinguli conficere debent. Vt ſi in præcedenti problemate 68. quilibet quatuor numerorum debeat efficere 100. Quoniam 4. numeri inuenti fuerunt 47. 77. 92. 101. Ponemus 4. numeros eſſe 47. ℞. 77℞. 92. ℞. 101℞. facietque primus cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, nimirum cum 90℞. numerorum 137℞. qui æqualis eſſe debet imperato numero 100. Diuiſis ergo 100. per 137. fiet 1℞. $\frac{100}{137}$. Igitur primus numerus 47℞. erit $\frac{4700}{137}$. Secundus $\frac{7700}{137}$. Tertius $\frac{9200}{137}$. & quartus $\frac{10100}{137}$. qui conditionem problematis implent, dummodo denominatores non abijciantur. Nam primus $\frac{4700}{137}$. cum $\frac{1}{3}$. reliquorum trium, id eſt, cum $\frac{9000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. videlicet 100. Sic etiam ſecundus $\frac{7700}{137}$. cum $\frac{1}{4}$. reliquorum trium, id eſt, cum $\frac{6000}{137}$. facit $\frac{13700}{137}$. hoc eſt, 100. Eundem numerum 100. facit tam tertius cum $\frac{1}{5}$. reliquorum trium quam quartus cum $\frac{1}{6}$. trium reliquorum.

PORRO in ænigmate 68. & 67. ſi vnuſquiſque numerorum facere debeat certum quendam numerum determinatum, locum non habebit ſecunda ſolutio præſentis ænigmatis 69. quia ſumma trium numerorum in 67. ænigmate, vel 4. numerorum in 68. ænigmate inuentorum, non eſt tripla, vel quadrupla numeri, quem quiſque conficit, poſtquam imperata impleuerit, vt ibi diximus. Solum ergo adhiberi poterit in ænigmate 63. vt in hoc ænigmate 69. factum eſt: nec non in ænigmate 64. vt iam iam videbis.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt ſi primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo, acceperitque $\frac{1}{5}$. à quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{2}$. tertio, acceperitque $\frac{1}{3}$. à primo: Tertius vero dederit $\frac{1}{7}$. quarto, ſumpſeritque $\frac{1}{2}$. à ſecundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto acceperitque $\frac{1}{7}$. à tertio: Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$. primo, acceperitque $\frac{1}{6}$. à quarto; fiant tandem quinque numeri æquales, quorum quiſque 1205. vnitates contineat. In ſcholio ænigmatis 64. inuenti ſunt 5. numeri ea conditione, quam hic expreſſimus, 288. 290. 112. 270. 245. quorum vnuſquiſque, ſi imperata impleuerit, habet 241. Debet autem, vt hic iubetur, quilibet habere 1205. Ponantur ergo quinque numeri, 288℞. 290℞. 112℞. 270℞. 245℞. Si hi numeri imperata executi fuerint, habebit vnuſquiſque 241℞ vt dictum eſt, qui numerus æqualis eſſe debet dato numero 1205. Diuiſis igitur 1205. per 241. fiet 1℞. 5. Igitur primus numerus poſitus 288℞. erit 1440. Secundus poſitus 290℞. erit 1450. Tertius poſitus 112℞. erit 560. Quartus poſitus 270℞. erit 1350. Quintus denique poſitus 245℞. erit 1225. Nam ſi imperata fecerint hi 5. numeri, deprehendes, vnumquemque habere 1205.

Aliter. Quoniam vnuſquiſque facere debet 1205. erit ſumma omnium quinque, 6025. Sed quinque numeri poſiti 288℞. 290℞. 112℞. 270℞. 245℞. faciunt ſummam 1205℞. Diuiſis igitur 6025. per 1205. fiet 1. ℞. 5. veluti prius.

70 *Datum numerum in tres, quatuor, vel plures partiri ea conditione, vt ſi quiſque proxime ſequenti det imperatam ſui partem, poſtquam mutuo dederint, & acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures æquales.* LXX.

HOC ænigma à præcedenti non differt. Nam ſi datus numerus in tot partes æquales diſtribuatur, quot in ænigmate exprimuntur; inueniendi erunt per ænigma præcedens, eiuſque ſcholium, (adhibito tamen ænigmate 63. & 64. eiuſque ſcholio) totidem numeri, qui propoſitam conditionem ſeruantes faciant totidem numeros æquales vni parti numeri dati, qui in totidem partes fuit diſtributus. In hos enim numeros inuentos datus numerus diuidendus eſt, quippe cum omnes ſimul faciant ſummam triplam, vel quadruplam numeri, quem vnuſquiſque inuentorum facere debet, vt dictum eſt.

V.g. Si numerus 90. diſtribendus ſit in tres, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. ſecundo; ſecundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo fiant tres numeri æquales: diſtribuatur datus numerus 90. in tres partes æquales 30.30.30. ac per ænigma 69. reperiantur tres numeri, vt ſeruata conditione præſcripta, vnuſquiſque faciat 30. Inuenti numeri erunt 36.24.30. atque in hos diſtribuendus eſt datus numerus 90. Nam ſi præſcriptam legem obſeruent, faciet vnuſquiſque 30.

PARI ratione, ſi numerus 6025. diſtribuendus ſit in quinque partes, vt cum prima dederit $\frac{1}{3}$. ſecundæ; ſecunda $\frac{1}{2}$. tertiæ; tertia $\frac{1}{7}$. quartæ; quarta $\frac{1}{8}$. quintæ: & quinta $\frac{1}{5}$. primæ, ſinguli habeant eundem numerum: diſtribuendus erit datus numerus in quinque æquales partes 1205. 1205. 1205. 1205. 1205. & per ſcholium præcedentis ænigmatis (adiuuante ſcholio ænigmatis 64.) inueniendi quinque numeri, vt ſeruata lege præſcripta, vnuſquiſque faciat 1205. qui quidem ſunt, vt in proximo ſcholio patuit, 1440. 1450. 560. 1350. 1225. Atque in hos diſtribuendus eſt datus numerus 6025.

71 *Datis duobus numeris, alium quendam inuenire, qui vtrumque datum multiplicans faciat maiorem quidem quadratum, minorem vero latus eius quadrati.* LXXI.

SINT dati duo numeri 200. & 5. ſitque numerus, quem quærimus, 1℞. Ex 1℞. in 200. fit numerus 200℞. Et ex 1℞ in 5. fit numerus 5℞. qui debet latus eſſe illius: atque adeo in ſe ductus faciet numerum æqualem 200℞. Facit autem numerus 5℞. in ſe 25ʒ. Eſt ergo æquatio inter 200℞. & 25ʒ. Diuiſis igitur 200. per 25. fiet 1℞. 8. numerus quæſitus (quod numeri Coſſici ſint collaterales.) Hic enim multiplicans 200. facit quadratum 1600. cuius latus eſt numerus 40. ex 8. in 5. productus.

Si numeri dati ſint 20. & 15. reperietur numerus $\frac{4}{45}$. Nã ſi ponatur numerus quæſitus 1℞. fiunt ex 1℞ in 20. & 15. numeri 20℞. & 15℞. Et ex 15℞ in ſe fit numerus 225ʒ. qui æqualis debet eſſe quadrato 20℞. Diuiſis igitur 20. per 225. fit 1℞. $\frac{20}{225}$. ſiue $\frac{4}{45}$. numerus quæſitus. Hic enim multiplicans 20. & 15. facit $\frac{80}{45}$. ſiue $\frac{16}{9}$. quadratum, cuius latus eſt numerus $\frac{60}{45}$. ſiue $\frac{4}{3}$. productus ex $\frac{4}{45}$. in 15.

72 *Duos numeros inuenire, ita vt ſumma ex ipſis confecta, & exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum exceſſus minor ſit, quam datæ ſummæ quadratus.* LXXII.

SIT eorum ſumma data 20. & exceſſus quadratorum datus 80. qui exceſſus minor eſt quadrato 400. datæ ſummæ 20.

Ponatur primus numerus 1℞. ideoque ſecundus 20 — 1℞. vt eorum ſumma ſit 20. Quadrati eorum 1ʒ. & 400 — 40℞ + 1ʒ. cum ex ductu 20 — 1℞. in 20 — 1℞. fiat numerus 400 — 40℞ + 1ʒ. vt in hac formula apparet. Detracto illo quadrato ex hoc, remanet exceſſus 400 — 40℞. æqualis 80. Additis 40℞. vtrinque, erit æquatio inter 400. & 80 + 40℞. Ablatiſque 80. vtrinque, inter 320. & 40℞. Diuiſis ergo 320. per 40. fiet 1℞. 8, primus numerus, ſecundus vero poſitus 20 — 1℞. erit 12. Summa numerorum 8. & 12. eſt 20. & quadratorum 64. & 144. exceſſus 80.

	20	— 1℞	
	20	— 1℞	
	— 20℞	+ 1ʒ	
400	— 20℞		
400	— 40℞	+ 1ʒ	

QVOD ſi detur eadem ſumma numerorum 20. & exceſſus quadratorum 400. qui minor non eſt quadrato 400. qui ex ſumma fit: erit quæſtio impoſſibilis. Nam poſito primo numero 1℞. & ſecundo 20 — 1℞. erunt rurſus eorum quadrati 1ʒ. & 400 — 40℞ + 1ʒ. quorum exceſſus 400 — 40℞. æqualis debet eſſe numero 400. quod fieri non poteſt.

DETVR rurſus numerorum 20. & exceſſus quadratorum item 20. Poſito primo numero 1℞. & ſecundo 20 — 1℞. erit eorum ſumma 20. & exceſſus quadratorum 400 — 40℞. æqualis 20. Additis ergo vtrinque 40℞. erit æquatio inter 20 + 40℞. & 400. Ablatiſque 20. vtrinque, inter 380. & 40.℞ Diuiſis ergo 380. per 40. fiet 1℞. $9\frac{1}{2}$. primus numerus. Secundus ergo erit $10\frac{1}{2}$. quorum ſumma 20. & exceſſus quadratorum $\frac{441}{4}$. $\frac{361}{4}$. numerus $\frac{80}{4}$. hoc eſt, 20.

73 *Datum numerum in duos diuidere, vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ſit quilibet numerus minor quadrato dati numeri.* LXXIII.

SIT datus numerus 20. diuidendus in duos, vt exceſſus quadratorum ex ipſis factorum ſit 80. Hoc ænigma à præcedenti diuerſum non eſt. Nam ſi reperiantur duo numeri, quorum ſumma datus numerus 20. & exceſſus quadratorum ex ipſis factorum 80. erit ſumma data 20. in illos duos numeros diſtribuenda, &c.

74 Duos

LXXIIII. 74 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt ſumma quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ad exceſſum numerorum inuentorum proportionem habeat datam.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, & ſumma quadratorum ex ipſis procreatorum ad ſummam inuentorum numerorum proportionem habeat decuplam. Ponatur minor numerus 1℞. maior 3℞. ad illum triplus. Exceſſus eſt 2℞. Et quadratorum 1ʒ. 9ʒ. ſumma 10ʒ. decupla ad 2℞. Ergo æquatio eſt inter 10ʒ. & 20℞. Diuiſis igitur 20. per 10. fiet 1℞. 2. minor numerus, (quia numeri Coſſici collaterales ſunt) maiorque erit 6. Exceſſus eorum eſt 4. & ſumma quadratorum 4. 36. eſt 40. qui numerus exceſſus 4. decuplus eſt.

LXXV. 75 *Duos numeros in data proportione reperire, ita vt exceſſus quadratorum ipſorum ad exceſſum inuentorum numerorum proportionem habeat datam.*

NVMERI quæſiti habeant proportionem triplam, & ad eorum exceſſum habeat exceſſus quadratorum proportionem duodecuplam. Ponatur minor numerus 1℞. maior 3℞. illius triplus. Exceſſus eorum eſt 2℞. Quadratorum 1ʒ. & 9ʒ. eſt 8ʒ. duodecuplam habens proportionem ad 2℞. Igitur æquatio erit inter 8ʒ. & 24℞. Diuiſis ergo 24. per 8. fiet 1℞ 3. minor numerus (quod collaterales ſint numeri Coſſici) maiorque erit 9. Exceſſus eorum eſt 6. Et quadratorum 9. & 81. exceſſus 72. ad 6. proportionem habet duodecuplam.

LXXVI. 76 *Duos numeros interuenire in data proportione, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum ſummam datam habeat proportionem.*

HABEANT quæſiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum genitus ad eorum ſummam, proportionem ſeptuplam. Ponatur minor 1℞. maior 4℞. illius quadruplus. Summa eorum eſt 5℞. Et ex 1℞ in 4℞. fit numerus 4ʒ. qui ſeptuplam proportionem habere debet ad 5℞. Ergo æquatio erit inter 4ʒ. & 35℞ Diuiſiſque 35. per 4. fiet 1℞. $\frac{35}{4}$. minor numerus quod numeri Coſſici ſint collaterales. Maior ergò erit $\frac{140}{4}$. Summa eorum eſt $\frac{175}{4}$. Ex $\frac{35}{4}$. in $\frac{140}{4}$. fit numerus $\frac{4900}{16}$. qui ad $\frac{175}{4}$. proportionem habet ſeptuplam.

LXXVII 77 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum exceſſum datam habeat proportionem.*

HABEANT quæſiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum productus ad eorum exceſſum proportionem ſeptuplam. Ponatur minor 1℞. & maior 4℞. illius quadruplus. Exceſſus eorum eſt 3℞. Et productus ex 1℞. in 4℞. eſt 4ʒ. qui ſeptuplam habere debet proportionem ad 3℞. Ergo æquatio erit inter 4ʒ. & 21℞. Diuiſiſque 21. per 4. fiet 1℞. $\frac{21}{4}$. minor numerus. quod numeri Coſſici collaterales ſint Maior ergo erit $\frac{84}{4}$. Exceſſus eorum eſt $\frac{63}{4}$. Ex $\frac{21}{4}$. in $\frac{84}{4}$. fit numerus $\frac{1764}{16}$. qui ad $\frac{63}{4}$. proportionem habet ſeptuplam.

LXXVIII. 78 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam.*

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus minoris ad maiorem, ſextuplam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Quadratus minoris eſt 1ʒ. qui ſextuplus eſſe debet maioris numeri 3℞. Ergo æquatio eſt inter 1ʒ. & 18℞. Diuiſiſque 18. per 1. fiet 1℞. 18. minor numerus, quod numeri Coſſici ſint collaterales. Maior ergo erit 54. Quadratus minoris, nimirum 324. ad maiorem 54. proportionem habet ſexcuplam.

LXXIX. 79 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad Quotientem, ſi maior per minorem diuidatur, proportionem habeat quamcunque datam.*

HABEANT numeri quæſiti proportionem quadruplam, at quadratus minoris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, duplam. Ponantur quæſiti numeri 1℞. 4℞. Diuiſo maiore per minorem, fit Quotiens 4. ad quem 1ʒ. quadratus minoris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio ſit inter 1ʒ. & 8. Diuiſis 8. per 1. fit 1ʒ. 8. & 1℞. √ʒ 8. minor numerus. Maior ergo erit √ʒ 128. ad √ʒ 8. quadruplus. Diuiſo maiore per minorem, fit Quotiens √ʒ 16. id eſt, 4. ad quem 8. quadratus minoris proportionem habet duplam.

LXXX. 80 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum ſummam habeat proportionem datam quamlibet.*

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris ſexcuplam ad eorum ſummam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞. illius triplus. Quadratus minoris eſt 1ʒ. qui ſexcuplam proportionem habere debet ad 4℞. ſummam videlicet amborum. Ergo æquatio erit inter 1ʒ. & 24℞. Diuiſiſque 24. per 1. fiet 1℞. 24. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Numeri ergo quæſiti ſunt 24. 72. in proportione tripla. Et quadratus minoris 576. ſexcuplam proportionem habet ad 96. ſummam ex ambobus collectam.

81 Duos

81 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum exceſſum habeat datam proportionem.* LXXXI.

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris ſexcuplam ad eorum exceſſum. Ponatur minor 1℞.& maior 3℞.illius triplus. Exceſſus illorum eſt 2℞.ad quem quadratus 1ʒ.minoris labere debet ſexcuplam proportionem. Ita vt æquatio ſit inter 1.ʒ.& 12℞. Diuiſis ergo 12. per 1. fiet 1℞.12. propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Numeri igitur ſunt quæſiti 12.36. triplam habentes proportionem. Et quadratus minoris, videlicet 144.ad 24. exceſſum eorum ſexcuplus eſt.

82 *Duos numeros in data proportione inuenire. ita vt quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam.* LXXXII.

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & quadratus maioris ad minorem, ſexcuplam. Ponatur minor 1℞.& maior 3℞.illius triplus. Quadratus maioris 9ʒ.ad minorem 1℞. proportionem habere debet ſexcuplam. Erit ergo æquatio inter 9ʒ.& 6℞. Diuiſisque 6. per 9. fiet 1℞ $\frac{6}{9}$.ſiue $\frac{2}{3}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Numeri ergo quæſiti ſunt $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{3}$ proportionem habentes triplam. Et quadratus maioris, nimirum $\frac{36}{9}$. proportionem ſexcuplam habet ad minorem $\frac{2}{3}$.ſiue ad $\frac{6}{9}$.

83 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quadratus maioris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, proportionem habeat datam quamcunque.* LXXXIII

HABEANT quæſiti nnmeri proportionem quadruplam, at quadratus maioris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, duplam. Ponantur numeri quæſiti 1℞. 4℞. Diuiſo hoc per illum, fit Quotiens 4.ad quem 16ʒ.quadratus maioris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio ſit inter 16ʒ.& 8. Diuiſis 8.per 16.fit 1ʒ.$\frac{1}{2}$.& 1℞.√ʒ $\frac{1}{2}$.minor numerus. Maior ergo erit √ʒ8.illius quadruplus. Diuiſo maiore per minorem, fit Quotiens √ʒ 16.id eſt, 4.ad quem 8. quadratus maioris proportionem habet duplam.

84 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum ſummam habeat datam proportionem.* LXXXIV

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ſexcuplam ad eorum ſummam. Ponatur minor 1℞.& maior 3℞. illius triplus. Quadratus maioris 9ʒ. ſexcuplus eſſe debet ad eorum ſummam 4℞. Eſt igitur æquatio inter 9ʒ. & 24℞. Diuiſisque 24. per 9. fiet 1℞. $\frac{24}{9}$. vel $\frac{8}{3}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Ac proinde numeri quæſiti triplam habentes proportionem erunt $\frac{8}{3}$. $\frac{24}{3}$. Et quadratus maioris $\frac{576}{9}$. ſexcuplus eſt ad $\frac{32}{3}$. eorum ſummam: hoc eſt, ad $\frac{96}{9}$.

85 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum exceſſum habeat proportionem datam.* LXXXV.

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ad eorum exceſſum, decuplam. Ponatur minor 1℞.& maior 3℞.illius triplus. Exceſſus eorum eſt 2℞.ad quem quadratus maioris 9ʒ.decuplus eſſe debet. Eſt igitur æquatio inter 9ʒ.& 20℞. Diuiſisque 20.per 9.fiet 1℞. $\frac{20}{9}$.propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Numeri ergo quæſiti ſunt $\frac{20}{9}$. $\frac{60}{9}$. in proportione tripla. Exceſſus eorum eſt $\frac{40}{9}$. ad quem decuplus eſt quadratus maioris $\frac{3600}{81}$. ſiue $\frac{400}{9}$.

86 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, ita vt omnium trium duo quicunque ſimul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros conſtituant in exceſſu æquali, hoc eſt, Arithmetice proportionales.* LXXXVI

DATI duo numeri ſint 3.& 5.ponaturque tertius inuentus 1℞. Hic cum 3.facit 1℞ + 3.quæ ſumma ducta in reliquum 5.facit 5℞ + 15.vnum numerum. Deinde 1℞.cum 5. facit 1℞ + 5. quæ ſumma ducta in reliquum 3.facit 3℞ + 15.alterum numerum. Denique ex 3.& 5.fit numerus 8. qui ductus in tertium 1℞. facit 8℞. tertium numerum. Opus eſt iam, hos tres numeros 5℞ + 15. 3℞ + 15. & 8℞. eſſe Arithmetice proportionales. quod tribus modis fieri poteſt. Aut enim maximus eſt 5℞ + 15. & medius 3℞ + 15. & minimus 8℞. Aut maximus erit 5℞ + 15.medius 8℞. & minimus 3 + 15℞. Aut denique maximus erit 8℞. medius 5℞ + 15. & minimus 3℞ + 15. neque enim maximus eſſe poteſt 3℞ + 15. cum minor ſit, quam 5℞ + 15.

SINT primum 5℞ + 15. 3℞ + 15. 8℞. Arithmetice proportionales. Igitur (vt lib.5.Eucl.in 4.proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) ſumma extremorum 13℞ + 15. æqualis erit duplo medij, hoc eſt, numero 6℞ + 30. Ablatisq; 6℞ vtrinque, æquatio erit inter 7℞ + 15 & 30. Ablatisque rurſum 15 vtrinque, inter 7℞, & 15. Diuiſis ergo 15. per 7. fiet 1℞. $\frac{15}{7}$. numerus quæſitus. Vel ſi dicti tres numeri ſunt Arithmetice proportionales, habebunt eundem exceſſum. Sed 5℞ + 15. excedit 3℞ + 15.numero 2℞. Et 3℞ + 15.excedit 8℞ numero 15 -- 5℞. vt ex regula ſubtractionis patet. Eſt ergo æqualitas inter 2℞ & 15 − 5℞. Additisque 5℞.vtrinque, inter 7℞ & 15. fietque rurſus 1℞. $\frac{15}{7}$. Iam $\frac{15}{7}$. cum 3.faciunt 3 $\frac{15}{7}$. hoc eſt, $\frac{36}{7}$. qui numerus ductus in reliquum 5 facit $\frac{180}{7}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{7}$. & 5 fit ſumma 5 $\frac{15}{7}$. hoc eſt, $\frac{50}{7}$; quæ ducta in 3. reliquum numerum facit $\frac{150}{7}$. numerum medium. Denique ex 3.

 & 5.

& 5. fit ſumma 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{7}$. facit $\frac{120}{7}$. tertium numerum. Habentque hi tres numeri $\frac{180}{7}$. $\frac{150}{7}$. $\frac{120}{7}$. eundem exceſſum $\frac{30}{7}$. ſiue $4\frac{2}{7}$.

SINT deinde 5℞ + 15. 8℞. 3℞ + 15. Arithmetice proportionales. Igitur ſumma extremorum 8℞ + 30. æqualis erit duplo medij, numero videlicet 16℞. Ablatiſque 8℞ vtrinque, æquatio erit inter 0. & 8℞. Diuiſiſque 30 per 8. fiet 1℞. $\frac{30}{8}$ hoc eſt $\frac{15}{4}$. Vel dicti tres numeri habebunt eundem exceſſum. Eſt autem inter 5℞ + 15. & 8℞. exceſſus 15 — 3℞. At inter 8℞. & 3℞ + 15. exceſſus eſt 5℞ — 15. Eſt ergo æquatio inter 15 — 3℞. & 5℞ — 15. Additiſque 15. vtrinque, inter 30 — 3℞ & 5℞. Additiſque rurſum 3℞ vtrinque, inter 30 & 8℞. fietque rurſum 1℞. $\frac{30}{8}$. ſiue $\frac{15}{4}$. Iam ex $\frac{15}{4}$ & 3. fit ſumma $3\frac{15}{4}$. ſiue $\frac{27}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 5 facit $\frac{135}{4}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{4}$ & 5. fit ſumma $5\frac{15}{4}$. ſiue $\frac{35}{4}$. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit $\frac{105}{4}$. numerum tertium. Denique ex 3 & 5 fit ſumma 8. quæ ducta in reliquum numerum $\frac{15}{4}$. facit $\frac{120}{4}$. medium numerum: Habentque hi tres numeri, $\frac{135}{4}$. $\frac{120}{4}$. $\frac{105}{4}$. eundem exceſſum $\frac{15}{4}$. ſiue $3\frac{3}{4}$.

POSTREMO ſint 8℞. 5℞ + 15. 3℞ + 15. Arithmetice proportionales. Igitur ſumma extremorum 11℞ + 15. æqualis erit duplo medij hoc eſt, numero 10℞ + 30. Ablatiſque 10℞. vtrinque, æquatio erit inter 1℞ + 15. & 30. Ablatiſque rurſum 15 vtrinque, inter 1℞. & 15. fietque 1℞. 15. numerus quæſitus. Vel dicti tres numeri habebunt eundem exceſſum. Eſt autem inter 8℞. & 5℞ + 15. exceſſus 3℞ — 15. At inter 5℞ + 15. & 3℞ + 15 exceſſus eſt 2℞. Eſt ergo æqualitas inter 3℞ — 15. & 2℞. Additiſque 15. vtrinque. inter 3℞. & 2℞ + 15. Ablatiſq; 2℞. vtrinq; , inter 1℞. & 15. fietq; rurſus 1℞. 15. numerus quæſitus. Iam ex 15. & 3. fit ſumma 18. quæ ducta in reliquum numerum 5. facit 90. numerum medium. Deinde ex 15. & 5. fit ſumma 20. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit 60. tertium numerum. Denique ex 3. & 5. fit ſumma 8. quæ ducta in reliquum numerum 15. facit 120. primum numerum: Habentque tres hi numeri 120. 90. 60. eundem exceſſum 30.

HOC quæſitum ſoluemus etiam in ænigmate 131. vbi dabuntur duo numeri, ita vt tres numeri producti non poſſint tribus modis eſſe proportionales Arithmetice, vt hic, ſed duobus tantum modis.

LXXXVII 87 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ad eorum ſummam habeat prportionem datam.*

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & exceſſus quadratorum ad ſummam eorum, octuplam. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞ illius triplus. Summa eorum eſt 4℞. & exceſſus quadratorum 1ʒ. 9ʒ. eſt 8ʒ. qui ad 4℞ proportionem habere debet octuplam. Erit ergo æquatio inter 8ʒ. & 32℞. Diuiſiſque 32. per 8. fiet 1℞ 4. minor numerus: propterea quod numeri Coſſici ſunt collaterales. Maior autem erit 12. Exceſſus quadratorum 16. 144. eſt 128. qui ad 16. amborum ſummam proportionem habet octuplam.

LXXXVIII 88 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, ita vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ſuperet datum exceſſum quouis numero dato: dummodo quadratus exceſſus numerorum quæſitorum dati minor ſit ſumma ex eodem exceſſu, & poſtulato numero collecta.*

SIT exceſſus numerorum quæſitorum 7. Exceſſus autem quadratorum, qui ex quæſitis numeris fiunt, maior ſit, quam 7. poſtulato numero 100. Ponatur minor numerus 1℞ maior 1℞ + 7. vt nimirum illum ſuperet numero 7. Quadrati horum numerorum 1ʒ. & 1ʒ + 14℞ + 49. ſe mutuo excedunt numero 14℞ + 49. qui ſuperare debet 7. numero 100. hoc eſt, æqualitas eſſe debet inter 14℞ + 49. & 107. Ablatiſque 49. vtrinque, inter 14℞, & 58. Diuiſis ergo 58 per 14. fiet 1℞. $4\frac{1}{7}$. minor numerus: maior ergo erit $11\frac{1}{7}$. Vt minorem ſuperet numero 7. Quadrati numerorum $\frac{841}{49}$. $\frac{6084}{49}$. ſe mutuo excedunt numero $\frac{5243}{49}$. qui datum numerorum exceſſum 7. ſuperat numero 100. hoc eſt, æqualis eſt numero 107. cum 107. faciant $\frac{5243}{49}$.

HÆC quæſtio ſolui potuit, quia quadratus dati exceſſus 7. nimirum numerus 49. minor eſt ſumma 107. ex dato exceſſu 7. & numero poſtulato 100. collecta. Quod ſi proponantur inueniendi duo numeri in dato exceſſu 7. ita vt exceſſus quadratorum ipſorum maior ſit, quam 7. numero 10. quæſtio erit impoſſibilis. quod optime ex ipſa operatione diſces. Poſito enim minore numero 1℞. & maiore 1℞ + 7. vt ſe mutuo ſuperent ſeptenario. Quadrati horum numerorum rurſum ſe excedunt numero 14℞ + 49. qui ſuperare debet 7. numero 10. quod eſt abſurdum, cum illum ſuperet numero 14℞ + 42. qui maior eſt, quam 7. Cauſa eſt, quia quadratus 49. exceſſus 7. minor non eſt ſumma 17.

LXXXIX. 89 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, ita vt exceſſus quadratorum, qui ex ipſis fiunt, ad exceſſum datum datam habeat proportionem, & inſuper contineat datum numerum, dummodo quadratus dati exceſſus minor ſit ſumma, quæ ex numero, qui ex ductu denominatoris datæ proportionis in ipſum exceſſum fit, & ex dato numero colligitur.*

DATVS exceſſus ſit 4. & exceſſus quadratorum, qui ex quæſitis numeris fiunt, ad 4. habeat proportionem quincuplam, & inſuper contineat 20. vnitates. Ponatur minor numerus 1℞. & maior 1℞ + 4. vt illum quaternario ſuperet. Quadratorum 1ʒ. & 1ʒ + 8℞ + 16. eſt 8℞ + 16. qui quinquies continere debet datum exceſſum 4. & præterea 20. Quintuplum autem exceſſus 4. cum 20. facit 40. cui numero æqualis eſſe debet exceſſus quadratorum 8℞ + 16. Ablatis igitur 16. vtrinque, erit æqualitas inter 24. & 8℞. Diuiſiſque 24. per 8. fiet 1℞. 3. minor numerus. maior ergo erit 7. Eorum exceſſus 4. Quadratorum 9. 49. exceſſus 40. continet exceſſum 4. quinquies, ac præterea 20. vnitates.

HÆC etiam quæſtio ſolui potuit, quia quadratus 16. dati exceſſus 4. minor eſt ſumma ex quincuplo exceſſus 4. & numero 20. collecta. Quod ſi exceſſus detur 4. & proportio tripla, & inſuper tres vnitates. quæſtio fiet

ſtio fiet impoſſibilis. quod facile ex ipſa operatione cognoſcetur. Poſito enim minore numero 1℞. & maiore 1℞ + 4. erit exceſſus quadratorum 8℞ + 16. qui æqualis debet eſſe ſummæ ex triplo exceſſus 4. & numero 3. collecta, hoc eſt, numero 15. quod eſt abſurdum. Cauſa eſt, quia quadratus 16. exceſſus 4. non eſt minor numero 15.

90 *Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos diſtribuere.* XC.

HOC ænigma ſine Algebra ſoluimus lib. 8. noſtræ Geometriæ practicæ, propoſ. 9. vbi propoſitum quadratum numerum non in duos ſolum, ſed in quotuis numeros quadratos partiti ſumus. Per Algebram autem idem hoc modo expediemus. Sit quadratus numerus 16. diuidendus in duos quadratos. Ponatur primus quadratus 1℥. ac proinde ſecundus 16 — 1℥. Finge huius latus eſſe quotcunque radices, minus tot vnitatibus, quot ſunt in latere dati quadrati, nimirum 2℞ — 4. Huius quadratum 4℥ + 16 — 16℞. æquale debet eſſe quadrato 16 — 1℥. Addito 1℥. vtrinque, erit æquatio inter 5℥ + 16 — 16℞. & 16. Additiſque rurſum 16℞. inter 5℥ + 16. & 16℞ + 16. Ablatiſque 16. vtrinque inter 5℥ & 16℞. Diuiſis igitur 16. per 5. fiet 1℞. $\frac{16}{5}$. quia numeri Coſſici collaterales ſunt. Huius radicis quadratus $\frac{256}{25}$ erit primus, quem poſuimus 1℥. Secundus autem 16 — 1℥. erit $\frac{144}{25}$. cuius radix $\frac{12}{5}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{400}{25}$. nimirum 16.

Aliter. Ponatur latus primi quadrati eſſe 1℞. Latus vero ſecundi quadrati eſſe quotuis radices, minus latere dati quadrati, nimirum 5℞ — 4. Quadrati numeri horum laterum 1℥. & 25℥ + 16 — 40℞. ſimul æquales debent eſſe dato quadrato 16. Additis 40℞ vtrinque, erit æquatio inter 26℥ + 16. & 40℞ + 16. Ablatiſq; 16. vtrinque, inter 26℥. & 40℞. Diuiſis ergo 40. per 26. fiet 1℞ $\frac{20}{13}$. (quod numeri Coſſici ſint collaterales) cuius quadratum $\frac{400}{169}$. erit primus numerus quadratus. Secundus autem erit $\frac{2304}{169}$. qui relinquitur, ſi ille ex 16. detrahatur. Eius latus eſt $\frac{48}{13}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{2704}{169}$. hoc eſt, 16.

SCHOLIVM.

QVOD ſi minorem numerum quadratum iterum partiemur in duos quadratos, diuiſus erit datus quadratus in tres. Et ſi minimus rurſum ſecetur in duos, ſectus erit datus in quatuor. Atque ita deinceps in infinitum. Vides ergo propoſitum quadratum diuidi poſſe per Algebram in duos quadratos varijs modis: ita vt ſemper fiant diuerſi duo quadrati.

HOC problema ſolui etiam poteſt ſine Algebra, hoc modo. Propoſito quadrato, ducatur eius latus in quemcunq; numerum, & duplum producti numeri diuidatur per eiuſdem illius numeri quadratum auctum vnitate. Quotientis enim quadratus erit vnus quadratus quæſitus, quo ablato ex propoſito quadrato, relinquetur alter quadratus.

Vt ſi propoſitus ſit quadratus 36. ducatur eius latus 6. per 3. vt fiant 18. Et huius duplum 36. diuidatur per quadratum eiuſdem numeri 3. auctum vnitate, nimirum per 10. Quotientis enim $\frac{36}{10}$ ſiue $\frac{18}{5}$. quadratus $\frac{324}{26}$. id eſt, 12 $\frac{24}{25}$. erit vnus quadratus, quo ablato ex 36. erit alter 23 $\frac{1}{25}$. cuius latus $\frac{24}{5}$ ſiue 4 $\frac{4}{5}$. & ambo quadrati 12 $\frac{24}{25}$. & 23 $\frac{1}{25}$. faciunt 36

Nota tamen, latus propoſiti quadrati non eſſe ducendum per 1. quia duo quadrati eſſent propoſitus quadratus, & 0. quod eſt ineptum. Vt ſi 6. latus propoſiti quadrati 36. duceretur in 1. vt fiant 6. & huius producti numeri duplum 12. diuideretur per 2. nimirum per quadratũ vnitatis auctum vnitate, fieret Quotiens 6. cuius quadratum eſt 36. numerus propoſitus, &c.

91 *Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum in alios duos quadratos diuidere.* XCI.

SIT numerus 34. ſiue quadratus, ſiue non quadratus, compoſitus ex duobus quadratis 9. & 25. diuidendus in alios duos quadratos. Sint latera quadratorum 3. & 5. ponaturque latus primi quadrati quæſiti 1℞ + 3. nimirum vna radix, plus latere primi quadrati dati. Latus vero ſecundi quadrati quæſiti, quotcunque radices minus latere ſecundi quadrati dati, nimirum 2℞ — 5. Quadrati horum laterum 1℥ + 6℞ + 9. & 4℥ — 20℞ + 25. faciunt ſummam 5℥ + 34 — 14℞. æqualem dato numero 34. Additis ergo 14℞ vtrinque, erit æquatio inter 5℥ + 34. & 14℞ + 34. Ablatiſque 34. vtrinque, inter 5℥. & 14.℞. Diuiſis igitur 14. per 5. fiet 1℞. $\frac{14}{5}$. propterea quod numeri Coſſici ſunt collaterales. Ergo latus primi quadrati quæſiti, quod poſuimus 1℞ + 3. erit $\frac{29}{5}$. Secundi vero quadrati latus, quod poſuimus 2℞ — 5. erit $\frac{28}{5}$ — 5. hoc eſt, $\frac{3}{5}$. Quadrati horum laterum inuentorum $\frac{841}{25}$. $\frac{9}{25}$. faciunt $\frac{850}{25}$. hoc eſt, numerum 34. datum.

92 *Duos numeros quadratos in dato exceſſu inuenire.* XCII.

DETVR exceſſus 70. Ponatur latus vnius quadrati 1℞. alterius vero latus 1℞. plus quotlibet vnitatibus, dummodo quadratus numerus ex ipſis deſcriptus minor ſit dato exceſſu, nimirum 1℞ + 8. Quadrati horum laterum 1℥. & 1℥ + 16℞ + 64. exceſſum habent 16℞ + 64. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 70. Ablatis vtrobique 64. erit æquatio inter 16℞. & 6. Diuiſis ergo 6. per 16. fiet 1℞ $\frac{3}{8}$. latus vnius quadrati. Latus alterius poſitum 1℞ + 8. erit 8 $\frac{3}{8}$. ſiue $\frac{67}{8}$. Quadrati horum laterum inuentorum ſunt $\frac{9}{64}$. & $\frac{4489}{64}$. quorum exceſſus $\frac{4480}{64}$. hoc eſt, 70.

MANIFESTVM autem eſt, alios atque alios duos numeros quadratos poſſe reperiri in dato eodem exceſſu, prout numerus abſolutus in ſecundi quadrati radice alius atque alius aſſumetur. Vt dato eodem exceſſu 70. ſi latus primi quadrati ponatur 1℞. & ſecundi 1℞ + 1. erunt quadrati 1℥. & 1℥ + 2℞ + 1. & eorum exceſſus 2℞ + 1. qui æqualis debet eſſe dato exceſſui 70. Ablata 1. vtrinque, erit æqualitas inter 2℞. & 69. Diuiſis igitur 69. per 2. fiet 1℞. 34 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{69}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{4761}{4}$. ſiue 1190 $\frac{1}{4}$. Latus autem ſecundi quadrati, quod poſuimus 1℞ + 1. erit 35 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{71}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{5041}{4}$. ſiue 1260 $\frac{1}{4}$. qui priorem 1190 $\frac{1}{4}$. ſuperat numero 70.

SI exceſſus detur 100. ponaturque latus primi quadrati 1℞. & latus ſecundi 1℞ + 10. vbi quadratus numeri 10. non eſt minor exceſſu dato 100. ſed æqualis, erit quæſtio impoſſibilis. Nam quadrati 1℥. &

1℥ +

1ʓ + 20℞ + 100. exceſſum habent 20℞ + 100. qui æqualis debet eſſe dato exceſſui 100. quod abſurdum eſt; cum ſit maior.

XCIII. 93 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati ſe excedant dato numero.*

HOC ænigma ſoluitur, vt præcedens. Poſitis enim duobus lateribus, vt in præcedenti, inuenientur duo latera, quorum quadrati datum exceſſum habebunt.

XCIIII. 94 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum ſumma quadratus ſit numerus.*

ASSVMATVR quilibet quadratus pro vno quæſitorum, nimirum 16. Et per problema 92. inueniantur duo numeri quadrati, quorũ exceſſus 16. quadratus aſſumptus. Nam minor quadratus inuentus cum aſſumpto 16. faciet alterum quadratum inuentum maiorem. Ponatur ergo vt in dicto problemate factum eſt, latus vnius quadrati 1℞. & alterius 1℞ + 3. (vt nimirum quadratus nu. 3. minor ſit dato exceſſu 16.) Quadrati horum laterum 1ʓ. & 1ʓ + 6℞ + 9. exceſſum habent 6℞ + 9. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 16. Ablatis 9. vtrobique, erit æquatio inter 6℞. & 7. Diuiſis ergo 7. per 6. fiet 1℞ $\frac{7}{6}$. latus minoris quadrati quæſiti. Latus maioris, quod poſuimus 1℞ + 3. erit $3\frac{7}{6}$. id eſt, $\frac{25}{6}$. Quadrati laterum $\frac{7}{6}$. & $\frac{25}{6}$. ſunt $\frac{49}{36}$. & $\frac{625}{36}$. quorum exceſſus $\frac{576}{36}$. hoc eſt, 16. Duo ergo quadrati quæſiti ſunt 16. ſiue $\frac{576}{36}$. & $\frac{49}{36}$. quorum ſumma $\frac{625}{36}$. quadratus numerus eſt, latus habens $\frac{25}{6}$.

Abiectis denominatoribus, erunt inuenti duo quadrati integri 576. & 49. facientes quadratum 625. cuius latus 25.

XCV. 95 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus quadratus ſit.*

HOC ænigma non aliter ſoluetur, ac problema 92. Si namque inueniantur per illud duo quadrati, quorum exceſſus datus ſit numerus quadratus, factum erit, quod hic iubetur.

XCVI. 96 *Tres numeros quadratos inuenire, quorum ſumma ſit numerus quadratus.*

PER problema 94. inueniantur primum duo quadrati, quorum ſumma ſit quadratus numerus, ſintq; V.g. hi 576. 49. facientes quadratum 625. Deinde per problema 95. inueniantur alij duo quadrati, quorum exceſſus ſit quadratus effectus 625. Nam minor inuentus cum quadrato 625. hoc eſt, cum duobus quadratis 576. 49. faciet maiorem quadratum. V.g. Dato exceſſu quadrato 625. inuenientur duo quadrati in illo exceſſu, hoc modo. Ponatur latus vnius 1℞ & alterius 1℞ + 10. (vt nimirum quadratus 10. vnitatum minor ſit dato exceſſu 625.) Quadrati horum laterum 1ʓ & 1ʓ + 20℞ + 100. exceſſum habent 20℞ + 100. qui æqualis eſſe debet dato exceſſui 625. Ablatis ergo 100. vtrobique, erit æquatio inter 20℞. & 525. Diuiſiſque 525. per 20. fiet 1℞ $26\frac{1}{4}$. Latus minoris quadrati. Maioris vero latus, quod poſitum fuit 1℞ + 10. erit $36\frac{1}{4}$. Horum laterum quadrati $\frac{11025}{16}$. $\frac{21025}{16}$. exceſſum habent $\frac{10000}{16}$, hoc eſt, 625. quadratum. Hic igitur exceſſus, nimirum $\frac{10000}{16}$. ex duobus quadratis 576. 49. conflatus cum minore quadrato $\frac{11025}{16}$. componet maiorem quadratum $\frac{21025}{16}$. Atque ita tres quadrati quæſiti ſunt 576. 49. $\frac{11025}{16}$. ſiue $\frac{9216}{16}$. $\frac{784}{16}$. $\frac{11025}{16}$. qui ſimul efficiunt quadratum $\frac{21025}{16}$. cuius latus eſt $\frac{145}{4}$.

Si abiiciantur denominatores, erunt inuenti tres quadrati integri 9216. 784. 11025. quorum ſumma quadratus numerus eſt 21025. cuius latus 145.

SCHOLIVM.

ATQVE eadem arte inuenientur 4 quadrati efficientes numerum quadratum, ſi prius per hoc problema inueniantur tres. Deinde per problema 95. duo habentes exceſſum, illum quadratum ex tribus quadratis confectum. Pari ratione inuenientur 5. 6. 7. & quotquot quis voluerit, ſi videlicet prius inueniantur 4. vel 5. vel 6. &c.

XCVII. 97 *Duos numeros inuenire, quorum tam ſumma, quam exceſſus ſit numerus quadratus.*

PONATVR latus quadrati ex duobus numeris quæſitis conflati, vna radix, plus quotcunque vnitatibus, nimirum 1℞ + 4. cuius quadratum 1ʓ + 8℞ + 16. æquale debet eſſe duobus numeris quæſitis. Si ergo vnus numerorum ponatur $\frac{1}{2}$ʓ. erit alter $\frac{1}{2}$ʓ + 8℞ + 16. qui duo ſimul faciunt dictum quadratum 1ʓ + 8℞ + 16. Reliquum eſt, vt $\frac{1}{2}$ʓ. ſubtractus ex $\frac{1}{2}$ʓ + 2℞ + 16. relinquat etiam numerum quadratum. Ergo reliquus numerus 8℞ + 16. æqualis erit alicui quadrato, qui V.g. ſit 36. maior, quam 16. numerus abſolutus. Ablatis igitur 16. vtrobique, erit æqualitas inter 8℞. & 20. Diuiſiſque 20. per 8. fit 1℞. $\frac{20}{8}$. ſiue $\frac{5}{2}$. cuius quadratus eſt $\frac{25}{4}$. Cum ergo vnus numerorum, qui quæruntur, poſitus ſit $\frac{1}{2}$ʓ. erit is $\frac{25}{8}$ primus numerus quæſitus. Secundus numerus, qui poſitus fuit $\frac{1}{2}$ʓ + 8℞ + 16. erit $\frac{25}{8}$. plus $\frac{40}{2}$ ſiue 20. & inſuper 16. hoc eſt, $\frac{25}{8}$. & 36. ſiue $\frac{288}{8}$. qui duo numeri $\frac{25}{8}$. & $\frac{288}{8}$. faciunt $\frac{313}{8}$. Ad hunc enim ſi adiiciatur primus $\frac{25}{8}$. fit ſumma $\frac{338}{8}$. id eſt, $\frac{169}{4}$ numerus quadratus, cuius latus $\frac{13}{2}$. Et ſi ab eodem ſecundo $\frac{313}{8}$. dematur primus $\frac{25}{8}$. remanet numerus $\frac{288}{8}$ ſiue $\frac{144}{4}$. quadratus etiam, cuius latus $\frac{12}{2}$. ſiue 6.

XCVIII. 98 *Duobus numeris datis, inuenire alium, qui vtrique ſeorſum additus faciat quadratum.*

SINT dati duo numeri 4. & 7. Ponatur, qui quæritur, 1℞. qui cum datis facit duos 1℞ + 4. & 1℞ + 7.

qu

qui quadrati debent eſſe. Detrahatur vnus ex altero, vt habeatur eorum exceſſus 3. quærantur que duo numeri, qui inter ſe multiplicati producant hunc eundem exceſſum 3. ita tamen, vt quadratũ ſemiſſis exceſſus ipſorum maius ſit minore numero dato 4. atque adeo æqualis eſſe poſſit minori numero compoſito 1℞ + 4. & quadratum ſemiſſis ſummæ eorundem maius ſit maiore numero dato 7. atque adeo æqualis eſſe poſſit maiori numero compoſito 1℞ + 7. quod cur fieri debeat, operatio docebit. Hi numeri erunt $\frac{1}{2}$. & 6. Nam inter ſe multiplicati producunt 3. Et exceſſus eorum eſt $5\frac{1}{2}$. hoc eſt, $\frac{11}{2}$. cuius ſemiſſis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. hoc eſt, $7\frac{9}{16}$. maius eſt, quam 4. Summa vero eorundem eſt $6\frac{1}{2}$. hoc eſt, $\frac{13}{2}$. cuius ſemiſſis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. hoc eſt, $10\frac{9}{16}$. maius eſt, quam 7. Inuenti autem ſunt hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 6. ſumpta ad libitum fractione $\frac{1}{2}$. cuius numerator vnitas vnus numerorum. Nam ſi eius denominator 2. ducatur in numerum 3. qui produci debet, fiet alter numerus 6. Quod ſi dati numeri forent 20. 23. habentes eundem exceſſum 3. non ſatisfacerent numeri $\frac{1}{2}$. & 6. Quare ſumenda eſſet alia fractio, nimirum $\frac{1}{10}$. pro vno numero. Nam ex 10. denominatore in 3. fiet alter numerus 30. Et ex $\frac{1}{10}$. in 30. fit numerus 3. Et exceſſus eorum eſt $29\frac{9}{10}$. hoc eſt, $\frac{299}{10}$. cuius ſemiſſis $\frac{299}{20}$. quadratum $\frac{89401}{400}$. ſiue $223\frac{201}{400}$. maius eſt, quam 20. Item ſumma eorundem numerorum eſt $30\frac{1}{10}$. hoc eſt, $\frac{301}{10}$. cuius ſemiſſis $\frac{301}{20}$. quadratum $\frac{90601}{400}$. ſiue $226\frac{201}{400}$. maius eſt, quam 23. Atque ita, ſi hi numeri $\frac{1}{10}$. & 30. non ſatisfacerent, accipienda eſſet alia fractio maioris denominationis, &c. Ac toties iteranda operatio, donec duo numeri reperiantur propoſito ſatisfacientes.

NOS rem exequamur cum numeris $\frac{1}{2}$. & 6. in propoſito exemplo. quorum exceſſus $5\frac{1}{2}$. vel $\frac{11}{2}$. & huius ſemiſſis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. ſiue $7\frac{9}{16}$. æquale erit minori numero compoſito 1℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, erit æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & 1℞. atque idcirco 1℞ erit $3\frac{9}{16}$. quæ radix etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{2}$. & 6. eſt $6\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{13}{2}$. & huius ſemiſſis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. ſiue $10\frac{9}{16}$. æquale erit maiori numero compoſito 1℞ + 7. Ablatis ergo 7. vtrobique, fiet æquatio inter $3\frac{9}{16}$. & 1℞. vt prius. Numerus igitur quæſitus eſt $3\frac{9}{16}$. Hic enim additus ad 4. & 7. faciet quadratos $7\frac{9}{16}$. & $10\frac{9}{16}$. ſiue $\frac{121}{16}$. & $\frac{169}{16}$. quorum latera $\frac{11}{4}$. & $\frac{13}{4}$.

QVOD ſi ſumatur fractio $\frac{1}{3}$. & denominator 3. ducatur in exceſſum 3. producetur numerus 9. atque hi duo numeri $\frac{1}{3}$. & 9. multiplicati inter ſe facient 3. Eorum exceſſus eſt $8\frac{2}{3}$. ſiue $\frac{26}{3}$. & huius ſemiſſis $\frac{13}{3}$. quadratum $\frac{169}{9}$. ſiue $18\frac{7}{9}$. æquale erit minori numero compoſito 1℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, æquatio erit inter 1℞. & $14\frac{7}{9}$ ideoque 1℞. erit $14\frac{7}{9}$. quæ etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{3}$. & 9. eſt $9\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{28}{3}$. Huius ſemiſſis $\frac{14}{3}$. quadratũ $\frac{196}{9}$. ſiue $21\frac{7}{9}$. æquale erit maiori numero compoſito 1℞ + 7. Ablatis igitur 7. vtrinq;, erit æquatio inter $14\frac{7}{9}$. & 1℞. vt prius. Numerus igitur quæſitus eſt $14\frac{7}{9}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $18\frac{7}{9}$. & $21\frac{7}{9}$. ſiue $\frac{169}{9}$. $\frac{196}{9}$. quorum latera $\frac{13}{3}$. & $\frac{14}{3}$.

EX ipſa operatione intelligis, cur eligi debeant tales duo numeri producentes exceſſum datorum numerorum, quales diximus. Nam niſi quadratum ſemiſſis eorum exceſſus maius eſſet minore numero 4. non fieret æquatio inter ipſum, & minorem numerum compoſitum, vt patet, &c. Item conſtat, varios numeros inueniri poſſe, quorum quilibet additus ad datos duos numeros faciat duos quadratos, prout videlicet varij duo numeri accipientur, qui dictum exceſſum 3. producant. Ita vides, in dato exemplo inuentos eſſe duos numeros $3\frac{9}{16}$. & $14\frac{7}{9}$.

SED experiamur idem in datis numeris 20. & 23. Addita 1℞. vtrique, fient quadrati 1℞ + 20. & 1℞ + 23. fietq; æquatio (electis duobus numeris $\frac{1}{10}$. & 30. qui exceſſum 3. producant) inter $223\frac{201}{400}$. & 1℞ + 20. Item inter $226\frac{201}{400}$. & 1℞ + 23. Inuenieturque per vtramque æquationem 1℞. eſſe $203\frac{201}{400}$. qui numerus additus ad 20. & 23. facit quadratos $223\frac{201}{400}$. & $226\frac{201}{400}$. ſiue $\frac{89401}{400}$. & $\frac{90601}{400}$. quorum latera $\frac{299}{20}$. & $\frac{301}{20}$.

Aliter. Sint rurſus dati duo numeri 4. & 7. Ponatur numerus quæſitus 1ℨ — 4. Huic enim ſi addantur 4. fit 1ℨ. quadratus. Et ſi eidem numero 1ℨ — 4. addantur 7. fit alius quadratus 1ℨ + 3. cuius latus ſtatuatur 1℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ ſuperent 4. nimirum 1℞ — 5. cuius quadratum 1ℨ — 10℞ + 25. æquale eſſe debet quadrato 1ℨ + 3. Additis 10℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1ℨ + 25. & 1ℨ + 10℞ + 3. Et ſi auferatur 1ℨ. vtrobique, inter 25. & 10℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 22. & 10℞. Diuiſis igitur 22. per 10. fiet 1℞. $\frac{22}{10}$. ſiue $\frac{11}{5}$. à cuius quadrato $\frac{121}{25}$. ſi auferantur 4. (quia numerus quæſitus fuit poſitus 1ℨ — 4.) hoc eſt $\frac{100}{25}$. reliquus erit numerus quæſitus $\frac{21}{25}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $4\frac{21}{25}$. & $7\frac{21}{25}$. ſiue $\frac{121}{25}$. & $\frac{196}{25}$. quorum latera $\frac{11}{5}$. & $\frac{14}{5}$.

SI numeri dati ſint 20. & 23. ponendus erit numerus quæſitus 1ℨ — 20. vt additus ad 20. faciat quadratum 1ℨ. Et ſi eidem numero 1ℨ — 20. addantur 23. fiet alius quadratus 1ℨ + 3. cuius latus ſtatuatur 1℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ ſuperent 20. nimirum 1℞ — 21. cuius quadratum 1ℨ — 42℞ + 441. æquale debet eſſe quadrato 1ℨ + 3. Additis 42℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1ℨ + 441. & 1ℨ + 42℞ + 3. & ſi dematur 1ℨ. vtrobique, inter 441. & 42℞ + 3. Ablatisque 3. vtrobique, inter 438. & 42℞. Diuiſis ergo 438. per 42. fiet 1℞. $10\frac{3}{7}$. ſiue $\frac{73}{7}$. à cuius quadrato $\frac{5329}{49}$. ſi auferantur 20. (quia numerus quæſitus poſitus fuit 1ℨ — 20.) hoc eſt. $\frac{980}{49}$. reliquus fiet numerus quæſitus $\frac{4349}{49}$. ſiue $88\frac{37}{49}$. qui additus ad 20. & 23. faciet quadratos $108\frac{37}{49}$. & $111\frac{37}{49}$. hoc eſt $\frac{5329}{49}$. & $\frac{5476}{49}$. quorum latera $\frac{73}{7}$. & $\frac{74}{7}$.

99 *Duobus numeris datis, alium inuenire, qui ab vtroque ſeorſum ſubtractus, relinquat quadratum.* XCIX.

SINT dati duo numeri 9. & 21. Ponatur numerus quæſitus 9 — 1ℨ. Hic namque ex 9. ſubtractus relinquit quadratum 1ℨ. vt in hac formula apparet. Idem autem numerus 9 — 1ℨ. detractus ex 21. relinquit 12 + 1ℨ. vt in hac altera formula liquet, qui numerus debet etiã eſſe quadratus. Statuatur eius latus 1℞. minus quotuis vnitatibus, ita tamen, vt earũ quadratus ſuperet 12. nimirum 1℞ — 4. Huius quadratũ 1ℨ — 8℞ + 16. æquale debet eſſe

9	+	0	ℨ
9	—	1	ℨ
	+	1	ℨ

21	+	0	ℨ
9	—	1	ℨ
12	+	1	ℨ

qua-

quadrato 12 + 1℥. Additis 8℞. vtrinque, erit æquatio inter 1℥ + 16. & 1℥ + 8℞ + 12. Et ſi vtrobique auferatur 1℥. inter 16. & 8℞ + 12. Ablatiſque 12. vtrinque, inter 4. & 8℞. Diuiſis ergo 4. per 8. fiet 1℞. $\frac{4}{8}$. ſiue $\frac{1}{2}$. cuius quadratum $\frac{1}{4}$. ſi ex 9. auferatur, (propterea quod numerus poſitus fuit 9 — 1℥.) hoc eſt ex $\frac{36}{4}$. reliquus erit numerus quæſitus 8 $\frac{3}{4}$. ſiue $\frac{35}{4}$. qui videlicet detractus ex 9. & 21. relinquit quadratos $\frac{1}{4}$. & 12 $\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{1}{4}$. & $\frac{49}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{7}{2}$.

C. 100 *Datis duobus numeris, alium inuenire, à quo vterque datorum detractus, quadratum relinquat.*

SINT dati duo numeri 20. & 30. Ponatur numerus quæſitus 1℥ + 20. vt detractis 20. remaneat quadratus 1℥. Reliquum eſt, vt 1℥ — 10. (qui numerus relinquitur, ſubductis 30. ex 1℥ + 20. vt in formula appoſita manifeſtum eſt,) ſit etiam quadratus. Statuatur latus numeri 1℥ — 10. vna radix, minus quotcunque vnitatibus, nimirum 1℞ — 2. Huius quadratum 1℥ — 4℞ + 4. æquale debet eſſe quadrato 1℥ — 10. Additis 4℞. vtrinque, erit æquatio inter 1℥ + 4. & 1℥ — 10 + 4℞. Et rurſum additis 10. vtrinque, inter 1℥ + 14. & 1℥ + 4℞. Et ſi auferatur 1℥. vtrobiq; inter 14. & 4℞. Diuiſis ergo 14. per 4. fiet 1℞. $\frac{14}{4}$. ſiue $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. ſi addantur 20. (quia numerus poſitus fuit 1℥ + 20) hoc eſt, $\frac{80}{4}$. fiet numerus quæſitus $\frac{129}{4}$. hoc eſt, 32 $\frac{1}{4}$. à quo ſi demantur dati numeri 20. & 30. reliqui erunt quadrati 12 $\frac{1}{4}$. & 2 $\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{49}{4}$. & $\frac{9}{4}$. quorum latera $\frac{7}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

1 ℥	+	20	
	+	30	
1 ℥	—	10	

CI. 101 *Datum numerum in duos partiri, & inſuper quadratum numerum inuenire, qui cum vtraque parte ſeorſum quadratum efficiat.*

SIT numerus datus 40. Cape duos numeros, quorũ quadrati ſimul minorẽ numerum efficiant, quã 40. nimirum 2. & 4. Vnicuiq; addita 1℞ fiũt numeri 1℞ + 2. & 1℞ + 4. quorũ quadrata ſunt 1℥ + 4℞ + 4. & 1℥ + 8℞ + 16. Et ſi ab vtroq; dematur 1℥. remanebunt 4℞ + 4. & 8℞ + 16. partes numeri 40. diuidẽdi: quippe cum quilibet horum numerorum cum 1℥. faciat quadratum. Reliquum ergo eſt, vt duæ iſtæ partes efficiant 40. Efficiunt autem 12℞ + 20. qui numerus æqualis eſſe debet numero 40. Ablatis igitur 20. vtrobique, erit æquatio inter 12℞. & 20. Diuiſisq; 20. per 12. fiet 1℞. $\frac{20}{12}$. ſiue $\frac{5}{3}$. cuius quadratus $\frac{25}{9}$. ſiue 2 $\frac{7}{9}$. erit is, qui quæritur. Partes autem numeri 40. videlicet 4℞ + 4. & 8℞ + 16. erunt 10 $\frac{2}{3}$. & 29 $\frac{1}{3}$. quæ ſimul efficiunt 40. Et vterque cum quadrato inuento 2 $\frac{7}{9}$. quadratum numerum efficit. Nam 2 $\frac{7}{9}$. cum 10 $\frac{2}{3}$. ſiue cum 10 $\frac{6}{9}$. facit 13 $\frac{4}{9}$. hoc eſt, $\frac{121}{9}$. quadratum, cuius latus $\frac{11}{3}$. Et idem quadratus 2 $\frac{7}{9}$. cum 29 $\frac{1}{3}$. ſiue cum 29 $\frac{3}{9}$. facit quadratum 32 $\frac{1}{9}$. ſiue $\frac{289}{9}$. cuius latus $\frac{17}{3}$.

CII. 102 *Datum numerum in duos partiri, & inſuper numerum quadratum inuenire, à quo vtraque pars ſeorſum ſubtracta quadratum relinquat.*

SIT idem datus numerus 40. Latus quadrati quæſiti ponatur 1℞. plus tot vnitatibus, vt earum quadratum minus ſit numero 40. nimirum 1℞ + 5. cuius quadratus 1℥ + 10℞ + 25. à quo detractus numerus 10℞ + 25. relinquit quadratum 1℥. Vnus ergo numerorum, in quos diuidendus eſt 40. ſit 10℞ + 25. quandoquidem detractus ex 1℥ + 10℞ + 25. relinquit quadratum 1℥.

SVMATVR deinde alterius cuiuſdam quadrati latus 1℞ + 4. ita vt numerus eius abſolutus 4 minor ſit numero abſoluto 5. prioris lateris. Quadratus huius ſecundi lateris eſt 1℥ + 8℞ + 16. qui detractus à priori quadrato 1℥ + 10℞ + 25. relinquit 2℞ + 9. alterum numerorum, in quos diuidendus eſt 40. Atque ita quadratus, quem quærimus, eſt 1℥ + 10℞ + 25. & partes numeri 40. ſunt 10℞ + 25. & 2℞ + 9. Nam prior ex illo quadrato ſubductus relinquit quadratum 1℥. At poſterior ex eodem quadrato ſublatus relinquit 1℥ + 8℞ + 16. quandoquidem hic ex illo quadrato demptus relinquit 2℞ + 9. quod etiã hæc formula docet qui numerus 1℥ + 8℞ + 16. ſimiliter quadratus eſt lateris 1℞ + 4. vt paulo ante patuit. Reliquum eſt, vt duæ hæ partes 10℞ + 25. & 2℞ + 9. efficiant datum numerum 40. Efficiunt autem 12℞ + 34. qui numerus æqualis debet eſſe numero 40. Ablatis ergo 34. vtrobique. erit æquatio inter 12℞. & 6. Diuiſisque 6. per 12. fiet 1℞. $\frac{1}{2}$. Cum ergo latus quadrati quæſiti poſitum ſit 1℞ + 5. erit ipſum latus 5 $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{11}{2}$. & quadratus quæſitus $\frac{121}{4}$. ſiue 30 $\frac{1}{4}$. Partes autem numeri 40. quas poſuimus 10℞ + 25 & 2℞ + 9. erunt 30. & 10. quæ ſimul faciunt numerum datum 40. & detractæ ex quadrato inuento 30 $\frac{1}{4}$. relinquunt quadratos numeros $\frac{1}{4}$. & 20 $\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{81}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{9}{2}$.

1	℥	+	10	℞	+	25
0	℥	+	2	℞	+	9
1	℥	+	8	℞	+	16

CIII. 103 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum quolibet alio dato habeat ad ſummam reliquorum proportionem quamcunque datam: Item ſecundus cum eodem dato numero ad ſummam reliquorum habeat quoque datam quamuis proportionem: Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum ſummam proportionem quoque datam quamcunque.*

SIT datus numerus 73. inueniendique ſint tres numeri, quorum primus cum 73. ad reliquorũ ſummam habeat proportionẽ duplam: Secundus cum 73. ad reliquorũ ſummam proportionem triplam: Tertius deniq; cum 73. ad ſummam reliquorum proportionem quadruplam. Ponatur ſumma omnium trium 1℞. Ergo primus erit $\frac{2}{3}$℞ — 73. vt cum 73. habeat $\frac{2}{3}$℞. numerum videlicet duplum ad $\frac{1}{3}$℞. ſummam reliquorum. Secundus autem erit $\frac{3}{4}$℞ — 73. vt cum 73. habeat $\frac{3}{4}$℞. numerum videlicet triplum ad $\frac{1}{4}$℞. ſummam reliquorum.

rum. Tertius denique erit $\frac{4}{5}$℞ − 73. vt acceptis 73. habeat $\frac{4}{5}$℞. numerum ſcilicet quadruplum ad $\frac{1}{5}$℞. ſummam reliquorum. Quibus poſitis, cum primus acceptis 73. habeat $\frac{2}{3}$℞. qui duplus eſſe debet ſummæ reliquorum duorum. Facit autem ſecundus $\frac{3}{4}$℞ − 73. cum tertio $\frac{4}{5}$℞ − 73. ſummam $\frac{31}{20}$℞ − 146. ad quam duplus eſſe debet numerus $\frac{2}{3}$℞. quem primus cum 73. habet. ac proinde numerus $\frac{62}{20}$℞ − 292. duplus prædictæ ſummæ $\frac{31}{20}$℞ − 146. æqualis erit numero $\frac{2}{3}$℞. Additis igitur 292. vtrobique, æquatio erit inter $\frac{62}{20}$℞. & $\frac{2}{3}$℞ + 292. Ablatisque $\frac{2}{3}$℞. vtrobique, inter $\frac{146}{60}$℞. & 292. Diuiſis igitur 292. per $\frac{146}{60}$. fiet 1℞ 120. Ergo primus numerus $\frac{2}{3}$℞ − 73. erit 7. propterea quod $\frac{2}{3}$. numeri 120. ſunt 80. à quibus ſi auferantur 73. reliquus fit numerus 7. Secundus autem $\frac{3}{4}$℞ − 73. erit 17. quia $\frac{3}{4}$. numeri 120. ſunt 90. à quibus ſi deducantur 73. reliquus fit numerus 17. Tertius denique $\frac{4}{5}$℞ − 73. erit 23. quippe cum $\frac{4}{5}$. numeri 120. ſint 96. à quibus ſi tollantur 73. ſuperſint 23. Atque hi tres numeri 7. 17. 23. problemati ſatisfaciunt. Nam 7. cum 73. faciunt 80. qui numerus duplus eſt ſummæ 40. ex 17. & 23. collectæ. At 17. cum 73. faciunt 90. qui numerus triplus eſt ſummæ 30. ex 7. & 23. collectæ. Denique 23. cum 73. faciunt 96. qui numerus quadruplus eſt ſummæ 24. ex 7. & 17. collectæ.

104. *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum data parte ſummæ aliorum duorum faciat numerum* CIV.
datum? Item ſecundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcunque numerum datum? Tertius denique cum quauis data parte aliorum duorum faciat ſimiliter quemlibet datum numerum.

DEBEAT primus cum $\frac{1}{2}$. ſecundi ac tertij facere 42. Secundus cum $\frac{1}{4}$. primi ac tertij, 36. Tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac ſecundi, 39. Ponatur primus 1℞. Erit ergo ſemiſsis aliorum duorum 42 − 1℞. Ita enim primus cum hac ſemiſſe faciet 42. Ac proinde duplum huius ſemiſſis, nimirum 84. − 2℞. erit ſumma ſecundi ac tertij.

Et quia ſecundus cum $\frac{1}{4}$. primi & tertii facere debet 36. ſi auferemus quartam partem primi, nimirum $\frac{1}{4}$℞. ex 36. reliqua erit quarta pars tertii, vna cum ſecundo, numerus ſcilicet 36. − $\frac{1}{4}$℞. quem ſi detrahemus ex 84. − 2℞. hoc eſt, ex ſumma ſecundi ac tertij, dabit reliquus numerus 48. − 1$\frac{3}{4}$℞ tres reliquas partes quartas tertij. ac proinde tertia pars huius numeri, nimirum 16. − $\frac{7}{12}$℞. erit quarta pars tertij, quæ cum tribus quartis prædictis, hoc eſt, cum 48 − $\frac{7}{4}$℞. faciet totum tertium numerum 64. − $\frac{28}{12}$℞. ſiue 64. − 2$\frac{1}{3}$℞.

HVNC tertium ſi ſubducemus ex 84 − 2℞. ſumma ſecundi ac tertij, reliquus fiet ſecundus 20 + $\frac{1}{3}$℞.

QVIA vero tertius cum $\frac{1}{12}$ primi ac ſecundi, id eſt, cum $\frac{1}{12}$℞. & 1$\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{36}$℞. (quæ ſimul faciunt 1$\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{9}$℞.) debet facere 39. Facit autem tertius 64 − 2$\frac{1}{3}$℞. cum 1$\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{9}$℞. numerum 65$\frac{2}{3}$ − 2$\frac{2}{9}$℞. Nam − 2$\frac{1}{3}$ cum + $\frac{1}{9}$. facit − 2$\frac{2}{9}$. vt in hac formula apparet. qui numerus 65$\frac{2}{3}$ − 2$\frac{2}{9}$℞. æqualis debet eſſe numero 39. Additis ergo 2$\frac{2}{9}$℞, vtrobique, erit æqualitas inter 65$\frac{2}{3}$ & 39 + 2$\frac{2}{9}$℞. Ablatisque 39. vtrobique, inter 26$\frac{2}{3}$. ſiue $\frac{80}{3}$. & $\frac{20}{9}$℞. Diuiſis ergo $\frac{80}{3}$. per $\frac{20}{9}$. fiet 1℞. 12. primus numerus. Ac proinde ſecundus, qui inuentus eſt 20 + $\frac{1}{3}$℞. erit 24. Tertius autem inuentus 64 − 2$\frac{1}{3}$℞. erit 36. Atque tres hi numeri 12. 24. 36. problema abſoluunt. Facienda autem ſemper eſt æquatio cum numero, quem tertius cum parte data aliorum facere debet, vt in noſtro exemplo cum 39. factum eſt.

$$\begin{array}{r} -\;2\frac{1}{3} \\ +\;\frac{1}{9} \\ \hline -\;2\frac{2}{9} \end{array}$$

105 *Datum numerum partiri in duas partes, vt prior cum dato alio numero ad poſteriorem cum quo-* CV.
uis alio dato numero proportionem habeat datam quamcunque, ſi id fieri poteſt.

DATVS numerus 100. ſecandus ſit in duas partes, vt prior cum 10. faciat numerum triplum numeri, quem poſterior pars cum 20. efficit. Ponatur prior pars 1℞. ac proinde poſterior 100 − 1℞. Prior cum 10. facit 1℞ + 10. & poſterior cum 20. facit 120 − 1℞. Vt ergo ille huius ſit triplus, neceſſario erit æquatio inter 1℞ + 10. & 360 − 3℞. Additisque 3℞ vtrobique, inter 4℞ + 10. & 360. Ablatisque 10 vtrobique, inter 4℞. & 350. Diuiſis igitur 350 per 4 fiet 1℞. 87$\frac{1}{2}$. prior pars. Poſterior autem 100 − 1℞. erit 12$\frac{1}{2}$. Prior cum 10. facit 97$\frac{1}{2}$. numerum triplum numeri 32$\frac{1}{2}$. ex poſteriori parte, & 20. conflati.

ADDITVM eſt in ænigmate, [ſi id fieri poteſt] quia ſæpe erit quæſtio impoſſibilis. quod optime æquatio monebit. V.g. ſi datus numerus 100. diuidendus ſit in duos, vt prior cum 10 faciat numerum ſeptuplum numeri ex poſteriori, & 20. conflati; fieri id nullo modo poterit. Poſita enim priori parte 1℞. & poſteriori 100 − 1℞. prior cum 10. faciet 1℞ + 10. poſterior autē cum 20 faciet 120 − 1℞. cuius ille non poteſt eſſe ſeptuplus. Nam fieret æquatio inter 1℞ + 10 & 840 − 7℞. Et additis 7℞. vtrobique, inter 8℞ + 10. & 840. Ablatisque 10. vtrobique, inter 8℞. & 830. Diuiſis autem 830. per 8. fieret 1℞. 103$\frac{3}{4}$. prior pars. quod eſt abſurdum, cum maior ſit dato numero 100.

VIDES igitur, quam expedite operatio ipſa nos inſtruat, quando quæſtio propoſita ſolui poſſit, & quando non. id quod ad initium huius lib. monuimus.

106 *Numerum inuenire, à quo detractis quotuis partibus aliquotis, ſi reliquus numerus per da-* CVI.
tum numerum multiplicetur, fiat numerus æqualis ei, qui ex inuento numero, & dato conflatur.

SIT inueniendus numerus, à quo detractis $\frac{4}{7}$. ſi reliquus numerus $\frac{3}{7}$. multiplicetur per 10. tantum fiat, quantum ex numero inuento, & dato numero 10. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Detractis $\frac{4}{7}$. remanent $\frac{3}{7}$℞. quibus multiplicatis per 10. fit numerus $\frac{30}{7}$℞. id eſt. 4$\frac{2}{7}$℞. Et ſi ad poſitum numerum 1℞. addantur 10. fit numerus 1℞ + 10. æqualis 4$\frac{2}{7}$℞. Ablata ergo 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 10. & 3$\frac{2}{7}$℞. Diuiſiſque 10.

per 3 $\frac{2}{7}$. hoc eſt, per $\frac{23}{7}$. fiet 1℞. $\frac{70}{23}$. ſiue 3 $\frac{1}{23}$. numerus quæſitus. Subductis enim $\frac{4}{7}$. inuenti numeri $\frac{70}{23}$. nimirum $\frac{40}{23}$. ſi reliquus numerus $\frac{30}{23}$. nimirum $\frac{3}{7}$. eiuſdem numeri inuenti, multiplicetur per 10. fiet numerus $\frac{300}{23}$ ſiue 13 $\frac{1}{23}$. Et ſi ad inuentum numerum $\frac{70}{23}$. addatur idem numerus datus 10. hoc eſt, $\frac{230}{23}$. fiet quoque numerus $\frac{300}{23}$. ſiue 13 $\frac{1}{23}$.

Hoc ænigma idem eſt, quod trigeſimum, ſed variata nonnihil pronunciatione.

CVII. *107 Duos numeros in data proportione inuenire, vt ex vno in alterum gignatur datus quiuis numerus.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, vt ex vno in alterum gignatur numerus 40. Ponantur numeri 2℞. 3℞. in proportione ſeſquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6ʓ. æqualis 40. Diuiſis ergo 40. per 6. fit 1ʓ. $\frac{40}{6}$. Et √ʓ $\frac{40}{6}$. erit valor vnius radicis. Et quia primus numerus poſitus fuit 2℞. & ſecundus 3℞. erit primus numerus √ʓ $\frac{160}{6}$. & ſecundus √ʓ $\frac{360}{6}$. Ex vno in alterum fit numerus √ʓ $\frac{57600}{36}$. hoc eſt, $\frac{240}{6}$. ſiue 40.

SINT rurſum inueniendi duo numeri in eadem proportione ſeſquialtera, vt ex vno in alterum fiat numerus 294. Poſitis rurſum duobus numeris 2℞ 3℞. in proportione ſeſquialtera, gignetur ex vno in alterum numerus 6ʓ. æqualis 294. Diuiſiſque 294. per 6. fit 1ʓ. 49. cuius radix eſt 7. Ergo primus numerus 2℞. erit 14. & ſecundus 3℞. erit 21. Atque ex 14. in 21 fit propoſitus numerus 294. Vides ergo aliquando numeros quæſitos eſſe ſurdos, vt in priori exemplo, & aliquando rationales, vt in poſteriori.

CVIII. *108 Duos numeros in qualibet proportione datos æqualiter minuere, ita vt reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamcunque proportionem, quæ maior ſit proportione datorum numerorum.*

HOC ænigma idem eſt, quod octauum, alijs tamen verbis propoſitum. Nam & hic quæritur numerus, qui ex datis duobus detractus relinquat duos numeros in data proportione. Libuit tamen id ipſum hoc tenore proponere, & aliter ſoluere, quam ænigma octauum ſolutum fuit, vt diſcas aliorum quoque ænigmatum ſolutiones variare. Sint ergo dati duo numeri 3. & 2. in proportione ſeſquialtera minuendi æqualiter, hoc eſt, ab ipſis vnus idemque numerus auferendus, vt reliqui proportionem habeant v.g. vigecuplam. Ponamus minorem imminutum decreuiſſe vſque ad 1℞ ac proinde maiorem vſque ad 20℞. vt hic reliquus ad illum reliquum habeat proportionem vigecuplam. Si igitur ex maiore 3. auferemus 20℞. remanebit numerus 3 — 20℞. qui auferendus eſt ex 3. vt relinquantur 20℞. vt in hac formula apparet. Item ſi ex minore 2. detrahemus 1℞. reliquus erit numerus 2 — 1℞. qui ex 2. auferendus eſt, vt relinquatur 1℞. Quia vero ambo numeri ponuntur æqualiter imminuti, hoc eſt, ex vtroque idem numerus ablatus ponitur,

3 + 0 ℞
3 — 20 ℞
0 + 20 ℞

erit æquatio inter 3 — 20℞. & 2 — 1℞. Additiſque 20℞. vtrobique, inter 3 & 2 + 19℞. Ablatiſque 2. vtrinque, inter 1. & 19℞. Eritque 1℞. $\frac{1}{19}$. Cum igitur ex 3. auferenda ſint 3 — 20℞ & 2 — 1℞. ex 2. auferendus erit ex vtroque numero numerus 1 $\frac{18}{19}$. eruntque reliqui numeri $\frac{20}{19}$. & $\frac{1}{19}$. qui habent proportionem vigecuplam propoſitam.

CIX. *109 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt qui fit ex vno in alterum cum ſumma quadratorum, qui ex ipſis fiunt, efficiat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, ita vt ex vno in alterum fiat numerus, qui cum quadratis ipſorum efficiat 100. Ponantur numeri quæſiti 3℞. 2℞. in proportione ſeſquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6ʓ. & eorum quadrati ſunt 9ʓ. & 4ʓ. qui cum 6ʓ. faciunt 19ʓ. æquales 100. Diuiſis igitur 100. per 19. fit 1ʓ. $\frac{100}{19}$. ergo 1℞ erit √ʓ $\frac{100}{19}$. & 3℞. erunt √ʓ $\frac{900}{19}$. pro primo numero, quem poſuimus 3℞. & ſecundus numerus, qui poſitus fuit 2℞. erit √ʓ $\frac{400}{19}$. ad quem √ʓ $\frac{900}{19}$. proportionem habet ſeſquialteram. Ex vno in alterum fit numerus √ʓ $\frac{360000}{361}$. hoc eſt, $\frac{600}{19}$. & ſumma quadratorum $\frac{900}{19}$. & $\frac{400}{19}$. eſt $\frac{1300}{19}$. quæ cum $\frac{600}{19}$. facit $\frac{1900}{19}$. hoc eſt, 100.

SINT rurſus inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, ita vt numerus, qui ex vno in alterum fit, cum ſumma quadratorum, qui ex ipſis fiunt, faciat ſummam 2736. Repetita eadem operatione, erunt 19ʓ. æquales 2736. Diuiſis ergo 2736. per 19. fiet 1ʓ. 144. & 1℞ 12. Igitur primus numerus poſitus 3℞. erit 36. & ſecundus, quem poſuimus 2℞. erit 24. Ex 36. in 24. fiunt 864. quæ cum quadratis 576. 1296. faciunt 2736. ipſique numeri inuenti 36. & 24. proportionem habent ſeſquialteram.

CX. *110 Inuenire numerum, qui in ſe ductus, & productus in datum quemuis numerum, faciat numerum, qui habeat ad inuenti numeri cubum proportionem quamcunque datam.*

INVENIENDVS ſit numerus, qui in ſe ductus, & hic productus in 10. faciat numerum in proportione quintupla ad inuenti numeri cubum, hoc eſt, qui quinquies eius cubum contineat. Ponatur quæſitus numerus 1℞. Hic in ſe ductus facit 1ʓ. & 1ʓ. in 10. facit 10ʓ. qui numerus debet eſſe quintuplus cubi ex 1℞. procreati. Eſt autem cubus numeri 1℞. 1ℭ. qui quinquies ſumptus facit 5ℭ. æquales 10ʓ. Diuiſis ergo 10. per 5. fiet 1℞ 2. numerus quæſitus. propterea quod numeri Coſſici ſunt collaterales. Nam ex 2. in 2. fit 4. & ex 4. in 10. fit numerus 40. quintuplus cubi 8. ex 2. procreati.

SI numerus ductus in ſe, & productus in 10. debet habere proportionem ſeſquialteram ad cubum, erit æquatio inter 10ʓ. & 1 $\frac{1}{2}$ ℭ. Diuiſis igitur 10. per 1 $\frac{1}{2}$. ſiue per $\frac{3}{2}$. fiet 1℞ $\frac{20}{3}$. qui numerus in ſe ductus facit $\frac{400}{9}$.

cit $\frac{400}{9}$. & hic in 10. facit $\frac{4000}{9}$. Cubus autem numeri $\frac{20}{3}$. eſt $\frac{8000}{27}$. ad quem numerus $\frac{4000}{9}$. hoc eſt $\frac{12000}{27}$. proportionem habet ſeſquialteram.

SIC ſi numerus ductus in ſe, & productus in 10. debet ad cubum habere proportionem ſubduplam; Poſito numero 1℞. fiet ex 1℞ in ſe numerus 1ℨ. & ex 1ℨ. in 10. numerus 10ℨ. qui ſubduplus eſſe debet 1ℭ, qui fit ex 1℞ in ſe cubice. Igitur æquatio erit inter 20ℨ. & 1ℭ. eritque 1℞ 20. Nam ex 20. in ſe, fit 400. & ex 400. in 10. fit 4000. qui ſubduplus eſt cubi 8000. qui fit ex 20. in ſe cubice.

111 *Datum numerum in duas partes ſecare, vt prior multiplicata per quemuis numerum producat numerum, qui ſuperet numerum productum ex parte poſteriore in quemlibet alium numerum, numero dato, quando id fieri poteſt.* CXI.

SIT numerus 30. diuidendus in duas partes, vt prior ducta in 10. procreet numerum, qui numero 20. ſuperet numerum, quem poſterior pars in 40. multiplicata producit. Ponatur prior pars 1℞. ideoque poſterior 30 — 1℞. Ex 1℞. in 10. fit numerus 10℞. & ex 30 — 1℞. in 40. fit numerus 1200 — 40℞. quem prior productus ſuperare debet numero 20. Ergo ſi poſteriori addentur 20. fiet æqualitas inter 10℞. & 1220 — 40℞. Additiſque 40℞. vtrinque, inter 50℞. & 1220. Diuiſis ergo 1220. per 50. fiet 1℞. $24\frac{2}{5}$. prior pars, ideoque poſterior erit $5\frac{3}{5}$. Prior in 10. ducta facit 244. poſterior in 40. facit 224. qui ab illo ſuperatur numero 20.

DIXIMVS in ænigmate, [quando id fieri poteſt] quia non ſemper quæſtio ſolui poteſt. vt ſi prior productus ſuperare debeat poſteriorem productum, numero 300. reperietur æqualitas inter 1500 — 40℞. & 10℞. Additiſque 40℞. vtrinque, inter 1500. & 50℞. Diuiſiſque 1500. per 50. fiet 1℞. 30. vna pars dati numeri 30. quod eſt ineptum. Vbi etiam vides, ex ipſa operatione per regulam Algebræ cognoſci poſſe, num quæſtio ſolui poſſit, nec ne.

112 *Datum numerum in duas partes ſecare, vt prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportione ad numerum factum ex poſteriori parte in quemuis alium numerum multiplicata.* CXII.

SIT numerus 40. ſecandus in duas partes, vt ex priore in 10. fiat numerus in proportione ſubdupla ad numerum factum ex parte poſteriore in 30. Ponatur prior pars 1℞. ideoque poſterior 40 — 1℞. Ex 1℞. in 10. fit numerus 10℞. qui ſubduplus eſſe debet numeri 1200 — 30℞. producti ex 40 — 1℞. in 30. hoc eſt, æquatio fiet inter 20℞. & 1200 — 30℞. Additiſque 30℞ vtrobique, inter 50℞. & 1200. Diuiſis ergo 1200. p r 50. fiet 1℞ 24. prior pars, ac proinde poſterior erit 16. Ex 24. in 10. fit 240. qui numerus ſubduplus eſt numeri 480. facti ex 16. in 30.

113 *Datum numerum in duos diſtribuere, vt prior diuiſus per datum quemuis numerum faciat Quotientem in data proportione ad Quotientem, qui fit ex poſteriori numero per quemlibet numerum diuiſo.* CXIII.

SIT numerus 100. tribuendus in duos, vt prior diuiſus per 10. faciat Quotientem in proportione ſextupla ad Quotientem, quem facit poſterior numerus diuiſus per 20. Ponatur prior 1℞, ac proinde poſterior 100 — 1℞. Diuiſo priore per 10. fit Quotiens $\frac{1}{10}$℞. Diuiſo autem poſteriore per 20. fit Quotiens 5 — $\frac{1}{20}$℞. Et quia ille Quotiens ad hunc debet habere proportionem ſextuplam; erit æquatio inter $\frac{1}{10}$℞. & 30 — $\frac{6}{20}$℞. Et additis $\frac{6}{20}$℞. vel $\frac{3}{10}$℞ vtrobique, inter $\frac{4}{10}$℞. & 30. Diuiſis ergo 30 per $\frac{4}{10}$. fiet 1℞ 75. prior numerus. Poſterior ergo erit 25. Diuiſis 75. per 10. fit Quotiens $\frac{75}{10}$. Diuiſis vero 25. per 20. fit Quotiens $\frac{25}{20}$. ad quem ille Quotiens $\frac{75}{10}$. vel $\frac{150}{20}$. proportionem habet ſextuplam.

114 *Tres numeros in continua proportione data inuenire, vt numerus ex minore in medium productus habeat ad maiorem quamcunque proportionem datam.* CXIV.

INVENIENDI ſint tres numeri in continua proportione ſeſquitertia, vt ex minore in medium fiat numerus ad maiorem in proportione quintupla. Ponantur quæſiti tres numeri 9℞. 12℞. 16℞. in proportione ſeſquitertia. Ex 9℞. in 12℞. fit numerus 108ℨ. qui debet eſſe quintuplus tertij 16℞. Ergo æquatio erit inter 108ℨ. & 80℞. Diuiſiſque 80. per 108 fiet 1℞. $\frac{80}{108}$. ſiue $\frac{20}{27}$. propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Primus ergo numerus poſitus 9℞. erit $\frac{180}{27}$. Secundus poſitus 12℞. erit $\frac{240}{27}$. & tertius poſitus 16℞. erit $\frac{320}{27}$. Ex primo in ſecundum fit numerus $\frac{43200}{729}$. qui quintuplus eſt ad $\frac{320}{27}$. ſiue ad $\frac{8640}{729}$.

SI productus numerus ex primo in ſecundum debet eſſe æqualis tertio, erit æquatio inter 108ℨ. & 16℞. Diuiſis ergo 16. per 108. fiet 1℞ $\frac{4}{27}$. ac proinde tres numeri quæſiti erunt $\frac{36}{27}$. $\frac{48}{27}$. $\frac{64}{27}$. ſiue $1\frac{1}{3}$. $1\frac{7}{9}$. $2\frac{10}{27}$.

SI productus ex primo in ſecundum debet eſſe ſemiſſis tertij, erit æquatio inter 216ℨ. & 16℞. Diuiſis igitur 16 per 216. fiet 1℞. $\frac{16}{216}$. ſiue $\frac{2}{27}$. ac proinde tres numeri quæſiti erunt $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. $\frac{32}{27}$. hoc eſt $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{9}$. $1\frac{5}{27}$. Atque ex $\frac{2}{3}$. in $\frac{8}{9}$. fit numerus $\frac{16}{27}$. qui ſemiſſis eſt tertij $1\frac{5}{27}$.

115 *Datum numerum in tres partiri, vt ſinguli in tres ſingulos numeros datos, vel in vnum eundemque numerum datum multiplicati, producant tres numeros in data proportione continua.* CXV.

SIT numerus datus 80. diuidendus in tres, vt primo ducto in 4. & ſecundo in 3. & tertio in 7. producantur

 tur

tur tres numeri in continua proportione quadrupla. Ponatur prima pars 1℞. quæ ducta in 4. facit 4℞. Et quia ſecunda pars ducta in 3. debet gignere numerũ 16℞. quadruplum videlicet numeri 4℞. quærendus erit numerus, qui in 3. ductus producat 16℞. Is erit Quotiens, ſi 16℞. diuidantur per 3. nimirum $\frac{16}{3}$℞. eritq; ſecunda pars $\frac{16}{3}$℞. Rurſus quia tertia pars ducta in 7. debet procreare numerũ 64℞. quadruplum videlicet numeri 16℞. quærendus erit numerus, qui in 7. ductus faciat 64℞. Is erit $\frac{64}{7}$℞. Quotiens videlicet, ſi 64℞. per 7. diuidantur. Atque ita tres partes quæſitæ ſunt 1℞. $\frac{16}{3}$℞. $\frac{64}{7}$℞. quæ ordine in 4. 3. & 7. ductæ procreant 4℞. 16℞. & 64℞. in data proportione quadrupla continua. Reliquum iam eſt, vt prædictæ tres partes in vnam ſummam collectæ faciant 80. numerum datum. Faciunt autem $1\frac{304}{21}$℞. ſiue $\frac{325}{21}$℞. Eſt ergo æquatio inter $\frac{325}{21}$℞. & 80. Diuiſis ergo 80. per $\frac{325}{21}$. fiet 1℞. $\frac{1680}{325}$. prima pars, quæ poſita fuit 1℞. Quoniam autem ſecunda pars inuenta fuit $\frac{16}{3}$℞ ſi $\frac{1680}{325}$. valor vnius radicis ducatur in $\frac{16}{3}$℞. producetur ſecunda pars $\frac{26880}{975}$. Eadem ratione, cum tertia pars inuenta ſit $\frac{64}{7}$℞. ſi vnius radicis valor $\frac{1680}{325}$. ducatur in $\frac{64}{7}$℞. producetur tertia pars $\frac{107520}{2275}$. Atque hæ tres partes $\frac{1680}{325}$. $\frac{26880}{975}$. $\frac{107520}{2275}$. hoc eſt, $5\frac{11}{65}$. $27\frac{111}{195}$. $47\frac{119}{455}$. in vnum collectæ faciunt 80. numerum datum. & multiplicatæ ordinatim per 4. 3. 7. procreant tres numeros $\frac{6720}{325}$. $\frac{80640}{975}$. $\frac{752640}{2275}$. in continua proportione quadrupla.

QVANDO datus numerus 80. tribuendus eſt in tres, vt ſingulis partibus per eundem numerum quemcunque, vt per 5. multiplicatis, gignantur tres numeri in continua proportione quadrupla. fiet id facili negotio. Nam ſi per ænigma 49. diuidatur numerus datus 80. in tres partes continue quadruplas, videlicet in
a ſchol. 18. ſept. $\frac{80}{21}$. $\frac{320}{21}$. $\frac{1280}{21}$. & ſingulæ per propoſitum numerũ 5. multiplicentur, a producentur tres numeri in eadem proportione quadrupla, $\frac{400}{21}$. $\frac{1600}{21}$. $\frac{6400}{21}$. id eſt, $19\frac{1}{21}$. $76\frac{4}{21}$. $304\frac{16}{21}$.

CXVI. 116 *Datum numerum in tres partes diuidere, vt ſingulæ per tres ſingulos numeros datos multiplicatæ producant eundem numerum: Vel vt tam priores duæ per duos datos numeros ductæ producant vnum eundemque numerum, quam poſteriores duæ per alios duos numeros datos multiplicatæ producant vnum quoque & eundem numerum.*

SIT datus numerus 100. diuidendus in tres, vt primo ducto in 5. ſecundo in 2. & tertio in 6. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1℞. quo ducto in 5. fiunt 5℞. Et quia tantundem debet facere ſecundus ductus in 2. diuidemus 5℞. per 2. Nam Quotiens $\frac{5}{2}$℞ erit ſecundus numerus, cum in 2. ductus faciat 5℞. Et quoniam tantũdem facere debet tertius in 6. ductus, diuidemus 5℞ per 6. Quotiens enim $\frac{5}{6}$℞. erit tertius numerus, cum in 6. ductus faciat 5℞. Reliquum iam eſt, vt omnes tres partes 1℞. $2\frac{1}{2}$℞. $\frac{5}{6}$℞. faciant datum numerum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{3}$℞. Eſt ergo æquatio inter $4\frac{1}{3}$℞. & 100. diuiſisque 100. per $4\frac{1}{3}$. hoc eſt, per $\frac{13}{3}$. fiet 1℞. $23\frac{1}{13}$. quæ dat primum numerum, quem poſuimus 1℞. Secundus ergo inuentus $2\frac{1}{2}$℞. erit $57\frac{9}{13}$. Et tertius inuentus $\frac{5}{6}$℞. erit $19\frac{3}{13}$. Atque hi tres numeri $23\frac{1}{13}$. $57\frac{9}{13}$. $19\frac{3}{13}$. faciunt datum numerum 100. Et ductæ in 5. 2. & 6. producunt tres numeros æquales $115\frac{5}{13}$. $115\frac{5}{13}$. $115\frac{5}{13}$.

SED iam tam priores duo numeri multiplicati per 6. & 3. debeant producere duos numeros æquales, quam poſteriores duo ducti in 5. & 8. Ponatur rurſum primus 1℞. Ex 1℞. in 6. fiunt 6℞. Et quia tantundem facere debet ſecundus ductus in 3. diuidemus 6℞ per 3. Quotiens enim 2℞. dabit ſecundum numerum, cum ductus in 3. faciat 6℞. Deinde ex ſecundo hoc 2℞ in 5 fiunt 10℞. Et quoniam tantundem debet facere tertius ductus in 8. diuidemus 10℞ per 8. Nam Quotiens $1\frac{1}{4}$℞. erit tertius numerus, cum ductus in 8. gignat 10℞. Reliquum nunc eſt, vt tres hi numeri 1℞ 2℞. $1\frac{1}{4}$℞. faciant numerum datum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{4}$℞. qui numerus æqualis eſſe debet 100. Diuiſis ergo 100. per $4\frac{1}{4}$. id eſt, per $\frac{17}{4}$. fiet 1℞. $23\frac{9}{17}$. primus numerus, qui poſitus fuit 1℞. Secundus igitur inuẽtus 2℞. erit $47\frac{1}{17}$. Et tertius inuentus $1\frac{1}{4}$℞. erit $29\frac{7}{17}$. Atq; hi tres numeri $23\frac{9}{17}$. $47\frac{1}{17}$. $29\frac{7}{17}$. faciunt ſimul 100. Et priores duo ducti in 6 & 3. generant eundem numerum $141\frac{3}{17}$. Poſteriores vero duo ducti in 5. & 8. procreant eundem numerum $235\frac{5}{17}$.

CXVII. 117 *Datum numerum in tres partes diſtribuere, vt prima parte diuiſa per quemuis numerum. Et ſecunda multiplicata per alium datum numerum. Ac tertia diuiſa per quemcunque etiam numerum, proueniant tres numeri æquales.*

SIT datus numerus 178. diuidendus in tres partes, vt tantum fiat ex diuiſione primæ partis per 5. quantum ex multiplicatione ſecundæ per 8. & quantum ex diuiſione tertiæ per 6. Ponatur prima pars 1℞. qua diuiſa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$℞. Et quia tantundem fieri debet ex ſecunda ducta in 8. diuidemus $\frac{1}{5}$℞ per 8. Nam Quotiens $\frac{1}{40}$℞. erit ſecunda pars, quæ multiplicata per 8. facit $\frac{1}{5}$℞. Et quia tantundem facere debet tertia diuiſa per 6. multiplicabimus $\frac{1}{5}$℞ per 6. Productus enim numerus $\frac{6}{5}$℞ erit tertia pars, qua diuiſa per 6. Quotiens fit $\frac{1}{5}$℞. Reliquum iam eſt, vt tres partes 1℞. $\frac{1}{40}$℞. & $\frac{6}{5}$℞. faciant datum numerum 178. Faciunt autem $2\frac{9}{40}$℞. Igitur æquatio erit inter 178. & $2\frac{9}{40}$℞. Et ſi diuidantur 178 per $2\frac{9}{40}$. ſiue per $\frac{89}{40}$. fiet 1℞. 80. prima pars, quam poſuimus 1℞. Secunda autem erit 2. quæ habetur, ſi radix inuenta 80. multiplicetur per $\frac{1}{40}$. propterea quod ſecunda pars inuenta fuit $\frac{1}{40}$℞. Tertia denique erit 96. quæ quidem producetur, ſi eadem radix inuenta 80 multiplicetur per $\frac{6}{5}$. propterea quod tertia pars inuenta fuit $\frac{6}{5}$℞. Atque hæ tres partes 80. 2. 96. conficiunt 178. numerum datum. Et ſiue prima per 5 diuidatur, ſiue ſecunda ducatur in 8. ſiue denique tertia diuidatur per 6. producetur ſemper idem numerus 16.

CXVIII. 118 *Datum numerum in tres partes ſecare, vt ſingulæ per ſingulos tres numeros datos diuiſæ, faciant vnum eundemque Quotientem.*

SIT datus numerus 240. tribuendus in tres partes, vt prima diuiſa per 5. Et ſecunda per 3. Et tertia

per 7.

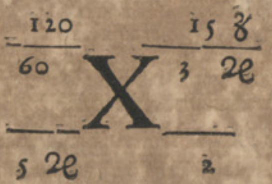
per 7. procreetur ſemper idem Quotiens. Ponatur prima pars 1℞. qua diuiſa per 5 fit Quotiens $\frac{1}{5}$℞. Et quia tantundem fieri debet ex ſecunda parte diuiſa per 3. multiplicabimus $\frac{1}{5}$℞ per 3. Productus enim numerus $\frac{3}{5}$℞. erit ſecunda pars, quæ diuiſa per 3. facit Quotientem $\frac{1}{5}$℞. Quoniam autem ex diuiſione tertiæ partis per 7. debet etiam produci $\frac{1}{5}$℞. multiplicabimus $\frac{1}{5}$℞ per 7. Numerus enim productus $\frac{7}{5}$℞ erit tertia pars, qua diuiſa per 7. Quotiens fit $\frac{1}{5}$℞. Reſtat, vt vt tres hæ partes 1℞. $\frac{3}{5}$℞. $\frac{7}{5}$℞. ſimul ſumptæ ſint 240. Faciunt autem 3℞. Igitur æquatio erit inter 3℞ & 240. Diuiſisque 240. per 3 fiet 1℞. 80. prima pars. Secunda erit 48. quæ habetur, ſi inuenta radix 80. ducatur in $\frac{3}{5}$. cum ſecunda pars inuenta ſit $\frac{3}{5}$℞. Tertia denique erit 112. quæ habetur, ſi eadem radix inuenta 80. ducatur in $\frac{7}{5}$. quandoquidē tertia pars inuenta fuit $\frac{7}{5}$℞. Atq; omnes hæ tres partes 80. 48. 112. faciunt 240. numerum propoſitum. Et tam prima diuiſa per 5. quam ſecunda per 3. & tertia per 7. fit idem ſemper Quotiens 16.

119 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quælibet pars aliquota minoris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcunque datum.* CXIX.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, vt $\frac{1}{4}$. minoris in $\frac{1}{2}$. maioris ducta procreet numerum 90. Ponatur minor 1℞. & maior 3℞, vt habeant datam proportionem triplam. Ex quarta parte minoris, nimirum $\frac{1}{4}$℞, in ſemiſſem maioris, id eſt, in $\frac{3}{2}$℞ ſit numerus $\frac{3}{8}$ℨ. æqualis 90. Diuiſis ergo 90. per $\frac{3}{8}$. fiet 1ℨ. 240. Et 1℞ erit √ℨ 240. minor numerus. Maior erit huius triplus √ℨ 2160. Iam $\frac{1}{4}$. minoris, videlicet √ℨ 15. ducta in $\frac{1}{2}$. maioris, nimirum in √ℨ 540. facit √ℨ 8100. hoc eſt, numerum datum 90.

120 *Numerum inuenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diuiſo alio numero dato, Quotiens ad inuentum numerum datam habeat proportionem.* CXX.

SIT inueniendus numerus, quo multiplicato per 5. & per productum diuiſo numero 60. Quotiens ad numerum inuentum proportionem habeat ſeſquialteram. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Hoc ducto in 5. fiunt 5℞. Diuiſis autem 60. per 5℞. fit Quotiens $\frac{60}{5℞}$. qui ſeſquialteram proportionem habere debet ad 1℞. Habet autem & numerus 1$\frac{1}{2}$℞. hoc eſt, $\frac{3℞}{2}$. (qui producitur ex 1℞. in 1$\frac{1}{2}$. ſiue in $\frac{3}{2}$.) ad 1℞. proportionem ſeſquialteram. Eſt ergo æquatio inter $\frac{60}{5℞}$. & $\frac{3℞}{2}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 120. & 15ℨ. Diuiſis igitur 120. per 15. fiet 1ℨ. 8. Et 1℞ erit √ℨ 8. numerus, quem quęrimus. Nam ex √ℨ 8 in 5 fit √ℨ 200. per quem numerum ſi diuidantur 60. fit Quotiens √ℨ 18. qui ad √ℨ 8. ſeſquialteram proportionem habet: quippe cum √ℨ 8. ducta in 1$\frac{1}{2}$. faciat √ℨ 18.



121 *Tres numeros inuenire Arithmetice proportionales, ita vt eorum ſumma ſit data pars aliquota numeri, qui ex eorum multiplicatione inter ſe producitur. Vel (quod idem eſt) vt numerus ex ipſorum multiplicatione productus ad eorundem ſummam proportionem habeat datam.* CXXI.

DEBEAT ſumma inuentorum numerorum eſſe $\frac{1}{5}$. numeri ex eorum multiplicatione producti, hoc eſt, numerus productus ad ſummam habere debeat proportionem quintuplam. Ponantur tres numeri quæſiti 1℞. 2℞. 3℞ qui æqualiter ſe excedunt numero 1℞. Eorū ſumma eſt 6℞. At numerus ex multiplicatione productus 6ℭ. Nam ex 1℞. in 2℞. fit numerus 2ℨ. Et ex 2ℨ. in 3℞. fit numerus 6ℭ. Et quoniam ſumma 6℞ debet eſſe $\frac{1}{5}$ numeri 6ℭ. erit æquatio inter 30℞. & 6ℭ. Diuiſis igitur 30. per 6. fiet 1ℨ. 5. (propterea quod inter ℞ & ℭ, vna denominatiæ, nimirum ℨ, eſt interpoſita) ideoque 1℞. erit √ℨ 5. & 2℞. erunt √ℨ 20. & 3℞ eruut √ℨ 45. Itaque tres numeri inuenti ſunt √ℨ 5. √ℨ 20. √ℨ 45. qui ſe æqualiter excedunt numero √ℨ 5. vt patet, ſi primus à ſecundo, & ſecundus à tertio ſubtrahatur. Summa eorum eſt √ℨ 180. & numerus ex eorum multiplicatione productus √ℨ 4500. Conſtat autem √ℨ 180. eſſe $\frac{1}{5}$ numeri √ℨ 4500. hoc eſt, √ℨ 4500. ad √ℨ 180 proportionem habere quintuplam; cum numerus √ℨ 180. ductus in 5. faciat √ℨ 4500.

DEBEAT deinde numerus productus ad ſummam habere proportionem, quam 24. ad 1. hoc eſt, ſumma debeat eſſe $\frac{1}{24}$. numeri producti. Ponantur numeri proportionales Arithmetice, 2℞. 3℞. 4℞. quorum ſumma 9℞ & numerus productus 24ℭ. Et quia 9℞. debent eſſe $\frac{1}{24}$. numeri 24ℭ, hoc eſt, hic numerus ad illum habere debet proportionem, quam 24. ad 1. ſi 9℞. multiplicentur per 24. fiet æqualitas inter 216℞. & 24ℭ. Diuiſis igitur 216. per 24. fiet 1ℨ. 9. & 1℞ 3. Erunt igitur tres numeri quæſiti 6. 9. 12. quod poſiti ſint 2℞. 3℞. 4℞. Summa eorum 27. eſt $\frac{1}{24}$. pars numeri 648. ex eorum multiplicatione producti: propterea quod ex 27. in 24. gignatur numerus 648.

122 *Tres numeros inuenire in continua proportione data, vt ex eorum multiplicatione gignatur datus numerus.* CXXII.

SINT tres numeri inueniendi continue quadrupli, vt inter ſe multiplicati procreent numerum 27. Ponantur quæſiti numeri 1℞. 4℞. 16℞. in continua proportione quadrupla. Ex 1℞ in 4℞. fit numerus 4ℨ. & ex 4ℨ. in 16℞. fit numerus 64ℭ. æqualis 27. Diuiſis ergo 27. per 64. fit 1ℭ. $\frac{27}{64}$. & 1℞ $\frac{3}{4}$. Sunt ergo tres numeri quæſiti $\frac{3}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{48}{4}$. hoc eſt, $\frac{3}{4}$. 3. 12. quadrupli, qui inter ſe multiplicati producunt 27.

SINT rurſum inueniendi tres numeri ſeſquialteri, qui inter ſe multiplicati faciant 12. Ponantur tres numeri ſeſquialteri 1℞. 1$\frac{1}{2}$℞. 2$\frac{1}{4}$℞. hoc eſt, 1℞. $\frac{3}{2}$℞. $\frac{9}{4}$℞. Ex 1℞ in $\frac{3}{2}$℞. fit numerus $\frac{3}{2}$ℨ. Et ex $\frac{3}{2}$ℨ.

 in $\frac{9}{4}$℞.

in $\frac{9}{4}$℞. fit numerus $\frac{27}{8}$ℭ. hoc eſt, $3\frac{3}{8}$ℭ. æqualis 12. Diuiſis ergo 12. per $\frac{27}{8}$. fiet 1ℭ. $3\frac{5}{9}$. & 1℞. √ℭ $3\frac{5}{9}$. primus numerus, quem poſuimus 1℞. Secundus ergo poſitus $1\frac{1}{2}$℞. erit √ℭ 12. Et tertius poſitus $2\frac{1}{4}$℞. erit √ℭ $40\frac{1}{2}$. propterea quod ex $1\frac{1}{2}$. in √ℭ $3\frac{5}{9}$ fit √ℭ 12. & ex $2\frac{1}{4}$. in √ℭ $3\frac{5}{9}$. fit √ℭ $40\frac{1}{2}$. Iam ex √ℭ $3\frac{5}{9}$. in √ℭ 12. fit numerus √ℭ $42\frac{2}{3}$. Et ex √ℭ $42\frac{2}{3}$. in √ℭ $40\frac{1}{2}$. fit numerus √ℭ 1728. hoc eſt, 12.

CXXIII. 123 *Numerum inuenire, qui ductus in ſuam radicem quadratam producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, qui in ſuam radicem quadratam ductus faciat 4. Ponatur numerus quæſitus 1ȝ. Hic ductus in 1℞ ſuam radicem quadratam facit 1ℭ. æqualem 4. Diuiſis ergo 4. per 1. fiet 1ℭ 4. eiusq; radix cubica √ℭ 4. cuius quadratum eſt √ℭ 16. numerus quæſitus; quem poſuimus 1ȝ. Hic enim ductus in √ℭ 4. ſuam radicem quadratam facit √ℭ 64. hoc eſt, 4.

SIT deinde producendus numerus $15\frac{5}{8}$. inuenieturque æqualitas inter 1ℭ. & $15\frac{5}{8}$. Diuiſis ergo $15\frac{5}{8}$. per 1. fiet 1ℭ. $15\frac{5}{8}$. hoc eſt, $\frac{125}{8}$. cuius radix cubica $\frac{5}{2}$. & huius quadratum $\frac{25}{4}$. numerus quæſitus, quem poſuimus 1ȝ. Atque hic in ſuam radicem $\frac{5}{2}$. ductus facit $\frac{125}{8}$. hoc eſt, $15\frac{5}{8}$.

CXXIV. 124 *Numerum inuenire, cuius radix quadrata ad eiuſdem radicem cubicam habeat datam proportionem.*

SIT inueniendus numerus, cuius radix quadrata ad eiuſdem radicem cubicam habeat proportionem ſeſquialteram. Ponatur quæſitus numerus 1ȝℭ. vt nimirum habeat vtramq; radicem propoſitam. Radix eius quadrata eſt 1ℭ. & radix cubica 1ȝ. vt ex ijs conſtat, quæ ad initium cap. 12 docuimus. quia 1ℭ in ſe quadrate facit 1ȝℭ, & 1ȝ in ſe cubice ſimiliter facit 1ȝℭ Reliquum eſt, vt 1ℭ. ad 1ȝ proportionem habeat ſeſquialteram, hoc eſt, æquatio ſit inter 1ℭ. & $1\frac{1}{2}$ȝ. quod $1\frac{1}{2}$ȝ ad 1ȝ, habeat quoque ſeſquialteram proportionem. Diuiſis igitur $1\frac{1}{2}$. per 1, fiet 1℞ $1\frac{1}{2}$. (quia numeri Coſſici ſunt collaterales) cuius ȝℭ eſt $\frac{729}{64}$. ſiue $11\frac{25}{64}$. Huius radix quadrata eſt $\frac{27}{8}$. hoc eſt, $3\frac{3}{8}$. Radix autem cubica $\frac{9}{4}$. ſiue $2\frac{1}{4}$. Conſtat autem $3\frac{3}{8}$. ad $2\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{27}{8}$. ad $\frac{18}{8}$. habere proportionem ſeſquialteram.

SI proportio proponatur tripla, reperietur eodem diſcurſu æquatio inter 1ℭ. & 3ȝ. Diuiſisque 3. per 1. fiet 1℞ 3. cuius zenſicubus eſt 729. atque huius radix quadrata 27. ad radicem cubicam 9. proportionem habet triplam.

CXXV. 125 *Duos numeros inuenire, vt ex vno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inuentos habeat duas proportiones datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem.*

SINT inueniendi duo numeri, vt ex vno in alterum fiat numerus, qui ad minorem habeat proportionem triplam ſeſquialteram & ad maiorem, duplam. Ponatur numerus productus 1℞. Ergo minor numerus quæſitus erit $\frac{2}{7}$℞. & maior $\frac{1}{2}$℞. quippe cum 1℞ ad $\frac{2}{7}$℞ habeat proportionem triplam ſeſquialteram, & duplam ad $\frac{1}{2}$℞. Ex $\frac{2}{7}$℞ in $\frac{1}{2}$℞. fit numerus $\frac{2}{14}$ȝ. ſiue $\frac{1}{7}$ȝ. æqualis poſito producto 1℞. Diuiſa ergo 1 per $\frac{1}{7}$. fiet 1℞ 7. numerus ſcilicet qui produci debet: cum numeri Coſſici ſint collaterales. Quia vero minor inuentus fuit $\frac{2}{7}$℞. erit minor 2. & maior $3\frac{1}{2}$. qui inuentus fuit $\frac{1}{2}$℞. Manifeſtum autem eſt, 7. habere ad 2. proportionem triplam ſeſquialteram, & ad $3\frac{1}{2}$. duplam.

CXXVI. 126. *Duos numeros inuenire datam ſummam efficientes, ita vt vteruis cum data parte, vel partibus alterius faciat quemuis numerum datum: qui minor ſit, quam data ſumma, & maior data parte, vel partibus datis eiuſdem ſummæ datæ.*

SINT inueniendi duo numeri, quorum ſumma 60. ita vt prior numerus, cum $\frac{3}{7}$. poſterioris faciat 50. Ponatur prior 1℞. ideoque poſterior 60 — 1℞. Huius $\frac{3}{7}$. ſunt $25\frac{5}{7}$ — $\frac{3}{7}$℞. quæ cum 1℞ faciunt $\frac{4}{7}$℞ + $25\frac{5}{7}$. numerum æqualem 50. quia vt — $\frac{3}{7}$℞ addantur ad 1℞ debent ſubtrahi $\frac{3}{7}$℞. ex 1℞. atque ita remanent $\frac{4}{7}$℞ cum ſigno + vt ſupra in ſubtractione dictum eſt. Ablatis $25\frac{5}{7}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{4}{7}$℞. & $24\frac{2}{7}$. Diuiſis ergo $24\frac{2}{7}$. per $\frac{4}{7}$. fiet 1℞. $42\frac{1}{2}$. prior numerus: poſterior autem erit $17\frac{1}{2}$ cuius $\frac{3}{7}$. ſunt $7\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 50.

SI prior numerus cum $\frac{3}{7}$. poſterioris deberet facere 25. fieri id non poſſet, quia numerus 25. minor eſt, quam $\frac{3}{7}$ datæ ſummæ 60. vt experiri poteris. At ſi prior numerus cum $\frac{3}{7}$. poſterioris debeat facere 26. fieri id poterit, eritque prior numerus $\frac{1}{2}$. & poſterior $59\frac{1}{2}$. Huius $\frac{3}{7}$. ſunt $25\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 26.

Eodem pacto ſoluetur ænigma, ſi poſterior numerus cum $\frac{3}{7}$. prioris facere debeat datum numerum: ſi nimirum poſterior numerus ponatur 1℞, &c.

CXXVII 127 *Quinque numeros inuenire, ita vt quatuor quomodolibet ſumpti ſine reliquo faciant quinque numeros datos: dummodo quarta pars ſummæ propoſitorum quinque numerorum maior ſit ſingulis numeris poſtulatis.*

INVENIENDI ſint quinque numeri, ita vt quatuor ſine primo faciant 127. Et quatuor ſine ſecundo, 119. Et quatuor ſine tertio, 109. Et quatuor ſine quarto, 104. Et quatuor ſine quinto, 97. Vbi vides, quartam partem ſummæ 556. ex datis numeris 127. 119. 109. 104. 97. collectæ eſſe 139. numerũ ſingulis illis numeris maiorem. Quoniam ergo ſumma omniũ quatuor ſine quinto eſt minima omnium, nimirum 97. erit neceſſario quintus numerus omniũ maximus, quandoquidẽ quintus cum quibuslibet alijs tribus facit maiorẽ ſummam,

quam

quam 97. Ponatur ergo quintus numerus 1℞. ac proinde cum alij quatuor ſine quinto faciant 97. erunt omnes quinque numeri ſimul 97 + 1℞. Et quia quatuor ſine quarto faciunt 104. Si ex ſumma omnium 97 + 1℞. detrahâtur 104. reliquus erit quartus 1℞ − 7. Deinde quia quatuor ſine tertio faciunt 109. ſi ex eadem ſumma 97 + 1℞. demantur 109. remanebit tertius 1℞ − 12. Rurſus quoniam quatuor ſine ſecundo faciunt 119. ſi 119. ſubducantur ex eadem ſumma 97 + 1℞ relinquetur ſecundus 1℞ − 22. Denique quia quatuor ſine primo faciunt 127. ſi 127. ex eadẽ ſumma 97 + 1℞. auferatur, remanebit primus 1℞ − 30. Reliquum iam eſt, vt omnes hi quinque numeri inuenti faciant ſimul ſummam omnium 97 + 1℞. Faciunt autem 5℞ − 71. Igitur æquatio erit inter 97 + 1℞ & 5℞ − 71. Additiſque 71. vtrobique, inter 168 + 1℞. & 5℞. Ablataque 1℞. vtrinq; inter 168. & 4℞. Diuiſis ergo 168. per 4. fiet 1℞. 42. quintus numerus, quem poſuimus eſſe 1℞. Ergo quartus inuentus 1℞ − 7. erit 35. Et tertius inuentus 1℞ − 12. erit 30. Secundus autem inuentus 1℞ − 22. erit 20. Primus denique, qui inuentus fuit 1℞ − 30. erit 12. adeo vt quinque numeri quæſiti ſint ordine 12. 20. 30. 35. 42. qui ænigma propoſitum expediunt.

Hoc ænigma aliter ſolutum fuit in quatuor numeris in ænigmate 59.

128 *Numerum inuenire, ita vt tres quadrati ex eius tribus partibus datis deſcripti, & in vnam ſummam collecti, efficiant ipſum numerum inuentum, vel alium quemcunque datum.* CXXVIII.

SIT primum inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. deſcripti, & in vnam ſummam collecti, efficiant ipſum numerum inuentum. Ponatur ille numerus 1℞. cuius $\frac{2}{3}$. erunt $\frac{2}{3}$℞. & $\frac{3}{5}$. erunt $\frac{3}{5}$℞. & $\frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$℞. Quadratum harum partium $\frac{4}{9}$ℨ. $\frac{9}{25}$ℨ. $\frac{1}{4}$ℨ. ſimul efficiunt $\frac{949}{900}$ℨ. numerum æqualem numero poſito 1℞. Diuiſa igitur 1. per $\frac{949}{900}$. fiet 1℞. $\frac{900}{949}$. numerus quæſitus (quod numeri Coſſici ſint collaterales.) Huius $\frac{2}{3}$. ſunt $\frac{1800}{2847}$. & huius quadratus $\frac{3240000}{8105409}$. Et $\frac{3}{5}$. ſunt $\frac{2700}{4745}$ cuius quadratus $\frac{7290000}{22515025}$. Et $\frac{1}{2}$. eſt $\frac{900}{1898}$. cuius quadratus $\frac{810000}{3602404}$. qui tres quadrati faciunt ſummam $\frac{6234707464935966900}{6574152649138636209}$. quæ æqualis eſt numero inuento $\frac{900}{949}$. Nam idem numerus producitur ex huius numeratore in illius denominatorem, & ex denominatore in numeratorem, nimirum numerus 5916737384224232588100.

SIT deinde numerus inueniendus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. deſcripti faciant numerum 3796. Erunt, vt prius, tres quadrati in vnam ſummam collecti, $\frac{949}{900}$ℨ. qui numerus æqualis eſſe debet numero 3796. Diuiſis ergo 3796. per $\frac{949}{900}$. fiet 1ℨ. 3600. & 1℞. 60. numerus quæſitus. Huius enim $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2}$. ſunt 40. 36. & 30. & quadrati horum numerorum 1600. 1296. 900. faciunt ſummam 3796.

SIT denique inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. deſcripti ſummam faciant 20. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Eius partes datæ ſunt $\frac{1}{2}$℞. & $\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1}{9}$℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ℨ. $\frac{1}{9}$ℨ. & $\frac{1}{81}$ℨ. faciunt ſummam $\frac{121}{324}$ℨ. æqualem numero 20. Diuiſis ergo 20. per $\frac{121}{324}$. fiet 1ℨ. $\frac{6480}{121}$. & 1℞ √ℨ $\frac{6480}{121}$. numerus quæſitus. Huius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. ſunt √ℨ. $\frac{6480}{484}$. √ℨ $\frac{6480}{1089}$. & √ℨ $\frac{6480}{9801}$. quarum partium quadrati $\frac{6480}{484}$. $\frac{6480}{1089}$. & $\frac{6480}{9801}$. efficiunt ſummam $\frac{103317437520}{5165271876}$. hoc eſt, 20.

129 *Datum numerum in quotlibet numeros partiri, ita vt quilibet ſequens ſuperet præcedentem dato numero.* CXXIX.

DATVS numerus 200. tribuendus ſit in ſex, vt ſecundus ſuperet primum numero 5. tertius ſecundum numero 2. quartus tertium numero 10. quintus quartum vnitate. Et ſextus quintum numero 15. Ponatur primus 1℞. Erit igitur ſecundus 1℞ + 5. Tertius 1℞ + 7. Quartus 1℞ + 17. Quintus 1℞ + 18. Et ſextus 1℞ + 33. Hi omnes faciunt 6℞ + 80. quæ ſumma æqualis eſſe debet dato numero 200. Ablatis ergo 80. vtrinque erit æquatio inter 6℞. & 120. Diuiſiſque 120. per 6. fiet 1℞. 20. primus numerus. Secundus ergo erit 25. Tertius 27. Quartus 37. Quintus 38 & ſextus 53. qui ſimul faciunt 200. & problema abſoluunt.

DEBET autem datus numerus maior eſſe ſumma, quæ ex datis exceſſibus colligitur, ſi ſequens quilibet exceſſus præcedenti addatur. Vt quia in dato exemplo, ſi primus numerus foret 5. ſecundus eſſet 7. tertius 17. quartus 18. & quintus 33. qui omnes faciunt 80. oportet datum numerum maiorem eſſe quam 80. nimirum 81. vel 82. vel 200. vel 300. &c. Id quod ipſa operatio docebit. Si enim datus numerus eſſet 79. fieret æquatio inter 6℞ + 80. & 79. quod fieri nequit.

130 *Duos numeros inuenire in proportione data, ita vt alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcunque datum.* CXXX.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, ita vt alteruter ipſorum in quadratum alterius ductus faciat 192. Ponatur minor 1℞. ideoque maior 3℞. Ex maiore 3℞. in 1ℨ. quadratum minoris fit numerus 3ℭ æqualis 192. Diuiſis igitur 192. per 3. fiet 1ℭ. 64. & 1℞. 4. minor numerus. Maior ergo erit 12. Nam ex 12, in 16. quadratum minoris numeri 4. fit datus numerus 192.

RVRSVS ex minore 1℞. in 9ℨ. quadratum maioris fit numerus 9ℭ. æqualis 192. Diuiſis ergo 192. per 9. fiet 1ℭ. 21 $\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{64}{3}$. & 1℞. √ℭ $\frac{64}{3}$. primus numerus; ſecundus vero huius triplus erit √ℭ $\frac{1728}{3}$. In huius quadratum √ℭ $\frac{2985984}{9}$. ſi ducatur primus √ℭ $\frac{64}{3}$. fiet numerus √ℭ $\frac{191102976}{27}$. ſiue √ℭ 7077888. hoc eſt 192.

131 *Duobus numeris datis, alium tertium inuenire, ita vt tres habeantur numeri, quorum bini ſimul ſumpti, ſi in tertium ducantur, procreentur tres numeri Arithmetice proportionales.* CXXXI.

DATI ſint numeri 10. & 30. inueniendusque ſit tertius, ita vt bini ſimul ſumpti, & in tertium multiplicati

producant tres numeros Arithmetice proportuonales. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Summa ex 1℞.& 10. eſt 1℞+10. quæ ducta in tertium 30. facit 30℞+300. Summa vero ex 1℞.& 30. eſt 1℞+30. quæ ducta in tertium 10. facit 10℞+300. Summa denique ex 10.& 30. eſt 40. quæ ducta in tertium 1℞. facit 40℞. ita vt tres numeri procreati ſint 30℞+300. 10℞+30.& 40℞. qui eundē debent habere exceſſum. Sed quia nondum conſtat, quis eorum ſit maximus, & quis medius: & quis minimus ſtatuamus 30℞+300. eſſe maximum: 10℞+300. medium, & 40℞. minimum. Exceſſus priorum eſt 20℞. poſteriorum 300−30℞. qui exceſſus æquales debent eſſe. Additis igitur 30℞, vtrinque, erit æquatio inter 50℞.& 300. Diuiſiſque 300. per 50. fiet 1℞6. numerus quæſitus, ita vt tres numeri ſint 6.10.30. Ex 6.& 10. fit ſumma 16. quæ ducta in 30. facit 480. Et ex 6.& 30. fit ſumma 36. quæ ducta in 10. facit 360. Denique ex 10.& 30. fit ſumma 40. quæ ducta in 6. facit 240. Sunt autem hi tres producti 480.360.240. Arithmetice proportionales, cum eorum exceſſus ſit 120.

QVOD ſi ſtatuemus maximum 30℞+300. medium 40℞. & minimum 10℞+300. erit priorum exceſſus 300−10℞. & poſteriorum 30℞−300. qui illi æqualis eſſe debet. Additis ergo 300 vtrobique, erit æquatio inter 600−10℞.& 30℞. Additiſq; rurſum 10℞ vtrinq;, inter 600.& 40℞. Diuiſis igitur 600. per 40 fiet 1℞15. numerus quæſitus, eruntque tres numeri, 15.10.30. Nam ex 15.& 10. fit ſumma 25. quæ ducta in 30. facit 750. At ex 15.& 30. fit ſumma 45. quæ ducta in 10. facit 450. Denique ex 10.& 30. fit ſumma 40. quæ ducta in 15. facit 600. Atque hi tres numeri producti 750. 600. 450. habent eundem exceſſum 150.

NEQVE vero maximus eſſe poteſt 40℞.& medius 30℞+300.& minimus 10℞+300. Nam inter priores eſſet exceſſus 10℞−300.& inter poſteriores 20℞. qui æqualis eſſe non poteſt priori exceſſui, cum ſit maior. Eſt ergo maximus 30℞+300. cum etiam maior ſit, quam 10℞+300. Et vterque aliorum poteſt eſſe medius, vel minimus, vt patuit.

Hoc problema ſolutum etiam fuit in ænigmate 86. vbi dati ſunt duo numeri, ita vt tres numeri producti tribus motis poſſint eſſe proportionales Arithmetice.

CXXXII 132 *Tres numeros inuenire, ita vt primus ac ſecundus cum data parte tertij. Item ſecundus & tertius cum parte data primi: Nec non tertius ac primus cum parte data ſecundi, efficiant vnum eundemque numerum datum.*

TAM primus ac ſecundus cum $\frac{1}{4}$. tertij, quam ſecundus ac tertius cū $\frac{1}{2}$. primi, quā tertius ac primus cū $\frac{1}{3}$. ſecundi debeant facere 100. Ponatur tertius 1℞. cuius $\frac{1}{4}$℞. cum primo & ſecundo debent facere 100. ac propterea hi duo, antequam acciperent $\frac{1}{4}$℞. à tertio, habuerunt 100−$\frac{1}{4}$℞. Et quia ſecundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi debent quoque facere 100. ſi ex 100. demamus tertium, nimirnm 1℞. erit reliquus numerus 100−1℞. ſolus ſecundus vna cum $\frac{1}{2}$. primi. Quoniam aūt ſecundus, ac totus primus fecerunt 100−$\frac{1}{4}$℞. Et hi duo ſimul ſuperant ſecundum, ac $\frac{1}{2}$ primi ſemiſſe eiuſdem primi: ſi ex 100−$\frac{1}{4}$℞. ſumma primi & ſecundi, auferemus 100−1℞. valorem ſolius ſecundi cum $\frac{1}{2}$ primi, erit reliquus numerus $\frac{3}{4}$℞. ſemiſſis primi, ac proinde totus primus erit $1\frac{1}{2}$℞, hoc eſt $\frac{6}{4}$℞. Deinde quia primus ac ſecundus ſimul cum $\frac{1}{4}$. tertij faciunt 100. Et ſolus primus facit $1\frac{1}{2}$℞.& $\frac{1}{4}$. tertij eſt $\frac{1}{4}$℞ ſi $\frac{7}{4}$℞. hoc eſt $1\frac{3}{4}$℞ ſummam ex $1\frac{1}{2}$℞.& $\frac{1}{4}$℞. collectam detrahemus ex 100. erit reliquus numerus 100−$1\frac{3}{4}$℞. ſolus ſecundus, cuius $\frac{1}{3}$ eſt $33\frac{1}{3}-\frac{7}{12}$℞. cū qua tertius ac primus, nimirum 1℞.& $1\frac{1}{2}$℞. hoc eſt. $2\frac{1}{2}$℞. facere debent 100. Fit autem ex $33\frac{1}{3}-\frac{7}{12}$℞.& $2\frac{1}{2}$℞ (hoc eſt, ex $\frac{1}{3}$. ſecundi, & ſumma tertij ac primi) numerus $33\frac{1}{3}+1\frac{11}{12}$℞. qui æqualis debet eſſe numero 100. Ablatis ergo vtrinque $33\frac{1}{3}$. erit æqualitas inter $66\frac{2}{3}$.& $1\frac{11}{12}$℞ Diuiſiſque $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{11}{12}$. fiet 1℞. $17\frac{9}{23}$. ſiue $\frac{2400}{69}$. tertius videlicet numerus, qui poſitus fuit 1℞ igitur ſecundus inuenus 100−$1\frac{3}{4}$℞. erit $\frac{2700}{69}$. Et primus, quem inueniemus $1\frac{1}{2}$℞. erit $\frac{3600}{69}$. Atque hi tres ænigmati propoſito ſatisfaciunt.

CXXXIII. 133 *Datum numerum partiri in tres partes continue proportinales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus ad productum ex prima in ſecundam habeat datam proportionem.*

SIT datus numerus 30. tribuendus in tres partes continu e proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus habeat ad productam ex prima in ſecundam proportionem quadruplam. Ponatur ſecunda pars, ſiue media 1℞. ac propterea ſumma primæ ac tertiæ 30−1℞. Et quia ex media 1℞ in ſe fit 1ℨ. [a] fiet etiam 1ℨ. ex prima in tertiam. Cum ergo hic productus debeat habere quadruplam proportionem ad productum ex prima in ſecundam; producetur $\frac{1}{4}$ℨ. ex prima in ſecundam, nimirum in 1℞. Si igitur partiemur $\frac{1}{4}$ℨ. per 1℞, fiet Quotiens $\frac{1}{4}$℞. qui ductus in 1℞. numerum diuidentem, facit $\frac{1}{4}$ℨ. numerum diuiſum: ac proinde prima pars erit $\frac{1}{4}$℞. quæ cum ſecunda faciet $1\frac{1}{4}$℞. quæ ſumma ablata ex numero dato 30. relinquet tertiam partē 30−$1\frac{1}{4}$℞. Reliquum iam eſt, ex prima parte $\frac{1}{4}$℞. in tertiam modo inuentam 30−$1\frac{1}{4}$℞. gigni numerum 1ℨ. qui ex media parte 1℞. in ſe producitur. Fit autem ex $\frac{1}{4}$℞. in 30−$1\frac{1}{4}$℞. numerum $7\frac{1}{2}$℞−$\frac{5}{16}$ℨ. qui æqualis debet eſſe 1ℨ. Additis ergo $\frac{5}{16}$ℨ. vtrobique, erit æquatio inter $7\frac{1}{2}$℞.& $1\frac{5}{16}$ℨ. Diuiſiſque $7\frac{1}{2}$. per $1\frac{5}{16}$. hoc eſt, $\frac{15}{2}$. per $\frac{21}{16}$. fiet 1℞. $5\frac{5}{7}$. media, vel ſecunda pars, nimirum $\frac{40}{7}$. Ergo prima pars, quam inuenimus eſſe $\frac{1}{4}$℞. erit $\frac{10}{7}$. ſiue $1\frac{3}{7}$. Et tertia, quæ fuit inuenta 30−$1\frac{1}{4}$℞. erit $\frac{160}{7}$. ſiue $22\frac{6}{7}$. Atque hæ tres partes $1\frac{3}{7}$. $5\frac{5}{7}$. $22\frac{6}{7}$. faciunt datum numerum 30. Et ex $1\frac{3}{7}$. in $22\frac{6}{7}$. hoc eſt, ex prima parte in tertiam, fit numerus $32\frac{32}{49}$. qui quadruplus eſt numeri $8\frac{8}{49}$. facti ex prima parte $1\frac{3}{7}$. in ſecundam $5\frac{5}{7}$. Eſſe autem tres partes continue proportionales, liquet: quippe cum idem numerus gignatur ex prima in tertiam, qui ex media in ſe, nimirum $32\frac{32}{49}$.

[a] 20. ſept.

ALITER inſtituti poterit æquatio, poſtquam inuentæ fuerint partes $\frac{1}{4}$℞. 1℞ 30−$1\frac{1}{4}$℞. hoc ſcilicet modo quoniam ex prima in tertiam fieri debet 1ℨ. numerus videlicet æqualis ei, qui fit ex media in ſe. ſi diuidemus 1ℨ. per primam, id eſt, per $\frac{1}{4}$℞. fiet Quotiens 4℞. qui ductus in $\frac{1}{4}$℞. producit 1ℨ. Ac proinde tertia pars erit 4℞. æqualis nimirum alteri parti tertiæ inuentæ 30−$1\frac{1}{4}$℞. Additis ergo $1\frac{1}{4}$℞. vtrobique, erit æqualitas inter $5\frac{1}{4}$℞.& 30 Diuiſiſque 30. per $5\frac{1}{4}$. fiet 1℞. $5\frac{5}{7}$. vt prius.

Ænigma

Ænigma hoc ſoluemus quoque in ænigmate 171. ſed alio exemplo propoſito,

134 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum datis quotlibet vnitatibus ſecundi numerum faciet æqualem ei, qui ſecundo ſupereſt. Item ſecundus cum quotcunque vnitatibus tertij faciat alium numerum æqualem ei, qui tertio ſupereſt. Tertius denique, acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi habeat proportionem datam.* CXXXIIII

SVMAT primus à ſecundo 40. vnitates: ſecundus à tertio 56. vnitates: tertius denique à primo 72. vnitates, ita vt primus faciat numerum æqualem reliquo ſecundi: ſecundus item æqualem ei, qui tertio remanet: tertius autem numerum faciat quintuplum eius, qui primo ſupereſt. Ponatur primus 1℞. Ergo acceptis 40. à ſecundo, habebit 1℞ + 40. Ac tantundem tunc ſupereſſe debet ſecundo. Secundus ergo antequam daret 40. primo, habuit 1℞ + 80. qui poſtquam acceperit 56. à tertio, habebit 1℞ + 136. Ac tantundem ſupereſſe tunc debet tertio, ideoque antequam daret 56. ſecundo, habuit 1℞ + 192. qui ſi à primo accipiat 72. habebit 1℞ + 264. qui numerus debet eſſe quintuplus numeri 1℞ — 72. qui primo, poſtquam dederit 72. ſupereſt. Ergo numerus huius quintuplus 5℞ — 360. æqualis erit numero 1℞ + 264. quem tertius confecit. Additis autem 360. vtrinque, erit æquatio inter 5℞. & 1℞ + 624. Et ablata 1℞. vtrobique, inter 4℞ & 624. Diuiſis ergo 624. per 4. fiet 1℞. 156. primus numerus. Ac proinde ſecundus, qui inuentus fuit 1℞ + 80. erit 236. Tertius vero, quem inuenimus eſſe 1℞ + 192. erit 348. Atque tres hi numeri problema efficiunt. vt probare potes.

SCHOLIVM.

IN ſimilibus quæſtionibus proponetur aliquando problema, quod diſſolui nequit. id quod æquatio inuenta præclare monebit. Vt ſi in propoſito problemate quis diceret, tertium acceptis 72. à primo, habere quoque numerum reliquo primi æqualem, fieret quæſtio impoſſibilis. Nam tertius tunc haberet, vt dictum eſt, 1℞ + 264. qui æqualis nullo modo eſſe poteſt numero 1℞ — 72. qui primo ſupereſt.

135 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt vtroque per duos numeros datos multiplicato, producantur duo numeri facientes ſummam quamcunque datam.* CXXXV

INVENIENDI ſint duo numeri in proportione quintupla, vt minore multiplicato per 8. & maiore per 5. procreentur duo numeri, quorum ſumma ſit 100. Ponantur quæſiti numeri 1℞. & 5℞. in proportione quintupla. Ex 1℞. in 8. fiunt 8℞. & ex 5℞. in 5. fiunt 25℞. Summa productorum eſt 33℞. æqualis 100. Diuiſis igitur 100 per 33. fiet 1℞ $\frac{100}{33}$. ſiue $3\frac{1}{33}$. primus numerus. Secundus ergo erit $\frac{500}{33}$. ſiue $15.\frac{5}{33}$. Ex $3\frac{1}{33}$. hoc eſt, ex $\frac{100}{33}$. in 8. fiunt $\frac{800}{33}$ ſiue $24\frac{8}{33}$. Et ex $15.\frac{5}{33}$. id eſt, ex $\frac{500}{33}$. in 5. fiunt $\frac{2500}{33}$. ſiue $75\frac{25}{33}$. Atque hi duo producti $24\frac{8}{33}$. & $75\frac{25}{33}$. faciunt ſummam datam 100.

136 *Duos numeros inuenire, quorum tam ſumma, quam exceſſus ſit numerus quadratus.* CXXXVI.

PONATVR ſumma duorum numerus quadratus, cuius latus ſit vna radix, plus quotcunque vnitatibus; nimirum quadratus 1ʓ + 10℞ + 25. procreatur ex latere aſſumpto quocunque 1℞ + 5. Nam ſi minor numerus quæſitus ſtatuatur $\frac{1}{2}$ʓ. erit maior $\frac{1}{2}$ʓ + 10℞ + 25. Horum enim ſumma 1ʓ + 10℞ + 25. quadratus numerus eſt, ex hypotheſi. Reliquum eſt, vt eorundem numerorum $\frac{1}{2}$ʓ. & $\frac{1}{2}$ʓ + 10℞ + 25. exceſſus 10℞ + 25. ſit etiam quadratus: hoc eſt, æqualis cuicunque quadrato maiori, quam 25 nimirum 100. Ablatis ergo 25. vtrobique, erit æquatio inter 10℞. & 75. Diuiſiſque 75. per 10. fiet 1℞. $7\frac{1}{2}$. & 1ʓ. $\frac{225}{4}$. hoc eſt, $56\frac{1}{4}$ Igitur minor numerus, qui fuit $\frac{1}{2}$ʓ. erit $28\frac{1}{8}$. Maior autem, qui fuit $\frac{1}{2}$ʓ + 10℞ + 25. erit $128\frac{1}{8}$. Nam ſumma horũ numerorum $156\frac{2}{8}$. hoc eſt, $\frac{1250}{8}$. ſiue $\frac{625}{4}$. numerus quadratus eſt, cuius latus $\frac{25}{2}$. Item exceſſus eorundem 100. quadratus quoque eſt, cuius latus 10.

SI prædictum exceſſum 10℞ + 25. pones æqualem quadrato 36. vel alij cuicunque, qui non ſit 100. inuenies aliam æſtimationem vnius radicis, vt experiri potes.

137 *Dato quadrato, inuenire numerum, quo & ad datum quadratum adiecto, & ab eodem detracto, fiat numerus quadratus.* CXXXVII.

SIT datus quadratus 100. qui per ænigma 90. vel eius ſcholium diuidatur in duos quadratos, quod per dictum ſcholium ita fiet. Latus quadrati dati, nimirum 10. ducatur in quemlibet numerum, vt in 5. Duplum huius numeri producti 100. diuidatur per quadratũ numeri 5. aſſumpti auctum vnitate, nimirum per 26. Quotientis enim $\frac{50}{13}$. quadratus $\frac{2500}{169}$. ſiue $14\frac{134}{169}$. erit vnus quadratus. quo dempto ex 100. quadrato dato, reliquus fiet alter quadratus $85.\frac{35}{169}$ qui duo quadrati efficiunt 100. Latera autem eorum $\frac{50}{13}$. & $\frac{120}{13}$ inter ſe multiplicata faciunt $\frac{6000}{169}$. ſiue $35\frac{85}{169}$. cuius producti numeri duplum $\frac{12000}{169}$. ſiue $71\frac{1}{169}$. erit numerus, qui quæritur. Is enim adiectus ad 100. facit $171\frac{1}{169}$. ſiue $\frac{28900}{169}$. quadratum, cuius latus $\frac{170}{13}$. ſiue $13\frac{1}{13}$. Idem numerus $71\frac{1}{169}$. demptus ex eodem quadrato dato 100. relinquit $28\frac{168}{169}$. ſiue $\frac{4900}{169}$. numerum quoque quadratum, cuius latus $\frac{70}{13}$. ſiue $5\frac{5}{13}$.

RATIO huius operationis hæc eſt. Quando quadratus datus 100. diuiditur in duos quadratos, latus dati quadrati, & duo latera inuentorũ quadratorũ, ſi ad lineas cõtrahantur, [a] conſtituunt triangulum rectangulum; quandoquidem duo quadrata inuenta, ex eorum lateribus deſcripta, æqualia ſunt dato quadrato. Igitur, vt [a] 48. primi

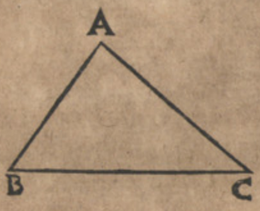
in Lem-

in Lemmate ſequenti demonſtrabimus, rectangulum bis comprehenſum ſub illis duobus lateribus, additum quadrato dato, efficit quadratum, cuius nimirum latus duobus illis lateribus æquale eſt: & ablatum ex eodem quadrato dato, reliquum facit quadratum, cuius videlicet latus eſt duorum illorum laterum differentia.

SI idem quadratus 100. diſtribuatur in duos quadratos 36. & 64. quorũ latera 6. & 8. inter ſe multiplicata faciunt 48. erit huius numeri duplum 96. is, quem quærimus. Hic enim adiectus ad 100. facit quadratum 196. cuius latus 14. & detractus ex 100. reliquum facit quadratum 4. cuius latus 2.

LEMMA.

Lemma. *IN omni triangulo rectangulo, rectangulum bis ſub duobus lateribus circa angulum rectum comprehenſum, vna cum quadrato lateris recto angulo oppoſiti, æquale eſt quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur, Idem vero rectangulum bis ſub lateribus prædictis comprehenſum, ſi ex eodem quadrato lateris recto angulo oppoſiti detrahatur, reliquum fiet quadratum, cuius latus differentia eſt prædictorum duorum laterum.*



SIT *triangulum rectangulum ABC. Dico rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale eſſe quadrato cuius latus æquale ſit duobus lateribus AB, AC, ſimul. Et ſi idem rectangulum bis detrahatur ex quadrato rectæ BC, relinqui quadratum, cuius latus æquale ſit differentiæ inter AB, AC. Quoniam enim ſi concipiatur linea vna ex AB, AC, compoſita,* [a] *rectangulum ſub AB, AC, bis comprehenſum, vna cum quadratis ex AB, AC, æquale eſt quadrato rectæ ex AB, AC, compoſitæ:* [b] *Sunt autem quadrata ex AB, AC, quadrato ex BC, æqualia; erit quoque rectangulum bis comprehenſum ſub AB, AC, vna cũm quadrato ex BC, æquale quadrato rectæ ex AB, AC, compoſitæ, quod eſt primum.*

[a] 4. ſecũdi. [b] 47. prim. [c] Lemma 39. decimi.

DEINDE [c] *quia duo quadrata ex AB, AC, (hoc eſt quadratum ex BC,) maiora ſunt rectangulo bis ſub AB, AC, comprehenſo, quadrato eius lineæ, quæ differentia eſt inter AB, AC, manifeſtum eſt, ſi illud rectangulum bis ſub AB, AC, comprehenſum dematur ex quadratis rectarum AB, AC, hoc eſt, ex quadrato rectæ BC, remanere quadratum, cuius latus æquale eſt differentiæ inter AB, AC, quod eſt ſecundum.*

CXXXVIII *138 Numerum inuenire, qui in quemuis datum numerum ductus, faciat numerum, qui cum quouis alio dato numero numerum efficiat æqualem ei, qui fit ex quæſito numero in quemuis alium datum numerum, maiorem tamen priore dato, multiplicato.*

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 7. faciat numerum, qui adiectus ad 60. faciat ſummam æqualem numero, qui fit ex inuento numero in 8. multiplicato. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ex 1℞. in 7. fit numerus 7℞. quo addito ad 60. fit numerus 7℞ + 60. æqualis numero 8℞. qui fit ex 1℞. in 8. Ablatis ergo 7℞. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 1℞. Diuiſiſque 60. per 1. fiet 1℞. 60. numerus quæſitus. Hic enim ductus in 7. facit 420. additiſque 60. fit numerus 480. quem nimirum facit numerus inuentus 60. in 8. ductus.

CXXXIX. *139 Datum numerum in duas partes diuidere, & inſuper quadratum inuenire, qui cum vtraque parte ſeorſum quadratum efficiat.*

SIT datus numerus 65. ſecandus in duas partes, & inſuper quadratus inueniendus, cum quo quælibet illarum partium efficiat quadratũ. Ponãtur duo numeri quicunq;, quorũ quilibet compoſitus ſit ex vna radice, & aliquot vnitatibus, nimirum 1℞ + 3. & 1℞ + 5. Quadrati horũ ſunt 1ℨ + 6℞ + 9. & 1ℨ + 10℞ + 25. Igitur ſi numerus 6℞ + 9. addatur ad 1ℨ. qui numerus quadratus eſt fit quadratus 1ℨ + 6℞ + 9, Et ſi numerus 10℞ + 25. addatur ad eundem 1ℨ. fit quadratus 1ℨ + 10℞ + 25. Ergo ſi minor pars numeri dati ponatur 6℞ + 9 & maior 10℞ + 25. ſatisfactum erit problemati, ſi hæ partes conficiant datum numerum 65. Faciunt autem ſummam 16℞ + 34. quæ æqualis debet eſſet 65. Demptis 34. vtrobique, manebit æqualitas inter 16℞. & 31. Diuiſis igitur 31. per 16, fiet 1℞ $\frac{31}{16}$. ſiue $\frac{15}{16}$. cuius quadratus $\frac{961}{256}$. ſiue $3\frac{193}{256}$. erit is, qui quæritur. Minor autem pars numeri dati, quam poſuimus 6℞ + 9. erit $\frac{330}{16}$ ſiue 20. $\frac{5}{8}$. Maior vero, quæ poſita fuit 10℞ + 25. erit $\frac{710}{16}$. ſiue $44\frac{3}{8}$. quæ duæ partes ſimul efficiunt datum numerum 65. Et prima addita ad quadratum inuentum $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{6241}{256}$. cuius latus $\frac{79}{16}$. Secunda autem cum eodem quadrato $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{12321}{256}$. cuius latus $\frac{111}{16}$.

SCHOLIVM.

HOC ænigma plures ſolutiones admittit, pro varietate numerorum in principio aſſumptorum. Nam ſi numeri ponantur 1℞ + 1. & 1℞ + 2. erunt eorũ quadrati 1ℨ + 2℞ + 1. & 1ℨ + 4℞ + 4. Atque ſi minor pars numeri dati 65. ponatur numerus 2℞ + 1. maior vero 4℞ + 4. ſatisfactum erit problemati, cũ vterque numerus cum 1ℨ. faciat quadratum. Faciunt ijdem duo numeri ſummam 6℞ + 5. quæ æqualis eſſe debet 65. Ablatis igitur 5. vtrobique, remanebit æqualitas inter 6℞. & 60. Diuiſiſque 60. per 6. fiet 1℞. 10. cuius quadratus 100. eſt is, quæritur, poſituſque fuit 1ℨ. Minor vero pars numeri dati 65. quam poſuimus 2℞ + 1. erit 21. Maior autem poſita 4℞ + 4. erit 44. quæ duæ partes faciunt 65. Et prima addita quadrato inuento 100. facit quadratum 121. cuius latus 11. Secunda aũt cum eodem quadrato 100. facit quadratum 144. cuius latus 12.

Atque in hunc modum diuidi poterit datus numerus in alias, atque alias partes, ſi alij atque alij numeri aſſumantur compoſiti ex 1℞. & aliquot vnitatibus.

140 Datum

140 *Datum numerum in duas partes diſtribuere, & inſuper quadratum inuenire, à quo ſi duæ partes inuentæ ſubducantur, reliqui fiant duo quadrati.* CLX.

SIT diuidendus numerus 65. in duas partes, & inueniendus quadratus, à quo ſi inuentæ duæ partes demantur, reliqui fiant duo numeri quadrati. Ponantur duo numeri vtcunque, vnus compoſitus ex vna radice & quotlibet vnitatibus, alter vero ex vna radice minus totidem vnitatibus, nimirum 1℞+2. & 1℞—2. Quadrati horum erunt 1ȝ+4℞+4. & 1ȝ—4℞+4. Ponatur ergo quadratus, qui quæritur, 1ȝ+4℞+4. à quo ſi auferatur numerus 4℞+4 relinquetur quadratus 1ȝ. Quod ſi poſterior quadratus à priore ſubducatur remanebunt 8℞. Ac viciſſim ſi 8℞. detrahantur ex eodem priori quadrato 1ȝ+4℞+4. relinquetur poſterior quadratus 1ȝ—4℞+4. Ergo ſi minor pars numeri diuidendi ponatur 4℞+4. Et maior 8℞. ſatisfactum erit ænigmati; quippe cum minor dempta ex quadrato 1ȝ+4℞+4. relinquat quadratum 1ȝ. Et maior ex eodem quadrato ſubducta relinquat quadratum 1ȝ—4℞+4. Reliquum iam eſt, vt hæ duæ partes 4℞+4. & 8℞. faciant numerum datum 65 faciunt autem ſummam 12℞+4. æqualem 65. Ablatis ergo 4. vtrinque, erit æquatio inter 12℞. & 61. Diuiſiſque 61. per 12. fiet 1℞. $\frac{61}{12}$. Ac propterea quadratus quæſitus, quem poſuimus 1ȝ+4℞+4. erit $\frac{7225}{144}$. cuius latus $\frac{85}{12}$. Minor autem pars numeri diuidendi poſita 4℞+4. erit $\frac{292}{12}$. ſiue $\frac{3504}{144}$. Maior autem poſita 8℞. erit $\frac{488}{12}$. vel $\frac{5856}{144}$. Prior enim ex inuento quadrato $\frac{7225}{144}$. ſubducta relinquit quadratum $\frac{3721}{144}$. cuius latus $\frac{61}{12}$. Poſterior autem ex eodem quadrato $\frac{7225}{144}$. detracta reliquum facit quadratum $\frac{1369}{144}$. cuius latus $\frac{37}{12}$.

HOC etiam ænigma plures admittit ſolutiones, prout videlicet in principio alij atque alij numeri aſſumpti fuerint pro numeris 1℞+2. & 1℞—2. &c.

141 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant ſummam datam quamcunque, quæ maior ſit quarta parte cubi ex dato numero deſcripti.* CXLI.

DATVS numerus 10. diuidendus ſit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior eſt, quam 250. quarta pars cubi ex 10. generati. Ponatur prima pars numerus compoſitus ex 1℞. & ſemiſſe dati, numeri, nimirum 1℞+5. Secunda pars, ſemiſſis eiuſdem numeri dati, minus 1℞, nimirum 5—1℞. Ita enim duæ hæ partes numerum datum 10. conficient. Cubi earum ſunt 1ce+15ȝ+75℞+125. & 125—75℞+15ȝ—1ce. Summa corũ 30ȝ+250. nam +1ce, & —1ce. Item +75℞. & —75℞. ſe mutuo interimunt: & ex 15ȝ. & 15ȝ. fiunt 30ȝ. atque 125. 125. faciunt 250. Hæc ergo ſumma 30ȝ+250. æqualis eſſe debet 370. Ablatis 250. vtrinque, remanebit æqualitas inter 30ȝ. & 120. Diuiſis igitur 120. per 30. fiet 1ȝ. 4. & 1℞ 2. Prima igitur pars poſita 1℞+5. erit 7. Secunda vero, quam poſuimus 5—1℞. erit 3. Cubi harum partium 7 & 3 ſunt 343. & 27 efficiuntq. 370.

SI eodem numero 10. dato, ſumma cuborum proponatur 400. inueniemus æquationem inter 30ȝ+250. & 400. Ablatiſque 250. vtrinque, inter 30ȝ. & 150. Diuiſis igitur 150. per 30. fiet 1ȝ. 5. & 1℞. √ȝ5. Ergo prima pars poſita 1℞+5. erit √ȝ5+5. Secunda vero poſita 5—1℞. erit 5—√ȝ5. quæ ſimul faciunt 10. Cubi autem harum partium (reductis, quæ reducenda ſunt) ſunt 200+√ȝ32000. & 200—√ȝ32000. quorum ſumma eſt 400. cum +√ȝ32000. & —√ȝ32000. ſe mutuo interimant.

SCHOLIVM.

SINE Algebra idem ænigma ſoluetur hoc pacto. Datus numerus 20. ſecandus ſit in duas partes, quarum cubi facere debeant ſummam 2960. quæ maior eſt, quam 2000. quarta pars cubi ex 20 generati. Dematur $\frac{1}{4}$. cubi ex dato numero 20. deſcripti, nimirum 2000. ex 2960. ſumma propoſita. Et reliquus numerus 960. diuidatur per 60. triplum dati numeri 20. Quotientis namque 16. radix quadrata 4. addita, & ablata ex 10. ſemiſſe dati numeri 20. dabit partes quæſitas 14. & 6. quæ ſimul faciunt datum numerum 20. & earum cubi 2744. & 216. faciunt 2960.

HOC etiam ænigma in ænigmate 1. ſequentis capitis ſoluemus per æquationem compoſitam, in qua ſcilicet tres numeri occurrunt, quorum vnus alijs duobus eſt æqualis.

142 *Datum numerum in duos cubos diſtribuere, quorum laterum ſumma data eſt: dummodo quarta pars cubi huius ſummæ minor ſit dato numero.* CXLII.

HOC problema ab antecedenti non differt. Nihil enim aliud hic iubemur, niſi ſummam laterum datam diſtribuere in duas partes, quarum cubi datum efficiant numerum, qui maior ſit quarta parte cubi ex ſumma laterum data procreati. Vt ſi datus numerus 2960. diuidendus ſit in duos cubos, quorum latera faciant 20. Diuidendus erit numerus 20. in duas partes, quarum cubi faciant 2960. vt in præcedenti problemate factum eſt. Nam ita numerus 2960. diuiſus erit in duos cubos 2744. & 216. quorum latera 14. & 6. datam ſummam 20. conficiunt.

SIC etiam ſi datus numerus 400. diuidendus ſit in duos cubos, quorum latera faciant 10. inuenientur duo cubi, (reductis, quæ reducenda ſunt) 200+√ȝ32000. & 200—√ȝ32000. quorum latera ſunt √ȝ5+5. & 5—√ȝ5. ſi nimirum ſumma laterum 10. diuidatur in duas partes, vt in præcedenti ænigmate, vel ſcholio eiuſdem factum eſt. ita vt earum cubi efficiant 400.

143 *Numerum inuenire, cuius quadratus, vel multiplex quadrati datus conſtituat datam partem, vel partes cubi ex eodem inuento numero procreati.* CXLIII.

SIT primũ inueniendus numerus, cuius quadratus cõſtituat $\frac{1}{7}$. cubi ex inuento numero procreati. Ponatur

quæ-

quæſitus numerus 1℞. cuius quadratus eſt 1ʒ. & cubus 1ℭ. Vt ergo 1ʒ. conſtituat $\frac{1}{9}$. numeri 1ℭ. neceſſe eſt, æqualitatem eſſe inter 1ʒ. & $\frac{1}{9}$ℭ. Diuiſa igitur 1. per $\frac{1}{9}$. fiet 1℞. 9. numerus quæſitus (quod numeri Coſſici ſint collaterales.) Huius enim quadratus 81. nonam partem conſtituit eiuſdem cubi 729.

SIT deinde inueniendus numerus, cuius quadratus conſtituat $\frac{5}{9}$. cubi. Iiſdem poſitis, erit æquatio inter $\frac{5}{9}$ℭ. & 1ʒ. Diuiſa ergo 1. per $\frac{5}{9}$. fiet 1℞. $\frac{9}{5}$. vel $1\frac{4}{5}$. numerus quæſitus. Huius enim quadratus $\frac{81}{25}$. conſtituit $\frac{5}{9}$. cubi $\frac{729}{125}$.

RVRSVS ſit inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum conſtituat $\frac{1}{7}$ cubi ipſius. Ponatur numerus quæſitus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. & cubus 1ℭ. Ergo æqualitas erit inter 5ʒ. & $\frac{1}{7}$ℭ. Diuiſis ergo 5. per $\frac{1}{7}$. fiet 1℞. 35. numerus quæſitus. Huius enim quadratus eſt 1225. & eius quincuplum 6125. conſtituit $\frac{1}{7}$. cubi 42875. ex 35. procreati.

POSTREMO inueniendus ſit numerus, cuius quadrati quincuplum conſtituat $\frac{9}{10}$. cubi ipſius. Poſitis iiſdem, erit æquatio inter 5ʒ. & $\frac{9}{10}$ℭ. Diuiſis igitur 5. per $\frac{9}{10}$. fiet 1℞. $\frac{50}{9}$. hoc eſt, $5\frac{5}{9}$. numerus quæſitus. Eius enim quadratus eſt $\frac{2500}{81}$. cuius quintuplum $\frac{12500}{81}$. conſtituit $\frac{9}{10}$ cubi $\frac{125000}{729}$.

CXLIIII 144 *Numerum inuenire, qui ſui cubi conſtituat datam partem, vel partes.*

SIT primum inueniendus numerus, qui conſtituat $\frac{1}{12}$. ſui cubi. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ. Eſt ergo æqualitas inter 1℞. & $\frac{1}{12}$ℭ. Diuiſaque 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1ʒ. 12. (quod inter ℭ. & ℞. interiecta ſit denominatio ʒ.) & eius radix quadrata, nimirum √ʒ 12. erit pretium 1℞. Numerus ergo quæſitus eſt √ʒ 12. Hic enim conſtituit $\frac{1}{12}$. ſui cubi √ʒ 1728.

DEINDE inueniendus ſit numerus, qui conſtituat $\frac{4}{9}$. ſui cubi. Poſitis iiſdem, fiet æquatio inter 1℞. & $\frac{4}{9}$ℭ. Diuiſa igitur 1 per $\frac{4}{9}$ fiet 1ʒ. $\frac{9}{4}$. & 1℞. $\frac{3}{2}$. numerus quæſitus. Eius enim cubus eſt $\frac{27}{8}$. cuius quatuor nonas continet inuentus numerus $\frac{3}{2}$.

CXLV. 145 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt minor in quadratum maioris ductus producat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, ita vt minore in quadratum maioris ducto, gignatur numerus 4860. Ponantur numeri quæſiti 5℞. & 6℞. in proportione ſeſquiquinta. Minore 5℞. ducto in 36ʒ. quadratum maioris 6℞. fit numerus 180ℭ. æqualis 4860. Diuiſis ergo 4860. per 180. fiet 1ℭ. 27. cuius radix cubica eſt 3. quia inter characteres ℭ. & N. duo medij ſunt ʒ. & ℞. Ergo minor numerus poſitus 5℞. erit 15. & maior poſitus 6℞. erit 18. Atque ex minore 15. in 324. quadratum maioris 18. fit numerus 4860.

SINT rurſus in eadem proportione ſexquiquinta inueniendi duo numeri, ita vt minor ductus in quadratum maioris producat 1. Poſitis iiſdem, inuenietur æqualitas inter 180ℭ. & 1. Diuiſa ergo 1. per 180. fiet 1ℭ. $\frac{1}{180}$. & radix cubica √ℭ $\frac{1}{180}$. Ergo minor numerus poſitus 5℞. faciet √ℭ $\frac{125}{180}$. hoc eſt, √ℭ $\frac{25}{36}$. Maior aũt poſitus 6℞. erit √ℭ $\frac{216}{180}$. ſiue √ℭ $\frac{6}{5}$. Atque ex minore √ℭ $\frac{25}{36}$. in √ℭ $\frac{36}{25}$. quadratũ maioris √ℭ $\frac{6}{5}$. producitur √ℭ $\frac{900}{900}$. hoc eſt, 1. Quando enim numerator fractionis æqualis eſt denominatori, fractio illa vnitati æquiualet.

CXLVI. 146 *Numerum inuenire, qui inter duos ſit medius, ſuperetque minorem numero dato, & ſuperetur à maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant ſummam datam quamcunque.*

HOC ænigma ſimile eſt ænigmati 51. & 52. ſed aliter propoſitum, atque aliter diſſolutum. Inueniendus enim ſit numerus medius inter duos ſummam efficientes 100. ita vt minorem ſuperet numero 15. & à maiore ſuperetur numero 9. Quoniam maior ponitur ſuperare medium quæſitum, numero 9. Et hic medius minorem, numero 15. liquido conſtat maiorem ſuperare minorem numero 24. Si ergo data ſumma 100. diuidatur in duas partes, quarum exceſſus 24. & ad minorem addantur 15. fiet medius quæſitus. Ponatur ergo minor pars 1℞. & maior 100 — 1℞. quæ illam ſuperare debet numero 24. Detracta 1℞. ex 100 — 1℞. reliquus fit numerus 100 — 2℞. æqualis 24. Additis ergo 2℞. vtrinque, fiet æqualitas inter 100. & 24 + 2℞. Et ablatis 24. vtrobique, inter 76. & 2℞. Diuiſis igitur 76. per 2. fiet 1℞. 38. minor pars, ideoque maior erit 62. Et additis 15. ad minorem 38. fiet medius quæſitus 53. Hic enim ſuperat minorem partem numero 15. & à maiore ſuperatur numero 9.

CXLVII 147 *Datum numerum in quotlibet partes diſtribuere, ita vt vnaquæque ad ſequentem habeat datam proportionem.*

SIT datus numerus 10000. diuidendus in ſex partes, ita vt prima ad ſecundam habeat proportionem æqualitatis: ſecunda ad tertiam duplam: tertia ad quartam triplam: quarta ad quintam proportionem æqualitatis: & quinta ad ſextam proportionem quoq; æqualitatis. Ponatur prima pars 1℞. ſecunda 1℞ quoque. Tertia $\frac{1}{2}$℞. quarta, quinta, & ſexta $\frac{1}{6}$℞. quæ omnes faciunt 3℞. æquales 10000. Diuiſis igitur 10000. per 3. fiet 1℞. $3333\frac{1}{3}$. ac propterea aliæ partes numeros facient, vt in appoſita formula vides. Omnes enim hæ partes in vnam ſummam collectæ faciunt 10000.

prima	1℞		$3333\frac{1}{3}$
ſecunda	1℞		$3333\frac{1}{3}$
tertia	$\frac{1}{2}$℞	id eſt	$1666\frac{2}{3}$
quarta	$\frac{1}{6}$℞		$555\frac{5}{9}$
quinta	$\frac{1}{6}$℞		$555\frac{5}{9}$
ſexta	$\frac{1}{6}$℞		$555\frac{5}{9}$

148 Numerum

148 *Numerum inuenire, cuius partes datæ æquales ſint parti aliquotæ datæ eiuſdem, auctæ numero dato.* CXLVIII.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{2}{3}$. æquales ſint eius ſemiſſi auctæ ſeptenario. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ergo $\frac{2}{3}$℞. æquales erunt $\frac{1}{2}$℞ + 7. Ablata $\frac{1}{2}$℞ vtrobique, remanebit æqualitas inter $\frac{1}{6}$℞. & 7. Diuiſis ergo 7. per $\frac{1}{6}$. fiet 1℞ 42. numerus quæſitus. Nam eius $\frac{2}{3}$. ſunt 28. qui numerus æqualis eſt ſemiſſi numeri 42. id eſt, numero 21. aucto ſeptenario.

149 *Duos numeros inuenire, quorum ſumma data ſit, ita vt priore per datum numerum diuiſa, fiat Quotiens, qui cum data parte poſterioris, efficiat numerum datum.* CXLIX.

SINT inueniendi duo numeri, quorum ſumma 40. ita vt priore diuiſo per 5. fiat Quotiens, qui cum $\frac{1}{8}$. poſterioris numeri faciat 6. Ponatur prior numerus 1℞. & poſterior 40 — 1℞. Diuiſa 1℞ per 5. fit Quotiens $\frac{1℞}{5}$. Et pars octaua numeri 40 — 1℞. eſt $\frac{40 - 1℞}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8℞ + 200 - 5℞}{40}$. hoc eſt, $\frac{3℞ + 200}{40}$. qui numerus æqualis debet eſſe 6. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 3℞ + 200. & 240. Ablatiſque 200. vtrinque, erit æquatio inter 3℞. & 40. Diuiſiſque 40. per 3. fiet 1℞ $13\frac{1}{3}$. prior numerus quæſitus. ideoque poſterior numerus poſitus 40 — 1℞. erit $26\frac{2}{3}$. Nam diuiſo priore numero $13\frac{1}{3}$. per 5. fit Quotiens $2\frac{2}{3}$. qui cum octaua parte poſterioris numeri $26\frac{2}{3}$. id eſt, cum $3\frac{1}{3}$. facit 6.

IN hoc exemplo propoſito vides, priorem numerum inuentum eſſe minorem. In alio exemplo poterit eſſe maior. Vt ſi inueniendi ſint duo numeri, quorum ſumma 20. ita vt priore diuiſo per 3. Quotiens fiat, qui cum $\frac{1}{8}$. poſterioris numeri faciat 5. Ponatur prior numerus 1℞. & poſterior 20 — 1℞. Diuiſa 1℞ per 3. fit Quotiens $\frac{1℞}{3}$. & pars octaua numeri 20 — 1℞. eſt $\frac{20 - 1℞}{8}$. quæ cum illo Quotiente facit $\frac{8℞ + 60 - 3℞}{24}$. hoc eſt, $\frac{5℞ + 60}{24}$. qui numerus æqualis debet eſſe 5. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5℞. & 60. Diuiſiſq; 60. per 5. fiet 1℞. 12. prior numerus quæſitus, ideoque poſterior 20 — 1℞. erit 8. Diuiſo enim priore 12. per 3. fit Quotiens 4. qui cum 1. id eſt, cum parte octaua poſterioris numeri 8. facit 5. Eſtque prior numerus maior poſteriore.

SCHOLIVM.

ADVERTE *tamen, in ſimili ænigmate proponi aliquando quæſtionem, quæ nulla ratione ſolui poßit, niſi admittantur numeri Nibilo minores. Sint enim inueniendi duo numeri, quorum ſumma 40. ita vt priore diuiſo per 5. fiat Quotiens, qui cum* $\frac{1}{10}$. *poſterioris faciat 100. Ponatur prior numerus 1℞. & poſterior 40 — 1℞. Diuiſa 1℞. per 5. fit Quotiens* $\frac{1℞}{5}$. *& pars decima numeri 40 — 1℞. eſt* $\frac{40 - 1℞}{10}$. *quæ cum Quotiente illo facit* $\frac{10℞ + 200 - 5℞}{50}$. *hoc eſt,* $\frac{5℞ + 200}{50}$. *qui numerus æqualis eſſe debet 100. Atque hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 5℞ + 200. & 5000: Ablatiſque 200. vtrinque, erit æquatio inter 5℞. & 4800. Diuiſiſque 4800. per 5. fiet 1℞. 960. prior numerus quæſitus, qui maior eſt ſumma propoſita 40. quod eſt ineptum. Sed concedamus hoc abſurdum, & progrediamur vlterius. Secundus numerus poſitus 40 — 1℞. erit 40 — 960. Hic enim cum 960. facit 40. ſummam propoſitam. Numerus autem 40 — 960. æquiualet huic — 920. Nam ſi demantur 960. ex 40. remanent — 920. vt hæc formula demonſtrat: atque hic numerus — 920. additus ad 960. priorem numerum conficit iterum ſummam propoſitam 40. vt in hac altera formula apparet. Iam ſi prior numerus 960. diuidatur per 5. fit Quotiens 192. qui cum* $\frac{1}{10}$. *numeri — 920. id eſt, cum — 92. facit 100. numerũ propoſitum, vt in tertia formula videre licet.*

$$\begin{array}{r} +\ 40 \\ +\ 960 \\ \hline -\ 920 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 920 \\ +\ 960 \\ \hline +\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 192 \\ -\ 92 \\ \hline +\ 100 \end{array}$$

LIBVIT *hoc exemplum pluribus verbis explicare, vt videas vim numerorum infra Nihil & Algorithmi ſignorum + & —, quamuis inuenta 1℞. numero 960. ſtatim dicere poſſes quæſtionem eſſe impoßibilem, quippe cum numerus 960. non poßit eſſe pars ſummæ propoſitæ 40.*

150 *Numerum inuenire, qui cum data eius parte datum numerum quemcunque ſuperet tanto numero, quanto idem datus numerus, vel alius datus ipſummet numerum inuentum ſuperat.* CL.

SIT primum inueniendus numerus, qui cum eius $\frac{1}{4}$. ſuperet 100. eodem numero, quo 100. ſuperant inuentum numerũ. Ponatur numerus quæſitus 1℞. qui cũ $\frac{1}{4}$ faciet $1\frac{1}{4}$℞. quæ ſumma ſuperare debet 100. eodem numero, quo 100. ſuperãt 1℞. Ergo demptis 100. ex $1\frac{1}{4}$℞. & 1℞. ex 100. remanebunt exceſſus æquales. hoc eſt, erit æquatio inter $1\frac{1}{4}$℞ — 100. & 100 — 1℞. Et addita 1℞. vtrobique, inter $2\frac{1}{4}$℞ — 100. & 100. Rurſumque additis 100. vtrinque, inter $2\frac{1}{4}$℞. & 200. Diuiſis ergo 200. per $2\frac{1}{4}$. fiet 1℞. $88\frac{8}{9}$. numerus quæſitus. Nam ſi ad ipſum addatur eius $\frac{1}{4}$. nimirum numerus $22\frac{2}{9}$. fiet ſumma $111\frac{1}{9}$. quæ ſuperat 100. numero $11\frac{1}{9}$. quo videlicet 100. inuentum numerum $88\frac{8}{9}$. ſuperant.

SIT deinde numerus inueniendus, qui cum $\frac{2}{3}$. ſui ipſius ſuperet 100. eodem numero, quo 140. ipſum numerum inuentum ſuperant. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ergo æquatio erit inter $1\frac{2}{3}$℞ — 100. & 140 — 1℞. Et addita 1℞. vtrinque, inter $2\frac{2}{3}$℞ — 100. & 140. Additiſque rurſum 100. vtrobique, inter $2\frac{2}{3}$℞. & 240. Diuiſis ergo 240. per $2\frac{2}{3}$. fiet 1℞. 90. numerus quæſitus. Nam ſi addantur eius $\frac{2}{3}$. nimirum 60. fiet ſumma 150. quæ ſuperant 100. numero 50. quo videlicet 140. numerum inuentum 90. ſuperant.

SIT denique inueniendus numerus, qui cum $\frac{1}{2}$.ipſius faciat ſummam, quæ eode m numero ſuperet 40 quo numerus 10.inuentum numerum ſuperat, Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ergo æquatio erit inter $1\frac{1}{2}$℞ —40.& 10 —1℞. Additaque 1℞ vtrobique, inter $2\frac{1}{2}$℞—40. & 10. Additiſque rurſum 40. vtrinque, inter $2\frac{1}{2}$℞.& 50. Diuiſis ergo 50.per $2\frac{1}{2}$. fiet 1℞.20 quæſitus numerus, qui cum ipſius $\frac{1}{2}$.facit ſummam 30.quæ numerum 40.ſuperat numero—10. vt patet in hac formula, vbi 40. ſubducta ſunt à 30. Atque eodem numero—10. ſuperat numerus 10.inueniendum numerum 20.vt conſtat, ſi 20. ex 10.ſubtrahantur, vt in hac altera formula cernis. Vbi rurſum vides mirabilem vim Algorithmi ſignorum + & —.quamuis dici poſſit, hoc exemplum non poſſe expediri, propterea quod numerus 20.inuentus cum $\frac{1}{2}$.id eſt, cum 10.facit minorem ſummam, quam 40.

+ 30
+ 40
— 10

+ 10
+ 20
— 10

CLI. 151 *Numerum inuenire, à quo ſi ſubtrahatur data pars, vel partes, relinquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipſe inuentus numerus eundem datum numerum ſuperat.*

SIT inueniendus numerus, ita vt ſubtracta $\frac{1}{5}$. ipſius, reliquus ſit numerus tanto minor quam 100. quanto ipſe numerus inuentus maior eſt, quam 100. Ponatur quæſitus numerus 1℞ à quo ſubtracta $\frac{1}{5}$. reliquæ fiunt $\frac{4}{5}$℞.quæ detractæ ex 100.relinquunt 100—$\frac{4}{5}$℞. Et ſi ex 1℞.demantur 100.relinquuntur 1℞—100. Et quia exceſſus ponuntur æquales, erit æquatio inter 100—$\frac{4}{5}$℞.& 1℞—100. Additiſque $\frac{4}{5}$℞.vtrinque, inter 100.& $1\frac{4}{5}$℞—100. Et rurſus additis 100, vtrinque, inter 200.& $1\frac{4}{5}$℞. Diuiſis ergo 200.per $1\frac{4}{5}$.id eſt, per $\frac{9}{5}$.fiet 1℞ $111\frac{1}{9}$.numerus, qui petitur. Cuius $\frac{1}{5}$.facit $22\frac{2}{9}$.id eſt, $\frac{200}{9}$. qui numerus demptus ex $111\frac{1}{9}$. id eſt, ex $\frac{1000}{9}$.relinquit $\frac{800}{9}$.hoc eſt, $88\frac{8}{9}$.qui numerus ſuperatur à 100.numero $11\frac{1}{9}$.quo videlicet inuentus numerus $111\frac{1}{9}$.numerum 100.ſuperat.

SIT præterea inueniendus numerus, ita vt ſubtractis $\frac{2}{5}$. ipſius reliquus numerus tanto minor ſit, quam 100.quanto ipſe numerus inuentus maior eſt, quam 100. Ponatur quæſitus numerus 1℞. Demptis $\frac{2}{5}$.remanent $\frac{3}{5}$℞ Eritque æquatio inter 100—$\frac{3}{5}$℞ & 1℞—100. Additiſque $\frac{3}{5}$℞.vtrobique, inter 100.& $1\frac{3}{5}$℞—100. Et rurſum additis 100. vtrinque, inter 200.& $1\frac{3}{5}$℞. Diuiſis igitur 200.per $1\frac{3}{5}$. fiet 1℞.125. numerus quæſitus. Nam ſi ex eo tollantur $\frac{2}{5}$.ipſius, nimirum 50.remanent 75. qui à 100. ſuperantur numero 25. quo videlicet inuentus numerus 125.ſuperat 100.

CLII. 152 *Numerum inuenire, qui in ſe multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, à quo ſi alius datus numerus ſubtrahatur, reliquus fiat quicunque numerus datus.*

INVENIENDVS ſit numerus, qui in ſe ductus, & productus in 10.faciat numerum, à quo ſi demantur 100. remaneat numerus 300. Ponatur quæſitus numerus 1℞ quo ducto in ſe, fit 1ʓ. & hoc ducto in 10.fit numerus 10ʓ.à quo ſi demantur 100.remanet numerus 10ʓ—100. qui æqualis debet eſſe numero 300. Additis 100.vtrobique, erit æquatio inter 10ʓ.& 400. Diuiſiſque 400.per 10.fiet 1ʓ.40. Ergo √ʓ40.eſt numerus, quem quærimus. Nam in ſe multiplicatus facit 40. Et ex 40.in 10. fit numerus 400. à quo ſi ſubtrahantur 100.remanent 300.

CLIII. 153 *Progreſſionem Arithmeticam conſtituere, cuius primus, & vltimus terminus dati ſint, & ſumma progreſſionis data, quando id fieri poteſt.*

SIT primus terminus 5 & vltimus 10.ſumma vero omnium terminorum 105. Hic duo oportet inueſtigare, numerum videlicet terminorum, & differentiam progreſſionis. Ponatur numerus terminorum 1℞. Et quia ſumma ex primo, & vltimo termino collecta multiplicata per numerum terminorum producit duplum ſummæ progreſſionis, vt in Arithmetica practica, nimirum in prima regula progreſſionum Arithmeticarum docuimus: ſi ſumma ex primo, & vltimo termino collecta, nimirum 15.ducamus in numerum terminorum, id eſt, in 1℞.faciemus 15℞.cuius ſemiſſis $\frac{15}{2}$℞.eſt ſumma progreſſionis, æqualis ſummæ datæ 105. Diuiſis igitur 105.per $\frac{15}{2}$.fiet 1℞.14.numerus terminorum, quem poſuimus eſſe 1℞.

IAM intermedij 12.termini debent facere ſummam 90.nimirum 105.dempto primo termino 5.& vltimo 10. Ponatur differentia progreſſionis 1℞.eruntque 12. termini hi ſequentes.

5+1℞. 5+2℞. 5+3℞. 5+4℞. 5+5℞. 5+6℞. 5+7℞. 5+8℞. 5+9℞. 5+10℞. 5+11℞.
5+12℞.

qui omnes ſummam faciunt 60+78℞.æqualem numero 90. Demptis ergo 60.vtrinque, erit æqualitas inter 78℞.& 30.Diuiſiſque 30 per 78.fiet 1℞.$\frac{5}{13}$.differentia progreſſionis. Eſt ergo hæc progreſſio.

5. $5\frac{5}{13}$. $5\frac{10}{13}$. $6\frac{2}{13}$. $6\frac{7}{13}$. $6\frac{12}{13}$. $7\frac{4}{13}$. $7\frac{9}{13}$. $8\frac{1}{13}$. $8\frac{6}{13}$. $8\frac{11}{13}$ $9\frac{5}{13}$. $9\frac{8}{13}$. 10.
quippe cum conſtituat 14.terminos, quorum ſumma eſt 105.

QVANDO in priori operatione reperitur numerus terminorũ nõ integer, quæſtio erit impoſſibilis quia dari

dari non poteſt talis progreſſus, in qua primus. atque vltimus terminus ſint illi, qui dati ſunt, & ſumma progreſſionis illa, quæ proponitur. Vt ſi in eodem exemplo ſumma progreſſionis daretur 100. & primus terminus 5. atque vltimus 10. inueniremus æquationem inter $\frac{15}{2}$℞. & 100. Diuiſiſque 100. per $\frac{15}{2}$. fieret 1℞. $13\frac{1}{3}$. numerus terminorum. quod fieri nequit. Nam nulla eſt progreſſio Arithmetica in rerum natura, cuius primus terminus ſit 5. & vltimus 10. ſummaque progreſſionis 100.

ITAQVE ænigma propoſitum intelligendum eſt, quando vere talis eſt progreſſio, in qua dati numeri ſint primus, & vltimus terminus, & ſumma progreſſionis. Neque vero parui æſtimandum eſt, reperire huiuſmodi progreſſionem per præcepta Algebræ. Nam ſi proponeretur hæc quæſtio. Eſt progreſſio Arithmetica, in qua primus terminus eſt 5. & vltimus 32. ſumma vero progreſſionis 185. quis eam facile inueniet ſine Algebra? quam tamen ſine magno labore reperiemus, ea via, quam in ænigmate præſcripſimus. Inuenietur enim numerus terminorum 10. & differentia progreſſionis 3. ita vt progreſſio quæſita ſit hæc.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32.

154 *Progreſſionem Geometricam in data proportione conſtituere, cuius vltimus terminus datus ſit, vna cum ſumma progreſſionis.* CLIIII.

SIT conſtituenda progreſſio in proportione ſeſquialtera, cuius vltimus terminus 19683. & ſumma totius progreſſionis 55593. Ponatur primus termins 1℞. Et quia ſi primus terminus ab vltimo ſubtrahatur, & reliquus numerus per denominatorem proportionis, vno minus, diuidatur, atque ad Quotientem vltimus terminus adijciatur, fit totius progreſſionis ſumma, vt in Arithmetica practica in prima regula progreſſionum Geometricarum ſcripſimus: detrahatur 1℞ id eſt, primus terminus, ab vltimo 19683. & reſiduum 19683 — 1℞. diuidatur per $\frac{1}{2}$. hoc eſt, per denominatorem proportionis $1\frac{1}{2}$. minus vno, & ad Quotientem 39366 — 2℞. adijciatur vltimus terminus 19683. fietque tota ſumma progreſſionis 59049 — 2℞. æqualis datæ ſummæ 55593. Additis ergo 2℞. vtrinque, erit æqualitas inter 59049. & 55593 + 2℞. Et ablatis vtrobique 55593. inter 3456. & 2℞. Diuiſis igitur 3456. per 2. fiet 1℞. 1728. primus videlicet terminus progreſſionis in proportione ſeſquialtera. Quocirca conſtituetur hæc progreſſio ſeptem terminorum, qui omnes faciunt datam ſummam 55593.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

155 *Progreſſionem Geometricam in data proportione conſtituere, cuius primus terminus datus ſit, vna cum progreſſionis ſumma.* CLV.

SIT datus primus terminus proportionis ſeſquialteræ 1728. & ſumma progreſſionis 55593. Ponatur vltimus terminus 1℞. à quo ſi primus dematur, remanet numerus 1℞ — 1728. quo diuiſo per $\frac{1}{2}$. fit Quotiens 2℞ — 3456. Addito ergo vltimo termino 1℞. fit ſumma progreſſionis 3℞ — 3456. vt in Arithmetica practica diximus, æqualis datæ ſummæ 55593. Additiſque 3456. vtrobique, erit æquatio inter 3℞ & 59049. Diuiſis ergo 59049. per 3. fiet 1℞. 19683. vltimus terminus, totaque progreſſio erit hæc.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683. &c.

HÆC etiam duo proxima ænigmata intelligenda ſunt, ſi vere in rerum natura tales progreſſiones Geometricæ exiſtant, in quibus vltimus terminus, vel primus ſint illi, qui proponuntur, & ſumma progreſſionis ſit quoque illa, quæ datur. Vnde ſi quæreretur progreſſio in proportione ſeſquialtera, cuius ſumma 1000. & vltimus terminus 500. foret quæſtio inexplicabilis, cum nulla talis progreſſio exiſtat. quod experiri poteris. Sed ſi quæratur progreſſio Geometrica in proportione ſeſquialtera, cuius vltimus terminus ſit 68. $\frac{11}{32}$. & ſumma progreſſionis $197\frac{1}{32}$. quia talis progreſſio in rerum natura exiſtit, ponemus primum terminum 1℞. qui demptus ex vltimo termino 68. $\frac{11}{32}$. relinquit $68\frac{11}{32}$. — 1℞. quo numero diuiſo per $\frac{1}{2}$. id eſt, per denominatorem proportionis minus vno, fit Quotiens $\frac{4374}{32}$. — 2℞. & addito vltimo termino $68\frac{11}{32}$. ſiue $\frac{2187}{32}$. fit numerus $\frac{6561}{32}$ — 2℞. æqualis ſummæ progreſſionis $197\frac{1}{32}$. ſiue $\frac{6305}{32}$. Additis igitur 2℞. vtrobique, erit æquatio inter 2℞ + $\frac{6305}{32}$. & $\frac{6561}{32}$. Ablatiſque $\frac{6305}{32}$. vtrinque, inter 2℞ & $\frac{256}{32}$. Diuiſis igitur $\frac{256}{32}$. per 2. fiet 1℞. 4. primus progreſſionis terminus. Vnde ſic ſtabit progreſſio.

4. 6. 9. $13\frac{1}{2}$. $20\frac{1}{4}$. $30\frac{3}{8}$. $45\frac{9}{16}$. $68\frac{11}{32}$.

SIC etiam ſi detur primus terminus 4. & ſumma progreſſionis in proportione ſeſquialtera, inuenietur vltimus terminus $68\frac{11}{32}$. Atque ita, ſi à 4. continuetur proportio ſeſquialtera, conſiſtendum erit in octauo termino $68\frac{11}{32}$. &c. Et ſane præclarum eſt, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiamſi intermedij nondum ſint cogniti.

156 *Datum numerum in duos partiri, vt primus aliquoties, vt libet, ſumptus ſit multiplex datus ſecundi aliquoties, vt libet, ſumpti: Vel vt ſecundus aliquoties, vt libet, ſumptus ſit datus multiplex primi aliquoties, vt libet ſumpti.* CLVI.

SIT datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter ſumptus faciat numerum duplum ſecundi quater ſumpti. Ponatur primus 1℞. & ſecundus 40 — 1℞. Triplum primi 3℞. duplum eſſe debet quadrupli ſecundi, hoc eſt, numeri 160 — 4℞. Erit ergo æquatio inter 3℞. & 320 — 8℞. Additiſq; 8℞. vtrinque,

inter 11℞.& 320. Diuiſis ergo 320. per 11. fiet 1℞. 29.$\frac{1}{11}$. primus numerus. alter ergo erit 10.$\frac{10}{11}$. Triplum primi eſt 87$\frac{3}{11}$. qui numerus duplus eſt, quadrupli ſecundi, id eſt, 43$\frac{7}{11}$.

SIT deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt ſecundus quater ſumptus ſit duplus primi ter ſumpti. Ergo ſecundus quater ſumptus, id eſt, numerus 160 —— 4℞ duplus erit primi ter ſumpti, id eſt, 3℞. hoc eſt, æqualis erit 6℞. Additis ergo 4℞. vtrobique, æquatio erit inter 160. & 10℞. Diuiſiſque 160. per 10. fiet 1℞. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum eſt tripli illius nimirum 48.

CLVII. 157. *Tres numeros in Arithmetica progreſſione inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem ſummam habeat datam proportionem.*

SINT inueniendi tres numeri Arithmeticam conſtituentes progreſſionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus ſit ſummæ eorundem. Ponantur tres numeri quæſiti, 1℞. 2℞. 3℞. habentes eundem exceſſum 1℞. Ex multiplicatione eorum fit numerus 6C. triplus ſummæ eorum 6℞. hoc eſt, æqualis 18℞. Diuiſis ergo 18. per 6. fiet 1ʒ. 3. propterea quod inter C. & ℞. medius eſt character ʒ. ac propterea 1℞. erit √ʒ 3. & 2℞. erunt √ʒ 12. & 3℞. erunt √ʒ 27. ita vt tres numeri quæſiti ſint √ʒ 3. √ʒ 12. √ʒ 27. habentes eundem exceſſum √ʒ 3. qui inter ſe multiplicati faciunt √ʒ 972. qui numerus triplus eſt ſummæ eorundem, numeri videlicet √ʒ 108.

QVANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad ſummam habere debet, eſt numerus quadratus, explicabitur quæſtio in numeris rationalibus. Vt iiſdem poſitis, ſi numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6C. & 54℞. Diuiſis igitur 54. per 6. fiet 1ʒ 9. & 1℞ 3. atque tres numeri quæſiti erunt 3. 6. 9. qui inter ſe multiplicati gignunt numerum 162. noncuplum eorum ſummæ 18.

CLVIII. 158 *Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet vnitatibus à ſecundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui ſecundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis vnitatibus à tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio ſupereſt: Tertius denique acceptis quotlibet vnitatibus à primo, faciat numerum æqualem reſiduo primi, minus dato numero.*

CAPIAT primus à ſecundo 4. & ſecundus à tertio 3. & tertius à primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui ſecundo ſupereſt: Secundus autem triplum eius, qui tertio ſupereſt: Tertius denique æqualem reſiduo primi, minus 14. Ponatur ſecundus 3℞ + 6. vt dare poſſit 4. primo, & acceptis 3. à tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id eſt, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{3}$. ſine fractione. Igitur ſi ſecundus primo det 4. remanebunt ei 3℞ + 2. habebitque tunc primus 6℞ + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6℞. Deinde ſecundus, acceptis 3. à tertio, habebit 3℞ + 9. numerum triplum eius, qui tertio ſupereſt. Tertius ergo tunc habebit 1℞ + 3. & antequam daret 3. habuit 1℞ + 6. qui ſi accipiat 10. à primo, habebit 1℞ + 16. qui numerus æqualis eſſe debet reſiduo primi, minus 14. hoc eſt, ſi accedant tertio vnitates 14. tum demum faciet 1℞ + 30. numerum æqualem reſiduo primi 6℞ —— 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 1℞ + 40. & 6℞. Ablataque 1℞ vtrobique, inter 40. & 5℞. Diuiſis ergo 40. per 5. fiet 1℞. 8. Primus ergo numerus, quem poſuimus 6℞. erit 48. Secundus vero poſitus 3℞ + 6. erit 30. Tertius denique poſitus 1℞ + 6. erit 14. Nam primus, acceptis 4. à ſecundo, habebit 52. qui numerus duplus eſt 26. qui ſecundo ſupereſt. Secundus autem, ſumptis 3. à tertio, habebit 33. numerum triplum 11. qui tertio ſupereſt. Tertius denique, acceptis 10. à primo, habebit 24. qui numerus æqualis eſt reſiduo primi 38. —— 14.

QVOD ſi tertius, acceptis 10. à primo, debeat habere numerum præciſe æqualem reſiduo primi, inuenietur 1℞. 5$\frac{1}{5}$. Et tres numeri erunt 31$\frac{1}{5}$. 21$\frac{3}{5}$. 11$\frac{1}{5}$. Æquatio porro inuenta docebit, quando quæſtio eſt impoſſibilis.

CLIX. 159 *Duos numeros inuenire, ita vt primus, acceptis quotlibet vnitatibus à ſecundo, ſuperet reſiduum ſecundi dato numero: At ſecundus acceptis quotuis vnitatibus à primo, faciat numerum multiplicem datum eius, qui primo remanet, ac præterea contineat datum numerum.*

CAPIAT primus à ſecundo 20. Secundus vero 3. à primo: faciatque primus numerum, qui reſiduum ſecundi ſuperet numero 9. Secundus vero numerum faciat triplum reſidui primi, & inſuper contineat 9. vnitates. Ponatur primus 1℞. qui acceptis 20. à ſecundo, habebit 1℞ + 20. qui numerus reſiduum ſecundi ſuperare debet numero 9. Ergo ſecundo remanent 1℞ + 11. ac proinde antequam primo daret 20. habuit 1℞ + 31. Hic acceptis 3. à primo, habebit 1℞ + 34. qui numerus triplus eſſe debet reſidui primi, & inſuper continere 9. Ablatis ergo 9. erit reliquus numerus 1℞ + 25. triplus reſidui primi. Eſt autem reſiduum primi 1℞ —— 3. Igitur æquatio erit inter 1℞ + 25. & 3℞ —— 9. Additiſque 9. vtrinque, inter 1℞ + 34. & 3℞. Ablataque 1℞ vtrobique, inter 34. & 2℞. Diuiſis ergo 34. per 2. fiet 1℞. 17. primus numerus. Secundus ergo erit 48. nimirum 1℞ + 31. Ac primus 17. acceptis 20. à ſecundo, habebit 37. qui numerus reſiduum ſecundi 28. ſuperat numero 9. Secundus autem 48. acceptis 3. à primo, habebit 51. qui numerus triplum reſidui primi 14. ſuperat numero 9.

CLX. 160 *Numerum inuenire, per quem ſi datus numerus diuidatur, ex Quotiente in quemuis datum numerum tantum fiat, quantum ex inuento numero in alium quemuis numerum datum.*

SIT datus numerus 36. diuidendus per inuentum numerum, ita vt Quotiens in 24. ductus tantũ faciat, quantum

quantum numerus inuentus in 54. ductus facit. Ponatur numerus quæſitus 1ℛ. per quem ſi diuidatur numerus 36. fit Quotiens $\frac{36}{1ℛ}$. qui ductus in 24 facit $\frac{864}{1ℛ}$. numerum æqualem numero 54ℛ. qui fit ex poſito numero 1ℛ. in 54. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 864. & 54ℨ. Diuiſis igitur 864. per 54. fiet 1ℨ 16. & 1ℛ. 4. numerus quæſitus. Diuiſo enim dato numero 36. per 4. fit Quotiens 9. qui ductus in 24. facit 216. numerum æqualem ei, qui fit ex inuento numero 4. in 54.

Item inueniendus ſit numerus, per quem ſi diuidatur datus numerus 40. fiat Quotiens, qui ductus in 8. tantum faciat, quantum inuentus numerus facit in 50. ductus. Ponatur quæſitus numerus 1ℛ per quem ſi diuidatur numerus 40. fit Quotiens $\frac{40}{1ℛ}$. qui ductus in 8. facit $\frac{320}{1ℛ}$. numerum æqualem numero 50ℛ. qui fit ex poſito numero 1ℛ in 50. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 320. & 50ℨ. Diuiſis ergo 320. per 50. fiet 1ℨ. 6$\frac{2}{5}$. ſiue $\frac{32}{5}$. & 1ℛ. √ℨ $\frac{32}{5}$. numerus quæſitus. per quem ſi diuidatur datus numerus 40. hoc eſt, √ℨ 1600. fit Quotiens √ℨ $\frac{8000}{32}$. qui ductus in 8. hoc eſt, in √ℨ 64. producit numerum √ℨ $\frac{512000}{32}$. qui æqualis eſt numero √ℨ $\frac{80000}{5}$. qui fit ex numero inuento √ℨ $\frac{32}{5}$ in 50. id eſt, in √ℨ 2500. Quod enim æquales ſint numeri √ℨ $\frac{512000}{32}$. & √ℨ $\frac{80000}{5}$. liquet, cum in crucem multiplicati producant eundem numerum √ℨ 2560000.

161 *Tres numeros continue proportionales in data proportione inuenire, quorum quadrati in vnam ſummam collecti faciant datum numerum.* CLXI.

SINT inueniendi tres numeri continue ſeſquitertij, quorum quadrati faciant 4329. Ponantur quæſiti numeri 9ℛ 12ℛ 16ℛ. in proportione ſeſquitertia. Eorum quadrati 81ℨ. 144ℨ. 256ℨ faciunt ſummam 481ℨ æqualem 4329. Diuiſis ergo 4329. per 481. fiet 1ℨ. 9. & 1ℛ 3. Ergo primus numerus poſitus 9ℛ. eſt 27. ſecundus 36. & tertius 48. quorum quadrati 729. 1296. 2304. faciunt ſummam 4329.

SINT rurſus inueniendi tres numeri continue dupli, quorum quadrati faciant 6000. Ponantur tres quæſiti numeri 1ℛ. 2ℛ. 4ℛ. Horum quadrati 1ℨ. 4ℨ. 16ℨ. faciunt ſummam 21ℨ. æqualem 6000. Diuiſis ergo 6000. per 21. fiet 1ℨ $\frac{2000}{7}$. & 1ℛ. √ℨ $\frac{2000}{7}$. Numeri ergo quæſiti in proportione dupla ſunt √ℨ $\frac{2000}{7}$. √ℨ $\frac{8000}{7}$. √ℨ $\frac{32000}{7}$. quorum quadrati $\frac{2000}{7}$. $\frac{8000}{7}$. $\frac{32000}{7}$. faciunt $\frac{42000}{7}$. hoc eſt, 6000.

162 *Tres numeros continue proportionales in data proportione inuenire, ita vt parte data maximi numeri in partẽ datam medij multiplicata, & hoc producto in partem datam minimi ducto, procreetur datus numerus.* CLXII.

SINT inueniendi tres numeri continue ſeſquialteri, ita vt tertia parte maximi ducta in ſemiſſem medij, & hoc numero producto in quartam partem minimi multiplicato, fiat numerus 576. Ponantur tres numeri quæſiti ſeſquialteri, 4ℛ. 6ℛ. 9ℛ. Ex $\frac{1}{3}$. maximi, id eſt, ex 3ℛ. in ſemiſſẽ medij, id eſt, in 3ℛ. fit numerus 9ℨ. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id eſt, in 1ℛ. fit numerus 9ℭ. æqualis 576. Diuiſis ergo 576. per 9. fiet 1ℭ 64. cuius radix cubica 4. Ergo tres numeri quæſiti, cum poſiti ſint 4ℛ. 6ℛ. 9ℛ. erunt 16. 24. 36. Atque ex tertia parte maximi, id eſt, ex 12. in ſemiſſem medij, id eſt, in 12. fit numerus 144. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id eſt, in 4. fit 576.

163 *Numerum inuenire, cuius datæ duæ partes inter ſe multiplicatæ producant numerum, quo diuiſo per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam, vel partes radicis quadratæ numeri inuenti.* CLXIII.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. inter ſe multiplicatæ faciant numerum, quo diuiſo per 27. exeant $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti. Ponatur quæſitus numerus 1ℛ. Ex eius $\frac{1}{3}$. in $\frac{1}{4}$. id eſt, ex $\frac{1ℛ}{3}$. in $\frac{1ℛ}{4}$. fit numerus $\frac{1ℨ}{12}$. quo diuiſo per 27. fit numerus $\frac{1ℨ}{324}$. æqualis duabus tertijs radicis quadratæ numeri inuenti 1ℛ. hoc eſt, duabus tertijs numeri √ℨ 1ℛ. hoc eſt, numero √ℨ $\frac{4ℛ}{9}$. qui facit $\frac{2}{3}$. numeri √ℨ 1ℛ. produciturque ex ductu √ℨ 1ℛ. in $\frac{2}{3}$. id eſt, in √ℨ $\frac{4}{9}$. Itaque æquatio inuenta eſt inter √ℨ $\frac{4ℛ}{9}$. & $\frac{1ℨ}{324}$. Igitur & æquatio erit inter eorum quadrata $\frac{4ℛ}{9}$. & $\frac{1ℨℨ}{104976}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationẽ inter 419904ℛ. & 9ℨℨ. Diuiſis ergo 419904. per 9. fiet 1ℭ 46656. (quia inter ℛ. & ℨℨ. medij ſunt duo characteres ℨ. & ℭ.) & 1ℛ. 36. numerus quæſitus. Nam ex 12. eius tertia parte in 9. eius quartam partem fit numerus 108. quo diuiſo per 27. fit Quotiens 4. qui facit $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti 36. quæ radix eſt 6.

164 *Numerum inuenire, cuius pars data in ſe multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inuenti numeri.* CLXIV.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{5}$. in ſe faciat numerum, qui ductus in $\frac{1}{3}$. eiuſdem numeri inuenti producat quadratum numeri inuenti. Ponatur quæſitus numerus 1ℛ. Huius $\frac{1}{5}$. nimirum $\frac{1ℛ}{5}$. ducta in ſe facit $\frac{1ℨ}{25}$. qui numerus ductus in $\frac{1ℛ}{3}$. facit numerum $\frac{1ℭ}{75}$. æqualem quadrato numeri poſiti 1ℛ, hoc eſt, numero 1ℨ. ita vt æquatio ſit inter $\frac{1ℭ}{75}$. & 1ℨ. quæ per multiplicationem in crucẽ reducitur ad hanc inter 1ℭ. & 75ℨ. Diuiſis ergo 75. per 1 fiet 1ℛ. 75. (quod Coſſici numeri collaterales ſint) numerus quæſitus. Nam eius quinta pars, 15. ducta in ſe facit 225. qui numerus ductus in 25. tertiam partem eiuſdem numeri 75. facit 5625. quadratum inuenti numeri 75.

CLXV. 165 *Numerum inuenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. ducta in $\frac{1}{6}$. faciat 384. Ponatur quæſitus numerus 1℞. Ex $\frac{1℞}{4}$. in $\frac{1℞}{6}$ fit numerus $\frac{1ȝ}{24}$. æqualis 384. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1ȝ. & 9216. Diuiſis igitur 9216. per 1 fiet 1ȝ. 9216. & 1℞. 96. numerus quæſitus. Nam ex 24. quarta eius parte, in 16. eiuſdem partem ſextam fit numerus 384. datus.

ITEM ſit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{6}$. ducta faciat 100. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ex $\frac{1℞}{4}$. in $\frac{1℞}{6}$. fit numerus $\frac{1ȝ}{24}$. æqualis 100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1ȝ. & 2400. Diuiſis ergo 2400. per 1. fiet 1ȝ 2400. cuius radix quadrata, √ȝ 2400. erit numerus quæſitus. Nam eius $\frac{1}{4}$. eſt √ȝ150. & $\frac{1}{6}$. √ȝ. $\frac{200}{3}$. quæ partes inter ſe multiplicatæ procreant √ȝ $\frac{30000}{3}$. hoc eſt, √ȝ 10000. ſiue 100.

SCHOLIVM.

SINE Algebra ſoluetur hoc problema hac ratione; Denominatores partium inter ſe multiplicentur, & productus numerus in datum numerum ducatur. Radix enim quadrata huius producti erit numerus quæſitus. Vt in priori exemplo, ex 4. in 6. fit 24. & ex 24. in 384. fit 9216. cuius radix quadrata 96. dabit numerum quæſitum.

QVOD ſi proponantur tres partes inter ſe multiplicandæ, ita vt producant numerum datum; multiplicandi erunt partium denominatores inter ſe, & productus numerus in datum numerum ducendus. Huius enim numeri radix cubica dabit numerum quæſitum. Vt ſi quæratur numerus, cuius partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. inter ſe multiplicatæ producant 72000. Multiplicatis denominatoribus inter ſe, fit numerus 24. Et ex 24. in 72000. fit numerus 1728000. cuius radix cubica 120. dabit numerum quæſitum. Nam eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum 60. 40. 30. inter ſe multiplicatæ faciunt 72000.

EODEM modo progrediendum eſt, ſi quatuor partes aliquotæ proponantur inter ſe multiplicandæ: ſed ex vltimo producto extrahenda eſt radix zenſizenſica. Et ſi quinque proponantur, eruenda eſt radix ſurdeſolida. Et ſic de alijs in infinitum. Nam ex vltimo producto ſemper extrahenda eſt, radix, cuius exponens æqualis eſt numero partium aliquotarum. Vt ſi dentur 10. partes aliquotæ, extrahenda erit radix zenſurdeſolida. Et ſi dentur 12. radix zenſizenſicubica &c. Qua de re conſule, quæ cap. 2. ſcripſimus de progreſſionibus numerorum Coſſicorum.

CLXVI. 166 *Tres numeros inuenire, vt bini quilibet multiplicati inter ſe gignant tres datos numeros.*

EX primo in ſecundum fiat 240. Ex primo in tertium 660. Et ex ſecundo in tertium, 1380. Ponatur primus numerus 1℞. Per quem ſi diuidatur numerus 240. productus ex primo in ſecundum, fiet ſecundus $\frac{240}{1℞}$. Nam hic Quotiens ductus in diuiſorem 1℞. producit diuiſum 240. Eadem ratione erit tertius $\frac{660}{1℞}$. Quotiens videlicet diuiſionis numeri 660. per 1℞. Iam vero ex ſecundo $\frac{240}{1℞}$. in tertium $\frac{660}{1℞}$. fit numerus $\frac{158400}{1ȝ}$. æqualis 1380. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 158400. & 1380ȝ. Diuiſis ergo 158400. per 1380. fiet 1ȝ. 114$\frac{18}{23}$. (quod inter N. & ȝ. medius ſit vnus character ℞) & 1℞. erit √ȝ 114$\frac{18}{23}$. primus ſcilicet numerus, qui poſitus fuit 1℞. Et ſi per hunc primum, id eſt, per √ȝ $\frac{2640}{23}$. diuidatur primus numerus productus 240. hoc eſt, √ȝ57600. fiet Quotiens √ȝ501 $\frac{9}{11}$. ſecundus videlicet numerus. Et ſi per eundem primum numerum √ȝ $\frac{2640}{23}$. diuidatur ſecundus numerus productus 660. hoc eſt, √ȝ435600. dabit Quotiens √ȝ3795. tertium numerum. Ex primo √ȝ114$\frac{18}{23}$. in ſecundum √ȝ501$\frac{9}{11}$. fit √ȝ57600. hoc eſt, 240. Et ex eodem primo √ȝ114$\frac{18}{23}$. in tertium √ȝ3795. fit √ȝ435600. id eſt, 660. Ac tandem ex ſecundo √ȝ501 $\frac{9}{11}$. in tertium √ȝ3795. fit √ȝ1904400. id eſt, 1380.

CLXVII 167 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualē ei, quem inuenti data pars cum maiore efficit.*

DATI ſint duo numeri 12. & 20. inueniendusque ſit alius, qui cum 12. tantum faciat, quantum eius $\frac{3}{7}$. cum 20. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Igitur 12 + 1℞. æqualia erunt 20 + $\frac{3}{7}$℞. Ablatis $\frac{3}{7}$℞. vtrinque, erit æquatio inter 12 + $\frac{4}{7}$℞. & 20. Et ablatis 12. vtrobique, inter $\frac{4}{7}$℞. & 8. Diuiſis ergo 8. per $\frac{4}{7}$. fiet 1℞. 14. numerus, quem inquirimus. Nam additus ad 12. facit 26. & eius $\frac{3}{7}$. nimirum 6. cum 20. faciunt ſimiliter 26.

CLXVIII. 168 *Numerum inuenire, ita vt quadrati quotcunque partium ipſius ſimul ſumpti conficiant ſummam inuento numero æqualem, vel ipſius multiplicem.*

SIT primum inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. deſcripti ſummam faciant inuento numero æqualem. Ponatur numerus quæſitus 1℞. cuius partes nominatæ ſunt $\frac{1}{2}$℞. $\frac{1}{3}$℞. & $\frac{1}{4}$℞. & earum quadrati $\frac{1}{4}$ȝ. $\frac{1}{9}$ȝ. $\frac{1}{16}$ȝ. qui ſimul faciunt $\frac{244}{576}$ȝ. quæ ſumma æqualis eſt 1℞. Diuiſa ergo 1. per $\frac{244}{576}$. fiet 1℞. $\frac{576}{244}$. numerus quæſitus. Nam eius $\frac{1}{2}$. eſt $\frac{288}{244}$. eiuſque quadratus $\frac{82944}{59536}$. & $\frac{1}{3}$. eſt $\frac{192}{244}$. eiuſque quadratus $\frac{36864}{59536}$. & $\frac{1}{4}$. eſt $\frac{144}{244}$. eiuſque quadratus $\frac{20736}{59536}$. qui omnes tres quadrati faciunt $\frac{140544}{59536}$. numerum æqualem inuento numero $\frac{576}{244}$. quippe cum tantum fiat ex denominatore huius in numeratorem illius, quantum ex numeratore in denominatorem.

SIT deinde inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. procreati faciant numerum decuplum numeri inuenti. Ponatur numerus 1℞. cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. ſunt $\frac{1}{2}$℞. & $\frac{1}{4}$℞. & quadrati $\frac{1}{4}$ȝ. & $\frac{1}{16}$ȝ. qui ſimul faciunt ſummam $\frac{5}{16}$ȝ. æqualem 10℞. Diuiſis ergo 10. per $\frac{5}{16}$. fiet 1℞. 32. numerus quæſitus. Nam quadrati 256. & 64. ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. deſcripti faciunt ſummam 320. decuplam numeri inuenti 32.

169 *Numerum inuenire, qui ductus in datam ipſius partem producat datum numerum quem-* CLXIX.
cunque.

SIT inueniendus numerus, qui ductus in $\frac{3}{4}$. ipſius producat 90. Ponatur inuentus numerus 1℞. Ex 1℞. in $\frac{3}{4}$℞. fit numerus $\frac{3}{4}$𝔷. æqualis 90. Diuiſis igitur 90. per $\frac{3}{4}$. fiet 1𝔷. 120. & 1℞. √𝔷 120. numerus quæſitus. Eius $\frac{3}{4}$. ſunt √𝔷 $\frac{1080}{16}$. vt patet, ſi √𝔷 120. ducatur in $\frac{3}{4}$. hoc eſt, in √𝔷 $\frac{9}{16}$. Iam ex √𝔷 120. in √𝔷 $\frac{1080}{16}$. fit √𝔷 $\frac{129600}{16}$. hoc eſt, √𝔷 8100. hoc eſt, 90.

170 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati ſummam datam conficiant, maiorem ta-* CLXX.
men ſemiſſe quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiuſdem numeri.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. numerum maiorem, quam 800. qui ſemiſſis eſt quadrati ex 40. procreati, & minorē quam 1600. qui quadratus eſt eiuſdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 20 — 1℞. & alter 20 + 1℞. vt cum illo faciat 40. Quadrati horum duorum numerorum 400 — 40℞ + 1𝔷. & 400 + 40℞ + 1𝔷. faciunt 2𝔷 + 800 numerum æqualem 928. Ablatis ergo 800. vtrobique, erit æquatio inter 2𝔷. & 128. Diuiſiſque 128 per 2 fiet 1𝔷. 64. & 1℞. 8. Ergo primus numerus poſitus 20 — 1℞. erit 12. & alter, quem poſuimus 20 + 1℞. erit 28. Atque quadrati horum numerorum 12. & 28. nimirum 144. & 784. faciunt 928.

Hoc ænigma ſoluemus etiam per compoſitam æquationem in ænigmate 35. ſequentis cap. 30.

171 *Datum numerum in tres partes continue proportionales diuidere, ita vt productus numerus ex* CLXXI.
prima in tertiam ad productum ex prima in ſecundam habeat proportionem datam.

HOC ænigma ſolutum fuit etiam in problemate 133. ſed pro alio exemplo.

SIT datus numerus 39. diuidendus in tres continue proportionales, ita vt numerus factus ex primo in tertium habeat ad numerum ex primo in ſecundum factum proportionem duplam ſeſquialteram. Ponatur ſecundus 1℞. ideoque primus ac tertius ſimul 39 — 1℞. Ex ſecundo 1℞. in ſe fit 1𝔷. [a] quantum nimirum fit ex primo in tertium. Et quia hic productus debet eſſe duplus ſeſquialter ad eum, qui fit ex primo in ſecundum 1℞. fiet ex primo in ſecundū numerus $\frac{2𝔷}{5}$. (quod 1𝔷. ad $\frac{2𝔷}{5}$. proportionem habeat duplā ſeſquialteram, vt conſtat, ſi 1𝔷. diuidatur per $2\frac{1}{2}$. denominatorē proportionis duplæ ſeſquialteræ.) Quo diuiſo per ſecundum 1℞. fit Quotiens $\frac{2𝔷}{5℞}$. ſiue $\frac{2℞}{5}$. qui ductus in diuiſorem, id eſt, in 1℞. producit $\frac{2𝔷}{5}$. ac proinde primus numerus erit $\frac{2℞}{5}$. quo ablato ex ſumma primi ac tertij, id eſt, ex 39 — 1℞. reliquus erit tertius numerus $\frac{195 - 7℞}{5}$. in quem ſi ducatur primus $\frac{2℞}{5}$. producetur numerus $\frac{390℞ - 14𝔷}{25}$. æqualis numero 1𝔷. qui fit ex medio 1℞. in ſe. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 25𝔷. & 390℞ — 14𝔷. Et additis 14𝔷. vtrinque, erit æquatio inter 390℞. & 39𝔷. Diuiſis igitur 390. per 39. fiet 1℞ 10. (quod numeri Coſſici ſint collaterales) numerus ſcilicet medius. Primus ergo poſitus $\frac{2℞}{5}$. nimirum 2℞. diuiſæ per 5. erit 4. Et tertius, qui inuentus eſt $\frac{195 - 7℞}{5}$. hoc eſt, 195 — 7℞. diuiſæ per 5. erit 25. ita vt tres partes numeri 39. ſint 4. 10. 25. continue proportionales. Et qui fit ex primo in tertium, vel ex ſecundo in ſe, nimirum 100. proportionem habet duplam ſeſquialteram ad numerum 40. qui fit ex primo in ſecundum.

[a] 20. ſept.

QVONIAM vero, datis tribus numeris continue proportionalibus, [b] numerus, qui fit ex medio in ſe, ad productum ex primo in medium, eandem habet proportionem, quam tres dati numeri: propterea quod medius multiplicans ſe, & primum producit duos illos productos; ſoluetur hoc ænigma propoſitum facilius, ſi per ænigma 49. datus numerus ſecetur in tres numeros continue proportionales in proportione data. Ita n. numerus factus ex primo in tertiū, hoc eſt, ex ſecundo in ſe, habebit ad factū ex primo in ſecundum proportionem datam, eandem nimirum, quam tres numeri habent. Vt in dato exemplo, ſecandus erit datus numerus 39. in tres numeros continue duplos ſeſquialteros, hoc modo. Ponantur tres numeri in proportione continua duplā ſeſquialtera 1℞. $2\frac{1}{2}$℞. $6\frac{1}{4}$℞. quorum ſumma $9\frac{3}{4}$℞. æqualis eſſe debet dato numero 39. Diuiſis ergo 39. per $9\frac{3}{4}$. fiet 1℞. 4. primus numerus, qui poſitus fuit 1℞. Secundus ergo poſitus $2\frac{1}{2}$℞. erit 10. & tertius, quem poſuimus $6\frac{1}{4}$℞. erit 25.

[b] 17. ſept.

172 *Datum numerum in duos partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta* CLXXII.
parte quadrati ex dato primo numero procreati: hoc eſt, ita vt radix quadrata ſecundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati ſit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.

SIT datus numerus 10. diſtribuendus in duos, inter quos √𝔷 1. ſit medio loco proportionalis, hoc eſt, vt ex vno in alium fiat 1. Ponatur minor pars 5 — 1℞. & maior 5 + 1℞. vt earum ſumma ſit 10. Ex vna in alteram fit numerus 25 — 1𝔷. vt in hac formula apparet, æqualis 1. Addito 1𝔷. vtrobique, fiet æquatio inter 25 & 1𝔷 + 1. Ablataque 1. vtrobique, inter 24 & 1𝔷. Diuiſis ergo 24. per 1 fiet 1𝔷. 24. & 1℞ √𝔷 24. Ergo minor pars poſita 5 — 1℞. erit 5 — √𝔷 24. Maior autem poſita 5 + 1℞. erit 5 + √𝔷 24. Atque hæ duæ partes

	5	— 1℞	
	5	+ 1℞	
	+ 5℞	— 1𝔷	
25	— 5℞		
25	—	1𝔷	

inter ſe multiplicatæ faciunt 1. vt hic çernitur. Fiet enim multiplicatio, ſi 24. quadratus poſterioris particulæ ſubtrahetur ex 25. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. [a] Igitur √ȝ 1. medio loco proportionalis eſt inter 5 — √ȝ 24. & 5 + √ȝ 24. cum tam hi duo inter ſe multiplicati, quam ille √ȝ 1. in ſe, faciat 1.

[a] 20. ſept.

5 — √ȝ 24
5 + √ȝ 24
1

PORRO hoc idem ænigma ſoluemus per compoſitam quoque æquationem in ſequenti cap. ænigmate 38.

CLXXIII. 173 *Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati ſummam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione ſuperet dato numero.*

SIT datus numerus 8. diuidendus in duos, vt ſumma ex eorum quadratis collecta excedat productum numerum ex eorum multiplicatione mutua, numero 20. Ponatur minor numerus 4 — 1℞. & maior 4 + 1℞. vt ſimul faciant 8. Quadrati ſunt 1ȝ + 16 — 8℞. & 1ȝ + 16 + 8℞. facientes ſummam 2ȝ + 32. cum — 8℞. & + 8℞. ſe mutuo tollant. Hæc ſumma excedere debet productum ex vno in alterum numero 20. Eſt autem hic productus 16 — 1ȝ. vt in appoſita formula apparet qui cum 20. faciet numerum 36 — 1ȝ. æqualem quadratorum ſummæ 2ȝ + 32. Addito ergo 1ȝ. vtrinque, erit æqualitas inter 3ȝ + 32. & 36. Ablatisq; 32. vtrobique, inter 3ȝ. & 4. Diuiſis ergo 4. per 3. fiet 1ȝ $\frac{4}{3}$. & 1℞ √ȝ $\frac{4}{3}$. Cum ergo minor numerus ſit poſitus 4 — 1℞. erit ipſe numerus minor 4 — √ȝ $\frac{4}{3}$. Maior autē poſitus 4 + 1℞. erit 4 + √ȝ $\frac{4}{3}$. qui duo numeri faciunt 8. & quadrati ſunt $17\frac{1}{3}$ — √ȝ $\frac{256}{3}$. & $17\frac{1}{3}$ + √ȝ $\frac{256}{3}$. vt in hiſce formulis apparet. quorum ſumma eſt $34\frac{2}{3}$. quæ ſuperat productum $14\frac{2}{3}$. ex vno in alterum, numero dato 20. Productus autem hic $14\frac{2}{3}$. habetur, ſi $\frac{4}{3}$. quadratus poſterioris particulæ dematur ex 16. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. traditum eſt, & altera hæc formula indicat.

4 — 1℞
4 + 1℞
+ 4℞ — 1ȝ
16 — 4℞
16 — 1ȝ

4 — √ȝ $\frac{4}{3}$
4 — √ȝ $\frac{4}{3}$
— √ȝ $\frac{64}{3}$ + $\frac{4}{3}$
16 — √ȝ $\frac{64}{3}$
$17\frac{1}{3}$ — √ȝ $\frac{256}{3}$

4 + √ȝ $\frac{4}{3}$
4 + √ȝ $\frac{4}{3}$
+ √ȝ $\frac{64}{3}$ + $\frac{4}{3}$
16 + √ȝ $\frac{64}{3}$
$17\frac{1}{3}$ + √ȝ $\frac{256}{3}$

4 — √ȝ $\frac{4}{3}$
4 + √ȝ $\frac{4}{3}$
$14\frac{2}{3}$

SIT rurſus datus numerus 40. diſtribuendus in duos, quorum quadrati ſummam faciant, quæ numerum ex eorum multiplicatione factum ſuperet numero 403. Ponatur minor numerus 20 — 1℞. & maior 20 + 1℞ facientes ſummam 40. Quadrati ſunt 1ȝ + 400 — 40℞. & 1ȝ + 400 + 40℞. quorum ſumma 2ȝ + 800. ſuperans numero 403 numerum 400 — 1ȝ. productum ex vno in alterum. qui productus habetur, ſi quadratus 1ȝ. poſterioris particulæ dematur ex 400. quadrato prioris particulæ, vt in hac formula cernis, traditumque eſt cap. 23. Itaque ſi ad hunc productum addentur 403. fiet æquatio inter 2ȝ + 800. ſummam quadratorum, & 803 — 1ȝ. Additoque 1ȝ. vtrobique, inter 3ȝ + 800. & 803. Ablatisque 800. vtrinque, inter 3ȝ. & 3. Diuiſis igitur 3. per 3. fiet 1ȝ. 1. & 1℞ 1. Erit ergo minor numerus, quem poſuimus 20 — 1℞. 19. & maior poſitus 20 + 1℞. erit 21. qui problema conficiunt.

20 — 1℞
20 + 1℞
400 — 1ȝ

HOC etiam problema ſoluemus per compoſitam æquationem in ænigmate 39. ſequentis cap.

SI numerus proponeretur 20. diuidendus in duos, vt ſumma quadratorum ſuperet numerum ex partium multiplicatione productum numero 30. foret problema impoſſibile, vt ex ipſa ſolutione diſces.

CLXXIV. 174 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, ſi ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem dato numero producat quemuis datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, cuius quadratus auctus octonario, ſi ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem octonario, producat 6497. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Eius quadratus auctus octonario erit 1ȝ + 8 mulctatus vero eodem octonario, 1ȝ — 8. Hi duo numeri inter ſe multiplicati faciunt 1ȝȝ — 64. vt hic vides, ſi 64. quadratus poſterioris particulæ, dematur ex 1ȝȝ. particulæ prioris. qui productus æqualis eſſe debet dato numero 6497. Additis ergo 64. vtrobique, æquatio erit inter 1ȝȝ, & 6561. Diuiſisque 6561. per 1. fiet 1ȝȝ. 6561. & radix eius zenſizenſica 9. numerus quæſitus. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus octonario, 73. fitque numerus 6497. ex 89. in 73.

1ȝ + 8
1ȝ — 8
1ȝȝ — 64

SI iiſ-

SI iiſdem poſitis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1ʒʒ & 74. Diuiſis ergo 74. per 1. fiet 1ʒʒ. 74. & radix Zenſizenſica √ʒʒ 74. numerus quæſitus. Eius enim quadratus √ʒʒ 5476. auctus octonario eſt √ʒʒ 5476 + 8. & mulctatus octonario, √ʒʒ 5476 — 8. qui duo numeri æquiualent his duobus √ʒ 74 + 8. & √ʒ 74 — 8. atque hi duo inter ſe multiplicati producunt 10. vt hic vides: quippe cum 64. quadratus poſterioris particulæ detractus ex 74. quadrato particulæ prioris relinquat 10.

√ʒ 74	+ 8
√ʒ 74	— 8
10	

SCHOLIVM.

ATQVE hæc dicta ſint de ænigmatibus, quæ per ſimplicem æquationem enodantur. Ad ſimilitudinem enim horum ſtudioſus Lector alia, quotquot voluerit, formare poterit. Quare nunc alia ænigmata proponemus, in quibus ſoluendis occurrunt æquationes compoſitæ.

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM ABSTRACTORUM per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis eſt, occurrit: quæ quidem compoſita æquatio dicitur.

CAPVT XXX.

1 *Datum numerum in duas partes diſtribuere, vt earum cubi datam ſummam, quæ maior ſit quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant.* I.

HOC ænigma, quod fuit 141. præcedentis cap. ſoluemus hic aliter, nimirum per æquationem compoſitam, in qua vnus numerus Coſſicus duobus Coſſicis numeris reperitur æqualis: & in qua eruenda eſt radix ex numero compoſito, vel diminuto, vt in cap. 12. traditum eſt. Id quod etiam fiet in alijs huius cap. ænigmatibus. Sit ergo datus numerus 10. diuidendus in duas partes, quarum cubi faciant ſummam 370. quæ maior eſt, quam 250. quarta pars cubi ex dato numeri 10. procreati. Ponatur prima pars 1℞. & ſecunda 10 — 1℞. Cubi harum partium ſunt 1ℭ. & 1000 — 300℞ + 30ʒ — 1ℭ. quorum ſumma 1000 — 300℞ + 30ʒ. (Nam + 1ℭ. & — 1ℭ. ſe mutuo interimunt) æqualis eſſe debet 370. Additis 300℞ vtrobique, fiet æquatio inter 1000 + 30ʒ. & 300℞ + 370. Et ablatis 370. vtrinque, inter 630 + 30ʒ. & 300℞. Et rurſum ablatis 630. vtrinque, inter 30ʒ. & 300℞ — 630. Diuiſis autem ſingulis hiſce numeris per numerum maioris characteris Coſſici, nimirum per 30. vt circa finem cap. 10. præcepimus, erit æquatio inter 1ʒ. & 10℞ — 21. quam ſic reſolues ex doctrina cap. 12. Semiſſis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. propter ſignum — remanet numerus 4. cuius radix quadrata 2. addita ad 5. ſemiſſem numeri radicum dabit maiorem radicem 7. Et eadem radix 2. dempta ex eadem ſemiſſe 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Huiuſmodi enim numeri, in quibus numerus abſolutus affectus eſt ſigno —. duplicem radicem habent, vt cap. 12. tradidimus. Partes ergo numeri dati 10. ſunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. ſummam datam 370. efficiunt. vt etiam in ænigmate 141. præcedentis cap. inuentum eſt.

SI eodem numero dato, cuborum ſumma proponatur 400. inueniemus æquationem vltimam inter 1ʒ. & 10℞ — 20. quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix quadrata √ʒ 5. addita ad 5. ſemiſſem numeri radicum dabit maiorem radicem √ʒ 5 + 5. Et eadem radix √ʒ 5. dempta ex eadem ſemiſſe 5. reliquam faciet minorem radicem 5 — √ʒ 5. vt in eodem ænigmate 141. antecedentis cap. inuenimus.

QVO pacto autem ænigma hoc ſine Algebra ſoluendum ſit, dictum eſt ſupra in ænigmate 141. præcedentis cap.

2 *Datum numerum in duos cubos diſtribuere, quorum laterum ſumma data eſt: dummodo quarta pars cubi huius ſummæ minor ſit dato numero.* II.

HOC problema cùm antecedenti coincidit, vt in ænigmate 142. cap. præcedentis diximus.

3 *Numerum inuenire, qui cum dato numero ſuum quadratum efficiat.* III.

DATVS numerus ſit 156. oporteatque inuenire numerum, qui additus ad 156. conficiat quadratum ipſius numeri inuenti. Ponatur numerus quæſitus 1℞. cuius quadratum 1ʒ. cui æqualis debet eſſe 1℞ + 156. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id eſt, ad $\frac{1}{4}$. addo 156. facioq; 156 $\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{625}{4}$. ad cuius radicem $\frac{25}{2}$. hoc eſt, ad 12 $\frac{1}{2}$. addo ſemiſſem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque pretium 1℞. 13. qui eſt numerus quæſitus. Nam 13. cum 156. facit 169. quadratum numeri 13.

SIT rurſus inueniendus numerus, qui cum 50. faciat ſuum quadratum. Ponatur numerus quæſitus 1℞. cu-

1℞. cuius quadratum 1ʒ. cui æqualis debet eſſe 1℞ + 50. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id eſt, ad $\frac{1}{4}$. addo 50. facioque 50$\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem, hoc eſt, ad √ʒ $\frac{201}{4}$. addo ſemiſſem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque pretium 1℞ √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. numerum ſcilicet quæſitum. Huius enim quadratus eſt √ʒ $\frac{804}{16}$ + $\frac{202}{4}$. vt in hac formula apparet, hoc eſt, √ʒ $\frac{201}{4}$ + 50$\frac{1}{2}$, quantum videlicet fit ex numero inuento √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. vna cum dato numero 50. Conflatur enim etiam numerus √ʒ $\frac{201}{4}$ + 50$\frac{1}{2}$. Appoſui formulam multiplicationis numeri inuenti √ʒ $\frac{201}{4}$ + $\frac{1}{2}$. in ſe quadrate, vt videas, quo pacto quadratus ſit productus.

	√ʒ $\frac{201}{4}$	+ $\frac{1}{2}$		
	√ʒ $\frac{201}{4}$	+ $\frac{1}{2}$		
		+ √ʒ $\frac{201}{16}$	+ $\frac{1}{4}$	
$\frac{201}{4}$	+ √ʒ $\frac{201}{16}$			
$\frac{201}{4}$	+ √ʒ $\frac{804}{16}$	+ $\frac{1}{4}$		

IV. 4 *Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero conficiat ipſius numeri inuenti zenſizenſum, ſiue quadrati quadratum.*

SIT datus numerus 83232. oporteatque inuenire numerum, qui cum 83232. efficiat quadrati quadratum ipſius. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. & quadrati quadratus eſt 1ʒʒ. æqualis 1ʒ + 83232. Semiſſis numeri zenſorum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id eſt, ad $\frac{1}{4}$. addo numerum 83232. efficioque 83232$\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{332929}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{577}{2}$. addo ſemiſſem numeri zenſorum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioque $\frac{578}{2}$. hoc eſt, 289. quadratum. cuius radix 17. eſt numerus quæſitus, vt prope finem cap. 12. declaratum eſt. Nam characteres Coſſici ʒʒ. ʒ. N. non ſunt collaterales, ſed inter quoſuis duos medius eſt vnus: propterea primo loco inuenitur valor vnius quadrati, deinde radix eruitur, quæ offert numerum, quem inquirimus. Atque ita numeri inuenti 17. quadratus 289. cum dato numero 83232. efficit quadrati quadratum 83521. numeri inuenti 17.

V. 5 *Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero conficiat ſui cubi quadratum, vel ſui quadrati cubum.*

SIT datus numerus 7526792. inueniendusque alius, cuius cubus cum dato numero efficiat inuenti numeri cubi quadratum, vel (quod idem eſt) quadrati cubum. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ. & zenſicubus 1ʒℭ. æqualis 1ℭ + 7526792. atque ex hoc numero compoſito eruenda eſt zenſicubica, hoc modo. Semiſſis numeri medij characteris ℭ, nimirum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. Addito numero 7526792. fit numerus 7526792$\frac{1}{4}$. vel $\frac{30107169}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{5487}{2}$. addo ſemiſſem prædictam $\frac{1}{2}$: numeri medij characteris ℭ. facioque $\frac{5488}{2}$. id eſt, 2744. radicem quadratam huius numeri 1ℭ + 7526792. propter characterem ʒ. qui in maximo charactere Coſſico reperitur. Huius denique radicis quadratæ 2744. radix cubica 14. propter alium characterem ℭ, in maximo charactere poſitum, dabit numerum quæſitum, vt cap. 12. prope finem docuimus. Huius enim cubus 2744. additus dato numero 7526792. conſtat ſuum zenſicubum, vel quadrati cubum 7529536.

VI. 6 *Inuenire duos numeros conflantes datum numerum, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur alius quiuis datus numerus.*

DATA ſumma ſit 25. & productus numerus 84. Ponatur vnus numerus 1℞. ideoque alter 25 — 1℞. qui ſimul additi faciunt 25. Ex vno vero in alterum fit numerus 25℞ — 1ʒ. æqualis 84. Addito 1ʒ. vtrobique, erit æqualitas inter 25℞. & 1ʒ + 84. Ablatiſque 84. vtrinque, inter 25℞ — 84. & 1ʒ. atque ex numero 25℞ — 84. elicienda eſt radix zenſica, hac ratione. Semiſſis numeri radicum $\frac{25}{2}$. facit quadratum $\frac{625}{4}$. ex quo dempto numero 84. hoc eſt, $\frac{336}{4}$. propter ſignum —. remanet numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. addo prædictam ſemiſſem numeri radicum, videlicet $\frac{25}{2}$. efficioque $\frac{42}{2}$. hoc eſt 21. vnum ex numeris quæſitis. alter ergo erit 4. qui etiam inuenietur, ſi vltima radix inuenta $\frac{17}{2}$. detrahatur ex prædicta ſemiſſe numeri radicum, nimirum ex $\frac{25}{2}$ Nam numerus 25℞ — 84. duplicem radicem habet, propter ſignum —. quo abſolutus numerus 84. afficitur. Iam duo numeri 21. & 4. inuenti faciunt ſummam datam 25. & ex vno in alterum procreatur datus numerus 84.

VII. 7 *Numerum inuenire, cuius zenſizenſus cum dato numero efficiat numerum in data proportione ad quadratum numeri inuenti.*

DATVS numerus ſit 1183. inueniendusque ſit alius numerus, cuius quadrati quadratus cum 1183. faciat numerum, qui ad quadratum inuenti numeri proportionem habeat, quam 176. ad 1. Ponatur quæſitus numerus 1℞ cuius zenſizenſus 1ʒʒ. & quadratus, ſiue zenſus 1ʒ. Erit ergo æquatio inter 1ʒʒ + 1183. & 176ʒ. quandoquidem vnus zenſizenſus cum 1183. debet ad 1ʒ. proportionem habere, quam 176. ad 1. hoc eſt, æqualis eſſe 176ʒ. Ablatis igitur 1183. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 176ʒ — 1183. Ex numero hoc 176ʒ — 1183. ſic radicem zenſizenſicam eruemus. Semiſſis numeri medij characteris ʒ. eſt 88. ex cuius quadrato 7744. ſi tollantur 1183. propter ſignum —. remanent 6561. ad cuius radicem quadratam 81. ſi addatur prædicta ſemiſſis 88. fiet quadratus 169. cuius radix 13. dabit numerum quæſitum. Nam eius zenſizenſus 28561. cum dato numero 1183. facit numerum 29744. qui ad 169. quadratum inuenti numeri proportionem habet, quam 176. ad 1.

SED quoniam numerus 176ʒ — 1183. duplicem habet radicem zenſizenſicam, maiorem ſcilicet & mino

minorem, vt cap. 12. traditum eſt, maior eſt inuenta 13. quæ problemati ſatisfacit. Minor autem habebitur, ſi 81. radicem quadratam reſidui 6561. ſubtrahemus ex prædicta ſemiſſe 88. Reliqui enim numeri 7. radix quadrata, nimirum √ʒ 7. erit minor radix zenſizenſica, numerus videlicet quæſitus. Nam eius quadratus eſt 7. & zenſizenſus 49. qui cum 1183. facit numerum 1232. qui ad quadratum 7. proportionem habet eandem, quam 176. ad 1.

8 *Numerum inuenire, cuius zenſicubus cum dato numero faciat numerum, qui ad ſuum cubum proportionem habeat datam.* VIII.

SIT datus numerus 1068664111. inueniendusque ſit alius numerus, cuius zenſicubus cum dato numero faciat numerum, cuius proportio ad cubum inuenti numeri proportionem habeat eandem, quam 100000. ad 1. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ. & zenſicubus 1ʒℭ. Erit ergo æqualitas inter 1ʒℭ + 1068664111. & 100000ℭ. quandoquidem 1ʒℭ + 1068664111. ad 1ℭ, proportionem habere debet eandem, quam 100000. ad 1. Ablatis igitur 1068664111. vtrobique, remanebit æqualitas inter 1ʒℭ. & 100000ℭ — 1068664111. atque adeo ex 100000ℭ — 1068664111. eruenda erit radix zenſicubica hoc modo. Semiſſis numeri cuborum eſt 50000. à cuius quadrato 2500000000. ſi dematur numerus propoſitus, propter ſignum —, remanebit numerus 1431335889. ad cuius radicem quadratam 37833. ſi addatur ſemiſſis prædicta 50000. habebitur radix quadrata 87833. Cuius radix cubica √ℭ 87833. dabit numerum quæſitum, iuxta doctrinam cap. 12. Nam eius cubus eſt 87833. & zenſicubus 7714635889. qui cum dato numero 1068664111. facit numerum 8783300000. qui ad cubum 87833. proportionem habet eandem, quam 100000. ad 1.

Et quoniam numerus 100000ℭ — 1068664111. duplicem habet radicem zenſicubicam, quarum maior inuenta eſt √ℭ 87833. ſatisfaciens ænigmati propoſito. Minor ita reperietur. Vltima radix quadrata inuenta 37833. Ex prædicta ſemiſſe 50000. numeri cuborum detrahatur. Reſidui namque 12167. radix cubica 23. erit minor radix ſatisfaciẽs quoq; ænigmati propoſito. Nam eius cubus eſt 12167. & zenſicubus 148035889. qui cum dato numero 1068664111. facit numerum 1216700000. qui ad cubum 12167. eandem proportionem habet, quam 100000. ad 1.

9 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur numerus datus quicunque.* IX.

SIT datus exceſſus 6. & numerus datus 475. Ponatur minor numerus 1℞. & maior idcirco 1℞ + 6. Ex illo in hunc fit numerus 1ʒ + 6℞ æqualis 475. Ablatis ergo 6℞. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 475 — 6℞. Radicem ergo ex hoc numero ita eruemus. Semiſſis numeri radicum 3. facit quadratum 9. ad quod adiicio numerum 475. qui intelligitur affectus ſigno +. Et ex conflato numero 484. capio radicem quadratam 22. Ex qua demo prædictam ſemiſſem 3. numeri radicum, propter ſignum —. Reliquus enim numerus 19. erit pretium 1℞. Ergo 1℞ + 6. valebit 25. Atque hi duo numeri 19 & 25. ſunt quæſiti. Habent enim exceſſum datum 6. & ex vno in alterum producitur numerus 475.

SIT rurſus datus exceſſus 6. & datus numerus 500. Iiſdem poſitis, erit productus numerus 1ʒ + 6℞. æqualis 500. Et ablatis 6℞ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 500 — 6℞. Semiſſis numeri radicum 3. facit quadratum 9. quod additum ad 500. facit 509. à cuius radice quadrata √ʒ 509. ſi dematur prædicta ſemiſſis 3. fiet minor numerus quæſitus √ʒ 509 — 3. Addito dato exceſſu 6. fiet maior √ʒ 509 + 3. Ex minore in maiorem fit numerus 509 — 9. vt in hac formula apparet, id eſt, 500. quia — √ʒ 4581. & + √ʒ 4581. ſe mutuo interimunt. Vel certe, quia vt cap. 23. traditum eſt, ſi 9. quadratum poſterioris particulæ auferatur ex 509. quadrato prioris particulæ, remanet numerus productus 500.

```
         √ʒ 509 + 3
         √ʒ 509 — 3
       ——————————————
      — √ʒ 4581 — 9
509 + √ʒ 4581
——————————————————————
      509 — 9.
```

10 *Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quilibet vna cum eiuſdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum.* X.

SIT inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum vna cum eiuſdem quadrati quadrato efficiat 535086. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ʒ. quinquies ſumptus facit 5ʒ. qui numerus vna cum eiuſdem numeri 1℞. Zenſizenſo, id eſt, cum 1ʒʒ. æqualis eſſe debet numero 535086. Quoniam igitur æquatio eſt inter 5ʒ + 1ʒʒ. & 535086. Ablatis 5ʒ. vtrinque, remanebit æquatio inter 1ʒʒ. & 535086 — 5ʒ. atque ex 535086 — 5ʒ. elicienda eſt radix Zenſizenſica, hunc in modum. Semiſſis numeri Zenſorum $\frac{5}{2}$. facit quadratum $\frac{25}{4}$. ad quem adiectus numerus datus 535086. facit 535086 $\frac{25}{4}$. hoc eſt, $\frac{2140369}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{1463}{2}$. ſi prædicta ſemiſſis $\frac{5}{2}$. dematur, propter ſignum —. remanebit radix quadrata $\frac{1458}{2}$. hoc eſt, 729. cuius radix quadrata 27. erit radix Zenſizenſica numeri 535086 — 5ʒ. nimirum numerus, quem inquirimus. Nam eius quadratus 729. quinquies ſumptus facit 3645. qui numerus cum 531441. Zenſizenſo inuenti numeri 27. facit numerum datum 535086.

11 *Numerum inuenire, cuius cubus, cum eiuſdem zenſicubo faciat datum numerum.* XI.

SIT inueniendus numerus, cuius cubus cum eiuſdem Zenſicubo faciat 1291503906. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius cubus 1ℭ, & Zenſicubus 1ʒℭ. Oportet ergo exiſtere æquationem inter 1ℭ + 1ʒℭ

&1291

&1291503906. ablatoque 1𝒞 vtrinque, inter 1ℨ𝒞. & 1291503906 — 1𝒞. Ex quo numero eruenda eſt radix Zenſicubica, hoc modo. Semiſſis numeri medij Coſſici eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. Si addatur datus numerus, fit numerus 1291503906$\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{5166015625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{71875}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$. remanebit radix Zenſica $\frac{71874}{2}$. id eſt, 35937. cuius radix cubica 33. erit radix Zenſicubica numeri 1291503906 — 1𝒞. nimirum numerus, qui quæritur. Nam eius cubus 35937. cum eiuſdem Zenſicubo 1291467969. facit numerum 1291503906.

XII. 12 *Datum numerum in duas partes diuidere, vt maiore per minorem diuiſa, & minore per maiorem, ſumma Quotientum ſit data.*

NVMERVS 100. diuidendus ſit in duas partes, vt maiore diuiſa per minorem, & minore per maiorem, duo Quotientes faciant ſummam 2$\frac{36}{91}$. Ponatur vna pars 1℞. & altera 100 — 1℞. Diuiſa hac per illam, fit Quotiens $\frac{100-1\text{℞}}{1\text{℞}}$. Et illa per hanc diuiſa, Quotiens fit $\frac{1\text{℞}}{100-1\text{℞}}$. quorum Quotientum ſumma $\frac{10000-200\text{℞}+2\text{ℨ}}{100\text{℞}-1\text{ℨ}}$. æqualis eſſe debet numero 2$\frac{36}{91}$. ſiue $\frac{218}{91}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 21800℞ — 218ℨ. & 910000 — 18200℞ + 182ℨ. Additis autem 218ℨ vtrinque, fiet æquatio inter 21800℞. & 910000 — 18200℞ + 400ℨ. Et additis 18200℞. vtrobique inter 40000℞. & 910000 + 400ℨ. Et ablatis 910000. vtrobique, inter 40000℞ — 910000. & 400ℨ. Et diuiſis ſingulis numeris per numerum ſigno ℨ. affectum, id eſt, per 400. æqualitas erit inter 100℞ — 2275. & 1ℨ. Radix ergo quadrata ita eruetur. Semiſſis numeri radicum eſt 50. à cuius quadrato 2500. ſi detrahantur 2275. propter ſignum — reliquus fiet numerus 225. ad cuius radicem quadratam 15. ſi addatur prædicta ſemiſſis 50. fiet pretium radicis 65. maior pars. Minor ergo erit 35. quæ etiam habebitur, (quoniam numerus propoſitus 100℞ — 2275. duplicem radicem habet) ſi radix quadrata 15. proxime inuenta auferatur ex prædicta ſemiſſe 50. Itaque partes quæſitæ ſunt 65 & 35. Et diuiſa illa per hanc, & hæc per illam, fiunt Quotientes 1$\frac{6}{7}$. & $\frac{7}{13}$. quæ ſummam faciunt 2$\frac{36}{91}$.

XIII. 13 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipſius mulctatus numero dato quocunque proportionem datam habeat.*

SIT inueniendus numerus, ad quem quadratus ipſius mulctatus numero 264. proportionem habeat decuplam. Ponatur quæſitus numerus 1℞. cuius quadratus 1ℨ. ſi prius ab eo ſubducantur 264. ad 1℞. proportionem habere debeat decuplam, ita vt æquatio ſit inter 10℞. & 1ℨ — 264. Et additis 264. vtrinque, inter 10℞ + 264. & 1ℨ. quæ ita expedietur. Semiſſis numeri radicum 5. quadratum facit 25. & additis 264. fit numerus 289. ad cuius radicem quadratam 17. ſi prædicta ſemiſſis 5. addatur, fit pretium vnius radicis 22. numerus videlicet quæſitus. Nam eius quadratus 484. ſi amiſerit 264. fiet 220. qui numerus decuplus eſt numeri 22.

XIV. 14 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipſius auctus dato numero proportionem habeat datam.*

SIT inueniendus numerus, ad quem ipſius quadratus auctus numero 110. proportionem habeat, quam 27. ad 1. Ponatur numerus quæſitus 1℞. cuius quadratus 1ℨ. ſi ei addentur 110. ad 1℞. proportionem habere debeat eandem, quam 27. ad 1. ita vt æquatio ſit inter 1ℨ + 110. & 27℞. Ablatiſque 110. vtrinque, inter 1ℨ. & 27℞ — 110. quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum $\frac{27}{2}$. quadratum facit $\frac{729}{4}$ à quo ſi auferantur 110. id eſt, $\frac{440}{4}$. reliquus fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. ſi addetur prædicta ſemiſſis $\frac{27}{2}$. fiet maior radix $\frac{44}{2}$. id eſt, 22. Et ſi proxime inuenta radix $\frac{17}{2}$. auferetur à prædicta ſemiſſe $\frac{27}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{10}{2}$. hoc eſt, 5. Nam hæc æquatio duplicem habet radicem. Atque ita vterque numerus 22. & 5. problemati propoſito ſatisfaciet. Quadratus enim 484. numeri 22. auctus numero 110. fit numerus 594. qui ad 22. eandem proportionem habet, quam 27. ad 1. Item quadratus 25. numeri 5. auctus numero 110. fit 135. qui numerus ad 5. proportionem eandem habet, quam 27. ad 1.

XV. 15 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam ſummam conficiant: & iidem numeri inter ſe multiplicati producant numerum, ad quem quadratorum ſumma habeat proportionem datam.*

SVMMA quadratorum data ſit 180. quæ ad productum numerum proportionem habeat duplam ſeſquialteram: atque idcirco cum 180. ad 72. habeant proportionem duplam ſeſquialteram, productus numerus ex vno in alterum ſit 72. qui numerus 72. habetur, ſi 180. diuidantur per 2$\frac{1}{2}$. denominatorem datæ proportionis. Ponatur vnus numerus quæſitus 1℞. & alter $\frac{72}{1\text{℞}}$. vt ex vno in alterum fiant 72. qui numerus $\frac{72}{1\text{℞}}$. habetur per diuiſionem 72. per 1℞. quemadmodum ſi inueniendus ſit numerus, qui ductus in 8. faciat 48. ſi diuidantur 48. per 8. inuenitur numerus 6. qui ductus in 8. facit 48. Iam quadrati poſitorum numerorum 1℞. & $\frac{72}{1\text{℞}}$. ſunt 1ℨ. & $\frac{5184}{1\text{ℨ}}$. quorum ſumma $\frac{1\text{ℨℨ}+5184}{1\text{ℨ}}$. æqualis eſſe debet 180. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1ℨℨ + 5184. & 180ℨ. Ablatiſque 5184. vtrinque, erit æquatio inter 1ℨℨ. & 180ℨ — 5184. cuius radicem ita inuenies. Semiſſis numeri medij, qui gerit characterem ℨ. eſt 90. à cuius quadrato 8100. ſi demantur 5184. fiet reliquus numerus 2916. ad cuius radicem 54. ſi addatur ſe-

tur ſemiſſis prædicta 90. fiet ſumma 144. cuius radix quadrata 12. iuxta doctrinam cap. 12. erit maior radix. Et ſi proxime inuentam radicem 54. demes ex ſemiſſe prædicta 90. reliquus erit numerus 36. cuius radix 6. dabit minorem radicem. quæ etiam habetur, ſi 72. diuidantur per priorem radicem inuentam 12. Itaque duo quæſiti numeri ſunt 12. & 6. qui inter ſe multiplicati faciunt 72. ad quem numerum ſumma data quadratorum ex ipſis procreatorum, qui ſunt 144. & 36. nimirum 180. proportionem habet duplam ſeſquialteram, quemadmodum propoſitum eſt.

16 *Datum numerum in tres numeros continue proportionales diuidere, ita vt productus ex primo in ſecundum, cum producto ex ſecundo in tertium, vna cum eo, qui fit ex tertio in primum faciat quemlibet numerum datum.* XVI.

SIT datus numerus 76. diuidendus, ita vt tres producti efficiant 1824. Quoniam datis tribus numeris continue proportionalibus, [a] qui fit ex medio in ſummam omnium, æqualis eſt eis, qui fiunt ex medio in primum, & ex medio in tertium, & ex medio in ſe, hoc eſt, ex tertio in primum, [b] cum hic æqualis ſit ei, qui fit ex medio in ſe: ſi datus numerus producendus 1824. per datum numerum diuidendum 76. diuidatur, erit Quotiens 24. medius numerus proportionalis: quippe cũ Quotiens 24. ductus in diuiſorẽ 76. id eſt, in ſummã omnium trium, gignat numerum diuiſum 1824. qui nimirum æqualis ponitur tribus productis, quos diximus. Dempto ergo hoc medio 24. ex 76. ſumma omnium, reliqua fiet ſumma primi & tertij, 52. Ponatur ergo primus 1℞. eritque propterea tertius 52 — 1℞. ita vt tres numeri proportionales ſint 1℞. 24. 52 — 1℞. [c] Igitur qui fit ex 1℞ in 52 — 1℞, id eſt, 52℞ — 1ʒ. æqualis erit numero 576. qui ex medio 24. fit in ſe. Addito ergo 1ʒ vtrinque, erit æquatio inter 52℞ & 1ʒ + 576. Ablatiſque 578. vtrobique, inter 52℞ — 576. & 1ʒ. quæ æquatio ita reſoluetur. Semiſſis numeri radicum eſt 26. à cuius quadrato 676. ſi demantur 576. remanet numerus 100. ad cuius radicem quadratam 10. ſi addatur prædicta ſemiſſis 26. fiet pretium radicis 36. primus numerus. tertius autem erit 16. nimirum 52 — 1℞. ita vt tres numeri proportionales ſint, 36. 24. 16. facientes ſummam 76. & tres producti ex primo in ſecundum, & ex ſecundo in tertium, & ex tertio in primum efficiunt 1824.

[a] 1. *ſecun.*
[b] 20. *ſept.*
[c] 20. *ſept.*

Quoniam vero numerus 52℞ — 576. duplicem habet radicem, reperietur minor, ſi radicem quadratam inuentam 10. ex prædicta ſemiſſe 26. auferatur. Relinquetur enim pretium vnius radicis 16. primus numerus, tertius autem erit 36. nimirum 52 — 1℞. Eruntque rurſum tres numeri proportionales 16. 24. 36. qui prius, inuerſo tamen ordine.

17 *Datis duobus numeris ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, alium inuenire, qui vtrilibet eorum additus faciat ſummam, quæ ducta in additum, hoc eſt, in inuentum, producat quadratum alterius numeri.* XVII.

HOC problema ſoluimus in lineis, in ſcholio propoſ. 36. lib. 3. Euclidis.

SINT dati duo numeri 10. & 12. inueniendusque ſit alius, qui additus primum ad 10. faciat numerum, qui ductus in additum, procreet quadratum alterius 12. nimirum 144. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Addito numero 10. fit numerus 1℞ + 10. qui ductus in 1℞ facit 1ʒ + 10℞. qui numerus æqualis eſſe debet 144. Ablatis 10℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ & 144 — 10℞. quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum 5. facit quadratum 25. & additis 144. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. ſi prædicta ſemiſſis 5. auferatur, propter ſignum —. remanebit pretium radicis 8. numerus quæſitus. Hic enim additus ad 10. facit 18. qui numerus ductus in 8. facit 144. quadratum alterius numeri dati 12.

DEINDE inueniendus ſit numerus, qui additus ad 12. faciat numerum, qui ductus in additum producat 100. quadratum alterius numeri 10. Ponatur quæſitus numerus 1℞. qui cum 12. facit 1℞ + 12. Hic ductus in 1℞. facit numerum 1ʒ + 12℞. æqualem 100. Ablatis 12℞. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 100 — 12℞. quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum 6. facit quadratum 36. additiſque 100. fit numerus 136. à cuius radice quadrata √ʒ 136. ſi detrahes ſemiſſem prædictam 6. relinquetur pretium radicis, √ʒ 136 — 6. numerus quæſitus. Hic enim additus ad 12. facit √ʒ 136 + 6. qui numerus ductus in inuentum √ʒ 136 — 6. producit numerum 100. quæ quidem multiplicatio perficietur, vt cap. 23. ſcripſimus, ſi quadratum poſterioris particulæ 6. nimirum 36. auferatur ex 136. quadrato prioris particulæ.

SINT denique duo numeri æquales 8. & 8. ponaturq; inuentus 1℞. Ex 1℞. & 8. fit numerus 1℞ + 8. qui ductus in 1℞ facit 1ʒ + 8℞. numerum æqualem 64. quadrato numeri 8. Ablatis 8℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ. & 64 — 8℞. Semiſſis numeri radicum eſt 4. ad cuius quadratum 16. additis 64. fit numerus 80. à cuius radice quadrata √ʒ 80. ſi dematur prædicta ſemiſſis 4. remanet numerus √ʒ 80 — 4. qui quæritur. Hic additus ad 8. facit ſummam √ʒ 80 + 4. quę ducta in inuentum, vel additum √ʒ 80 — 4. facit 64. quadratum numeri 8. vt hæc ſequens formula docet. Nam 16. quadratus poſterioris particulæ 4. ablatus ex 80. quadrato prioris particulæ √ʒ 80. relinquit 64.

√ʒ 80 — 4
√ʒ 80 + 4
—————
64

XVIII. 18 *Numerum inuenire medium inter numerum quotlibet vnitatibus maiorem, & alium numerum quotuis vnitatibus minorem; ita vt extremi duo inter ſe multiplicati faciant datum quemcunque numerum.*

SIT inueniendus numerus medius inter numerum, qui ipſum nouenario ſuperet, & alium numerum, quem ipſe ternario ſuperet; ita vt extremi inter ſe multiplicati faciant 133. Ponatur quæſitus numerus medius 1℞. inter 1℞ + 9. & 1℞ — 3. Ita enim à priore ſuperatur nouenario, & poſteriorem ternario ſuperat. Hi duo extremi inter ſe multiplicati faciunt numerum 1ℨ + 6℞ — 27. æqualem 133. Additis 27 vtrobique, fiet æqualitas inter 1ℨ + 6℞. & 160. Ablatiſque 6℞. vtrinque, inter 1ℨ. & 160 — 6℞. quæ ita abſoluetur. Semiſſis numeri radicum eſt 3. ad cuius quadratum 9. additis 160. fit numerus 169. à cuius radice quadrata 13. ſi auferatur ſemiſſis prædicta 3. relinquetur pretium 1℞. 10. numerus ſcilicet medius quæſitus. eruntque extremi 19. & 7. atque inter ſe multiplicati faciunt 133.

SIT rurſum inquirendus numerus medius inter duos, vt prius, ita vt extremi inter ſe multiplicati faciant 40. Inuenientur rurſus extremi 1℞ + 9. & 1℞ — 3. qui inter ſe multiplicati faciunt numerum 1ℨ + 6℞ — 27. æqualẽ 40. Additis ergo 27. vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ + 6℞. & 67. Ablatiſq; 6℞ vtrinque, inter 1ℨ. & 67 — 6℞. Semiſſis numeri radicum eſt 3. ad cuius quadratum 9. additis 67. fit numerus 76. à cuius radice quadrata √ℨ 76. ſi dematur prædicta ſemiſſis 3. propter ſignum —. relinquetur pretium radicis √ℨ 76 — 3. numerus medius, qui quæritur. à quo ſi detrahantur 3. fiet minor extremus √ℨ 76 — 6. & ſi addantur 9. fiet maior extremus √ℨ 76 + 6. qui extremi inter ſe multiplicati faciunt 76—36. hoc eſt, 40. Nam + √ℨ 2736. & — √ℨ 2736 ſe mutuo interimunt, vt in appoſita formula apparet.

```
        √ℨ 76 — 6
        √ℨ 76 + 6
  ___________________
     + √ℨ 2736 — 36
  76 — √ℨ 2736
  ___________________
       76 — 36
```

Vel etiam, quia 36. quadratum poſterioris particulæ 6. demptum ex 76. quadrato prioris particulæ relinquit 40. vt cap. 23. docuimus.

HOC problema ſoluimus etiam cap. præcedenti ænigmate 146. per ſimplicem æquationem.

XIX. 19 *Numerum inuenire, qui duos alios excedat datis numeris, ita vt duo illi inter ſe multiplicati producant numerum, qui inuentum dato numero excedat.*

SIT quærendus numerus, qui duos alios ſuperet numeris 8. & 6. ita vt illi duo inter ſe multiplicati procreent numerum quaternario maiorem numero inuento. Ponatur numerus, qui quæritur 1℞. Duo ergo illi minores erunt 1℞ — 8. & 1℞ — 6. qui inter ſe multiplicati faciunt numerum 1ℨ — 14℞ + 48. æqualem 1℞ + 4. vt nimirum poſitum 1℞. ſuperet quaternario. Ablatis 4 vtrinque, erit æquatio inter 1ℨ — 14℞ + 44. & 1℞. Et additis 14℞ vtrobique, inter 1ℨ + 44. & 15℞. Et ablatis 44. vtrinque, inter 1ℨ. & 15℞ — 44. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{15}{2}$. à cuius quadrato $\frac{225}{4}$. ablatis 44. ſiue $\frac{176}{4}$. propter ſignum — remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. ſi prædicta ſemiſſis $\frac{15}{2}$. addatur, fiet pretium radicis $\frac{22}{2}$. hoc eſt, 11. numerus quæſitus. Ergo duo numeri minores erunt 3. & 5. qui inter ſe multiplicati faciunt 15. hoc eſt, 11 + 4.

QVIA vero numerus hic 15℞ — 44. duplicem radicem habet, ſi radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{7}{2}$. dematur ex prædicta ſemiſſe $\frac{15}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{8}{2}$. hoc eſt, 4. numerus quæſitus. à quo ſi auferes 8. & 6. erunt duo alij numeri minores — 4. & — 2. qui inter ſe multiplicati faciunt + 8. qui numerus inuentum numerum 4. ſuperat quaternario. Vbi vides, numeros etiam abſurdos, ſiue fictos, hoc eſt, minores nihilo, ſatisfacere ænigmati propoſito. quod alicui fortaſſis mirum videri poſſit.

SCHOLIVM.

IN ænigmatibus huic ſimilibus accidit nonnunquam, æquationem inueniri ſimplicem: tunc nimirum, quando in numero producto ex multiplicatione duorum numerorum Coſsicorum reperitur numerus abſolutus æqualis exceſſui dato; quia tunc aufertur ille numerus abſolutus, remanetque æquatio inter ℨ. & ℞. quod ſtudioſum Lectorem monitum volo, ne turbetur, cum viderit aliquando occurrere æquationem duplicem, & aliquando ſimplicem, in varijs exemplis eiuſdem ænigmatis. Sit enim quærendus numerus, qui alios duos ſuperet numeris 8. & 6. ita vt duo illi inter ſe multiplicati procreent numerum, qui inuentum numerum excedat numero 48. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Duo ergo illi minores erunt 1℞—8. & 1—2℞ 6. qui inter ſe multiplicati faciunt numerum 1ℨ —— 14℞ + 48. æqualem 1℞ + 48. Ablatis 48. vtrinque, erit æqualitas inter 1ℨ —— 14℞. & 1℞. additiſque 14℞. vtrobique, inter 1ℨ. & 15℞. quæ æquatio ſimplex eſt. Diuiſis ergo 15. per 1. fiet 1℞ 15. (quod numeri Coſsici ℨ & ℞. collaterales ſint) nimirum numerus quæſitus. Igitur alij duo minores erunt 7. & 9. qui inter ſe multiplicati producunt numerum 63. qui inuentum 15. excedit numero 48.

XX. 20 *Numerum inuenire, quem alij duo excedant datis numeris, ita vt duo illi inter ſe multiplicati procreent numerũ, qui datum multiplicẽ quadrati ex inuento numero geniti, ſuperet dato numero.*

SIT inueniendus numerus, quem alij duo ſuperent numeris 7. & 19. qui inter ſe multiplicati excedant triplum quadrati ex inuento numero procreati, numero 73. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Ergo duo alij maiores erunt 1℞ + 7. & 1℞ + 19. Hi inter ſe multiplicati faciunt numerum 1ℨ + 26℞ + 133. æqualem 3ℨ + 73. Nam ita ſuperabit triplũ quadrati ex 1℞. deſcripti numero 73. Ablatis 73. vtrinque, erit æquatio inter 1ℨ + 26℞ + 60. & 3ℨ. Ablatoq; 1ℨ. vtrobique, inter 26℞ + 60. & 2ℨ. Diuiſiſque omnibus numeris per numerum zenſorum, id eſt, per 2. erit æquatio inter 13℞ + 30. & 1ℨ. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{13}{2}$.

ad cuius

ad cuius quadratum $\frac{169}{4}$. additis 30. ſiue $\frac{120}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. ſi addatur ſemiſſis prædicta $\frac{13}{2}$. fiet 1℞ $\frac{30}{2}$. id eſt, 15. numerus, qui quæritur. Ergo duo numeri maiores erunt 22. & 34. qui inter ſe multiplicati faciunt numerum 748. qui triplum quadrati 225. ex inuento numero 15. procreati, nimirum numerum 675. ſuperat numero 73.

21 *Numerum inuenire, cuius multiplex quiuis cum eiuſdem numeri quadrato faciat datum numerum.* XXI.

SIT inueniendus numerus, cuius quadruplum cum eiuſdem quadrato faciat 400. Ponatur numerus, quem quærimus 1℞. Huius quadruplum 4℞. cum eiuſdem quadrato 1ʒ. facit numerum 1ʒ + 4℞. æqualem 400. Subtractis 4℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 400 — 4℞. Semiſſis numeri radicum eſt 2. ad cuius quadratum 4 additis 400. fit numerus 404. à cuius radice quadrata √ʒ 404. ſi prædicta ſemiſſis 2. dematur, fiet 1℞ √ʒ 404 — 2. numerus quæſitus. Eius quadruplum √ʒ 6464 — 8. vna cum eius quadrato, quod

	√ʒ 404	— 2	
	√ʒ 404	— 2	
	— √ʒ 1616	+ 4	
404	— √ʒ 1616		
404	— √ʒ 6464	+ 4	

404	— √ʒ 6464	+ 4	
	+ √ʒ 6464	— 8	
404		— 4	

eſt 404 — √ʒ 6464 + 4. (vt in appoſita formula liquet) facit numerum 404 — 4. hoc eſt, 400. quia — √ʒ 6464. & + √ʒ 6464. ſe mutuo interimunt, vt altera formula monſtrat.

ITEM ſit inquirendus numerus, cuius quadruplum cum eiuſdem quadrato faciat 780. Poſita 1℞ erit eius quadruplum 4℞ vna cum eius quadrato 1ʒ numerus 1ʒ + 4℞. æqualis 780. Subtractiſque 4℞ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 780 — 4℞. Semiſſis numeri radicum eſt 2. ad cuius quadratum 4. additis 780. fit numerus 784. à cuius radice quadrata 28. ſi tollatur prædicta ſemiſſis 2 fiet 1℞. 26. numerus, quem inquirimus. Eius quadruplum 104. vna cum eiuſdem quadrato 676. facit 780.

SCHOLIVM.

EADEM via inuenietur numerus, qui cum ſuo quadrato conficiat datum quemcunque numerum. Sit enim inquirendus numerus, qui cum ſuo quadrato faciat 400. Poſita enim 1℞. pro numero quæſito, faciet is cum ſuo quadrato, id eſt, cum 1ʒ numerum 1ʒ + 1℞. æqualem dato numero 400. Dempta 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ. & 400 — 1℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. *ad cuius quadratum* $\frac{1}{4}$. *ſi addantur 400. hoc eſt,* $\frac{1600}{4}$ *fiunt* $\frac{1601}{4}$. *à cuius radice quadrata, id eſt, à* √ʒ $\frac{1601}{4}$. *ſi tollatur ſemiſſis numeri radicum, nimirum* $\frac{1}{2}$. *fiet pretium radicis* √ʒ $\frac{1601}{4}$ — $\frac{1}{2}$. *numerus quæſitus. Eius enim quadratum eſt* $\frac{1602}{4}$ — √ʒ $\frac{6404}{16}$. *vt appoſita formula docet. Cum hoc quadrato numerus inuentus* √ʒ $\frac{1601}{4}$ — $\frac{1}{2}$. *facit 400 numerum datum. Nam* $\frac{1602}{4}$. *&* — $\frac{1}{2}$. *ſiue* $\frac{2}{4}$. *faciunt* $\frac{1600}{4}$. *hoc eſt, 400. &* — √ʒ $\frac{6404}{16}$. *&* + √ʒ $\frac{1601}{4}$. *ſe mutuo interimunt, cum ſint æquales. vt patet per multiplicationem in crucem. Numerator enim vterlibet in denominatorem alterius minutiæ ductus producit 25616.*

		√ʒ $\frac{1601}{4}$	— $\frac{1}{2}$	
		√ʒ $\frac{1601}{4}$	— $\frac{1}{2}$	
		— √ʒ $\frac{1601}{16}$	+ $\frac{1}{4}$	
	+ $\frac{1601}{4}$	— √ʒ $\frac{1601}{16}$		
Summa.	$\frac{1602}{4}$	— √ʒ $\frac{6404}{16}$.		

22 *Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter ſe multiplicati producant datum ipſum numerum, & quadrati omnium trium faciant datam ſummam quamcunque.* XXII.

SIT datus numerus 8. inueniendique ſint alij duo, qui inter ſe multiplicati faciant ipſum numerum 8. & quadrati omnium trium faciant 101 $\frac{7}{9}$. oportet quadratos duorum numerorum inuentorum facere 37 $\frac{7}{9}$. vt patet. ſi dati numeri 8. quadratus 64. detrahatur ex 101 $\frac{7}{9}$. ſumma omnium trium. Ponatur vnus numerorum, qui quæruntur 1℞. Et quia alter in hunc ductus debet facere 8. ſi 8. diuidantur per 1℞. erit Quotiens $\frac{8}{1\text{℞}}$. alter numerus. Nam ductus in diuiſorem 1℞. producet 8. Quadrati horum duorum numerorum 1℞. & $\frac{8}{1\text{℞}}$. ſunt 1ʒ. & $\frac{64}{1\text{ʒ}}$. qui ſummam faciunt $\frac{1\text{ʒʒ}+64}{1\text{ʒ}}$. æqualem 37 $\frac{7}{9}$. ſiue $\frac{340}{9}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 9ʒʒ + 576. & 340ʒ. Ablatiſque 576. vtrobique, erit æquatio inter 9ʒʒ. & 340ʒ — 576. Diuiſis omnibus numeris per numerum 9. charactere maximo ʒʒ. inſignitum, fiet æquatio inter 1ʒʒ. & $\frac{340}{9}$ʒ — 64. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{340}{18}$. à cuius quadrato $\frac{115600}{324}$. hoc eſt, à 356 $\frac{256}{324}$. Si demantur 64. remanent 292 $\frac{256}{324}$. hoc eſt, $\frac{94864}{324}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{308}{18}$. ſi addatur prædicta ſemiſſis Zenſorũ $\frac{340}{18}$. fiet 1ʒ $\frac{648}{18}$. (quia inter Coſſicos numeros binos medij ſunt ſinguli) hoc eſt, 36. cuius radix quadrata 6. erit vnus numerorum, quem poſuimus 1℞ ac proinde alter numerus, quem poſuimus $\frac{8}{1\text{℞}}$. hoc eſt, 8. diuiſa per 1℞. nimirum per 6. erit 1 $\frac{1}{3}$. Qui etiam hoc modo reperietur. Quoniam numerus $\frac{340}{9}$ʒ — 64. duplicem habet radicẽ, ſi radix quadrata $\frac{308}{18}$. vltimo loco inuenta tollatur ex prædicta ſemiſſe $\frac{340}{18}$. reliquus erit alter Zenſus $\frac{32}{18}$. ſiue $\frac{16}{9}$. cuius radix quadrata $\frac{4}{3}$. ſiue 1 $\frac{1}{3}$. offeret alterum numerum. Itaque duo numeri quæſiti ſunt 6. & 1 $\frac{1}{3}$. qui inter ſe multiplicati faciunt 8. & eorum quadrati 36. & $\frac{16}{9}$. ſiue 1 $\frac{7}{9}$. faciunt 37 $\frac{7}{9}$. ac proinde quadrati omnium trium numerorum 8. 6. 1 $\frac{1}{3}$. faciunt ſummam 101 $\frac{7}{9}$.

XXIII. 23 *Duos numeros inuenire datam efficientes ſummam, & qui inter ſe multiplicati producant datum numerum, qui maior non ſit quadrato ex ſemiſſe datæ ſummæ deſcripto.*

VEL

Datum numerum in duos diſtribuere, vt ex vno in alterum gignatur datus quicunque numerus, qui maior non ſit quadrato ſemiſſis dati numeri.

QVÆRENDI ſint duo numeri conficientes ſummam 100. Vel (quod idem eſt.) Datus numerus 100 ſecandus ſit in duos, qui inter ſe multiplicati faciant 10. Ponatur vnus numerus 1℞. ideoque alter 100 — 1℞. Hi inter ſe multiplicati faciunt numerum 100℞ — 1ʓ. æqualem 10. Addito 1ʓ. vtrinque, erit æqualitas inter 100℞. & 10 + 1ʓ. Ablatisque 10. vtrobique, inter 100℞ — 10. & 1ʓ. Semiſſis numeri radicum eſt 50. à cuius quadrato 2500. ablatis 10. remanet numerus 2490. ad cuius radicem quadratam √ʓ 2490. ſi addatur prædicta ſemiſſis 50. fiet 1℞. √ʓ 2490 + 50. vnus numerorum, quem poſuimus 1℞. Alter ergo erit 100 — √ʓ 2490 + 50. hoc eſt, 100. demptis √ʓ 2490 + 50. qui numerus eſt 50 — √ʓ 2490. Nam ablatis √ʓ 2490 + 50. ex √ʓ 0 + 100. remanent — √ʓ 2490 + 50. hoc eſt, 50 — √ʓ 2490. vt

√ʓ 0 + 100
√ʓ 2490 + 50
— √ʓ 2490 + 50

hæc formula indicat. Itaque duo numeri quæſiti ſunt √ʓ 2490 + 50. & 50 — √ʓ 2490. qui faciunt ſummam 100. quippe cum + √ʓ 2490. & — √ʓ 2490. ſe mutuo deſtruant. Et ex vno in alterum, hoc eſt, ex 50 + √ʓ 2490. in 50 — √ʓ 2490. gignitur numerus 10. vt hæc formula indicat. quæ multiplicatio fit, ſi quadratum 2490. poſterioris particulæ dematur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt cap. 23. dictum eſt.

50 + √ʓ 2490
50 — √ʓ 2490
10

QVONIAM vero æquatio inuenta duplicem habet radicem, inueniemus eoſdem numeros per alteram radicem minorem. Si namque radix quadrata √ʓ 2490. vltimo loco inuenta dematur ex prædicta ſemiſſe 50. fiet 1℞. 50 — √ʓ 2490. vnus videlicet numerorum, quos quærimus. alter erit 50 + √ʓ 2490. qui nimirum remanet, ſi numerus 50 — √ʓ 2490. detrahatur ex 100. vt in hac formula vides. Atq; ita inuenti ſunt iidem numeri 50 — √ʓ 2490. & 50 + √ʓ 2490. ordine tamen inuerſo.

100 + √ʓ 0
50 — √ʓ 2490
50 + √ʓ 2490

DEBET autem numerus productus datus non maior eſſe quadrato, qui ex ſemiſſe datæ ſummæ, vel dati numeri gignitur. quia quadratus ſemiſſis maior eſt, numero, qui ex partibus inæqualibus producitur, [a] cum hic vna cum quadrato intermediæ ſectionis æqualis ſit illi quadrato. Vnde numerus 12. diuidi non poteſt in duas partes, vt ex earum multiplicatione producatur numerus 40. Id quod pulchre nos docet æquatio. Poſita enim vna parte 1℞. & altera 12 — 1℞. fiet æquatio inter 1ʓ. & 12℞ — 40. Et quia ex 36. quadrato ſemiſſis numeri radicum auferri nequit numerus abſolutus 40. pronunciabis, quæſtionem eſſe impoſſibilem.

[a] *ſchol. 14. noni.*

XXIV. 24 *Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero ſuperetur dato numero, & alium excedat alio numero dato: ita vt extremi inter ſe multiplicati producant datum quemlibet numerum.*

QVÆRENDVS ſit numerus, cuius quadratus ſuperetur quinario ab alio numero, & alium quendam ſuperet binario, & duo extremi inter ſe multiplicati faciant 2538. Ponatur numerus ille 1℞. cuius quadratus 1ʓ. Maior ergo erit 1ʓ + 5. & minor 1ʓ — 2. qui duo inter ſe multiplicati gignunt numerum 1ʓʓ + 3ʓ — 10. æqualem 2538. Additisque 10. vtrobique, erit æquatio inter 1ʓʓ + 3ʓ. & 2548. Et ablatis 3ʓ. vtrinque, inter 1ʓʓ. & 2548 — 3ʓ. Quærenda ergo eſt radix Zenſizenſica, hoc modo. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. additis 2548. ſiue $\frac{10192}{4}$. fit numerus $\frac{10201}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{101}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{3}{2}$. remanet numerus $\frac{98}{2}$. hoc eſt, 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum quæſitum. Eius enim quadratus 49. eſt inter 54. quinario maiorem, & 47. binario minorem, fitque ex 47. in 54. numerus datus 2538.

XXV. 25 *Numerum inuenire, à cuius quadrato quadrati ſubtracti quotuis quadrati eiuſdem numeri, relinquant datum numerum quemcunque.*

QVÆRENDVS ſit numerus, cuius quatuor quadrati ſubtracti ab eiuſdem quadrato quadrati relinquant 2205. Ponatur numerus 1℞. cuius quadratus 1ʓ. & quatuor quadrati 4ʓ. detracti ex 1ʓʓ. nimirũ ex quadrati quadrato poſiti numeri 1℞. relinquunt numerum 1ʓʓ — 4ʓ. æqualem 2205. Additisque 4ʓ. vtrobique, erit æquatio inter 1ʓʓ. & 4ʓ + 2205. Eruenda ergo eſt radix zenſizenſica hoc modo. Semiſſis numeri zenſorum eſt 2. ad cuius quadratum 4. additis 2205. fit numerus 2209. ad cuius radicem quadratam 47. addita prædicta ſemiſſe 2. fit numerus 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum, qui quæritur. Eius enim quatuor quadrati 196. dempti ex eiuſdem zenſizenſo 2401. relinquunt 2205. numerum datum.

XXVI. 26 *Duos numeros inuenire, qui inter ſe multiplicati gignant numerum datũ, & ſumma quadratorum eiuſdem numeris procreatorum ſit etiam data.*

DVO numeri inuenti faciant inter ſe multiplicati 78. & eorum quadrati ſummam 205. Quoniam, vt in ſe-

in ſequenti Lemmate demonſtrabimus, duo numeri ſe multiplicantes producunt numerum medio loco proportionalem inter quadratos eorundem numerorum: ſi minor quadratus ponatur 1ʒ. ideoque maior 205 — 1ʒ. erit numerus 78. medio loco proportionalis inter quadratos 1ʒ. & 205 — 1ʒ. [a] ac proinde numerus 205ʒ — 1ʒʒ. product⁹ ex 1ʒ. in 205—1ʒ. æqualis erit quadrato numeri medij 78. hoc eſt, numero 6084. Addito ergo 1ʒʒ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ + 6084. & 205ʒ. Ablatisq; 6084. vtrobique, inter 1ʒʒ. & 205ʒ — 6084. Eruenda ergo eſt radix Zenſizenſica. quod ita fiet. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{205}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. ablatis 6084. ſiue $\frac{24336}{4}$. remanent $\frac{17689}{4}$. ad cuius numeri radicem quadratam $\frac{133}{2}$. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{205}{2}$. fiet numerus $\frac{338}{2}$. hoc eſt, 169. vnus quadratus, cuius radix 13. dabit vnum numerorum, nimirum maiorem. Et quia numerus 205ʒ — 6084. duplicem habet radicem, inuenietur altera radix, ſi radicem vltimo loco inuentam $\frac{133}{2}$. detrahemus ex prædicta ſemiſſe $\frac{205}{2}$. Reliquus enim numerus $\frac{72}{2}$. id eſt, 36. dabit minorem quadratum, cuius radix 6. dabit alterum numerorum. Sunt ergo duo numeri inuenti 6. & 13. qui inter ſe multiplicati faciunt 78. & eorum quadrati 36. & 169. faciunt ſummam 205.

[a] 20. ſept.

IN numeris irrationalibus idem hoc problema expedietur, ſi duo numeri inueniendi ſint, qui inter ſe multiplicati faciant 100. & ſumma quadratorum ſit 300. Poſito enim vno quadrato 1ʒ. erit alter 300 — 1ʒ. inter quos numerus 100. erit medius proportionalis, vt ex ſequenti Lemmate conſtabit. Ex 1ʒ. in 300 — 1ʒ. fit numerus 300ʒ — 1ʒʒ. [b] æqualis numero 10000. qui fit ex medio 100. in ſe. Addito ergo 1ʒʒ. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ + 10000. & 300ʒ. Et ablatis 10000. vtrobique, inter 1ʒʒ. & 300ʒ — 10000. Eruenda ergo hic etiam erit duplex radix Zenſizenſica, hoc videlicet modo. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 150. à cuius quadrato 22500. demptis 10000. remanet numerus 12500. ad cuius radicem quadratam √ʒ 12500. ſi addetur prædicta ſemiſſis 150. fiet maior quadratus √ʒ 12500 + 150. cuius radix quadrata, nimirum √ʒ (√ʒ 12500 + 150) dabit maiorem numerum. Et ſi radix illa √ʒ 12500. tolletur ex ſemiſſe prædicta 150. reliquus erit minor quadratus 150 — √ʒ 12500. cuius radix quadrata √ʒ (150 — √ʒ 12500) dabit minorem numerum quæſitum. Nam ex maiore radice √ʒ (√ʒ 12500 + 150) in minorem radicem √ʒ (150 — √ʒ 12500) ſi nimirum earum quadrata inter ſe multiplicentur, vt cap. 24. dictum eſt, & in hac formula apparet, fit numerus √ʒ 10000. hoc eſt, datus numerus 100. Item quadrati √ʒ 12500 + 150. & 150 — √ʒ 12500. faciunt ſummam 300. vt manifeſtum eſt.

[b] 20. ſept.

√ʒ (√ʒ 12500 + 150)
√ʒ (150 —— √ʒ 12500)
—— 12500 —— √ʒ 281250000
+ √ʒ 281250000 + 22500
Productus. √ʒ 10000

PRÆDICTA autem multiplicatio facilius conficietur, per ea, quæ cap. 23. dicta ſunt, ſi numeri multiplicandi ita conſtituantur. Nam ſi 12500. quadratum poſterioris particulæ dematur ex 22500. quadrato particulæ prioris 150. remanebit numerus 10000. Præpoſito ergo ſigno √ʒ. fiet productus numerus √ʒ 10000.

√ʒ (150 + √ʒ 12500)
√ʒ (150 —— √ʒ 12500)
√ʒ 10000

L E M M A.

DVO numeri inter ſe multiplicati procreant numerum medium proportionalem inter eorum quadratos, in proportione ipſorum numerorum.

SINT enim duo numeri A, & B. Ex A, in B, fiat C, & ex A, in ſe, fiat quadratus D, & ex B, in ſe quadratus E. Dico C, medium proportionalem eſſe inter D, & E; id eſt, E. C, D, eſſe continue proportionales in proportione B, ad A. Quoniam enim A, multiplicans B, & A, fecit C, & D; [c] erit C, ad D, vt B, ad A. Item quia multiplicans B, & A, fecit E, & C; [d] erit quoque E, ad C, vt B, ad A. Igitur E, C, D, continue proportionales ſunt in proportione B, ad A. quod eſt propoſitum.

A.	3.	B.	4.		
D.	9.	C.	12.	E.	16.

[c] 17. ſept. *[d] 17. ſept.*

C O R O L L A R I V M.

HINC fit, ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes producunt aliquem numerum, quadratos ipſorum numerorum ſe mutuo multiplicantes producere quadratum numeri producti. Cum enim numerus 12. ex 3. in 4. productus ſit medio loco proportionalis inter eorum quadratos 9. & 16. [e] fiet ex 9. in 16. quadratus numeri 12.

[e] 20. ſept.

S C H O L I V M.

IDEM hoc ænigma 26. ſoluetur ſine præcedenti Lemmate, hac ratione. Ponatur in priori exemplo vnus numerorum 1℞. ideoque alter erit 78/1℞. vt ex mutua eorum multiplicatione producatur numerus 78. Quadrati eorum 1ʒ. & 6084/1ʒ. faciunt ſummam (1ʒʒ + 6084)/1ʒ. æqualem 205. quæ æquatio per multiplicationem in cruce reducetur ad hanc inter 1ʒʒ + 6084. & 205ʒ. Ablatisque 6084. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 205ʒ — 6084. vt prius.

RVRSVS in poſteriori exemplo ponatur vnus numerorum 1℞. eritque alter 100/1℞. vt eorum multiplicatio faciat 100.

Quadrati eorum 1ʒ. & $\frac{10000}{1ʒ}$. faciunt ſummam $\frac{1ʒʒ + 10000}{1ʒ}$. æqualem 300. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1ʒʒ + 10000. & 300ʒ. Ablatiſque 10000. vtrobique, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 300ʒ — 10000. vt ſupra.

XXVII. 27 *Duos numeros inuenire facientes ſummam datam, quorum quadrati faciant quoque datam ſummam.*

SIT ſumma numerorum 19. & quadratorum 205. Ponatur primus numerus 1℞. ideoque ſecundus 19 — 1℞. Quadrati eorum 1ʒ. & 361 — 38℞ + 1ʒ. faciunt ſummam 361 — 38℞ + 2ʒ. æqualem 205. Additis 38℞ vtrobique, erit æquatio inter 361 + 2ʒ. & 38℞ + 205. Et ablatis 205. vtrinque, inter 156 + 2ʒ. & 38℞. Et rurſum ablatis 156. vtrinque, inter 2ʒ. & 38℞ — 156. Diuiſiſque omnibus per 2. numerum zenſorum, erit æquatio inter 1ʒ. & 19℞ — 78. quam ita reſolues. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{19}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{361}{4}$. detractis 78. hoc eſt, $\frac{312}{4}$. remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{19}{2}$. fiet maior radix (quia numerus Coſſicus duas radices habet) $\frac{26}{2}$. id eſt, 13. primus numerus quæſitus. Secundus ergo erit 6. nimirum 19 — 1℞. quia numerus 6. erit quoq; minor radix, quæ habebitur, ſi vltima radix inuenta $\frac{7}{2}$. ex prædicta ſemiſſe $\frac{19}{2}$. detrahatur, remanet enim numerus $\frac{12}{2}$. ſiue 6. Numeri ergo qui quæruntur, ſunt 13. & 6. quorum ſumma 19. & ſumma quadratorum 205.

RVRSVM ſumma numerorum ſit 30. & quadratorum 600. Poſito primo numero 1℞. & ſecundo 30 — 1℞. facient quadrati ſummam 900 — 60℞ + 2ʒ. æqualem 600. Additis 60℞. vtrinque, erit æquatio inter 900 + 2ʒ. & 60℞ + 600. Et ablatis 600. vtrobique, inter 300 + 2ʒ. & 60℞. Et rurſum ablatis 300. vtrinque, inter 2ʒ. & 60℞ — 300. Diuiſiſque omnibus numeris per 2. numerum Zenſorum, æquatio erit inter 1ʒ. & 30℞ — 150. cuius radix ita nota fiet. Semiſſis numeri radicum eſt 15. à cuius quadrato 225. demptis 150. remanet numerus 75. ad cuius radicem quadratam √ʒ 75. ſi addetur prædicta ſemiſſis 15. fiet maior radix √ʒ 75 + 15. prior numerus, qui poſitus eſt 1℞. Et ſi eadem radix quadrata √ʒ 75. tolletur ex prædicta ſemiſſe 15. reliqua fiet minor radix 15 — √ʒ 75. qui numerus æqualis eſt poſteriori numero 30 — 1℞. Nam ſi ex 30. detrahatur radix inuenta √ʒ 75 + 15. remanebit numerus 15 — √ʒ 75. vt hæc formula docet. Eruntque duo numeri quæſiti √ʒ 75 + 15. & 15 — √ʒ 75. quorum ſumma eſt 30. & quadratorum ſumma 600. vt duæ hæ formulæ indicant.

30 + √ʒ 0
15 + √ʒ 75
———————
15 — √ʒ 75

√ʒ 75 + 15
√ʒ 75 + 15
———————
+ √ʒ 16875 + 225
75 + √ʒ 16875
———————
300 + √ʒ 67500

15 — √ʒ 75
15 — √ʒ 75
———————
— √ʒ 16875 + 75
225 — √ʒ 16875
———————
300 — √ʒ 67500

DEBET autem ſumma quadratorum eſſe maior ſemiſſe quadrati, qui ex data ſumma numerorum gignitur, & minor quadrato eiuſdem ſummæ. Itaque ſi ſumma numerorum proponeretur 30. & quadratorum 400. foret quæſtio impoſſibilis. Nam ſumma quadratorum maior non eſt ſemiſſe quadrati 900. ex data ſumma 30. producti. Atque ita occurreret vltima æquatio inter 1ʒ. & 30℞ — 250. quæ reſolui nequit. Nam ex 225 quadrato ſemiſſis numeri radicum auferri non poſſunt 250. &c.

QVOD ſi quadratorum ſumma ſit maior quadrato ſummæ numerorum propoſitorum, ſolui etiam non poterit problema, niſi concedamus, vnum numerum eſſe maiorem ipſa ſumma, & alterum minorem nihilo. Vt ſi ſumma detur 40. & ſumma quadratorum 1602. Ponemus vnum numerũ 1℞. & alterum 40 — 1℞. Quadrati eorum 1ʒ. & 1600 — 80℞ + 1ʒ. faciunt ſummam 1600 — 80℞ + 2ʒ. æqualem 1602. Additis 80℞. vtrobique, erit æquatio inter 1600 + 2ʒ. & 80℞ + 1602. Et ablatis 1600. vtrinque, inter 2ʒ. & 80℞ + 2. Diuiſiſque omnibus per 2. numerum Zenſorum, inter 1ʒ. & 40℞ + 1. Iam ſemiſſis numeri radicum eſt 20. ad cuius quadratum 400. ſi addatur 1. fiunt 401. Et ſi ad √ʒ 401. addatur prædicta ſemiſſis 20. fiet 1℞. 20 + √ʒ 401. prior numerus, quem poſuimus 1℞. qui demptus ex 40. reliquus fiet numerus poſterior 20 — √ʒ 401. vt in hac formula videre licet. Vbi vides priorem numerum 20 + √ʒ 401. maiorem eſſe, quam 40. cum √ʒ 401. maior ſit quam 20. poſteriorem vero 20 — √ʒ 401. minorem eſſe nihilo, nimirum 20. — 20 $\frac{1}{41}$. quorum vtrumque ineptum eſt. Et tamen quæſtioni ſatisfaciunt. Nam ſimul efficiunt ſummam 40. cum + √ʒ 401. & — √ʒ 401. ſe mutuo interimant: & eorum quadrati 801 + √ʒ 641600. & 801 — √ʒ 641600. ſummam faciant 1602. Simile quid habuiſti in ænigmate 149. ſuperioris capitis. Vides ergo, numeros minores nihilo non eſſe fruſtra excogitatos: quippe cum per illos ænigmata quoque diſſoluantur.

40 + √ʒ 0
20 + √ʒ 401
———————
20 — √ʒ 401

XXVIII. 28 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati datam ſummam efficiant.*

HIC nihil aliud quæritur, niſi vt duo numeri inueniantur efficientes datum numerum, ita vt eorum quadrati efficiant quoque datam ſummam. quod in antecedenti ænigmate factum eſt.

XXIX. 29 *Datum numerum in tres numeros continue proportionales partiri, quorum medius datus ſit; cuius tamen quadratus maior non ſit quadrato ſemiſſis illius numeri, qui relinquitur, detracto dato medio ex dato numero.*

SIT numerus 283. diuidendus in tres continue proportionales, quorum medius ſit 78. Ponatur primus nume-

numerus 1𝓡. ac proinde tertius 205 —— 1𝓡. vt duo hi faciant ſimul 205. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 78. ex dato numero 283. Ex primo 1𝓡. in tertium 205 —— 1𝓡. fit numerus 205𝓡 —— 1ʒ. [a] qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 6084. Addito ergo 1ʒ. vtrobique. erit æquatio inter 205𝓡 & 1ʒ + 6084. Et ablatis 6084. vtrinque inter 205𝓡 —— 6084. & 1ʒ. quæ æquatio ita reſoluetur. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{205}{2}$. à cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. ſi demantur 6084. hoc eſt, $\frac{24336}{4}$. remanebit numerus $\frac{17689}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{133}{2}$. ſi addatur ſemiſſis prædicta $\frac{205}{2}$. fiet maior radix $\frac{338}{2}$. hoc eſt, 169. Et ſi prædicta radix $\frac{133}{2}$. tollatur ex prædicta ſemiſſe $\frac{205}{2}$. relinquetur minor radix $\frac{72}{2}$. id eſt 36. Sunt ergo tres numeri continue proportionales 36. 78. 169.

[a] 20. ſepti.

SIT rurſum datus numerus 100. diuidendus in tres continue proportionales, quorum medius ſit 30. Ponatur primus 1𝓡. ac proinde tertius 70 —— 1𝓡. vt duo hi faciant ſimul 70. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 30. ex dato numero 100. Ex primo 1𝓡. in tertium 70 —— 1𝓡 fit numerus 70𝓡 —— 1ʒ. [b] qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 900. Addito ergo 1ʒ. vtrobique, erit æqualitas inter 70𝓡 & 1ʒ + 900. Ablatiſque 900. vtrinque, inter 70𝓡 —— 900. & 1ʒ. quam æquationem ita expedies. Semiſſis numeri radicum eſt 35. à cuius quadrato 1225 demptis 900. remanet numerus 325. ad cuius radicem quadratam addita prædicta ſemiſſe 35. fiet maior radix √ʒ 325 + 35. Et ſi eadem radix √ʒ 325. dematur ex ſemiſſe prædicta 35. relinquetur minor radix 35 — √ʒ 325. Itaque tres numeri quæſiti ſunt 35 —— √ʒ 325. 30. √ʒ 325 + 35. continue proportionales facientes ſummam 100. Et qui fit ex primo in tertium, æqualis eſt quadrato medij, numero videlicet 900. vt hæc formula indicat.

[b] 20. ſepti.

```
              √ʒ 325 + 35
                 35 − √ʒ 325
       ─────────────────────────────
          − 325 − √ʒ 398125
 + √ʒ 398125 + 1225
       ─────────────────────────────
                900
```

Quæ multiplicatio expeditior erit per ea, quæ cap. 23. dicta ſunt, ſi numeri multiplicandi ita ordinentur, vt hæc altera formula monſtrat. Nam ſi 325. quadratum poſterioris particulæ tolletur ex 1225. quadrato prioris particulæ 35. reliquus fiet numerus 900.

```
 35 + √ʒ 325
 35 − √ʒ 325
 ───────────
     900
```

SI in eodem exemplo medius numerus detur 40. erit quæſtio impoſſibilis. Nam poſito primo numero 1𝓡. & tertio 60 —— 1𝓡. fiet ex primo in tertium numerus 60𝓡 —— 1ʒ. æqualis quadrato medij, nimirum numero 1600. Et reducta æquatione, erit æqualitas inter 1ʒ. & 60𝓡 —— 1600. quod fieri nequit. Nam ſemiſſis numeri radicum eſt 30. à cuius quadrato 900. detrahi non poſſunt 1600. &c. Ratio eſt, quia numerus 1600. quadratus medij dati 40. maior eſt quadrato 900. ſemiſſis numeri 60. qui relinquitur, detracto medio dato 40. ex dato numero 100.

30 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant ſummam datam quamcunque, quæ maior ſit quarta parte cubi ex dato numero deſcripti.* XXX.

DATVS numerus 10. diuidendus ſit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior eſt quarta parte cubi ex 10. deſcripti, maior videlicet numero 250. Ponatur prima pars 1𝓡. & ſecunda 10 —— 1𝓡. Cubi harum partium ſunt 1ℭ. & 1000 —— 300𝓡 + 30ʒ —— 1ℭ. quorum ſumma 1000 —— 300𝓡 + 30ʒ. æqualis eſſe debet numero 370. Additis 300𝓡. vtrinque, fiet æquatio inter 1000 + 30ʒ. & 300𝓡 + 370. Et ablatis 370. vtrobique inter 630 + 30ʒ. & 300𝓡. Et rurſum ablatis 630. vtrinque, inter 30ʒ. & 300𝓡 — 630. Diuiſis autem ſingulis hiſce numeris per numerum Zenſorum, id eſt, per 30. erit æquatio inter 1ʒ. & 10𝓡 — 21. quam ſic reſolues. Semiſſis numeri radicum 5. facit quadratum 25. à quo demptis 21. remanet numerus 4. ad cuius radicem quadratam 2. addita prædicta ſemiſſe 5. fiet maior radix 7. Et eadem radix 2. dempta ex ſemiſſe prædicta 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Partes ergo numeri dati 10. ſunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. faciunt ſummam 370.

HOC idem ænigma fuit 141. capitis 29. præcedentis, ſed ſolutum aliter, quam hic, nimirum per ſimplicem æquationem, quæ occurrit propter variam numerorum poſitionem.

Ibidem quoque docuimus, quo pacto ænigma hoc ſolui poſſit ſine Algebra.

31 *Datum numerum in duos numeros diſtribuere, vt idem ſit exceſſus inter quadratum maioris, & quadratum minoris, qui inter quadratum dati numeri, & quadratum maioris partis.* XXXI.

SIT datus numerus 30. Ponatur maior eius pars 1𝓡. & minor 30 — 1𝓡. Tres quadrati ſunt 900. 1ʒ. & 900 — 60𝓡 + 1ʒ. Exceſſus 900. ſupra 1ʒ. eſt 900 — 1ʒ. Exceſſus 1ʒ. ſupra 900 — 60𝓡 + 1ʒ. eſt 60𝓡 — 900. vt in hac formula ſubtractionis manifeſtum eſt.

```
   + 0   + 0 𝓡 + 1 ʒ
 + 900 − 60 𝓡 + 1 ʒ
 ────────────────────
 − 900 + 60 𝓡 + 0 ʒ
```

Eſt igitur æquatio inter hos exceſſus, id eſt, inter 900 —— 1ʒ. & 60𝓡 —— 900. Additiſque 900. vtrobique, inter 1800 — 1ʒ. & 60𝓡. Et rurſum addito 1ʒ. vtrinque, inter 1800. & 1ʒ + 60𝓡. Ablatiſque 60𝓡. vtrobique, inter 1800 —— 60𝓡. & 1ʒ. Radix ita inuenietur. Semiſſis numeri radicum eſt 30. ad cuius quadratum 900. additis 1800. fit numerus 2700. à cuius radice quadrata √ʒ 2700. ſi prædicta ſemiſſis 30. dematur, remanebit pretium vnius radicis √ʒ 2700. —— 30. maior ſcilicet pars. qua detracta ex dato numero 30. relinquetur minor pars 60 —— √ʒ 2700.

+ √ℨ 0 + 30
+ √ℨ 2700 − 30
− √ℨ 2700 + 60

vt in hac formula ſubtractionis apparet. Iam tres quadrati ſunt 900. 3600 − √ℨ 9720000. & 6300 − √ℨ 3888000. qui ſe mutuo excedunt hoc eodem numero √ℨ 9720000 —— 2700. vt in hiſce formulis ſubtractionum perſpicuum eſt.

+ 900 + √ℨ 0
+ 3600 − √ℨ 9720000
− 2700 + √ℨ 9720000

+ 3600 − √ℨ 9720000
+ 6300 − √ℨ 3888000
− 2700 + √ℨ 9720000

IN poſteriori formula, quoniam √ℨ 9720000. & √ℨ 38880000. commenſurabiles ſunt, cum maiore per minorem diuiſa fiat Quotiens rationalis √ℨ 4. hoc eſt, 2. ſi minor à maiore ſubtrahatur, reliquus erit numerus √ℨ 9720000. Hæc omnia clara ſunt, ſi conſiderentur ea, quę de ſubtractione ſignorum + & −. & de ſubtractione radicum ſurdarum dicta ſunt.

XXXII. 32 *Datum numerum in duas partes diſtribuere, vt maioris partis quadratus cum minore parte faciat datum numerum quemcunque, minorem tamen quadrato dati numeri.*

SIT diuidendus datus numerus 10. in duas partes, vt quadratus maioris partis cum parte minore faciat $73\frac{3}{4}$. Ponatur maior pars 1℞. & minor 10 —— 1℞. Quadratus maioris partis eſt 1ℨ. qui cum minore parte facit ſummam 1ℨ + 10 —— 1℞. æqualem numero $73\frac{3}{4}$. Ablatis 10. vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ —— 1℞. & $63\frac{3}{4}$. Additaque 1℞. vtrinque, inter 1ℨ. & 1℞ + $63\frac{3}{4}$. Radix ita eruetur. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis $63\frac{3}{4}$. fit numerus 64. ad cuius radicem quadratam 8. ſi addatur prædicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$. fiet pretium vnius radicis $8\frac{1}{2}$. maior pars, minor ergo erit $1\frac{1}{2}$ Nam quadratum maioris partis $8\frac{1}{2}$. eſt $72\frac{1}{4}$. & addita minore parte $1\frac{1}{2}$, fit numerus $73\frac{3}{4}$.

QVOD ſi minor pars ſtatuatur 1℞. & maior 10 —— 1℞. erit quadratus maioris partis 100 —— 20℞ + 1ℨ. Addita verò minore parte 1℞. fit ſumma 100 —— 19℞ + 1ℨ. æqualis numero $73\frac{3}{4}$. Additis ergo 19℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ + 100. & 19℞ + $73\frac{3}{4}$. Ablatiſque $73\frac{3}{4}$. vtrinque. inter 1ℨ + $26\frac{1}{4}$. & 19℞. Ablatiſque rurſum $26\frac{1}{4}$. vtrobique, inter 1ℨ. & 19℞ —— $26\frac{1}{4}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{19}{2}$. à cuius quadrato $\frac{361}{4}$. ablatis $26\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{256}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{16}{2}$. addita ad prædictam ſemiſſem $\frac{19}{2}$. facit maiorem radicem $\frac{35}{2}$. id eſt, $17\frac{1}{2}$ quæ inutilis eſt, cum non poſſit eſſe pars dati numeri 10. Minor ergo radix (quia numerus Coſſicus 19℞ —— $26\frac{1}{4}$. duplicem radicem habet) problema ſoluet. quæ reperietur, ſi radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{16}{2}$ dematur ex prædicta ſemiſſe $\frac{19}{2}$. Reliquus enim numerus $1\frac{1}{2}$. erit minor radix, offerens minorem partem numeri 10. maiorque propterea erit $8\frac{1}{2}$. veluti prius.

Vides ergo, non ſemper vtramque radicem, quam Coſſicus numerus habet, aſſumi poſſe, ad problematis propoſiti ſolutionem. Maior tamen radix inuenta $\frac{35}{2}$. quamuis ad problema poſitum non pertineat, optime tamen reſpondet huic æquationi inter 1ℨ. & 19℞ —— $26\frac{1}{4}$. Nam eius radicis quadratus eſt $\frac{1225}{4}$. æqualis 19℞ —— $26\frac{1}{4}$ cum 19℞. faciant $\frac{665}{2}$. ſiue $\frac{1330}{4}$ à quibus ſi demantur $26\frac{1}{4}$. hoc eſt $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{1225}{4}$.

XXXIII. 33 *Datum numerum extrema, ac media ratione ſecare.*

SIT datus numerus 10. ita ſecandus, vt proponitur: hoc eſt, vt minor pars, & maior, ac datus numerus 10. ſint continue proportionales, ſiue (quod idem eſt) vt quadratus maioris partis æqualis ſit numero, qui ex minore parte in datum numerum producitur. Ponatur maior pars 1℞. & minor 10 —— 1℞. Quadratus maioris partis eſt 1ℨ æqualis numero 100 —— 10℞. qui fit ex minore parte 10 —— 1℞. in 10. Semiſſis numeri radicum eſt 5. ad cuius quadratum 25. additis 100. fit numerus 125. à cuius radice quadrata √ℨ 125. ſi tollatur prædicta ſemiſſis 5 reliqua fiet radix √ℨ 125 − 5. maior pars. qua ablata ex 10. reliqua fiet minor pars 15 − √ℨ 125. vt in hac formula apparet. Nam quadratum maioris partis eſt 150 —— √ℨ 12500. ac tantundem fit ex minore parte in 10. vt duæ hę formulæ multiplicationum demonſtrant.

√ℨ 0 + 10
√ℨ 125 − 5
− √ℨ 125 + 15

√ℨ 125 − 5
√ℨ 125 − 5
− √ℨ 3125 + 25
125 − √ℨ 3125
150 − √ℨ 12500

15 − √ℨ 125
+ 10
150 − √ℨ 12500

SCHOLIVM.

SINE Algebra diuidetur numerus datus extrema ac media ratione, hoc modo. Ad quadratum numeri adijciatur eiuſdem quadrati quarta pars, & ex radice quadrata numeri conflati dematur ſemiſſis dati numeri. Reliquus enim numerus erit maior pars, qua dempta ex numero dato, reliqua fiet minor pars. Hæc praxis colligitur tum ex ſolutione huius problematis, tum ex figura propoſ. 11. lib. 2. Eucl.

34 *Datum*

34 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt quadratus maioris ad quadratum minoris proportionem habeat datam.* XXXIIII.

SIT numerus 30. ſecandus in duos, vt maioris quadratus ad quádratum minoris proportionem habeat duplam ſeſquiquartam. Ponatur maior 1℞. & minor 30 — 1℞. Quadratus illius eſt 1ℨ. duplus ſeſquiquartus ad quadratum huius, nimirum ad 900 — 60℞ + 1ℨ. Si ergo hic quadratus multiplicetur per $2\frac{1}{4}$. erit æquatio inter 1ℨ. & $\frac{8100 - 540℞ + 9ℨ}{4}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4ℨ & 8100 — 540℞ + 9ℨ. Additis igitur 540℞. vtrobique, erit æquatio inter 4ℨ + 540℞. & 8100 + 9ℨ. Ablatiſque 4ℨ. vtrinque, inter 540℞. & 8100 + 5ℨ. Et rurſum ablatis 8100. vtrinque, inter 5ℨ. & 540℞ — 8100. Diuiſiſque omnibus per 5. erit æqualitas inter 1ℨ. & 108℞ — 1620. Semiſſis numeri radicum eſt 54. à cuius quadrato 2916. demptis 1620. remanet numerus 1296. cuius radix quadrata 36. ad prædictam ſemiſſem 54. facit maiorem radicem 90. quæ ad ænigma ſoluendum apta non eſt, cum non poſſit eſſe pars numeri dati 30. Si ergo eadem radix quadrata 36 dematur ex prædicta ſemiſſe 54. reliqua fiet minor radix 18. nimirum maior numerus quæſitus. Minor ergo erit 12. Nam 324. quadratus illius ad huius quadratum 144. proportionem habet duplam ſeſquiquartam.

VBI etiam vides, quamuis Coſſicus numerus duplicem radicem habeat, non tamen ſemper vtramque aſſumi poſſe. licet maior ad vnguem etiam reſpondeat æquationi. Nam 8100. quadratus maioris radicis 90. æqualis eſt 108℞ — 1620. cum 108℞ efficiant 9720. à quibus ſi demantur 1620. relinquuntur 8100.

35 *Datum numerum in duos numeros partiri, vt eorum quadrati ſummam datam conficiant, maiorem tamen ſemiſſe quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiuſdem numeri.* XXXV.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. qui numerus maior eſt, quam 800. ſemiſſis quadrati ex 40. procreati, & minor, quam 1600. quadratus eiuſdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 40 — 1℞. Quadrati ſunt 1ℨ. & 1600 — 80℞ + 1ℨ. qui ſummam faciunt 2ℨ + 1600 — 80℞. æqualem 928. Additis 80℞. vtrobique, erit æquatio inter 2ℨ + 1600. & 80℞ + 928. Et ablatis 928. vtrinque, inter 2ℨ + 672. & 80℞. Et rurſum ablatis 672. vtrobique inter 2ℨ. & 80℞ — 672. Diuiſiſque omnibus per 2. inter 1ℨ & 40℞ — 336. Semiſſis numeri radicum eſt 20. à cuius quadrato 400. demptis 336. remanet numerus 64. cuius radix quadrata 8. addita ad prædictam ſemiſſem 20. facit maiorem radicem 28. hoc eſt, maiorem numerum, Minor autem erit 12. quem etiam exhibet minor radix. Nam ſi quadrata radix inuenta 8. dematur ex prædicta ſemiſſe 20. remanent 12. Iam quadratus 784. maioris numeri 28. cum 144. quadrato minoris numeri 12. facit datam ſummam 928.

HOC ænigma ſolutum etiam fuit in ænigmate 170. præcedentis cap. per æquationem ſimplicem.

36 *Duos numeros in dato exceſſu inuenire, quorum quadrati datam ſummam efficiant, quæ maior tamen ſit quadrato dati exceſſus.* XXXVI.

SIT datus exceſſus 11. & ſumma quadratorum 281. quæ maior eſt quadrato 121. dati exceſſus 11. Ponatur minor numerus 1℞. ideoque maior 1℞ + 11. Quadrati 1ℨ. & 1ℨ + 22℞ + 121. faciunt ſummam 2ℨ + 22℞ + 121. æqualem 281. Ablatis 121. vtrobique, erit æqualitas inter 2ℨ + 22℞. & 160. Demptiſque rurſum 22℞. vtrinque, inter 2ℨ. & 160 — 22℞. Diuiſiſque omnibus per 2. inter 1ℨ. & 80 — 11℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. additis 80. ſiue $\frac{320}{4}$. fit numerus $\frac{441}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{21}{2}$. ablata prædicta ſemiſſe $\frac{11}{2}$. remanet valor vnius radicis $\frac{10}{2}$. hoc eſt, 5. minor numerus. Maior autem erit 16. Atque horum duorum numerorum quadrati 25. & 256. faciunt 281.

SIT rurſum datus exceſſus 11. & ſumma quadratorum 122. maior quadrato 121. exceſſus dati 11. Ponatur minor numerus iterum 1℞. & maior 1℞ + 11. Quadrati horum numerorum faciunt, vt prius, ſummam 2ℨ + 22℞ + 121. æqualem 122. Ablatis 121. vtrobique, erit æquatio inter 2ℨ + 22℞. & 1. Et ablatis rurſum 22℞. vtrinque, inter 2ℨ. & 1 — 22℞. Diuiſiſque omnibus per 2. inter 1ℨ. & $\frac{1}{2}$ — 11℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. addita $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{2}{4}$. fit numerus $\frac{123}{4}$. à cuius radice quadrata √ℨ $\frac{123}{4}$. dempta prædicta ſemiſſe $\frac{11}{2}$. relinquetur pretium vnius radicis √ℨ $\frac{123}{4}$ — $\frac{11}{2}$. minor numerus, & additis 11. ſiue, $\frac{22}{2}$. fit maior numerus √ℨ $\frac{123}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Quadrati horum numerorum faciunt ſummam 122. vt hæ formulæ multiplicationum indicant

$$\begin{array}{rcl} & & √ℨ\,\frac{123}{4} + \frac{11}{2} \\ & & √ℨ\,\frac{123}{4} + \frac{11}{2} \\ \hline & + ℨ√\,\frac{14883}{16} & + \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} & + √ℨ\,\frac{14883}{16} & \\ \hline \frac{244}{4} & + √ℨ\,\frac{59532}{16} & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & & √ℨ\,\frac{123}{4} - \frac{11}{2} \\ & & √ℨ\,\frac{123}{4} - \frac{11}{2} \\ \hline & - √ℨ\,\frac{14883}{16} & + \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} & - √ℨ\,\frac{14883}{16} & \\ \hline \frac{244}{4} & - √ℨ\,\frac{59532}{16} & \end{array}$$

Nam $\frac{244}{4}$. & $\frac{244}{4}$. faciunt $\frac{488}{4}$. hoc eſt, 122. & radices ſurdæ ſe mutuo deſtruunt.

37 *Dato numero, alium inuenire, per quem ſi diuidatur datus numerus, fiat Quotiens ſuperans inuentum numerum dato numero.* XXXVII

SIT datus numerus 60. inueniendusque ſit alius, per quem ſi diuidatur 60. fiat Quotiens ſuperans inuentum diuiſorē numero 7. Ponatur numerus, qui quæritur, 1℞. Quotiens ergo erit $\frac{60}{1℞}$. qui ſuperat diuiſorem 1℞. numero $\frac{60 - 1ℨ}{1℞}$. (vt patet, ſi 1℞. detrahatur ex $\frac{60}{1℞}$.) qui æqualis debet eſſe dato numero 7. ita vt æquatio ſit inter

inter $\frac{60-1ʒ}{1℞}$.& 7.quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 60—1ʒ.& 72℞. Addito ergo 1ʒ vtrobique, erit æquatio inter 60.& 1ʒ+72℞.Et ablatis 72℞.vtrinque, inter 1ʒ.& 60—72℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{7}{2}$.ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. additis 60.ſiue $\frac{240}{4}$.fit numerus $\frac{289}{4}$ à cuius radice quadrata $\frac{17}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{7}{2}$.remanebit pretium vnius radicis $\frac{10}{2}$.hoc eſt, 5.numerus quæſitus.Nam diuiſis 60. per 5. fit Quotiens 12.qui diuiſorem 5.numero 7. ſuperat.

XXXVIII. 38 *Datum numerum in duos numeros partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati: hoc eſt, ita vt radix quadrata dati numeri ſecundi minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati ſit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.*

SIT datus numerus 10.diuidendus in duos,inter quos √ʒ 10.ſit medio loco proportionalis, hoc eſt, vt ex eorum multiplicatione producatur numerus 10.Ponatur vnus numerorum 1℞.& alter 10—1℞. Ex eorum multiplicatione fit numerus 10℞——1ʒ.æqualis 10.Addito 1ʒ.vtrobique,fiet æquatio inter 10℞.& 1ʒ+10. Et ablatis 10.vtrinque, inter 10℞——10.& 1ʒ.Semiſſis numeri radicum eſt 5 à cuius quadrato 25.demptis 10. fit reliquus numerus 15.ad cuius radicem quadratam √ʒ 15. addita prædicta ſemiſſis 5. facit maiorem radicem √ʒ15+5.eademque radix quadrata detracta ex prædicta ſemiſſe 5.reliquam facit minorem radicem 5——√ʒ 15. Atque hi duo numeri √ʒ 15+5.& 5——√ʒ15.faciunt ſummam 10.& ex vno in alterum fit quoque 10.vt in hac formula multiplicationis manifeſtum eſt. Nam —— √ʒ 375. & + √ʒ 375. ſe mutuo interimunt: & ex additione + 25. & —— 15. fit numerus 10.

$$5 - √ʒ\,15$$
$$√ʒ\,15 + 5$$
$$+ 25 - √ʒ\,375$$
$$+ √ʒ\,375 - 15$$
$$10$$

HOC idem ænigma ſoluimus per ſimplicem æquationem in præcedenti cap.ænigmate 172.

MVLTIPLICATIO quoque prædicta numeri 5—√ʒ 15.in 5+√ʒ15.perficietur,ſi 15 quadratus poſterioris particulæ ex 25.quadrato prioris particulæ detrahatur, vt cap.23.declaratum eſt.Idem hoc ænigma ſolutum fuit in ænigmate 23.alio tamen exemplo propoſito.

$$5 - √ʒ\,15$$
$$5 + √ʒ\,15$$
$$10$$

XXXIX. 39 *Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati ſummam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione ſuperet dato numero.*

SIT datus numerus 30.& exceſſus datus 228. Ponatur vnus numerorum 1℞. & alter 30—1℞. Quadrati ſunt 1ʒ.& 1ʒ+900——60℞. qui ſummam faciunt 2ʒ+900——60℞. quæ ſuperare debet numerum productum ex 1℞.in 30——1℞.hoc eſt, numerum 30℞——1ʒ. exceſſu 228. ita vt æqualitas ſit inter 2ʒ+900——60℞.& 30℞+228——1ʒ.Et addito 1ʒ.vtrinque,inter 3ʒ+900——60℞.& 30℞+228.Et additis 60℞.vtrobique,inter 3ʒ+900. & 90℞+228. Et ablatis 228.vtrinque, inter 3ʒ+672. & 90℞. Et rurſum ablatis 672.vtrobique,inter 3ʒ.& 90℞——672.Diuiſiſque omnibus per 3.inter 1ʒ.& 30℞——224. Semiſſis numeri radicum eſt 15.à cuius quadrato 225.demptis 224.ſupereſt 1. cuius radix quadrata 1. addita ad prædictam ſemiſſem 15.facit maiorem radicem 16. Eadem vero ex ſemiſſe prædicta 15. detracta relinquit minorem radicem 14.Itaque quæſitæ partes numeri 30.ſunt 16.& 14. Quadrati enim earum 256.196. ſummam faciunt 452.quæ numerum 224.factum ex ductu 16.in 14.ſuperat numero 228.

HOC idem problema ſoluimus per ſimplicem æquationem in ænigmate 173.præcedentis capitis, propoſito tamen alio exemplo.

SI numerus diuidendus proponeretur 20. & exceſſus 30. fieret problema impoſſibile, vt ipſa operatio docebit.

XL. 40 *Datum numerum partiri in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor ſit numero dato.*

SIT datus numerus 30.diuidendus in duos,quorum radices quadratæ habeant differentiam 5. Ponatur minoris radix 1℞.ideoque maioris radix 1℞+5. vt ſe excedant quinario. Quadrati harum radicum 1ʒ.& 1ʒ+10℞+25. faciunt ſummam 2ʒ+10℞+25. æqualem 30. Ablatis 25. vtrobique, manebit æqualitas inter 2ʒ+10℞.& 5.Ablatiſque rurſum 10℞ vtrinque,inter 2ʒ.& 5——10℞.Diuiſiſque omnibus per 2.inter 1ʒ & $\frac{5}{2}$——5℞.Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{5}{2}$.ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$.additis $\frac{5}{2}$.ſiue $\frac{10}{4}$.fit numerus $\frac{35}{4}$.à cuius radice quadrata √ʒ$\frac{35}{4}$.dempta prędicta ſemiſſe $\frac{5}{2}$.fiet pretium radicis √ʒ$\frac{35}{4}$——$\frac{5}{2}$. minoris ſcilicet numeri radix. Additis ergo 5.fiet maioris numeri radix √ʒ$\frac{35}{4}$+$\frac{5}{2}$.quæ duæ radices ſe mutuo excedunt quinario. Et in ſe ductæ quadrate,faciunt numeros,qui quæruntur,15——√ʒ$\frac{3500}{16}$.& 15+√ʒ$\frac{3500}{16}$.qui faciunt 30.numerũ datum.

IDEM ænigma ſolui etiam poteſt per ſimplicem æquationem,hoc modo.Ponatur minoris numeri radix 1℞——$\frac{5}{2}$.& maioris 1℞+$\frac{5}{2}$.vt hæc illam ſuperet quinario.Ambæ in ſe ductæ quadrate faciunt 1ʒ——$\frac{10}{2}$℞+$\frac{25}{4}$.& 1ʒ+$\frac{10}{2}$.℞+$\frac{25}{4}$.quorum ſumma 2ʒ+$\frac{50}{4}$.æqualis eſt 30.Ablatis $\frac{50}{4}$.hoc eſt, 12$\frac{1}{2}$.vtrobique, manebit æquatio inter 2ʒ.& 17$\frac{1}{2}$.Diuiſiſque 17$\frac{1}{2}$.per 2.fiet 1ʒ.$\frac{35}{4}$.& 1℞ √ʒ$\frac{35}{4}$. Cum ergo minoris numeri radix poſita ſit 1℞——$\frac{5}{2}$ erit ipſa radix minoris numeri √ʒ$\frac{35}{4}$——$\frac{5}{2}$.Et maioris numeri radix √ʒ$\frac{35}{4}$+$\frac{5}{2}$.cum poſita ſit 1℞+$\frac{5}{2}$.Inuentæ ergo ſunt eædem radices, quæ prius,&c.

41 *Datum numerum diuidere in duos, quorum radices inter ſe multiplicatæ faciant datum quemcunque numerum.* XLI.

SIT datus numerus 12. ſecandus in duos, quorum radices inter ſe multiplicatæ faciant 5. Ponatur vnus numerorum 1ℛ. & alter 12 — 1ℛ. Erunt eorum radices, √ℨ1ℛ. & √ℨ(12 — 1ℛ.) Hæ inter ſe multiplicatæ faciunt √ℨ(12ℛ — 1ℨ) qui numerus æqualis eſſe debet numero 5. Igitur & eorum quadrati 12ℛ — 1ℨ. & 25. æquales erunt. Additoque 1ℨ. vtrobique, erit æquatio inter 12ℛ. & 1ℨ + 25. Et ablatis 25. vtrinque, inter 12ℛ — 25. & 1ℨ. Semiſſis numeri radicum eſt 6. à cuius quadrato 36. demptis 25. ſupereſt numerus 11. ad cuius radicem quadratam √ℨ11. addita prædicta ſemiſſe 6. fiet maior radix √ℨ11 + 6. ſiue 6 + √ℨ11. id eſt, maior numerus quæſitus. Et ſi eadem √ℨ11. tollatur ex ſemiſſe prædicta 6. reliqua fiet minor radix 6 — √ℨ11. nimirum minor numerus quæſitus. Atque duo hi numeri 6 + √ℨ11. & 6 — √ℨ11. faciunt propoſitum numerum 12. & eorum radices ſunt √ℨ(6 + √ℨ11) & √ℨ(6 — √ℨ11) quæ inter ſe multiplicatæ faciunt √ℨ25. id eſt, 5. vt hæc formula monſtrat. Nam ſi earum quadrata 6 + √ℨ11. & 6 — √ℨ11. inter ſe multiplicentur, (quod fiet, ſi 11. quadratum poſterioris particulæ ex 36. quadrato particulæ prioris detrahatur, vt cap. 23. dictum eſt) fiet productus √ℨ25. id eſt, 5.

$$\begin{array}{c} √ℨ\,(6 + √ℨ\,11) \\ √ℨ\,(6 - √ℨ\,11) \\ \hline √ℨ\,25 \end{array}$$

PER ſimplicem æquationem ſoluemus idem ænigma, hoc modo. Ponatur vnus numerus 6 + 1ℛ. & alter 6 — 1ℛ. quorum radices √ℨ(6 + 1ℛ) & √ℨ(6 — 1ℛ) inter ſe multiplicatæ faciunt numerum √ℨ(36 — 1ℨ) vt hæc formula indicat, æqualem numero 5. Igitur & eorum quadrati 36. — 1ℨ. & 25. æquales erunt. Additoque 1ℨ. vtrinque, erit æquatio inter 36. & 1ℨ + 25. Ablatiſque 25. vtrobique, inter 11. & 1ℨ. Diuiſis ergo 11. per 1. fiet 1ℨ. 11. & 1ℛ. √ℨ11. Et quia vnus numerorum poſitus fuit 6 + 1ℛ. erit ipſe numerus 6 + √ℨ11. Alter vero, quem poſuimus 6 — 1ℛ. erit 6 — √ℨ11. quemadmodum ſupra.

$$\begin{array}{c} √ℨ\,(6 + 1\,ℛ) \\ √ℨ\,(6 - 1\,ℛ) \\ \hline - 6\,ℛ - 1\,ℨ \\ 36 + 6\,ℛ \\ \hline √ℨ\,(36 - 1\,ℨ) \end{array}$$

42 *Dato numero, inuenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inuenti.* XLII.

SIT datus numerus 40. Ponatur inuentus numerus 1ℛ. cuius quadratus 1ℨ. Ergo 1ℛ + 40. æqualia ſunt 1ℨ. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 40. fit numerus 40. $\frac{1}{4}$. id eſt, $\frac{161}{4}$. ad cuius radicem quadratam √ℨ$\frac{161}{4}$. addita prædicta ſemiſſe $\frac{1}{2}$. fiet pretium 1ℛ. √ℨ$\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$. nimirum numerus quęſitus, qui cum dato numero 40. facit √ℨ$\frac{161}{4}$ + 40$\frac{1}{2}$. qui numerus æqualis eſt quadrato numeri inuenti √ℨ$\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$. Nam hic in ſe ductus (vt appoſita formula docet) producit numerum $\frac{162}{4}$ + √ℨ$\frac{644}{16}$. hoc eſt, 40$\frac{1}{2}$ + √ℨ$\frac{161}{4}$. propterea quod hæ minutiæ √ℨ$\frac{644}{16}$. & √ℨ$\frac{161}{4}$. æquales ſunt.

$$\begin{array}{c} √ℨ\,\frac{161}{4} + \frac{1}{2} \\ √ℨ\,\frac{161}{4} + \frac{1}{2} \\ \hline + √ℨ\,\frac{161}{16} + \frac{1}{4} \\ \frac{161}{4} + √ℨ\,\frac{161}{16} \\ \hline \frac{162}{4} \text{ ſiue } 40\,\frac{1}{2} + √ℨ\,\frac{644}{16} \end{array}$$

SIT rurſus datus numerus 100. Ponatur numerus quæſitus 1ℛ. Ergo 1ℛ + 110. æqualia ſunt 1ℨ. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 110. fit numerus 110$\frac{1}{4}$. ſiue $\frac{441}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{21}{2}$. addita prædicta ſemiſſe $\frac{1}{2}$. fit pretium 1ℛ. $\frac{22}{2}$. hoc eſt, 11. numerus quæſitus. Huius enim quadratus 121. æqualis eſt numero conflato ex dato 110. & inuento 11.

HOC problema propoſitum etiam fuit in ænigmate 3. huius cap. in alijs tamen numeris.

43 *Datum numerum in duos partiri, vt ſumma quadratorum cum producto ex vno in alterum faciat datum numerum quemcunque.* XLIII.

SIT datus numerus diuidendus 20. & quadrati cum producto ex vna parte in alteram faciant 309. Ponatur vnus numerorum 1ℛ. & alter 20 — 1ℛ. Quadrati faciunt ſummam 2ℨ + 400 — 40ℛ. quæ cum producto ex vno in alterum, id eſt, cum 20ℛ — 1ℨ. facit numerum 1ℨ + 400 — 20ℛ. æqualem 309. Additis 20ℛ. vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ + 400. & 20ℛ + 309. Et ablatis 309. vtrinque, inter 1ℨ + 91. & 20ℛ. Et rurſum ablatis 91. vtrinque, inter 1ℨ. & 20ℛ — 91. Semiſſis numeri radicum eſt 10. à cuius quadrato 100. ablatis 91. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta ſemiſſe 10. fit maior radix 13. Et eadem radice 3. dempta ex prædicta ſemiſſe 10. reliqua fiet minor radix 7. Duæ ergo partes numeri 20. ſunt 13. & 7. Nam earum quadrati 169. & 49. vna cum 91. producto ex vno in alterum faciunt 309.

IDEM exequemur per ſimplicem æquationem, hoc modo. Ponatur maior pars 10 + 1ℛ. & minor 10 — 1ℛ. vt ſimul conficiant 20. Quadrati ſunt 1ℨ + 20ℛ + 100. & 1ℨ. — 20ℛ + 100. facientes ſummam 2ℨ + 200. quæ cũ producto ex vna parte in alteram, nimirum cum 100 — 1ℨ (qui productus habetur, ſi 1ℨ. id eſt, quadrat⁹ poſterioris particulæ demat̃ ex 100. quadrato prioris particulę vt hic apparet) facit numerũ 1ℨ + 300. æqualem 309.

10	+	1 ℞
10	−	1 ℞
100	−	1 ȝ

lem 309. Ablatis ergo 300. vtrobique, manebit æqualitas inter 1ȝ. & 9. Diuiſiſque 9. per 1. fiet 1ȝ. 9 & 1℞. 3. Ergo maior pars poſita 10+1℞ erit 13. Minor autem poſita 10−1℞. erit 7. veluti prius.

XXXXIIII. *44 Numerum inuenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum æqualem ei, quem inuenti numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor ſit quadrato ex ſemiſſe dati numeri procreato facit.*

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 10. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 20. numero ſcilicet minore, quam quadratus ſemiſſis numeri 10. Ponatur numerus quæſitus 1℞. qui ductus in 10. facit 10 ℞. æquales 1ȝ+20. nimirum quadrato ex 1℞. procreato, vna cum 20. Ablatis 20. vtrobique, manebit æqualitas inter 10℞ —20. & 1ȝ. Semiſſis numeri radicum eſt 5. à cuius quadrato 25. demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix √ȝ5. addita prædictæ ſemiſſi 5. facit √ȝ5+5. maiorem radicem. Et eadem radix dempta ex prædicta ſemiſſe 5. reliquam faciet minorem radicem 5—√ȝ5. Atque vterque numerus √ȝ5+5. & 5—√ȝ5. problema conficit. Nam multiplicatio √ȝ5+5. in 10. facit 50+√ȝ500. quantum nimirum fit ex 30+√ȝ500. quadrato numeri √ȝ5+5. vna cum 20 Item ex 5−√ȝ5. in 10. fit numerus 50−√ȝ500. æqualis quadrato 30−√ȝ500. numeri 5−√ȝ5. vna cum 20.

ITEM ſit inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 84. Ponatur quæſitus numerus 1℞. Ex 1℞. in 20. fit numerus 20℞. æqualis 1ȝ+84. nimirum quadrato ex 1℞. procreato, vna cum 84. Ablatis 84. vtrobique, manebit æqualitas inter 20℞−84. & 1ȝ. Semiſſis numeri radicum eſt 10. à cuius quadrato 100. demptis 84. ſupereſt numerus 16. cuius radix 4. addita ad prædictam ſemiſſem 10. facit maiorem radicem 14. Ablata vero ex eadem ſemiſſe reliquam facit minorem radicem 6. Atque numerus vterque 14. & 6. problema ſoluit. Nam ex 14. in 20. fit numerus 280. æqualis ei, quem eius quadratus 196. cum 84. facit. Item ex 6. in 20. fit numerus 120. æqualis ei, quem eius quadratus 36. cum 84. efficit.

XXXXV. *45 Numerum inuenire, qui ad quemuis datum numerum additus faciat ſummam, quæ ducta in numerum inuentum faciat numerum datum quemcunque.*

SIT inueniendus numerus, quo addito ad 12. & ſumma ducta in numerum inuentum, producatur 189. Ponatur numerus quæſitus 1℞. Additis 12. fit numerus 1℞+12. qui ductus in inuentum nimirum in 1℞. facit numerum 1ȝ+12℞. æqualem 189. Ablatis 12℞. vtrobique. erit æquatio inter 1ȝ & 189—12℞. Semiſſis numeri radicum eſt 6. ad cuius quadratum 36. additis 189. fit numerus 225. à cuius radice 15. ablata prædicta ſemiſſe 6. manet valor 1℞. 9. numerus videlicet quæſitus. Hic enim additus ad 12. facit 21. & ex 21. in 9. fit datus numerus 189.

ITEM ſit inueniendus numerus, quo addito ad 12. & ſumma ducta in numerum inuentum, fiat numerus 400. Ponatur 1℞ Additis 12. fit numerus 1℞+12. qui ductus in 1℞. facit numerum 1ȝ+12℞. æqualem 400. Ablatiſque 12℞. vtrobique, manet æqualitas inter 1ȝ. & 400—12℞. Semiſſis numeri radicum eſt 6. ad cuius quadratum 36. additis 400. fit numerus 436. à cuius radice, √ȝ436. ſi demat ut prædicta ſemiſſis 6. reliqua fiet æſtimatio vnius radicis √ȝ 436—6. numerus videlicet, quem inquirimus. Nam ſi addatur ad 12. fiet numerus √ȝ436+6. vt in hac formula vides.

√ȝ 436	−	6
	+	12
√ȝ 436	+	6

Hic autem numerus √ȝ. 436+6. multiplicatus per inuentum numerum √ȝ436—6. facit numerum datum 400. vt hæc altera formula docet. quæ multiplicatio fiet, ſi 36. quadratus poſterioris particulæ 6. ſubducatur à 436. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. declaratum fuit.

√ȝ 436	+	6
√ȝ 436	−	6
400		

XXXXVI. *46 Datum numerum in duas partes ſecare, vt numerus procreatus ex vna in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quemcunque datum.*

SIT numerus datus 20. ſecandus in duos, vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus, ſi ducatur in 400. quadratum dati numeri, efficiat 300. Ponatur vnus numerus 1℞. & alter 20—1℞. Ex 1℞. in 20. —1℞. fit numerus 20℞—1ȝ. Et hic ductus in 400. facit 8000℞—400ȝ. qui æqualis eſſe debet 300. Additis 400ȝ. vtrobique, erit æquatio inter 8000℞. & 300+400ȝ. Et ablatis 300. vtrinque, inter 400ȝ. & 8000℞—300. Diuiſis omnibus per 400. erit æquatio inter 1ȝ & 20℞—$\frac{3}{4}$. Semiſſis radicum eſt 10. à cuius quadrato 100. ſiue $\frac{400}{4}$. demptis $\frac{3}{4}$. remanent $\frac{397}{4}$. cuius √ȝ $\frac{397}{4}$. addita ſemiſſi prædictæ 10. facit maiorem radicem 10+√ȝ $\frac{397}{4}$. & ablata ex eadem ſemiſſe 10. relinquit radicem minorem 10—√ȝ $\frac{397}{4}$. quæ ſunt partes quæſitæ. Nam ex vna in alteram fit numerus $\frac{3}{4}$. ſi nimirum poſterioris particulæ quadratum $\frac{397}{4}$. dematur ex 100. ſiue ex $\frac{400}{4}$. quadrato prioris particulæ. At ex $\frac{3}{4}$. in 400. quadratum dati numeri 20. fit numerus $\frac{1200}{4}$. hoc eſt, 300.

74 Nu-

47 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, ſi ducatur in eundem quadratum mulctatum alio numero dato, producat datum numerum quemcunque.* XLVI.

INVENIENDVS ſit numerus, cuius quadratus octonario auctus, ſi ducatur in eundem quadratum mulctatum ternario, producat 6942. Ponatur quæſitus numerus 1℞. Eius quadratus 1ʒ. auctus octonario, erit 1ʒ + 8. mulctatus vero ternario, 1ʒ − 3. Hi duo numeri inter ſe multiplicati faciunt 1ʒʒ + 5ʒ — 24. vt in hac formula vides.

$$\begin{array}{r} 1ʒ + 8 \\ 1ʒ - 3 \\ \hline -\ 3ʒ - 24 \\ 1ʒʒ + 8ʒ \\ \hline 1ʒʒ + 5ʒ - 24 \end{array}$$

qui numerus æqualis eſſe debet numero 6942. Additis ergo 24. vtrobiq;, erit æqualitas inter 1ʒʒ + 5ʒ. & 6966. Et ablatis 5ʒ. vtrinque, inter 1ʒʒ. & 6966 − 5ʒ. Iam ſic. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 6966. hoc eſt, $\frac{27864}{4}$. fit ſumma $\frac{27889}{4}$. ex cuius radice quadrata $\frac{167}{2}$. detracta ſemiſſe prædicta $\frac{5}{2}$. remanent $\frac{162}{2}$. hoc eſt, 81. vnus Zenſus, cuius radix 9. dabit pretium vnius radicis pro numero quæſito. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus ternario, 78. fitque ex 89. in 78. numerus datus 6942.

SI ijſdem poſitis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1ʒʒ. & 34 — 5ʒ. Iam ſic. Semiſſis numeri Zenſorum eſt $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 34. hoc eſt, $\frac{136}{4}$. fit ſumma $\frac{161}{4}$. à cuius radice quadrata √ʒ $\frac{161}{4}$. detracta prædicta ſemiſſe $\frac{5}{2}$. fiet 1ʒ. √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{5}{2}$. & huius radix quadrata, √ʒ (√ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{5}{2}$) numerus quæſitus. Nam eius quadratus √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{5}{2}$. auctus octonario, ſiue $\frac{16}{2}$. facit √ʒ $\frac{161}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Mulctatus vero ternario, ſiue $\frac{6}{2}$. facit √ʒ $\frac{161}{4}$ − $\frac{11}{2}$. qui duo numeri inter ſe multiplicati producunt numerum 10. vt hæc formula indicat.

$$\begin{array}{c} √ʒ\ \frac{161}{4} + \frac{11}{2} \\ √ʒ\ \frac{161}{4} - \frac{11}{2} \\ \hline \frac{40}{4}.\ \text{ſiue } 10. \end{array}$$

Nam ſi $\frac{121}{4}$. quadratus poſterioris particulæ detrahatur ex $\frac{161}{4}$. quadrato particulæ prioris remanent $\frac{40}{4}$. hoc eſt, 10.

ÆNIGMATA VARIA NVMERORVM AD res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad ſecundas radices pertinentibus.

CAPVT XXXI.

PROPONEMVS in hoc cap. præter ænigmata, quæſtiones nonnullas alias non admodum difficiles, quarum aliquæ non ſolum per regulam Falſi, verum etiam per ſolam regulam Trium expediri poſſunt; vt præſtantia regulæ Algebræ magis eluceat: quippe quæ omnes Arithmeticæ regulas complecti videatur. Hinc igitur exordiamur.

1 *Summam pecuniæ, quam in ſacculo habeo, exiſtimat quidam aſtantium valere 600. aur. Cuius errorem ſic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & à ſumma detraheretur $\frac{1}{12}$. eiuſdem meæ pecuniæ, tunc haberem 600. aureos. Quæſtio eſt, quanta ſit mea pecunia.* I.

PONATVR eſſe 1℞. aur. Si accedant partes $\frac{1}{2}$℞. $\frac{1}{3}$℞. $\frac{1}{4}$℞. quæ faciunt ſummam 1$\frac{1}{12}$℞. fiet tota pecunia 2$\frac{1}{12}$℞. Ablata autem $\frac{1}{12}$℞. reliquæ fient 2℞. æquales 600. Diuiſis igitur 600. per 2. fiet 1℞ 300. Atque hæc eſt pecunia in meo ſacculo. Nam ſi accedant partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum aurei 150. 100. & 75. fiet ſumma aur. 625 & dempta $\frac{1}{12}$. nimirum aur. 25. reliquus erit numerus 600.

2 *Viator quidam conficit quotidie 9. milliaria. Alius decimo poſt die elapſo idem iter inſtituit, ex eodem loco conficitq; quotidie 14. milliaria. Quæritur, quoto die poſterior priorem aſſequetur.* II.

PONATVR, ambos ſimul futuros in 1℞. dierum. Ergo prior vltra 90. milliaria, quæ in decem diebus abſoluit, conficiet in 1℞ dierum præterea 9℞. milliariorum, quandoquidem ſingulis diebus 9. milliaria conficit. Poſterior autem conficiens quotidie 14. milliaria, conficiet in 1℞. dierum, 14℞ milliariorum. Et quia in 1℞. dierum tot milliaria prior neceſſario confecerit, vna cum 90. quæ in 10. diebus abſoluit, quot poſterior in 1℞. dierum; quandoquidem tunc ſimul futuri ſunt: erit æquatio inter 9℞ + 90. & 14℞. Ablatiſque 9℞. vtrobique, inter 90. & 5℞. Diuiſis ergo 90. per 5. fiet 1℞. 18. Igitur poſt 18. dies conuenient. Nam prior in 18. diebus abſoluit milliaria 162. additiſque 90. quæ in præcedentibus 10. diebus confecit, fient 252. milliaria, quot videlicet poſterior in 18. diebus abſoluit.

SCHOLIVM.

HÆC porro quæſtio in numeris abſtractis ita proponeretur. Quæratur numerus, qui ductus in 9. & ad productum addito 90. numerum efficiat æqualem ei, qui ex eodem numero in 14. multiplicato gignitur. Poſito enim numero quæſito 1℞.

erunt 9℞ + 90. æquales numero 14℞. Ablatis ergo 9℞ vtrobique, reperietur æqualitas inter 90. & 5℞. Diuiſiſque 90. per 5. fiet 1℞ 18. numerus, quem quærimus. Nam hic ductus in 9. facit 162. & additis 90. fit numerus 252. æqualis ei, qui fit ex 18. in 14.

III. 3 *Viator ſingulis diebus 9. milliaria conficit: alius vero decimo poſt die elapſo idem iter ingreditur. Quæritur quot milliaria abſoluet hic, vt priorem aſſequatur in 18. diebus.*

PONATVR 1℞ milliariorum. Ergo in 18. diebus conficiet 18℞. milliariorũ. Cum ergo prior ſingulis diebus conficiens 9. milliaria, abſoluat in 18. diebus 162. milliaria, & additis 90. quæ perambulauit in prioribus 10. diebus, fit manifeſtum, eum confeciſſe 252. milliaria. Eſt ergo æquatio inter 18℞. & 252. Diuiſiſq; 252. per 18. fiet 1.℞ 14. atque tot milliaria conficere debet poſterior, vt in 18. diebus priorei.ı aſſequatur.

IIII. 4 *Interrogatus quidam, quota ſit hora diei; ita reſpondit. Dimidiata pars horarum à media nocte vſque ad hoc inſtans elapſarum ·ddita ad tres quartas horarum futurarum ad ſequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum, quem quæris. Quæritur ergo, quota tunc ſit hora.*

PONATVR 1℞ horarum à media nocte præteritarum. Cum ergo ab vna media nocte ad aliam mediam noctem effluant horæ 24 ſupererunt vſque ad mediam noctem inſequentem horæ 24 —— 1℞. Huius numeri $\frac{3}{4}$. faciunt $\frac{72 - 3℞}{4}$. quibus ſi addatur $\frac{1}{2}$℞. horarum præteritarum, ſiue $\frac{2}{4}$℞. fiet numerus $\frac{72 - 1℞}{4}$. æqualis 1℞. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4℞. & 72 — 1℞. Additaque 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 7z. & 5℞. Diuiſis ergo 72. per 5. fiet 1℞. 14$\frac{2}{5}$. numerus horarum, quæ à media nocte vſoue ad horam quæſtionis effluxerunt. Ac proinde erit tunc hora 2. & Min. 24. à meridie: cum 1. hora contineat 60. Min. quod ita probatur. Dimidiata pars horarum 14$\frac{2}{5}$. à media nocte præteritarum facit horas 7$\frac{1}{5}$. quibus ſi addantur $\frac{3}{4}$ horarum 9$\frac{3}{5}$ quæ ſuperſunt vſque ad mediam noctem, nimirum 7$\frac{1}{5}$. fient horæ 14$\frac{2}{5}$.

EODEM modo procedemus, ſi ſermo ſit de horis ab occaſu Solis, more Italorum. Nam ſi quis reſponderit, eam tunc inſtare horam, quæ ex $\frac{3}{4}$. horarum à proximo Solis occaſu elapſarum additis ad ſemiſſem horarum, quæ vſque ad alterum occaſum Solis ſuperſunt, conficitur: Ponemus 1℞. horarum à proximo occaſu præteritarum. Cum ergo ab vno occaſu ad alium occaſum fluant horæ 24. ſuperſunt vſque ad ſequentem occaſum horæ 24 —— 1℞. Huius numeri ſemiſſis facit $\frac{24 - 1℞}{2}$. hoc eſt, $\frac{48 - 2℞}{4}$. quæ addita ad $\frac{3}{4}$℞. horarum elapſarum faciet $\frac{48 + 1℞}{4}$. qui numerus æqualis eſt 1℞. quæ æquatio per multiplicationẽ in crucem reducetur ad hanc inter 4℞. & 48 + 1℞. Ablataque 1℞. vtrobique, erit æquatio inter 48. & 3℞. Diuiſiſque 48. per 3. fiet 1℞ 16 numerus horarum ab occcaſu præteritarum. quod ita probatur. Tres quartæ horarum 16. elapſarum faciunt 12. horas, quibus ſi addatur $\frac{1}{2}$. horarum 8. quæ vſque ad alterum occaſum ſuperſunt, nimirum 4. fient horæ 16.

V. 5 *Quidam habet duas menſuras vini, quarum vna valet 12. nummos, & altera 15. Vult autem ex vtroque vino miſcere vnam menſuram, cuius pretium ſit 13. nummorum. Quæritur, quantum vini de qualibet menſura recipiendum ſit.*

PONE 1℞ partium menſuræ vilioris vini. Et pretioſioris vini menſuram 1 —— 1℞. Tunc inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

Prioris vini	menſura 1	numm. 12	menſ. 1℞?	numm. facit 12℞.
Poſterioris vini.	1	15	1—1℞?	facit 15—15℞.

Nam ſi 1. menſura prioris vini valet 12. numm. 1℞. vnius menſuræ eiuſdem vini valebit 12℞. numm. Et ſi 1. menſura poſterioris vini valet 15. numm. 1 —— 1℞. menſ. eiuſdem vini valebit 15 — 15℞. numm. Igitur 1℞. menſ. prioris vini, & 1 — 1℞. menſ. poſterioris valebunt 15 — 3℞. numm. quod pretium æquiualebit 13. numm. Additis ergo 3℞. vtrobique, erit æquatio inter 3℞ + 13. & 15. Ablatiſque 13. vtrinque, inter 3℞. & 2. Diuiſis ergo 2. per 3. fiet 1℞. $\frac{2}{3}$. De viliori igitur vino recipiendæ ſunt $\frac{2}{3}$. vnius menſurę, & de præſtantiori $\frac{1}{3}$. vnius menſuræ quod ſic probatur.

Prioris vini	menſ. 1	humm. 12	menſ. $\frac{2}{3}$?	valent	numm. 8
Poſterioris vini.	1	15	$\frac{1}{3}$?	valent	5

Nam $\frac{2}{3}$. vnius menſuræ prioris vini valebunt 8. numm. & $\frac{1}{3}$. menſuræ vini poſterioris, 5. numm. atque idcirco 1. menſura mixta 13. numm.

VI. 6 *Menſura vini valet 10. numm. Quantum ergo aquæ commiſcendum eſt vni menſuræ, vt 1. menſura mixta valeat 7. numm.?*

PONE 1℞ menſuræ aquæ. Deinde inſtitue regulam Trium hoc modo.

menſ. vini. menſ. aquæ	numm.	menſ.	mixta	numm.
1 + 1℞	10	1?	valet	$\frac{10}{1 + 1℞}$

Nam

Nam ſi 1. menſura vini vna cum 1℞. menſuræ aquæ valet 10. numm. 1. menſura ex vino & aqua mixta valebit $\frac{10}{1+1\text{℞}}$. Itaque æquatio erit inter $\frac{10}{1+1\text{℞}}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10. & 7 + 7℞. Ablatiſque 7. vtrobique, æquatio erit inter 3 & 7 ℞. Diuiſiſque 3. per 7. fiet 1℞. $\frac{3}{7}$. Ac tantum aquæ vnius menſuræ commiſcendum eſt cum 1. menſura vini, vt 1 menſura mixta valeat 7. numm. quod ita probatur.

menſ. ex vino & aqua	numm.	menſ.		numm.
$1\frac{3}{7}$.	10	1 ?	valet	7

Nam ſi 1. menſura vini cũ $\frac{3}{7}$. vnius menſuræ aquæ valet 10. numm. 1. menſura ſola mixta valebit 7. numm.

7 *Sunt in quodam vaſculo 20. menſuræ vini, quarum quælibet valet 12. numm. Infunditur deinde vaſculo illi aqua, donec vaſculum vino illo & aqua repleatur. Et tunc 1. menſura mixta valet 10. numm. Quæritur, quanta ſit capacitas illius vaſculi.* VII.

PONE menſuras 20 + 1℞. vnius menſuræ. Deinde inſtitue regulam Trium ſic.

menſ. vini.	menſ. aquæ.	numm.	menſ. mixta		numm.
20 +	1℞	240	1 ?	valet	$\frac{240}{20+1\text{℞}}$.

Nam ſi 1. menſura vini valet 12. numm. menſuræ vini 20 + 1℞. menſ. aquæ ſimul valebunt 240. numm. Igitur 1. menſura mixta valebit $\frac{240}{20+1\text{℞}}$. numm. atque ita inuenta eſt æquatio inter $\frac{240}{20+1\text{℞}}$. & 10. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 240. & 200 + 10℞. Et ablatis 200. vtrinque, manebit æqualitas inter 40. & 10 ℞. Diuiſiſque 40. per 10. fiet 1℞. 4. atque tot menſ. aquæ infuſæ ſunt illi vaſculo, ita vt totum vaſculum capiat 24. menſuras. quod probatur ſic.

menſ. vini & aquæ	numm.	menſ.		numm.
24	240	1 ?	valet	10.

Nam ſi 24. menſuræ ex vino & aqua valent 240. numm. propterea quod 1. menſ. vini valet 12. numm. valebit 1. menſ. mixta 10. numm.

8 *Duo tabellarij ex duabus ciuitatibus, inter quas intercipiuntur Leucæ 140. eodem die proficiſcuntur, alter verſus alterum. Vnus quolibet die conficit 8. Leucas, alter vero 6. Leucas. Quæſtio eſt, quando conuenient, ſibique mutuo occurrent.* VIII.

PONE in 1℞. dierum. & inſtitue regulam Trium ſic.

Dies	Leucæ	Dies	Leucæ
1	8	1℞ ?	8℞.
1	6	1℞ ?	6℞.

Prior ergo in 1℞. dierum conficiet 8℞ Leucarum. Et poſterior 6℞. atque ambo ſimul emenſi erunt 14 ℞. leucarum, hoc eſt, leucas 140. Eſt ergo æquatio inter 14℞. & 140. Diuiſis igitur 140. per 14. fiet 1℞. 10. Atque decimo die peracto conuenient. quod ſic probo.

Dies	Leucæ	Dies	Leucæ
1	8	10 ?	80
1	6	10 ?	60

Nam prior in 10. diebus conficiet 80. leucas, & poſterior 60. quæ ſimul totum ſpatium intermedium leucarum 140. conſtituunt.

9 *Quidam permutans 568. aureos, pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis monetæ 7. faciunt 1. aur. Secundi generis, 18. Tertij, 21. & quarti 28. Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. Quæritur, quotnam monetas cuiuslibet generis accipiat.* IX.

PONATVR 1℞. monetæ cuiuslibet, & regula Trium inſtituatur quater ſic.

Mon.	aur.	Mon.	aur.
7	1	1℞ ?	$\frac{1}{7}$℞
18	1	1℞ ?	$\frac{1}{18}$℞
21	1	1℞ ?	$\frac{1}{21}$℞
28	1	1℞ ?	$\frac{1}{28}$℞

Nam ſi 7. mon. faciunt 1. aur. 1℞. mon. faciet $\frac{1}{7}$℞. aur. & ſic de reliquis. Faciunt autem fractiones in quarto loco deſcriptæ numerum $\frac{71}{252}$℞. aur. æqualem numero 568. aur. Diuiſis ergo 568. per $\frac{71}{252}$. fiet 1℞. 2016. atque tot monetas ex quolibet genere recipiet. quod ſic probo.

NN 2 Mon.

Mon.	aur.	Mon.	aur.
7	1	2016?	288
18	1	2016?	112
21	1	2016?	96
28	1	2016?	72

Nam 2016.mon.primi generis faciunt 288.aur. Secundi autem generis, 112.aur. Tertij, 96.aur. & quarti 72.aur.qui omnes faciunt ſummam 568.aur.

X. 10 *Mercator quidam emit lanam, & ceram pro 124. aur. Conſtant autem 100. libræ lanæ 7. aur. & 100. lib. ceræ 14. aur. emitq; duplo plures lib. lanæ, quam ceræ. Quæſtio eſt, quot lib. vtriuſq; rei emerit.*

PONE 1℞.librarum ceræ, & 2℞ librarum lanæ: & inſtitue bis regulam Trium, hoc modo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100 lanæ	7	2℞ lib.lanæ ?	$\frac{14}{100}$℞
100 ceræ	14	1℞ lib.ceræ ?	$\frac{14}{100}$℞

Erit ergo inuenta æquatio inter $\frac{28}{100}$℞ aur. & 124.aur. Diuiſiſque 124.per $\frac{28}{100}$.fiet 1℞.442$\frac{6}{7}$.atque tot lib.ceræ emit, & lanæ lib.885$\frac{5}{7}$.quod ita probatur.

lib.	aur.	lib.	aur.
100 lanæ	7	885$\frac{5}{7}$?	62
100 ceræ	14	442$\frac{6}{7}$?	62

Ita enim pro lana, ac cera expendit 124.aur.

XI. 11 *Emit quidam aliquot vlnas panni, quas iterum vendidit. Emit autem 5. vlnas pro 7. aur. & vendidit 7. vlnas pro 11. aur. lucratuſque eſt hac mercatura 100. aur. Quæritur, quotnam fuerint illæ vlnæ.*

PONE 1℞ vlnarum, & inſtitue regulam Trium bis.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.
5	7	1℞?	$\frac{7}{5}$℞
7	11	1℞?	$\frac{11}{7}$℞

Vides, ſi $\frac{7}{5}$℞ aur.quos expendit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$℞ aur.quos recepit, relinqui $\frac{6}{35}$℞ aur.pro lucro. Eſt ergo æquatio inter $\frac{6}{35}$℞ aur. & 100.aur. Diuiſiſque 100.per $\frac{6}{35}$.fiet 1℞.583$\frac{1}{3}$.vln.atq; tot fuerunt vlnæ emptæ atque venditæ, quod ſic probo.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.
5	7	583$\frac{1}{3}$?	816$\frac{2}{3}$.
7	11	583$\frac{1}{3}$?	916$\frac{2}{3}$.

Vbi cernis, eum lucratum eſſe 100.aureos.

XII. 12 *Emit quidam aliquot vlnas panni, expendens 11. aur. pro 7. vlnis. Et totum pannum iterum vendidit, coactuſque eſt dare 5. vlnas pro 7. aureis: perdiditque in hac mercatura 100. aur. Quæritur, quot vlnas emerit, ac vendiderit.*

Pone 1℞.vln.&c.vt prius. & inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

vln.	aur.	vln.	aur.
7	11	1℞?	$\frac{11}{7}$℞
5	7	1℞?	$\frac{7}{5}$℞

Igitur ſi $\frac{7}{5}$℞ aur.quos recepit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$.℞ aur. quos expendit, emerget damnum $\frac{6}{35}$℞ aur. eritque æquatio inter $\frac{6}{35}$℞ aur. & 100.aur. Diuiſis ergo 100.per $\frac{6}{35}$.fiet 1℞ 583$\frac{1}{3}$ vln. atque tot vlnæ fuerunt emptæ, ac venditæ.quod ſic probo.

vln.	aur.	vln.	aur.
7	11	583$\frac{1}{3}$?	916$\frac{2}{3}$.
5	7	583$\frac{1}{3}$?	816$\frac{2}{3}$.

Vides ergo eum damnum feciſſe 100.aureorum.

XIII. 13 *Libræ 100. ceræ emuntur 17. aureis. Quæritur, quot libræ vendendæ ſint pro 1. aur. vt 102. aur. lucrentur 18. aur.*

Pone 1℞ librarum, & inſtitue regulam Trium bis.

aur.	lib.	aur.	lib.
17	100	102?	600
1	1℞	102 + 18?	120℞

Nam

Nam 102.aur.dabunt 600.lib.Et ſi pro 1.aur.datur 1x.lib.dabuntur 120x.lib.pro aur.102+18.quæ 120x. æquales ſunt 600.lib.quia tota cera venditur.

Eritque æquatio inter 120x.lib.& 600.lib.Diuiſis ergo 600.per 120.fiet 1x.5.lib.Atque tot libræ vendendæ ſunt pro 1.aur.vt in 600.libris fiat lucrum 18.aur. pro 102.aur.quod ſic probo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100	17	600?	102
5	1	600?	120

Vbi in priori exemplo vides 600.lib.facere 102.aur.In poſteriori vero 120.aur.id eſt,102+18.

14 *Emit quidam 100. lib. ceræ pro 17. aur. in quibus vendendis fecit damnum 18. aur. pro 102. aur. Quæritur quot libras pro 1. aur. dederit.* XIIII.

Pone 1x. librarum, &c.

aur.	lib.	aur.	lib.
17	100	102?	600
1	1x	102—18?	84x

Eritque æquatio inter 84x.lib.& 600.lib. Diuiſis igitur 600.per 84.fiet 1x.$7\frac{1}{7}$.lib.Atque tot lib.dedit pro 1. aur.vt damnum fecerit 18.aur.in 102.aur.& 600.libris. quod ſic probo.

lib.	aur.	lib.	aur.
100	17.	600?	102
$7\frac{1}{7}$	1	600?	84

Vbi vides expenſos fuiſſe 102.aur.pro 600.lib.Et pro eiſdem receptos fuiſſe 84.aur.id eſt,102—18.

15 *Tres mercatores ineunt ſocietatem. Primus ponit 40. aur. per 2. menſes. Secundus 20. aur. per 5. menſes Tertius ſummam quandam aur. per 3. menſes. Lucrati ſunt autem 3276. aur. de quibus primo obtigerunt 1040. aur. Secundo 1300. & tertio 936. Quæritur quot aureos tertius poſuerit.* XV.

Ponatur 1x aureorum.

aur.	menſ.	lucrum aur.	aur.
40	2	3276	1040 primi
20	5	3276	1300 ſecundi
1x	3	3276	936 tertij

Per multiplicationem aureorum in tempus, reducentur numeri ad regulam Trium hoc modo.

252	80	3276?	1040 primi
	100	3276?	1300 ſecundi
	3x.vel	3276?	936 tertij
	72		

VT autem inueniatur æquatio, & pretium 1x. inueniendus eſt numerus primus in regula Trium, qui nimirum ſumma eſt trium numerorum 80. 100. & 3x. hoc modo. Quoniam ita ſe habet primus ille numerus inueniendus ad 80. vt 3276. ad 1040. [a] fiet idem numerus ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium. Si ergo 262080. productus ex ſecundo 80. in tertium 3276. diuidatur per quartum 1040. exibit primus 252. Ex quo ſi dematur ſumma ex 80. & 100. collecta, nimirum 180. remanebit pretium 3x. videlicet 72. Diuiſis ergo 72. per 3. fiet 1x 24. numerus aur. quos tertius poſuit. quæ pecunia ducta in 3. menſes facit 72. &c. [a] *19. ſept.*

Pretium 1x. hoc etiam modo reperietur. Inuento primo numero 252. [b] erit numerus 235872. factus ex primo 252. in quartum 936. æqualis numero 9828x facto ex ſecundo 3x. in tertium 3276. Diuiſis igitur 235872. per 9828. fiet 1x. 24. vt prius. [b] *19. ſept.*

16 *Tres ſocij volunt inter ſe diſtribuere 455. aur. ea conditione, vt quoties primus recipit 2. toties ſecundus recipiat 3. Et quoties ſecundus recipit 4. toties tertius recipiat 5. Quæritur, quot aureos quilibet recipiat ex illa ſumma 455. aureorum.* XVI.

PONE primum accipere 1x. Et ſecundum $1\frac{1}{2}$x. vt habeat numerum ſeſquialterum ad primum. Tertium vero $1\frac{7}{8}$x. vt habeat numerum ſeſquiquartum ad ſecundum. Erit ergo æquatio inter $4\frac{3}{8}$x. & 455. Diuiſis igitur 455. per $4\frac{3}{8}$. fiet 1x 104. numerus primi. Secundus ergo accipiet 156. nimirum $1\frac{1}{2}$x. Tertius vero 195. nimirum $1\frac{7}{8}$x. quod ſic probatur. Tres numeri 104. 156. 195. faciunt ſummam 455. diuidendam. Et quoties 2. ſunt in 104. toties 3. ſunt in 156. Et quoties 4. ſunt in 156. toties 5. ſunt in 195. cum idem Quotiens fiat, diuidendo 104. per 2. & 156. per 3. Item diuidendo 156. per 4. & 195. per 5.

1 x
$1\frac{1}{2}$ x
$1\frac{7}{8}$ x

EADEM via tenenda eſt, ſi plures ſocij fuerint: vt ſi fuerint quatuor, & quoties tertius accipit 6. toties quartus accipiat 7. ponendæ erunt $2\frac{3}{16}$ ℞ pro quarto, vt habeat numerum ſeſquiſextum ad
1 ℞ tertium. Si igitur diuidendi ſint aurei 21840. erit æquatio inter $6\frac{9}{16}$ ℞. & 21840. Diuiſis
$1\frac{1}{2}$ ℞ igitur 21840. per $6\frac{9}{16}$ fiet 1℞. 3328. portio primi, quem poſuimus accipere 1℞. Portio ſe-
$1\frac{7}{8}$ ℞ cundi erit $1\frac{1}{2}$ ℞. id eſt, 4992. Portio tertij erit $1\frac{7}{8}$ ℞. nimirum 6240. Portio denique quarti
$2\frac{3}{16}$ ℞ erit $2\frac{3}{16}$ ℞. hoc eſt, 7280. quod probabis, vt prius. Nam omnes quatuor portiones faciunt ſummã diuidendam 21840. & idem Quotiens fit, diuidendo 3328. per 2. & 4992. per 3. Atque idem quoque, diuidendo 4992. per 4. & 6240. per 5. Deniq; idem ẽt, diuidendo 6240. per 6. & 7280. per 7.

XVII. 17 *Habeo quatuor auri fragmenta, quæ æquiualent aureis 164. Et primum in valore duplum eſt ſecundi: ſecundum triplum tertij: & tertium quadruplum quarti. Quæritur valor ſingulorum fragmentorum.*

PONE quartum, ſiue minimum 1℞. aur. tertium 4℞. ſecundum 12℞. & primum 24℞. Sunt ergo 41℞. æquales 164. aur. Diuiſiſque 164 per 41. fiet 1℞. 4. atque tot aureis æquiualet minimum fragmentum, ſiue quartum: atque idcirco tertium valebit 16. aur. ſecundum 48. & primum 96. qui quidem aurei faciunt ſummam 164. & ſeruant proportiones in quæſtione expreſſas.

XVIII. 18 *Tres ſocij conferunt totam ſuam pecuniam, atque ita colligunt 100. aur. Eſt autem pecunia primi ſubdupla pecuniæ ſecundi: & pecunia ſecundi ſubtripla pecuniæ tertij. Quæritur, quantum quiſque contulerit.*

PONE primum contuliſſe 1℞. Secundum 2℞ & tertium 6℞. Eruntq; 9℞. æquales 100. aur. Diuiſis igitur 100. per 9. fiet 1℞. $11\frac{1}{9}$. pecunia primi. Secundi pecunia idcirco erit $22\frac{2}{9}$. Et tertij $66\frac{6}{9}$. quæ tres ſummæ faciunt 100. aur. ſeruantque proportiones in quæſtione expreſſas.

XIX. 19 *Moriens quidam teſtamentum condit, relinquitque 3000. aur. diſtribuendos inter vxorem, filium & duas filias hac conditione, vt portio filij ſit dupla portionis matris: & portio matris dupla quoque portionis vnius filiæ. Quæritur, quanta ſit vniuſcuiuſque portio.*

PONATVR portio vnius filiæ 1℞. matris 2℞. & filij 4℞. Erunt ergo 8.℞. æquales 3000. aur.

Portio	filiæ	1℞	id eſt	375	aur.
	filiæ	1℞		375	
	matris	2℞		750	
	filij	4℞		1500	

Diuiſiſque 3000. per 8. fiet 1℞ 375. portio vnius filiæ. atque idcirco portio matris 750. & filij 1500.

XX. 20 *Mercator quidam qualibet parte tertia ſuæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiuſdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiuſdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{9}$. lucri prioris. Et ſic omnibus computatis, inuenit 864. aur. Quæritur quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONATVR 1℞ pecuniæ. Ergo primum lucrum fuit $\frac{3}{20}$ ℞ quando quidem quælibet $\frac{1}{3}$ ℞. lucrata eſt $\frac{1}{20}$ ℞. Deinde ſecundum lucrum fuit $\frac{3}{9}$ ℞ prioris lucri $\frac{3}{20}$ ℞. nimirum $\frac{9}{180}$ ℞ hoc eſt, $\frac{1}{20}$ ℞. quandoquidem quælibet $\frac{1}{3}$ ℞ lucrata eſt $\frac{1}{9}$. prioris lucri. Iam 1℞ $\frac{3}{20}$ ℞. & $\frac{1}{20}$ ℞. faciunt ſummã $1\frac{1}{5}$ ℞. æqualem 864. aur. Diuiſis ergo 864. per $1\frac{1}{5}$. fiet 1℞. 720. atque tot aureos habuit mercator ille. Ergo lucrum primum $\frac{3}{20}$ ℞. fuit 108. aur. Et lucrum ſecundum $\frac{1}{20}$. fuit 36. aur. quæ duo lucra cum 720. aur. faciunt 864. aur.

XXI. 21 *Mercator quidam qualibet parte quarta ſuæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiuſdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiuſdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{15}$. ſummæ ex eadem pecunia, & lucro collectæ. Et ſic ſingulis computatis, inuenit mercator ille 400. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONE pecuniam fuiſſe 1℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{20}$ ℞. hoc eſt, $\frac{1}{5}$ ℞. Deinde ſecundum lucrum fuit $\frac{18}{50}$ ℞. ſiue $\frac{9}{25}$ ℞. nimirum $\frac{3}{15}$. ſummæ $\frac{6}{5}$ ℞. ex priori lucro, & 1℞. collectæ. Iam 1℞. $\frac{1}{5}$ ℞. & $\frac{9}{25}$ ℞ faciunt ſummam $1\frac{14}{25}$ ℞. æqualem 400. aur. Diuiſis ergo 400. per $1\frac{14}{25}$. fiet 1℞. $256\frac{16}{39}$. aur. atque tot aur. habuit mercator ille. Primum autem lucrum $\frac{1}{5}$ ℞. fuit aur. $51\frac{11}{39}$. Secundum vero lucrum $\frac{9}{25}$ ℞. fuit $92\frac{4}{13}$. quæ duo lucra cum $256\frac{16}{39}$. faciunt 400. aur.

XXII. 22 *Mercator quidam qualibet parte quarta ſuæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{30}$. eiuſdem pecuniæ. Deinde ſingulis partibus quintis eiuſdẽ pecuniæ prioris lucratur $\frac{1}{27}$. eiuſdem pecuniæ. Atque ita ſingulis computatis, inuenit 2136. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumq; lucrum.*

PONE pecuniam fuiſſe 1℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{30}$ ℞. ſiue $\frac{2}{15}$ ℞. Secundum vero $\frac{5}{27}$ ℞. Iam 1℞. $\frac{2}{15}$ ℞. & $\frac{5}{27}$ ℞. faciunt ſummam $1\frac{43}{135}$ ℞. æqualem 2136. aur. Diuiſis igitur 2136. per $1\frac{43}{135}$. fiet 1℞. 1620. aur. pecunia mercatoris. Ergo primum lucrum $\frac{2}{15}$ ℞. fuit 216. aur. Secundum vero $\frac{5}{27}$ ℞. fuit 300. aur. quæ duo lucra cum 1620. aur. faciunt ſummam 2136. aur.

23 *Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Quæritur quot poma vendantur pro 572. denariolis.* XXIII.

HÆC quæſtio per regulam Trium expedietur hoc modo.

Denar.	pom. aur.	Denar.	pom. aur.
11	3	572?	156.

Per Algebram vero ſoluetur, ſi pro quarto numero inueniendo in regula Trium ponatur 1℞ pomorum. [a] Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex ſecundo in tertium, erit numerus 11℞ productus ex primo [a] *19. ſept.*

Denar.	pom. aur.	Denar.	pom. aur.
11	3	572?	1℞

in quartum, æqualis numero 1716. producto ex ſecundo in tertium. Diuiſis ergo 1716. per 11. fiet 1℞. 156. numerus pomorum, quæ conſtant 572. denar. Vides ergo excellentiam Algebræ etiam in quæſtionibus regulæ Trium. quod etiam in ſequenti exemplo apparebit.

24 *Libræ 47. quarundam mercium conſtant aur. 30. Quæritur, quanti conſtabunt 100. libræ.* XXIV.

PONATVR 1℞. vt hic vides.

lib.	aur.	lib.	aur.
47	30	100?	1℞

Eſt ergo æquatio inter 47 ℞. & 3000. Diuiſis ergo 3000 per 47 fiet 1℞. $63\frac{39}{47}$. aur.

25 *Eſt maſſa quædam argenti pondus habens marcarum 7. quarum quælibet continet 5. ſemiuncias puri argenti, & 11. ſemiuncias cupri. Commiſcetur autem maſſæ illi liquatæ alia maſſa cupri puri, ponderis 21. marcarum. Quæritur quantum argenti puri habitura ſit quælibet marca illius maſſæ nouæ 28. marcarum.* XXV.

HIC certum eſt, pauciores ſemiuncias puri argenti contineri in 28. marcis, quam in 7. quippe cum ſemunciæ in his contentæ diſtributæ ſint æqualiter inter 28. marcas. Et quia in illis 7. ponuntur 35. ſemiunciæ puri argenti, diuiſis his per 28. reperientur in qualibet marca $1\frac{1}{4}$. ſemiunciæ puri argenti. Si igitur 1 marca pondus habet 16. ſemiunciarum, erunt in qualibet marca $14\frac{3}{4}$. ſemiunciæ cupri. Hoc autem ita eſſe, facile probabitur. Nam pondus 21. marcarum cupri puri, faciet 336. ſemiuncias cupri: Et ſi accedant 77 ſemiunciæ in prioribus 7 marcis contentæ, fient ſemiunciæ cupri 413. qui numerus etiam producitur ex $14\frac{3}{4}$. (quot nimirum ſemiuncias cupri in qualibet marca ineſſe diximus) in 28. marcas. Sed vt quæſtio hæc ſoluatur per Algebram, ſic ſtabit exemplum ad regulam Trium inuerſam.

arg. mix.	arg. pur.	arg. mix.	arg. pur.
7. marc.	5. ſemiunc.	28. marc?	ſemiunc. 1℞.

Et quoniam in regula Trium inuerſa, numerus factus ex primo in ſecundum, æqualis eſt numero facto ex tertio in quartum, propterea quod tertius numerus in regula Trium ordinaria deberet tenere primum locum, vt in Arithmetica practica diximus: erit æquatio inter 35. & 28 ℞. Diuiſisque 35. per 28 fiet 1℞. puri argenti ſemiunciæ $1\frac{1}{4}$. vt prius.

26 *Quinque conuictores ſingulis hebdomadis ſoluunt 11. aur. quantum ergo ſoluent 18. conuictores in 40. diebus.* XXVI.

HÆC quæſtio ſpectat ad regulam Trium compoſitam. quæ ad regulam Trium ſimplicem reduci-

Conuict.	Dies	aur.	Conuict.	Dies	aur.
5	7	11	18	40?	1℞

tur per multiplicationem conuictorum in tempus, vt hic.

Conuict.	aur.	Conuict.	aur.
35	11	720?	1℞

Nam tantum ſoluet vnus in duobus diebus, quantum duo in vno. Et tantum vnus in 35. diebus, quantum 5. in ſeptem. atque hæc eſt ratio, cur dicta multiplicatio fieri debeat. Poſito igitur quarto numero 1℞. erit æquatio inter 35 ℞. & 7920. Diuiſis ergo 7920. per 35. fiet 1℞. $226\frac{2}{7}$. aur. quot nimirum 18. conuictores in 40. diebus ſoluent.

XXVII. 27 *Pro tribus ponderibus æqualibus vehendis per leucas 7. debentur vectori 11. groſſi, quorum quilibet valet denariolos 25. Quæro iam, quot ſimilia pondera ſint vehenda per 40. leucas pro 400. groſſis.*

HÆC etiam quæſtio ad regulam Trium compoſitam pertinet, vt hic vides.

Groſſi	Pond.	Leuc.	Groſſi	Pond.	Leuc.
11	3	7	400?	1℞	40

Pone 1℞.Pond. vehendorum, & reduc regulam ad regulam Trium ordinariam per multiplicationem pond. in ſpatium itinerarium: quandoquidem tantum ſoluendum eſt pro 1.pondere per 2. Leucas, quantum pro 2. pond.per 1.Leucam: & tantum per 1.pond.per 21. Leuc. quantum pro 3 pond. per 7 Leuc. quam reductionem

Groſſi	Pond.	Groſſi	Pond.
11	21	400?	40℞

hic cernis. Erit igitur æquatio inter 440℞.& 8400. Diuiſis ergo 8400.per 440.fiet 1℞.19 $\frac{1}{11}$.Pond. vehenda per 40.Leucas pro 400 groſſis. Nam ſi pro 3.pond.per 7.Leucas ſoluuntur 11. groſſi, pro 19 $\frac{1}{11}$. pond. per 7.Leucas ſoluentur 70 groſſi. vt hic vides.

Pond.	Groſſi	Pond.	Groſſi
3	11	19 $\frac{1}{11}$?	70

Deinde ſi per 7 Leucas ſoluuntur 70 groſſi, per 40 Leucas ſoluentur 400. groſſi, vt hic vides.

Leuc.	Groſſi	Leuc.	Groſſi
7	70	40?	400

XXVIII. 28 *Tres ſartores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot igitur diebus duo ſartores perficient 8. tunicas?*

Pone 1℞. dierum.

Sart.	Dies	Tunic.	Sart.	Dies	Tunic.
3	14	7	2	1℞	8

Reductis numeris per multiplicationem ad regulam Trium ordinariam, vt hic.

42	7	2℞	8

Erit æquatio inter 336.& 14℞. Diuiſis ergo 336.per 14.fiet 1℞. 24. dies, in quibus duo ſartores 8.tunicas perficient. Nam ſi 3. ſartores in 14. diebus perficiunt 7. tunicas, duo ſartores in 14. diebus, nimirum in eodem tempore, perficient 4 $\frac{2}{3}$. tunicas, vt hic cernitur.

Sart.	Tunic.	Sart.	Tunic.
3	7	2?	4 $\frac{2}{3}$.

Deinde ſi tunicæ 4 $\frac{2}{3}$.abſoluuntur 14.diebus, tunicæ 8. abſoluentur diebus 24. vt hic conſtat.

Tunic.	Dies	Tunic.	Dies
4 $\frac{2}{3}$	14	8?	24

XXIX. 29 *Seruo cuidam promiſit quidam ciuis pro 12.menſibus mercedem 10.aur. & 1.tunicam. Poſt 7.autem menſes dedit illi tunicam, & 2.aur. Quanti ergo æſtimata eſt tunica illa?*

PONE eius pretium eſſe 1℞. aur. Et dic. Si 12. menſes poſcunt 1℞ + 10. aur. quantum poſtulat 1. menſis? inueniesque $\frac{1℞+10}{12}$.aur. Rurſum dic. Si 7.menſes poſcunt 1℞ + 2.aur. quantum poſtulat 1. menſis? inueniesque $\frac{1℞+2}{7}$ aur. vt hic vides.

Menſes	Aurei	Menſis	Aurei
12	1℞ + 10	1?	$\frac{1℞+10}{12}$
7	1℞ + 2	1?	$\frac{1℞+2}{7}$

Erit ergo æquatio inter $\frac{1℞+10}{12}$ & $\frac{1℞+2}{7}$. cum vterque numerus ſit merces 1.menſis. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 7℞ + 70.& 12℞ + 24. Ablatis ergo 24 vtrinque, erit æquatio inter 7℞ + 46.& 12℞. Rurſumque ablatis 7℞. vtrobique, inter 46 & 5℞. Diuiſis igitur 46 per 5. fiet 1℞. 9 $\frac{1}{5}$.aur. pro pretio tunicæ. Nam hac ratione merces 12.menſium erit 19 $\frac{1}{5}$.aur. nimirum 10. aur. & tunica. Igitur merces 7.menſium erit 11 $\frac{1}{5}$ aur. vt hic vides. nimirum 2.aur.& pretium tunicæ 9 $\frac{1}{5}$.aur.

Menſes.	Aur.	Menſes.	Aur.
12	19 $\frac{1}{5}$.	7?	11 $\frac{1}{5}$.

30 Ciuis

30 *Ciuis quidam ſeruo ſuo pigro ita mercedem 30. dierum conſtituit, vt laboranti ſingulis diebus dare velit 7. groſſos: ocιantem vero mulctare 5. groſſis. Ratione autem inita poſt 30. dies, ſeruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermiſit?* XXX.

PONE 1℞. dierum laboris, ideoque 30 — 1℞ dierum otij. Et inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

	Dies	groſſi	Dies	groſſi
Laboris	1	7	1℞?	7℞
Otij	1	5	30 — 1℞?	150 — 5℞

Quia igitur tantum meruit, quantum demeruit, erit æquatio inter 7℞. & 150 — 5℞. Additisque 5℞ vtrobique, inter 12℞. & 150. Diuiſis ergo 150 per 12. fiet 1℞. 12 $\frac{1}{2}$ dies laboris, & otij 17 $\frac{1}{2}$. quod ita probatur.

	Dies	groſſos	Dies	groſſos
Laboris	1	7	12 $\frac{1}{2}$?	87 $\frac{1}{2}$
Otij	1	5	17 $\frac{1}{2}$?	87 $\frac{1}{2}$

Vbi vides, tantam eſſe mercedem, quanta eſt mulcta.

31 *Mercator quidam vendidit 20. libras partim croci, & partim zinziberis, aureis 45. Vendidit autem 1 lib. croci aureis 3. & 1. libram zinziberis $\frac{1}{2}$. aur. Quæſtio eſt, quot libræ croci venditæ ſint, & quot zinziberis?* XXXI.

PONE 1℞ librarum croci, ideoque 20 — 1℞ librarum zinziberis, & inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

	lib.	aur.	lib.	aur.
Croci	1	3	1℞?	3℞
Zinzib.	1	$\frac{1}{2}$	20 — 1℞?	$\frac{20 - 1℞}{2}$

Æquatio igitur eſt inter ſummam ex 3℞ aur. & $\frac{20 - 1℞}{2}$ aur. collectam, & 45. aur. Eſt autẽ illa ſumma 10 + $\frac{5}{2}$℞ aur. (Nam $\frac{20 - 1℞}{2}$ æquiualent numero 10 — $\frac{1}{2}$℞. cui ſi addantur 3℞ aur. fit ſumma 10 + $\frac{5}{2}$℞.) Igitur æquatio eſt inter aur. 10 + $\frac{5}{2}$℞ aur. & 45. aur. Ablatiſq; 10. aur. vtrobique, inter $\frac{5}{2}$℞. & 35. Diuiſis igitur 35 per $\frac{5}{2}$. fiet 1℞. 14. Atque tot lib. croci venditæ ſunt, ac proinde 6. lib. zinziberis. quod ita probatur.

	lib.	aur.	lib.	aur.
Croci	1	3	14?	42
Zinzib.	1	$\frac{1}{2}$	6?	3

Vbi vides ex pretio 14 lib. croci, & 6 lib. zinziberis colligi 45 aureos.

32 *Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. quæ æquiualent 160. aureis. Quædam illarum monetarum valent $\frac{1}{3}$. aur. & reliquarum quælibet $\frac{1}{4}$. aur. Quæritur numerus priorum, ac poſteriorum.* XXXII.

PONE 1℞. priorum, & poſteriorum 560 — 1℞. & inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

Monet.	aur.	Monet.	aur.
1	$\frac{1}{3}$	1℞?	$\frac{1}{3}$℞
1	$\frac{1}{4}$	560 — 1℞?	$\frac{560 - 1℞}{4}$

Quarti numeri inuenti æquiualent 160. aur. Summa illorum numerorum facit aur. 140 + $\frac{1}{12}$℞. (Nam $\frac{560 - 1℞}{4}$. æquiualent numero 140 — $\frac{1}{4}$℞. cui ſi addatur $\frac{1}{3}$℞. fit ſumma 140 + $\frac{1}{12}$℞.) Eſt igitur æquatio inter aur. 140 + $\frac{1}{12}$℞. & 160 aur. Ablatisque 140 vtrinque, inter $\frac{1}{12}$℞ & 20. Diuiſis igitur 20 per $\frac{1}{12}$ fiet 1℞. 240. atque tot monetæ ſunt prioris generis, quarum ſingulæ valent $\frac{1}{3}$. aur. poſterioris autem generis, quarum ſingulæ valent $\frac{1}{4}$. aur. ſunt 320. quod ita probatur.

Monet.	aur.	Monet.	aur.
1	$\frac{1}{3}$	240?	80
1	$\frac{1}{4}$	320?	80

Vbi cernis, numeros in quarto loco poſitos facere 160. aur.

33 Qui-

XXXIII. 33 *Quidam lanio boues emit, qui interrogatus, quanti vnum emerit, reſpondit: Quanto 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emiſſem pluris 96. aureis. Quæritur de pretio.*

HÆC quæſtio ſoluetur per modum regulæ Algebræ ſine numeris Coſſicis, & ſine poſitione 1℞. quod ſane peregregium videri poſſit. quod etiam in proximis tribus quæſtionibus, quæ ſequuntur, faciemus. Quoniam igitur boues 10 — 40. aur. exceſſus eſt pretij 10. boum ſupra 40 aur. quippe cum dicat lanio, ſe amplius 40 aur. expendiſſe, quos non debuiſſet expendere. Item boues 18 — 96. aur. exceſſus eſt pretij 18. boum ſupra 96 aur. quos non debuiſſet expendere. atque hi duo exceſſus æquales ponuntur: erit æquatio inter boues 10 — 40 aur. & boues 18 — 96 aur. Additisque 96. aur. vtrobique, inter boues 10 + 56 aur. & boues 18. (Nam ex 96. additis ad — 40. fit ſumma + 56) Et ablatis 10 bobus vtrinque, inter 56 aur. & 8. boues. Diuiſis ergo 56 per 8. fiet pretium 1 bouis 7 aur. quod ita probatur. 10 boues valebunt 70 aur. ablatisque 40 aur. quos vltra iuſtum pretium expendit, remanent aur. 30 pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt 126 aur. detractisque 96 aur. quos non debuerat expendere, remanent ſimiliter 30 aur. pro pretio 18 boum.

Si dixiſſet lanio ille, ſe 10 boues tanto emiſſe pluris 40 aur. quanto emere potuiſſet 18 boues minoris 96 aur. exiſteret æquatio inter boues 10 — 40 aur. & aur. 96. — 18 bobus. quia ille eſſet exceſſus pretij 10 boũ vltra 40 aur. hic autem exceſſus aur. 96. vltra pretium 18 boum. Additis igitur 18 bobus vtrinque, erit æquatio inter 28 boues — 40 aur. & 96 aur. Additisque rurſum 40 aur. vtrobique, inter 28 boues, & 136 aur. Diuiſis ergo 136 per 28. fiet pretium 1 bouis aur. $4\frac{6}{7}$. quod probatur ſic. Boues 10. valebunt aur $48\frac{4}{7}$. & demptis 40. aur. remanent aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt aur. $87\frac{3}{7}$. quibus demptis ex 96. remanent ſimiliter aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 18 boum.

Sic ſi dicas. Emi 4 groſſis —— 3. ouis, 41. oua, erit æquatio inter 4 groſ. —— 3. ouis, & 41. oua. Additisq; 3. ouis vtrobique, inter 4. groſ. & 44. oua. Diuiſis igitur 44 per 4. fiet Quotiens 11. atque tot oua ementur 1 groſſo.

Item ſi dicas. 4 groſſi —— 3. denar. faciunt 97. denariolos, inuenies 1 groſ. facere 25 denar.

Item ſi dicat quis, 4 aur. + 125 groſ. facere aur. $10\frac{1}{4}$. Demptis 4 aur. vtrobique, erit æquatio inter 125 groſ. & $6\frac{1}{4}$ aur. Diuiſis ergo $6\frac{1}{4}$ aur. per 125 groſ. fiet Quotiens $\frac{1}{20}$ aur. valor 1 groſſi, hoc eſt, 1 groſſ. facit $\frac{1}{20}$ vnius aurei. Quod ſi diuides 125 groſſ. per $6\frac{1}{4}$ aur. fiet Quotiens 20. atque tot groſſi facient 1. aureum.

XXXIV. 34 *Quando 7. vlnæ cuiuſdam panni emuntur $4\frac{1}{2}$. aur. emuntur eodem pretio 17. vlnæ aur. 10. groſſ. $18\frac{4}{7}$. Quæſtio eſt, quot groſſi faciant 1. aur.*

QVONIAM eadem eſt proportio 7. vln. ad $4\frac{1}{2}$. aur. quæ 17 vln. ad aur. 10. groſſ. $18\frac{4}{7}$. collocabimus hos quatuor numeros proportionales hoc ordine.

vlnæ	aur.	vlnæ	aur.	groſſ.
7	$4\frac{1}{2}$.	17?	10.	$18\frac{4}{7}$.

[a] 19. ſept. [a] Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex ſecundo in tertium; erit æquatio inter 70. aur. + 130 groſſ. & $\frac{153}{2}$. aur. ſiue $76\frac{1}{2}$. aur. Ablatisque 70. aur. vtrobique, inter 130 groſſ. & $6\frac{1}{2}$. aur. Diuiſis ergo 130 per $6\frac{1}{2}$. fiet Quotiens 20. atque tot groſſi æquiualent 1. aureo.

XXXV. 35 *Quidam recipit à mercatore crocum pro 10. aur. Deinde rurſum ab eodem accepit 24. lib. croci. Tandem reddit mercatori 30. lib. croci, & mercator, ſupputato pretio croci, reſtituit ei 14. aur. Quæritur pretium 1. lib. croci.*

HIC vides 10. aur. + 24 lib. eſſe totum debitum, quod emptor mercatori debet. Similiter 30. lib. — 14. aur. Eſt ergo æquatio inter 10 aur. + 24 lib. & 30 lib. — 14. aur. Additisque 14. aur. vtrobique, inter 24 aur. + 24 lib. & 30 lib. Ablatisque 24 lib. vtrinque, inter 24 aur. & 6 lib. Diuiſis igitur 24 per 6 fiet Quotiens 4. atque tot aurei faciunt pretium 1. libræ. quod ſic probatur.

Pro 10 aur. emuntur libræ $2\frac{1}{2}$. atque ita emptor recepit à mercatore lib. $26\frac{1}{2}$. quæ valent 106 aur. Si igitur mercatori reſtituantur 30 lib. debebit mercator emptori lib. $3\frac{1}{2}$. cum hic ſolum receperit lib. $26\frac{1}{2}$. Valent autem $3\frac{1}{2}$. lib. aur. 14. quos mercator emptori reſtituit.

XXXVI. 36 *Ciuis quidam inuenit, neſcio quot, pauperes ante ianuam domus ſuæ: quibus è denariolis, quos in manu habet, ſeptenos erogat denariolos. quo facto, ſuperſunt ei in manu 24. denarioli. Quod ſi cuilibet dare voluiſſet 9. defuiſſent illi 32. denarioli. Quæritur, quot pauperes fuerint, & quot denariolos ciuis ille habuerit in manu.*

HIC vides, 7. ſummas denariolorum, quarum quælibet æqualis eſt numero pauperum, + 24 denar. æquales eſſe toti numero denariolorũ, quos ciuis ille in manu habebat: propterea quod tot denarioli, quot ſunt pauperes, vnam ſummã conſtituunt; ac proinde toties 7. denarioli, quot ſunt pauperes, conſtituent 7. ſummas, Eodem modo 9. ſummæ denariolorum, quarum quælibet æqualis eſt eidem numero pauperum, — 32. denar. æquales erunt toti numero denariolorum, quos ille ciuis habebat in manu. Ergo æquatio erit inter 7. ſumm. + 24. & 9. ſumm. —— 32. Additisq; 32. vtrinque, inter 7. ſumm. + 56. & 9. ſumm. Ablatisq; 7. ſumm. ex 9. inter 56. & 2. ſumm. Diuiſis ergo 56 per 2. fiet Quotiens 28. numerus pauperum. Nam ſi cuilibet dentur 7. denar. erogati erunt 196. denar. Et quia tunc ſuperfuerunt 24. denar. habuit ciuis ille in manu 220. denar. Quod ſi cuilibet dare voluiſſet 9. denar. oportuiſſet illum habere in manu 252. denar. Defuiſſent ergo illi 32. denarioli.

37 Pro

37 *Pro 70. ſummis librarum quarundam mercium penditur vectigal 1. ſumma — 32. aur. Et pro* XXXVII *200. ſummis penditur 1. ſumma + 20. aur. Quæritur, quanti 1. ſumma conſtet.*

PONE 1℞ aur. & inſtitue regulam Trium bis, hoc modo.

Summæ	aur.	Summa	aur.
70	1℞ — 32	1?	$\frac{1℞-32}{70}$
200	1℞ + 20	1?	$\frac{1℞+20}{200}$

Nam ſi pro 70. ſumm. penditur vectigal 1℞ — 32 aur. pro 1. ſumma pendetur $\frac{1℞-32}{70}$ aur. &c. Atque ita erit æqualitas inter $\frac{1℞-32}{70}$ aur. & $\frac{1℞+20}{200}$ aur. cum vterque numerus ſit vectigal 1. ſummæ. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 200℞ — 6400 aur. & 70℞ + 1400 aur. Additis igitur 6400. vtrobique, erit æquatio inter 200℞ & 70℞ + 7800. Ablatisq; 70℞ vtrinque, inter 130℞ & 7800. Diuiſis ergo 7800 per 130. fiet 1℞. 60 aur. pro pretio vnius ſummæ. quod ſic probatur. Pro 70 ſummis pendetur vectigal 28 aur. nimirum 1℞ — 32 aur. Et pro 200. ſummis pendetur vectigal 80 aur. nimirum 1℞ + 20 aur. vt hic apparet.

Summæ	aur.	Summæ	aur.
70	28	200?	80

38 *Vlnæ 10. panni rubri cum 4. vlnis panni nigri conſtant aur. 88. atque eodem pretio 2. vlnæ panni* XXXVIII *rubri cum 4. vlnis panni nigri conſtant aur. 32. Quæſtio eſt de pretio 1. vlnæ.*

PONATVR 1℞ pretium 1. vlnæ panni rubri. Conſtabuntque 10 vlnæ 10℞. ac proinde 4 vlnæ panni nigri conſtabunt 88 aur. — 10℞. Vlnæ vero 2. panni rubri conſtabunt 2℞. ideoque 4 vlnæ panni nigri, 32 aur. — 2℞. Erit ergo æquatio inter 88. aur. — 10℞ & 32 aur. — 2℞. cum vterque numerus ſit pretium 4 vlnarũ panni nigri. Additis igitur 10℞ vtrobiq;, erit æquatio inter 88 aur. & 32 aur. + 8℞. Ablatisq; 32. aur. vtrinque, inter 56 aur. & 8℞. Diuiſis ergo 56 per 8. fiet 1℞. 7. aur. pro pretio vnius vlnæ panni rubri. quod probatur. Nam 10 vlnæ valebunt aur. 70. proptereaque 4. vlnæ panni nigri, aur. 18. qui cum 70. faciunt 88. aur. Igitur 1 vlna panni nigri valebit aur. 4 $\frac{1}{2}$. Atque hoc pretio 2 vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri valebunt aur. 32.

QVOD ſi 10. vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri conſtent aur. 88. atque eodem pretio 2 vlnæ panni rubri cum 6 vlnis panni nigri conſtent aur. 41. conſtabunt 4. vlnæ panni nigri aur. 88 — 10℞. Et 6. vlnæ panni nigri, aur. 41 — 2℞. ſi nimirum ponatur 1℞. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, vt prius. Sed non erit æquatio inter aur. 88 — 10℞. & aur. 41 — 2℞. cum prior numerus ſit pretium 4 vlnarum panni nigri, poſterior vero 6 vlnarum. Oportet ergo prius inueſtigare pretium 4 vlnarum ex pretio 6 vlnarum, per regulam Trium, hac ratione.

Vlnæ	aur.	Vlnæ	aur.
6	41 — 2℞	4?	$\frac{164-8℞}{6}$

Inuenieturque 4 vlnarum pretium $\frac{164-8℞}{6}$ aur. atque ita inuenta erit æquatio inter aur. 88 — 10℞ & aur. $\frac{164-8℞}{6}$. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter aur. 528 — 60℞. & aur. 164 — 8℞. Additisque 60℞ vtrobique, inter 528 aur. & aur. 164 + 52℞. Et ablatis 164 aur. vtrinque, inter 52℞. & 364 aur. Diuiſis ergo 364 per 52. fiet 1℞. 7 aur. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, veluti prius.

ET ſi 10 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri conſtarent 88 aur. vt prius, ſed 2 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valerent tantum 20 aur. inuenires pretium 1℞. 8 $\frac{1}{2}$ pro pretio 1 vlnæ panni rubri. quod probare potes. Nam 10 vlnæ panni rubri valebunt 85 aur. & 4 vlnæ panni nigri, aur. 3. ideoque 1 vlna $\frac{3}{4}$ aur. Atque ita 2 vlnæ panni rubri valebunt aur. 17. qui cum 3 aur. nimirum cum pretio 4 vlnarum, faciunt 20 aur.

39 *Mercator in tribus nundinis eandem aureorum ſummam exponens, lucratus eſt in ſingulis $\frac{1}{8}$. ſuæ* XXXIX. *ſummæ aureorum. Deinde ad alias ſe conferens nundinas lucratus eſt $\frac{3}{10}$. eiuſdem ſuæ ſummæ priori lucro auctæ. Atque ita deprehendit ſe habere 1287. aur. Quæritur ſumma aureorum, quos initio habuit.*

PONATVR 1℞. Et quia in ſingulis nundinis lucratus eſt $\frac{1}{8}$℞. habebit poſt illas tres nundinas aur. 1 $\frac{3}{8}$℞ hoc eſt, $\frac{11}{8}$℞. Deinde quia cum $\frac{11}{8}$℞ lucratus eſt $\frac{3}{10}$℞. id eſt, $\frac{33}{80}$℞. ſi hoc lucrum ad $\frac{11}{8}$℞ adiiciatur, fiet ſumma $\frac{1144}{640}$℞. quam vltimo loco habuit. quæ æqualis eſt 1287 aur. Diuiſis ergo 1287 per $\frac{1144}{640}$. fiet 1℞. 720 ſumma aureorum illius mercatoris. Nam eius $\frac{3}{8}$. quas in tribus nundinis eſt lucratus, ſunt 270. aur. qui cum 720. faciunt 990 aur. cum quibus tandem lucratus eſt $\frac{3}{10}$. nimirum $\frac{2970}{10}$. hoc eſt, 297 aur. qui cum 990. faciunt aur. 1287.

IN numeris abſtractis proponeretur hæc quæſtio hunc in modum. Inuenire numerum, qui cum $\frac{3}{8}$. ipſius, & cum $\frac{3}{10}$. huius ſummæ faciat 1287. Hic enim numerus inuenietur 720. &c.

40 In

XL. 40 *In exercitu Imperatoris peditum numerus octuplo maior eſt numero equitum. In hos diſtribuuntur aur. 392000. ita vt quini ſingulis peditibus, & 16. cuilibet equiti dentur. Quæritur, quot ſint pedites, & quot equites.*

PONATVR 1℞ equitum, ideoque 8℞ peditum, inſtituaturque regula Trium bis, hoc modo.

Eques	aur.	Equitum	aur.
1	16	1℞?	16℞.
Pedes 1	5	8℞?	40℞

Erunt igitur 56℞ aur. æquales 392000 aur. Quare diuiſis 392000 per 56. fiet 1℞. 7000. numerus equitum: ideoque pedites fuerunt 56000. octies plures. Nam ita diſtributi erunt equitibus aur. 112000. & peditibus aur. 280000. qui cum illis faciunt 392000. aur.

XLI. 41 *Tres milites prædam quandam aureorum æqualiter inter ſe diuidere volebant. Sed oborta lite, vt fit, ad manus ventum eſt, & tantum quiſque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite compoſita, numerarunt ſinguli pecunias ſuas, ac tandem deprehenderunt, primum acceptis 5. à ſecundo, habere numerum æqualem numero aureorum, qui ſecundo ſuperſunt: Secundum vero, acceptis 7. à tertio, habere numerum æqualem reſiduo tertij: Tertium denique, acceptis 9. à primo, habere numerum triplum eius, qui primo ſupereſt. Quæritur ſumma aureorum in illa præda repertorum, & quantum quiſque rapuerit.*

PONE primum rapuiſſe 1℞. Acceptis ergo 5. à ſecundo, habuit 1℞ + 5. qui numerus æqualis dicitur eſſe reſiduo ſecundi. Antequam ſecundus igitur dedit 5. primo, habuit 1℞ + 10. Acceptis autem 7. à tertio, habuit 1℞ + 17. ac tantundem fuit reſiduum tertij. Igitur antequam tertius dedit 7. ſecundo, habuit 1℞ + 24. Acceptis vero 9. à primo, habuit 1℞ + 33. qui numerus triplus eſſe dicitur eius, qui primo remanet, hoc eſt, 1℞ − 9. Ergo huius triplum 3℞ − 27. æquale eſt 1℞ + 33. Additiſque 27. vtrobique, erit æquatio inter 1℞ + 60. & 3℞. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 60. & 2℞. Diuiſis ergo 60 per 2. fiet 1℞. 30. numerus primi. Numerus autem ſecundi, qui inuentus eſt 1℞ + 10. fuit 40. Tertius autem, qui inuentus eſt, rapuiſſe 1℞ + 24. habuit 54. & ſumma aureorum fuit 124. quod probare poteris. Nam primus, acceptis 5. à ſecundo, habebit 35. quot nimirum ſecundo ſuperſunt. Et ſecundus, acceptis 7. à tertio, habebit 47. quot videlicet tertio ſuperſunt. Tertius denique, acceptis 9. à primo, habebit 63. qui numerus triplus eſt reſidui primi, nimirum 21. Iam ſi 124. aur. in tres æquales partes diſtribuantur, obuenient cuique militi 41 $\frac{1}{3}$. aur.

XLII. 42 *Quatuor ſocij marſupium inuenerunt aureis plenũ, è quibus quilibet partem forte fortuna accepit. Sed cum ſinguli ſuos aureos numerarent, cognouerunt, primum, acceptis 25. à ſecundo, habere numerum æqualem reſiduo ſecundi: Secundum vero, acceptis 30. à tertio, habere triplum reſidui tertij: Tertium autem, acceptis 40. à quarto, habere numerum duplum reſidui quarti: Quartum denique, acceptis 50. à primo, habere numerum triplum reſidui primi, ac præterea 5. Quæritur aureorum ſumma, & quot quiſque acceperit.*

PONE primum accepiſſe 1℞. Acceptis ergo 25. à ſecundo, habebit 1℞ + 25. ac totidem ſupererunt ſecundo, ac proinde ſecundus, antequam dedit 25. primo, habuit 1℞ + 50. Acceptis autem 30. à tertio, habebit 1℞ + 80. Remanſerunt ergo tertio $\frac{1}{3}$℞ + 26 $\frac{2}{3}$. vt ille numerus huius ſit triplus: ac proinde tertius antequam dedit 30. ſecundo, habuit $\frac{1}{3}$℞ + 56 $\frac{2}{3}$. Acceptis autem 40. à quarto, habebit $\frac{1}{3}$℞ + 96 $\frac{2}{3}$. qui numerus duplus eſſe debet reſidui quarti: ac proinde quarto tunc ſuperfuerunt $\frac{1}{6}$℞ + 48 $\frac{1}{3}$. Et antequam daret 40. tertio, habuit $\frac{1}{6}$℞ + 88 $\frac{1}{3}$. Hic denique, acceptis 50. à primo, habebit $\frac{1}{6}$℞ + 138 $\frac{1}{3}$. qui numerus, demptis 5. triplus eſſe debet numeri 1℞ − 50. qui primo ſupereſt. Ergo huius triplum 3℞ − 150. æquale eſt $\frac{1}{6}$℞ + 133 $\frac{1}{3}$. Additis ergo 150. vtrobique, erit æqualitas inter 3℞. & $\frac{1}{6}$℞ + 283 $\frac{1}{3}$. Ablataque $\frac{1}{6}$℞ vtrinque, inter 2 $\frac{5}{6}$℞. & 283 $\frac{1}{3}$. Diuiſis igitur 283 $\frac{1}{3}$ per 2 $\frac{5}{6}$℞. fiet 1℞. 100. numerus primi. Ergo ſecundus 1℞ + 50. erit 150. Tertius autem $\frac{1}{3}$℞ + 56 $\frac{2}{3}$. erit 90. Quartus denique $\frac{1}{6}$℞ + 88 $\frac{1}{3}$. erit 105. Ita namque primus cum 25. ſecundi habebit 125. ac tantum etiam remanet ſecundo. Secundus vero cum 30. tertij habebit 180. numerum ſcilicet triplum numeri 60. qui tertio ſupereſt. Tertius deinde cum 40. quarti habebit 130. qui numerus duplus eſt numeri 65. qui quarto ſupereſt. Quartus denique cum 50. primi habebit 155. qui numerus, demptis 5. triplus eſt numeri 50. qui primo ſupereſt.

100. 1℞
150. 1℞ + 50
90. $\frac{1}{3}$℞ + 56 $\frac{2}{3}$
105. $\frac{1}{6}$℞ + 88 $\frac{1}{3}$

XLIII. 43 *In exercitu Cæſareo ex Germanis, Vngaris, & Italis conflato, ſunt quidem Germani 25000. Vngari vero faciunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atque Italorum. Itali denique faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum. Quæritur numerus Vngarorum, & Italorum, & quantus ſit totus exercitus.*

PONE pro Vngaris 1℞. Ergo Germani ſimul cum Italis erunt 2℞. Et totus exercitus 3℞. Quia vero Itali faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorum vna cum Vngaris: ſunt autem Vngari cum Germanis 1℞ + 25000. facient

Itali

Itali $\frac{1}{8}$℞ + 3125. Quoniam igitur Germani ſunt 25000. & Vngari 1℞. atque Itali $\frac{1}{8}$℞ + 3125. erit totus exercitus 1 $\frac{1}{8}$℞ + 28125. æqualis 3℞. Ablatis ergo 1 $\frac{1}{8}$℞. vtrobique, erit æquatio inter 28125 & 1 $\frac{7}{8}$℞. Diuiſisque 28125. per 1 $\frac{7}{8}$. fiet 1℞ 15000. numerus Vngarorum. Itali vero erunt 5000. nimirum $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum, qui ſimul faciunt 40000. totusque exercitus erit 45000.

44 *Sunt duo Duces, quorum vnus milites habet pauciores 40. quam alter. Et vterque ſuis militibus 1200. aur. diſtribuit, quo facto euenit, vt prioris Ducis milites ſinguli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis poſterioris. Quæſtio eſt, quot milites vterque Dux habeat, & quot aureos ſinguli milites accipiant.* XLIV.

PONATVR 1℞ militum pauciorum, & 1℞ + 40. plurium. Si per hos milites diuidantur 1200. aur. fient Quotientes $\frac{1200}{1℞}$. & $\frac{1200}{1℞+40}$. numeri videlicet aureorum, qui ſingulis obuenerunt. Et quoniam quilibet priorum habet 5. amplius, quam poſteriorum quilibet; ſi poſteriori Quotienti addantur 5. fiet ſumma $\frac{5℞+1400}{1℞+40}$. (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{1200}{1℞}$. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1200℞ + 48000. & 5ℨ + 1400℞. Ablatisque 1200℞ vtrinque, inter 48000. & 5ℨ + 200℞. Et rurſum ablatis 200℞ vtrobique, inter 48000 —— 200℞. & 5ℨ. Diuiſisque omnibus per 5. inter 9600 —— 40℞. & 1ℨ. Semiſſis numeri radicum eſt 20. ad cuius quadratum 400. additis 9600. fit numerus 10000. à cuius radice quadrata 100. ſi auferatur prædicta ſemiſſis 20. remanet pretium 1℞. 80. numerus ſcilicet militum pauciorum. Ergo plures erunt 120. nimirum 40. amplius, quam 80. quod probatur. quia diuiſis 1200 per 80. fit Quotiens 15. atque tot aureos ſinguli militum 80. accipiunt. Diuiſis autem 1200 per 120. fit Quotiens 10. numerus videlicet aureorum, quos ſinguli militum 120. accipiunt. Vbi vides, quemlibet priorum habere 5. amplius, quam quemlibet poſteriorum.

1200 —— 5℞ + 200

$\frac{1200}{1℞+40}$ —— $\frac{5}{1}$

1℞ + 40

45 *Duæ Societates, quarum altera alteram 4. hominibus ſuperat, parem aureorum ſummam viritim diuidunt. In ſingulos minoris Societatis cedunt 8. aurei amplius, quam in ſingulos maioris. Aureorum autem ſumma numerum ſociorum vtriuſque ſocietatis ſuperat aureis 172. Quæritur ſumma aureorum, ac Sociorum.* XLV.

PONATVR pro minore Societate, 1℞ hominum, ac propterea pro maiore, 1℞ + 4. Eritque ſumma aureorum 2℞ + 176. quæ ſumma diuiſa per 1℞ & per 1℞ + 4. facit Quotientes $\frac{2℞+176}{1℞}$. & $\frac{2℞+176}{1℞+4}$. numeros ſcilicet aureorum, qui cuilibet obueniunt. Et quia prior Quotiens ſuperat poſteriorem 8. aureis: ſi ad poſteriorem addantur 8 aur. fiet ſumma $\frac{10℞+208}{1℞+4}$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{2℞+176}{1℞}$. quę æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10ℨ + 208 ℞ & 2ℨ + 184 ℞ + 704. Ablatis autē 2ℨ. vtrobique, erit æquatio inter 8ℨ + 208℞. & 184℞ + 704. Et rurſum ablatis 184℞ vtrinque, inter 8ℨ + 24℞. & 704. Et ablatis rurſum 24℞ vtrobique, inter 8ℨ. & 704 —— 24℞. Diuiſisque omnibus per 8. inter 1ℨ & 88 —— 3℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$ additis 88, ſiue $\frac{352}{4}$ fit numerus $\frac{361}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{19}{2}$. ſi dematur prædicta ſemiſſis $\frac{3}{2}$. ſupererit pretium 1℞. $\frac{16}{2}$. hoc eſt, 8. numerus minoris Societatis: maioris autem numerus Sociorum erit 12. nimirum 1℞ + 4. Summa denique aureorum erit 192. nimirum 2℞ + 176. quod probatur. Nam diuiſis aureis 192. per 8. & 12. fiunt Quotientes 24. & 16. quorum ille hunc ſuperat 8. aureis.

2℞ + 176 —— 8℞ + 32

$\frac{2℞+176}{1℞+4}$ —— $\frac{8}{1}$

1℞ + 4

46 *Mercator quidam ad nundinas ter profectus, prima negotiatione lucratus eſt ſummam æqualem ſuæ pecuniæ, ita vt poſt primam negotiationem habuerit duplum ſuæ pecuniæ. Deinde in ſecunda negotiatione lucratus eſt radicem quadratam eius dupli, ac præterea 2. aureos. In tertia denique negotiatione lucratus eſt quadratum totius prioris ſummæ, & inſuper 4. aureos. Atque ita deprehendit ſe habere 510. aureos. Quæritur ſumma pecuniæ, quam initio habuit.* XLVI.

PONE illum poſt ſecundam negotiationem habuiſſe 1℞, cum qua lucratus eſt in tertia negotiatione eius quadratum, ac præterea 4 aur. ita vt lucrum hoc fuerit 1ℨ + 4. Igitur poſt tertiam negotiationem habuit ſummam 1ℨ + 1℞ + 4. æqualem 510. aur. Ablatis 4. vtrinque, erit æquatio inter 1ℨ + 1℞. & 506. Ablataque rurſus 1℞ vtrobique, inter 1ℨ & 506 —— 1℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 506. fit numerus 506 $\frac{1}{4}$. hoc eſt $\frac{2025}{4}$ à cuius radice quadrata $\frac{45}{2}$. ſi tollatur prædicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$. remanet pretium 1℞, $\frac{44}{2}$. hoc eſt, 22. Atque tot aureos poſt ſecundam negotiationem habuit. Et quia hoc fuit lucrum radicis pecuniæ, quam poſt primam negotiationem habuit, præterea 2 aurei: demptis 2 ſupererunt 20. nimirum lucrum radicis pecuniæ, quam habuit poſt negotiationem primam. Ergo illa pecunia ponatur 1ℨ. cuius radix quadrata 1℞. Eritq; lucrum poſt ſecundam negotiationē, 1ℨ + 1℞ æquale 20. Ablata autem 1℞ vtrobique, erit æquatio inter 1ℨ, & 20 —— 1℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 20.

hoc eſt, $\frac{80}{4}$. fit numerus $\frac{81}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{9}{2}$. dempta prædicta ſemiſſe $\frac{1}{2}$. ſupererit pretium 1℞. $\frac{8}{2}$. hoc eſt, 4. Atque tantum fuit lucrum ſecundę negotiationis, + 2. Ablatis igitur 4. & 2. ex 22. (nimirum ex pecunia, quam poſt ſecundam negotiationem habuit) ſuperſunt 16. ac tantum habuit poſt primam negotiationem, quæ pecunia dicitur eſſe dupla illius, quam ad nundinas attulit: ac proinde initio habuit 8. aur. quod probatur. Nam poſt primam negotiationem habuit 16 aur. & poſt ſecundam 22. nimirum radicem numeri 16, & præterea 2, hoc eſt 6. quæ cum 16 faciunt 22. Cum his lucratus eſt quadratum, nimirum 484. ac præterea 4. atque ex 22. 484. & 4. colligitur ſumma 510 aur.

XLVII. 47 *Viſum eſt hoc loco artificium, quo Archimedes argenti quantitatem aureæ coronæ permixtam deprehendit, per regulam Algebræ explicare.*

CAPIANTVR igitur duæ maſſæ, auri vna, & altera argenti, æqualis ponderis cum corona. Deinde vas æneum affabre factum aqua impleatur, & immiſſa corona, 100 librarum, ponamus effluxiſſe 65. lib. aquę. Repleto poſtea vaſe iterum aqua, immiſſam maſſam auri puri 100. librarum eieciſſe 60. libras aquę. Denique iterum repleto vaſe aqua, immiſſam maſſam puri argenti eieciſſe 90 lib. aquę. Ponatur 1℞ lib. argenti contineri in corona, ac proinde lib. auri 100 — 1℞. & inſtituatur regula Trium bis, hoc modo.

	lib.	aquæ	lib.	lib.
Auri	100	60	100 — 1℞?	$\frac{6000-60℞}{100}$
Argenti	100	90	1℞?	$\frac{90℞}{100}$

Reperies enim libras auri 100 — 1℞ eiicere libras aquę $\frac{6000-60℞}{100}$. ſi 100 lib. auri eiiciunt 60 lib. At 1℞ lib. argenti eiicere libras aquæ $\frac{90℞}{100}$. ſi 100 lib. argenti eiiciunt 90 lib. aquę. Hæ libræ aquę eiectæ faciunt $\frac{6000+30℞}{100}$ lib. aquę (Quoniam enim fractiones $\frac{6000-60℞}{100}$ & $\frac{90℞}{100}$ eundem habent denominatorem, ſatis eſt addere numeratores, & ſummę conflatę 600 + 30℞. ſupponere eundem denominatorem 100) æquales 65 lib. quas corona eiicit. Hęc æquatio inter $\frac{6000+30℞}{100}$. & 65. per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 6000 + 30℞. & 6500. Ablatiſque 6000. vtrinque, erit æquatio inter 30℞. & 500. Diuiſis ergo 500 per 30. fiet 1℞. 16 $\frac{2}{3}$. atque tot librę argenti in corona permixtę fuerunt: aç propterea ſolum 83 $\frac{1}{3}$ libræ auri in eadem reperiuntur. quod probatur, vt hic vides.

	lib.	aquæ	lib	aquæ
Argenti	100	90	16 $\frac{2}{3}$?	15
Auri	100	60	83 $\frac{1}{3}$?	50

Reperies enim libras argenti 16 $\frac{2}{3}$. eiicere lib. aquę 15. & libras auri 83 $\frac{1}{3}$. eiicere lib. aquę 50. quę cum 15. faciunt 65. quot videlicet librę aquę effluunt, ſi corona in aquam imponatur.

SCHOLIVM.

EODEM modo ſoluetur hæc quæſtio. Sunt tres maſſæ eiuſdem ponderis, nimirum 10. librarum: Vna auri puri, altera argenti puri, & tertia ex auro, argentoque mixta. Prima autem eiicit $\frac{1}{30}$. lib. aquæ: Secunda $\frac{3}{4}$. lib. aquæ: ac tertia $\frac{1}{8}$. lib. aquæ. Nam ſic inſtituetur regula trium bis, ſi in tertia maſſa ponatur 1℞. lib. argenti, ac proinde auri lib. 10 — 1℞.

Auri	lib. 10.	aquæ lib. $\frac{1}{30}$	10 — 1℞	lib. auri?	aq. lib. $\frac{10-1℞}{300}$
Argenti	lib. 10.	aquæ lib. $\frac{3}{4}$	1℞	lib. argenti.	aq. lib. $\frac{3℞}{40}$

Nam duo numeri in quarto loco facient ſummam $\frac{400+860℞}{12000}$. lib. aquæ æqualem $\frac{1}{8}$. lib. aquæ, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 12000. & 3200 + 6880℞. Et ablatis 3200. vtrobique, erit æquatio inter 8800. & 6880℞. Diuiſis igitur 8800 per 6880. fiet 1℞. 1 $\frac{12}{43}$. atque tot lib. argenti ſunt in tertia maſſa, ac proinde in eadem erunt lib. 8 $\frac{31}{43}$. auri, quod probatur, vt hic vides.

Argenti	lib. 10	aq. lib. $\frac{3}{4}$	arg. lib. 1 $\frac{12}{43}$?	aq. lib. $\frac{165}{1720}$
Auri	lib. 10	aq. lib. $\frac{1}{30}$	aur. lib. 8 $\frac{31}{43}$?	aq. lib. $\frac{375}{12900}$

Inuenies argenti lib. 1 $\frac{12}{43}$. eiicere aquæ lib. $\frac{165}{1720}$. & auri lib. 8. $\frac{31}{43}$. eiicere aquæ lib. $\frac{375}{12900}$. quæ cum illis faciunt $\frac{1}{8}$. libr. aquæ.

QVOD ſi quis deſideret magis accuratam rationem deprehendendi quantitatem auri, & argenti in corona illa, vel in tertia maſſa proxime dicta, is legat eruditiſſimum libellum Marini Chetaldi Patritij Raguſini, qui inſcribitur Promotus Archimedes. Vbi in propoſ. 17. varias cauſas errorum, qui in prædicto Archimedis artificio committi poſſunt, enumerat. Deinde in propoſ. 18. magis accuratum artificium demonſtrat.

XLVIII. 48 *Tres mercatores lucrati ſunt 700. aur. quos inter ſe ita diſtribuerunt, habita ratione pecuniæ, quam quiſque ad negotiationem attulit, vt portio ſecundi ſuperarit portionem primi aureis 12. portio vero tertij portionem ſecundi aureis 16. Quæritur, cuiuſque portio quanta fuit.*

PONATVR portio primi 1℞. eritque propterea portio ſecundi 1℞ + 12. & tertij 1℞ + 28. Hæ tres portiones ſimul faciunt 3℞ + 40. æquales 700. Ablatis 40 vtrobiq;, erit æquatio inter 3℞. & 660. Diuiſis

igitur

igitur 660 per 3. fiet 1℞. 220. portio primi. Portio autem ſecundi erit 232. & tertij 248. quę omnes ſimul faciunt 700.

49 *Tres luſores, quorum quiſque certam ſummam aureorum attulit, eam ſortem habuerunt, vt ſtatim primus lucratus ſit* $\frac{1}{2}$. *ſecundi: Deinde ſecundus* $\frac{1}{3}$. *tertij: tertius denique* $\frac{1}{4}$. *primi. Atque ita contigit, vt ſinguli haberent 700. aur. Quæritur, quot quiſque aureos ad ludum attulerit.* XLIX.

PONATVR pecunia primi 1℞. qui ſi det $\frac{1}{4}$℞ tertio, ſupererunt ei $\frac{3}{4}$℞, quæ cum $\frac{1}{2}$. ſecundi debent facere 700. Ergo $\frac{1}{2}$. ſecundi eſt 700 — $\frac{3}{4}$℞ atque idcirco huius duplum attulit, nimirum 1400 — 1$\frac{1}{2}$℞. Nam ita, poſtquam perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt illi 700 — $\frac{3}{4}$℞. qui numerus cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. Ergo $\frac{1}{3}$. tertij eſt $\frac{3}{4}$℞; ideoque ad ludum attulit 2$\frac{1}{4}$℞, ſiue $\frac{9}{4}$℞. qui ſi amiſerit $\frac{1}{3}$. ſupererunt ei $\frac{6}{4}$℞. quæ cum $\frac{1}{4}$. primi, nimirum cum $\frac{1}{4}$℞ habebit $\frac{7}{4}$℞ æquales 700. Diuiſis igitur 700 per $\frac{7}{4}$ fiet 1℞. 400. pecunia videlicet primi. Ac proinde ſecundus, qui inuentus eſt attuliſſe 1400 — 1$\frac{1}{2}$℞. attulit ad ludum aur. 800. Et tertius aur. 900. nimirum 2$\frac{1}{4}$℞ quod probatur. Nam ſi primus amittat $\frac{1}{4}$. ſupererunt 300. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. aureorum 800. quos ſecundus attulit, faciunt 700. aur. Item $\frac{1}{2}$. ſecundi, nimirum 400. aurei cum $\frac{1}{3}$. tertij, id eſt, cum 300. facit ſimiliter 700 aur. Ac denique $\frac{2}{3}$. tertij, poſtquam amiſerit $\frac{1}{3}$. nimirum 600 aur. cum $\frac{1}{4}$. primi, id eſt, cum 100. facit quoque 700. aureos.

50 *Quidam habet duo vaſa aurea, & vnum operculum, cuius pretium eſt 150. aur. quod additum ad pretium primi vaſis facit pretium triplum pretij ſecundi vaſis. Additum vero idem operculum vaſi ſecundo facit precium æquale pretio primi vaſis. Quæſtio eſt de pretio vtriuſque vaſis.* L.

PONATVR pretium primi 1℞ Ergo 1℞ + 150. tripla ſunt pretij ſecundi vaſis, ideoque eius æſtimatio eſt $\frac{1}{3}$℞ + 50 aur. Cui ſi accedat operculum 150 aur. erit eius tunc pretium $\frac{1}{3}$℞ + 200 aur. æquale 1℞. nimirum pretio primi vaſis. Ablata $\frac{1}{3}$℞. vtrinque, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$℞. & 200. Diuiſis igitur 200 per $\frac{2}{3}$. fiet 1℞. 300 aur. pretium ſcilicet primi vaſis. Secundi autem vaſis pretium, quod inuentum eſt $\frac{1}{3}$℞ + 50 erit 150 aur. quod probatur. Nam 300 aur. hoc eſt, pretium primi vaſis, cum pretio operculi, id eſt, cum 150. faciunt ſummam 450. triplam pretij ſecundi vaſis, nimirum 150 aur. At 150. aur. pretium videlicet ſecundi vaſis, cum operculo, ſiue cum 150 aur. faciunt ſummam 300 aur. æqualem pretio primi vaſis.

51 *Quidam emit, neſcio quot, perdices, ita vt ſi emiſſet ſeorſum illarum* $\frac{1}{3}$. *&* $\frac{1}{4}$. *&* $\frac{1}{5}$. *& inſuper 6. haberet 100. perdices. Quæritur numerus perdicum.* LI.

PONATVR 1℞. cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. faciunt $\frac{47}{60}$℞, quę cum 6. faciunt $\frac{47}{60}$℞ + 6. æqualia 100. Ablatis 6 vtrobique, erit æquatio inter $\frac{47}{60}$. & 94. Diuiſis igitur 94 per $\frac{47}{60}$. fiet 1℞. 120. numerus videlicet perdicum emptarum. Nam eius $\frac{1}{3}$. eſt 40. & $\frac{1}{4}$. eſt 30. & $\frac{1}{5}$. eſt 24. quę omnes partes cum 6. faciunt ſummam 100 perdicum.

52 *Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Caliſthene philoſopho ageret de ætate ſua, & amicorum ſuorum Epheſtionis, & Clyti, ita diſſeruit. Ego, inquit, Epheſtionem meum duobus annis antecedo. At Clytus amborum annos ſua ætate comprehendit, & præterea annos quatuor. Cui Caliſthenes. Cum pater meus vixerit annos 96. iucunda mihi fuit iſta relatio, ô Rex. Nam annos trium veſtrum ætas eius præciſe habuit. Quæritur, qua ætate Alexander colloquium iſtud habuerit, & quot annos tam Epheſtio, quam Clytus tunc habuerit.* LII.

PONATVR pro annis Epheſtionis 1℞. Igitur anni Alexandri fuerunt 1℞ + 2. & Clyti 2℞ + 6. qui omnes faciunt annos 4℞ + 8 æquales 96. Ablatis 8 vtrobique, erit æquatio inter 4℞ & 88. Diuiſis igitur 88 per 4 fiet 1℞. 22. anni nimirum Epheſtionis. Alexander igitur habuit 24. annos. Clytus vero 50. qui anni in vnam collecti ſummam faciunt 96 annos.

53 *Nicanor ea pugna, qua interijt, occurrit Iudæ Machabæo, agmine quadrato collecto ex Syrorum auxiliarijs militibus, atque ijs, quos ſecum adduxerat. Cæſa ſunt autem ex eo agmine 35000. Reliqui fuga elapſi ſunt, quorum numerus fuit 156. vltra numerum auxiliariorum militum Syrorum. Quæſtio eſt, quot militibus occurrerit Nicanor Machabæo, & quot habuerit milites auxiliarios, quot item ſecum adduxerit.* LIII.

PONATVR pro agmine illo quadrato 1ʓ. in quo computati ſunt milites cæſi 35000. Item numerus fuga ſeruatorum 156. & numerus militum auxiliariorum incognitus. Ponatur hic numerus 1℞. cui ſi addantur milites cæſi 35000. & 156. fuga ſeruati, conflabitur ſumma 1℞ + 35156. æqualis 1ʓ. nimirum toti agmini quadrato. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 35156. hoc eſt, $\frac{140624}{4}$ conficietur numerus $\frac{140625}{4}$ ad cuius radicem quadratam $\frac{375}{2}$. ſi addatur prędicta ſemiſſis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet 1℞. $\frac{376}{2}$. hoc eſt, 188. numerus videlicet auxiliariorum militum. ipſe vero ſecum adduxit 35156. atque idcirço totum agmen quadratum comprehendit 35344. qui numerus quadratus eſt habens radicem 188.

LIV. 54 *Quidam habet 4. maſſas ex argento, & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum quælibet conflatur ex 9. ſemiuncijs puri argenti, & 7. ſemiunc. cupri puri: quia 1. marcam ſtatuimus comprehendere 16. ſemiuncias. Pondus ſecundæ maſſæ eſt 15. marcarum, quarum ſingulæ continent 7 ſemiunc. argenti, & 9. ſemiunc. cupri. Pondus tertiæ maſſæ habet 24. marcas, quarum ſingulæ conſtant 10. ſemiunc. argenti, & 6. ſemiunc. cupri. Pondus denique quartæ maſſæ eſt 136. marcarum, quarum ſingulæ continent 14. ſemiunc. argenti, & 2. ſemiunc. cupri. Vult autem ex hiſce maſſis conflare vnam, additis aliquot marcis argenti, ita vt quælibet marca contineat 15. ſemiunc. puri argenti, & 1. ſemiunc. puri cupri. Quæſtio iam eſt, quantum argenti puri admiſcendum ſit illis maſſis, & quot marcas maſſa noua ſit habitura.*

PONATVR 1℞. marcarum puri argenti addendarum. Quoniam vero omnes marcæ mixtæ in illis 4. maſſis contentæ ſunt 186. & omnes ſemiunciæ puri argenti 2348. & cupri 628. vt hic vides.

Marcæ mixtæ	Semiunciæ puri arg.	Semiunc. puri cupri.
11	99	77
15	105	135
24	240	144
136	1904	272
186	2348	628

Cum enim prima maſſa marcarum 11. quælibet marca contineat 9 ſemiunc. argenti puri, & cupri 7 ſemiunc. erunt in tota illa maſſa 99 ſemiunc. argenti puri, & 77 ſemiunc. puri cupri, &c. inſtituenda erit regula trium hoc modo.

Marcæ mixtæ	Mar. pu. arg.	Semiunc. cupri.	Mar. mix.	Semiun. cupri.
186 +	1℞	628	1?	$\frac{628}{186+1℞}$

Hoc eſt, Marcæ mixtæ 186 + 1℞. marcarum puri arg. continent 628. ſemiunc. cupri, (quia in maſſa conflanda comprehenduntur 628 ſemiunc. cupri; quot videlicet in 4. maſſis compoſitis continentur, cum nulla noua ſemiunc. cupri accedat) quot ergo ſemiunc. cupri continebit 1 marca noua mixta? Inuenies enim $\frac{628}{186+1℞}$. ſemiunc. cupri, quæ fractio æquiualet 1 ſemiunc. cupri: propterea quod in vna marca noua mixta contineatur tantum 1 ſemiunc. cupri ex hypotheſi. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 628. & 186 + 1℞ Ablatiſque 186. vtrobique, erit æquatio inter 442. & 1℞. Erit ergo 1℞. 442. atque tot marcæ argenti puri admiſcendæ ſunt, vt ſingulæ marcæ comprehendant 15 ſemiunc. puri arg. & 1 ſemiunc. cupri. quod ſic probatur. Quoniam in 4 illis maſſis propoſitis continentur 186 marcæ mixtæ, ſi addantur inuentæ 442 marcæ argenti puri, fient marcæ mixtæ 628. atque idcirco quælibet habebit 1 ſemiunc. cupri, quod in omnibus ſimul ſint 628 ſemiunc. cupri.

ET quia vna marca poſita eſt 16 ſemiunciarum, comprehendent 442 marcæ puri arg. ſemiuncias 7072. quibus ſi addantur ſemiunciæ 2348 puri argenti, quæ in 4 maſſis propoſitis reperiuntur, fient 9420 ſemiunc. puri argenti. quæ diſtributæ in 628 marcas nouæ maſſæ conflatæ, dabunt cuilibet marcæ 15 ſemiuncias argenti puri.

HÆC eadem quæſtio facile etiam expedietur ſine Algebræ auxilio. Quoniam enim in 4 maſſis propoſitis habentur 628 ſemiunciæ cupri, neceſſe eſt, vt maſſa noua conflanda ſit totidem marcarum, vt nimirum cuilibet 1 ſemiuncia cupri poſſit aſſignari. Si igitur 186 marcæ mixtæ, quas 4. illæ maſſæ continent, detrahantur ex 628. ſupererunt 442 marcæ puri argenti addendæ ad 186 marcas, vt fiat numerus marcarum 628. in noua maſſa conflata comprehenſarum.

QVOD ſi maſſa ex 4. propoſitis conflanda ſit cum argento addito, vt ſingulæ marcæ contineant 13 ſemiuncias puri arg. & 3 ſemiunc. cupri. Diuiſis 628 ſemiunciis cupri per 3. exibit numerus marcarum in noua maſſa, $209\frac{1}{3}$. Ita enim quælibet marca 3 ſemiunc. cupri continebit. Si igitur ex $209\frac{1}{3}$. demantur marcę 186. in 4. primis maſſis contentę, reliquus fiet numerus $23\frac{1}{3}$. marcarum puri arg. addendarum: conflabiturque numerus $209\frac{1}{3}$. marcarum in maſſa noua comprehenſarum: quarum quęlibet 13 ſemiunc. arg. puri comprehendet. Nam in marcis $209\frac{1}{3}$. continentur ſemiuncię $\frac{10048}{3}$. ex quibus ſi demantur 628. ſiue $\frac{1884}{3}$. ſemiunc. cupri puri in maſſa noua contentę, remanebunt $\frac{8164}{3}$ ſemiunc. argenti puri: quibus in $209\frac{1}{3}$. marças diſtributis, prouenient cuilibet marcæ 13 ſemiunc. puri argenti.

SI vero maſſa ex eiſdem 4 maſſis conflanda ſit, cum cupro addito, vt ſingulę marcæ contineant 12 ſemiunc. argenti puri, & 4 ſemiunc. cupri puri: erit cuprum adiiciendum, non autem argentum. quia diſtributis 2348 ſemiunc. argenti, quę in 4. illis maſſis exiſtunt, in 186 marcas, reperientur in qualibet marca plures ſemiuncię argenti, quam 12. nimirum $12\frac{116}{186}$. Diuiſis igitur 2348 ſemiunc. argenti puri per 12. exibit in Quotiente numerus marcarum in noua maſſa, $195\frac{2}{3}$. Sic enim quęlibet marca continebit 12 ſemiunc. argenti puri. Demptis autem marcis 186. quas illę 4. maſſæ complectuntur, remanebunt $9\frac{2}{3}$ marcę cupri addendę, vt conſletur noua maſſa marcarum $195\frac{2}{3}$. quarum quęlibet 4 ſemiunc. cupri continebit. Nam in marcis $195\frac{2}{3}$. continentur $\frac{9392}{3}$ ſemiunciæ. E quibus ſi demantur 2348 ſemiunc. argenti, hoc eſt, $\frac{7044}{3}$. relinquentur $\frac{2348}{3}$ ſemiunc. cupri, quibus diſtributis in $195\frac{2}{3}$ marcas, prouenient cuilibet marcę 4. ſemiunc. cupri.

IAM vero ſi quæratur, quantum cupri addendum ſit quatuor illis maſſis, vt in qualibet marca nouæ maſſæ conflatæ reperiantur 15 ſemiunc. puri cupri, & 1 argenti: inſtituenda erit regula Trium hoc modo, poſita 1℞ marcarum puri cupri.

Marçæ

Marcæ mix.	Marcæ pu. cup.	Semiun. arg.	Mar. mix.	Sem. arg. pu.
186 + 1℞		2348	1?	$\frac{2348}{186 + 1℞}$

Eritque quartus numerus æqualis 1 ſemunciæ argenti puri: quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 & 186 + 1℞. Ablatisque 186. vtrobique, erit æquatio inter 2162 & 1℞. Erit ergo 1℞ 2162. numerus videlicet marcarum cupri admiſcendarum, vt ſingulæ marcæ contineant 15 ſemiunc. cupri, & 1 argenti. Quoniam enim in 4. illis maſſis exiſtunt 186. marcæ, additis proxime inuentis 2162. fiet numerus marcarum 2348. ac proinde quælibet habebit 1 ſemiunc. argenti: quippe cum in omnibus ſimul ſint 2348 ſemiunc. argenti. Et quia 2162. marcæ puri cupri comprehendunt ſemiunc. 34592. ſi addantur 628. ſemiunc. cupri in quatuor prioribus maſſis contentæ, fient 35220 ſemiunc. quibus diſtributis in 2348 marcas nouæ maſſæ conflatæ, congruent cuilibet marcæ 15 ſemiunciæ cupri.

SI autem quæſtio ſit, quantum argenti contineat 1. marca, ſi 4. illæ maſſæ conflentur, & nihil eis addatur: ſic ſtabit regula Trium.

Marcæ	Semiunc. arg.	Marca	Semiunc. arg.
186	2348	1?	$12\frac{58}{93}$

Continebit ergo 1 marca ſemiunc. arg. $12\frac{58}{93}$. & proinde ſemiunc. cupri $3\frac{35}{93}$.

SIC ſi quæratur, quantum cupri contineat 1 marca, ſic ſtabit regula.

Marcæ	Semiunc. cupri	Marca	Semiunc. cupri
186	628	1?	$3\frac{35}{93}$

Continebit enim 1 marca ſemiunc. cupri puri $3\frac{35}{93}$. ideoque $12\frac{58}{93}$. ſemiuncias puri argenti.

ET ſi quæſtio ſit, cuius ponderis maſſa continens in qualibet marca 3 ſemiunc. argenti, & 13 cupri, commiſcenda ſit illis 4 maſſis, vt ſingulæ marcæ nouæ maſſæ conflatæ contineant 5 ſemiunc. argenti, & 11. cupri, ponatur pro numero marcarum addendarum 1℞. & pro numero ſemiunc. argenti in illa maſſa contentarum, 3℞ quia numerus ſemiunciarum in illa maſſa triplus eſt numeri marcarum, quandoquidem quælibet marca comprehendere dicitur 3 ſemiunc. argenti. Sic igitur ſtabit regula Trium.

Mar. mix.	Mar. mix. nouæ	Semiunc. arg.	Sem. arg. nouæ	Marca noua	Sem. arg.
186 + 1℞		2348 + 3℞		1?	$\frac{2348 + 3℞}{186 + 1℞}$

Quartus enim numerus æquabitur 5 ſemiuncijs argenti, quot nimirum 1 marca maſſæ nouæ includere debet: quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 + 3℞ & 930 + 5℞. Ablatisque 930 vtrobique, erit æquatio inter 1418 + 3℞ & 5℞. Ablatisque rurſum 3℞ vtrinque, inter 1418. & 2℞. Diuiſis igitur 1418 per 2. fiet 1℞. 709. numerus marcarum, quas maſſa quinta commiſcenda continebit. Additis igitur 186 marcis quatuor priorum maſſarũ, fiet noua maſſa marcarum 895. quarũ quælibet continet 5. ſemiunc. argenti, & 11. cupri. quod ſic probatur. Duc 895. marcas in 16 ſemiunc. facieſque 14320. ſemiuncias partim argenti, & partim cupri in maſſa noua marcarum 895. contentas. Deinde duc eaſdem marcas 895. in 5. ſemiunc. argenti, quas quælibet marca continere debet, facieſque ſemiunc. argenti 4475. in noua illa maſſa contentas. Denique duc eaſdem marcas 895. in 11. ſemiunc. cupri, quas quælibet marca continere debet, efficieſque 9845. ſemiunc. cupri, quæ cum 4475 ſemiunc. argenti faciunt 14320. quot nimirum ſemiunciæ in vniuerſum continentur in 895. marcis.

55 *Duo Societatem ineunt: quorum ſecundus duplo plus pecuniæ ſecum affert, quam primus, ac præterea 5. aur. Lucrati ſunt autem 960. aur. ex quibus primo obuenerunt aur. 300. & ſecundo 660. Quantum ergo ſinguli impoſuerunt.* LV.

PONE pro primo 1℞. ideoque pro ſecundo 2℞ + 5. Summa amborum eſt 3℞ + 5. qua lucrati ſunt 960. aur. Inſtitue ergo regulam Trium ſic.

3℞ + 5	960	1℞?	$\frac{960℞}{3℞ + 5}$

Inuenies enim primum, qui poſuit 1℞. lucrari $\frac{960℞}{3℞ + 5}$. qui numerus æqualis eſt 300. aur. qui primo obuenerunt. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 960℞. & 900℞ + 1500. Ablatis igitur 900℞ vtrobique, remanebit æquatio inter 60℞. & 1500. Diuiſis igitur 1500 per 60. fiet 1℞. 25. pro aureis, quos primus poſuit. Ergo ſecundus poſuit 55. aur. quod probatur. Amborum enim ſumma eſt 80 aur. Ergo regula Trium ſic ſtabit bis.

80 960 25? 300 80 960 55? 660

56 *Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. ſimul, & pecunia ſecundi diuiſa per pecuniam primi facit Quotientem $1\frac{1}{2}$. Quæſtio eſt, quantam quiſque pecuniam habeat.* LVI.

HÆC quæſtio cum ſequentibus ad ſecundas radices pertinet. Ponatur pro primo 1℞, & pro ſecundo 1A. Reſoluenda ergo eſt ſecunda radix in primam hoc modo. Quoniam ambo habent 200. aur. erit æquatio

 inter

inter 1℞ + 1A, & 200. Ablataque 1℞ vtrinque, inter 1A, & 200 — 1℞. Erit igitur 1A, reſoluta in 200 — 1℞. Quare pono denuo numerum primi 1℞, & ſecundi 200 — 1℞. qui ſimul faciunt 200. aur. Diuiſo iam numero ſecundi per numerum primi, fit Quotiens $\frac{200 - 1℞}{1℞}$. æqualis $1\frac{1}{2}$. hoc eſt, $\frac{3}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 400 — 2℞, & 3℞. Additisque 2℞ vtrobique, erit æquatio inter 400 & 5℞. Diuiſis ergo 400 per 5 fiet Quotiens 80. numerus prioris. Ergo ſecundus habebit 120. nimirum 200 — 1℞. quo numero diuiſo per 80 fit Quotiens $1\frac{1}{2}$.

Aliter. Ponatur numerus ſecundi 1℞, & primi 1A. Ergo iterum erit æquatio inter 1℞ + 1A, & 200. aur. Ablataque 1℞ vtrobique, inter 1A, & 200 — 1℞. atque ita 1A, reſoluta eſt in 200 — 1℞. Pono ergo denuo pro ſecundo 1℞ & pro primo 200 — 1℞. Diuiſo illo per hunc fit Quotiens $\frac{1℞}{200 - 1℞}$. æqualis $\frac{3}{2}$. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2℞. & 600 — 3℞. Additisq; 3℞ vtrinque, erit æquatio inter 5℞ & 600. Diuiſis ergo 600 per 5. fiet 1℞. 120. pro numero ſecundi. Primus ergo habet 80. nimirum 200 — 1℞. vt prius.

LVII. 57 *Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo. Sex, excluſo ſeptimo, debent ſimul 994. aur.*
Deinde ſex, ſecluſo primo, debent 882. aur.
Sex, ſecluſo ſecundo, debent aur. 952.
Sex, dempto tertio, debent aur. 896.
Sex, excluſo quarto, debent aur. 910.
Sex, ſecluſo quinto, debent aur. 840.
Sex denique, excepto ſexto, debent aur. 1036.
Quæritur iam, quanta ſit ſumma totius debiti, & quantum quiſque debeat.

PRIMVM quia excluditur debitum ſeptimi à tota ſumma: ſi pro debito ſeptimi ponatur 1℞. erit ſumma totius debiti 994 + 1℞. aur.

Deinde quia excluditur debitum primi: ſi pro eo ponatur 1A, erit ſumma totius debiti aur. 882 + 1A.

Tertio quia excluditur debitum ſecundi, pone pro eo 1B, aur. eritque ſumma totius debiti aur. 952 + 1B.

Quarto quia eximitur debitum tertij, ſi pro eo ponatur 1C, aur. erit ſumma totius debiti aur. 896 + 1C.

Quinto quia ſubticetur debitum quarti, ſi pro eo ponatur 1D, aur. erit totius debiti ſumma aur. 910 + 1D.

Sexto quia ſupprimitur debitum quinti, ſi pro eo ponatur 1E, aur. habebitur ſumma totius debiti 840 + 1E, aur.

Septimo denique, quia non exprimitur debitum ſexti, ſi pro eo ponatur 1F, aur. erit ſumma totius debiti 1036 + 1F, aur.

994 + 1℞
882 + 1A
952 + 1B
896 + 1C
910 + 1D
840 + 1E
1036 + 1F

Quia igitur ſumma omnium, hoc eſt, totum debitum ſepties ponitur, vt hic vides, habebimus ſex æquationes, ſi ſuperiorem cum ſingulis inferioribus conferemus; propterea quod quodlibet totum ſibi ipſi eſt æquale. Videlicet.

Primum 994 + 1℞. æqualia ſunt 882 + 1A. Igitur ablatis 882. vtrobique, erit æquatio inter 112 + 1℞, & 1A. Cum ergo pro debito primi poſita ſit 1A; erit debitum primi aur. 112 + 1℞.

Deinde eodem modo æquatio erit inter 994 + 1℞, & 952 + 1B. Ablatisque 952 vtrinque, inter 42 + 1℞, & 1B, ac proinde debitum ſecundi 42 + 1℞.

Tertio ſimiliter æquatio erit inter 994 + 1℞, & 896 + 1C. Ablatisque 896 vtrinque, inter 98 + 1℞, & 1C: ideoque debitum tertij erit 98 + 1℞.

Quarto pari ratione erit æquatio inter 994 + 1℞, & 910 + 1D. Ablatisque 910 vtrobique, inter 84 + 1℞, & 1D. Debitumque quarti erit aur. 84 + 1℞.

Quinto non ſecus erit æquatio inter 994 + 1℞, & 840 + 1E. Ablatisque 840 vtrobique, inter 154 + 1℞, & 1E: proptereaque debitum quinti erit aur. 154 + 1℞.

SEXTO non aliter æquatio erit inter 994 + 1℞, & 1036 + 1F. Ablatisque 994 vtrobique, inter 1℞, & 42 + 1F. Rurſumque ablatis 42 vtrinque, inter 1℞ — 42. & 1F. ideoque debitum erit ſexti aur. 1℞ — 42.

Debitum primi	112 + 1℞
Secundi	42 + 1℞
Tertij	98 + 1℞
Quarti	84 + 1℞
Quinti	154 + 1℞
Sexti	1℞ — 42
Septimi	1℞

Et quia pro debito ſeptimi poſita fuit 1℞. erunt omnium debita hæc, quæ faciunt ſummam 7℞ + 448. aur. æqualem 994 + 1℞. cum hic etiam numerus toti debito æqualis ſit, vt paulo ante diximus. Ablata ergo 1℞. vtrinque, erit æquatio inter 6℞ + 448. & 994. Ablatisque rurſum 448 vtrobique, inter 6℞, & 546. Diuiſis igitur 546 per 6. fiet 1℞. 91. debitum ſeptimi, quod fuit 1℞. Hinc facile debita aliorum elicies. Quoniam enim debitum primi fuit 112 + 1℞. erit ipſum debitum 203.

ſumma

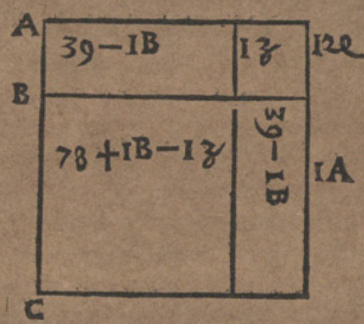
ſummi nimirum ex 91.& 112.conflata. Sic etiam debitum ſexti erit 49. nimirum 1℞ — 42. & ſic de cæteris, vt hic cernis.

Debitum	Primi	203	aur.	Summa omnium, ſeu totum debitum.	1085.aur.
	Secundi	133			
	Tertij	189			
	Quarti	175			
	Quinti	245			
	Sexti	49			
	Septimi	91			

Probatio. Dempto debito ſeptimi ex toto debito.debebunt 6.alij aur.994. Item dempto debito primi ex eodem debito toto,debebunt 6.alij,aur.882.& ſic de cæteris.

58 *Duo ſocij habent duos numeros aureorum, quorum ſumma à ſumma quadratorum ex ipſis procreatorum ſubtracta,relinquit 78. Addita vero ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quæritur,qui ſint iſti numeri.* LVIII.

HANC quæſtionem per ſequentem figuram explicabimus, vbi quadratum rectæ A C, diuiſum eſt in duo quadrata, & duo complementa, quorum quodlibet inter duo quadrata medium proportionale eſt, vt in Lemmate propoſ.54.lib.10.Eucl.demonſtrauimus,& ſupra quoque in numeris in Lemmate ænigmatis 26. cap.30. oſtendimus. Ponatur ergo minor numerus 1℞;nimirum linea AB. & maior 1A,nimirum linea BC.Summa autem ex ipſis conflata,nimirum linea AC,ponatur 1B.Eritque quadratum rectæ AB 1ʒ.Et quoniam ſumma numerorum 1B, ſubtracta ex duobus quadratis rectarum AB,BC,relinquit 78.facient duo illa quadrata 78 + 1B. Ita enim ſi ex illis demetur 1B, relinquentur 78. Igitur quadratum rectæ BC,erit 78 + 1B, — 1ʒ. Si enim duo quadrata faciunt 78 + 1B, vt diximus, erit ſolum quadratum rectæ BC, 78 + 1B — 1ʒ.



Deinde quia ſumma numerorum A B, B C, nimirum 1B, addita ad productum ex eorum multiplicatione,id eſt, ad complementum AD,facit 39.erit complementum hoc 39 — 1B. Ita namque ſi addatur 1B,fiet ipſum complementum 39.

Quia vero quadratum rectę AC,quæ valet 1B,conſtat ex duobus quadratis rectarum AB,BC,id eſt,ex 78 + 1B,& ex duobus complementis,hoc eſt,ex 78 — 2B,eſtq; quadratum rectæ AC,ex 1B,procreatum 1Bʒ.erit æquatio inter 1Bʒ.& 156 — 1B,qui numerus conflatur ex 78 + 1B,id eſt,ex duobus quadratis,& ex duobus complementis,hoc eſt,ex 78 — 2B.Huius autem numeri 156 — 1B, radix non aliter inueſtigabitur, quam ex numero 156 — 1℞,ac ſi hic æqualis eſſet 1ʒ.nimirum hoc pacto. Semiſſis numeri radicũ eſt $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 156.hoc eſt, $\frac{624}{4}$. fit numerus $\frac{625}{4}$. à cuius radice quadrata $\frac{25}{2}$. ſi dematur prędicta ſemiſſis $\frac{1}{2}$.remanebit pretium 1℞. $\frac{24}{2}$.hoc eſt 12.ac tantum valet recta AC,hoc eſt,1B,ſumma numerorum 1℞.& 1A.

Quoniam igitur 1B,eſt 12. complementum 39 — 1B, erit 27.& quadratum maius 78 + 1B — 1ʒ. erit 90 — 1ʒ.eſtque complementum 27.medium proportionale inter quadratum hoc maius 90 — 1ʒ.& quadratum minus 1ʒ.vt initio diximus:ſi ducatur 90 — 1ʒ.in 1ʒ.fiet numerus 90ʒ — 1ʒʒ. [a] æqualis quadrato ex 27.deſcripto nimirum numero 729.Addito ergo 1ʒʒ.vtrobique,erit æquatio inter 90 ʒ.& 729 + 1ʒʒ.& ablatis 729. vtrobique,inter 90ʒ — 729.& 1ʒʒ.Huius numeri 90ʒ — 729.radicem Zenſizenſicam ita inueniemus. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 45 à cuius quadrato 2025.ſi demantur 729.remanet numerus 1296.ad cuius radicem 36.ſi addatur prædicta ſemiſſis 45.fit 1ʒ81.maior,minor autem erit 9.ſi nimirum ex prædicta ſemiſſe 45.dematur inuenta radix 36.Zenſorum autem 81.& 9. radices quadratæ ſunt 9. & 3.numeri quæſiti. Nam eorum quadrati ſunt 81.& 9 à quorum ſumma 90.ſi ipſorum numerorum ſumma 12.detrahatur, reliquus fit numerus 78. Et ſi eadem ſumma 12.addatur ad 27.numerum ex eorum multiplicatione productum, fit ſumma 39.

[a] 20.ſepti.

PORRO poſtquam inuentum fuit. 1B,ſummam numerorum 1℞,& 1A,eſſe 12.facilius inueniemus vtrumque numerorum 1℞ & 1A,ſeorſum,per ænigma 172.cap.29. Quoniam enim complementum,quod fit ex AB in CB,inuentum eſt 27.ſi numerus 12.diuidatur in duas partes,vt ex vna in alteram fiat numerus 27.qui non maior eſt quarta parte quadrati ex numero 12.facti, vt in prædicto ænigmate docuimus, inuenietur vna pars 3.& altera 9. Idem quoque efficietur per ænigma 38.cap.30.

VEL, ſi numerus 12.per ænigma 170.cap.29.vel 35.cap.30.diuidatur in duos numeros,quorum quadrati ſimul faciant 90.ſummam videlicet duorum quadratorum rectarum AB, CB, quæ inuenta eſt 90. reperientur iterum duæ partes 3.& 9.

SCHOLIVM.

EX hoc ænigmate facile intelligitur,eum qui quæſtiones per Algebram ſoluere vult,debere optime eſſe exercitatum in Geometriæ ſcientia,vt cap.1.diximus.Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometricã ignorat,vix, aut nullo modo ſoluetur,vt patet.

59 *Duo ſocij habent duas ſummas aureorum. Quadrati numeri ex ſummis procreatis faciunt 340: Sed ipſæ ſummæ inter ſe multiplicatæ faciunt $\frac{6}{7}$ maioris quadrati. Quæſtio eſt,quantæ ſint iſtæ ſummæ.* LIX.

PONATVR maior ſumma 1℞;& minor 1A. Quadrati ſunt 1ʒ.& 1Aʒ.qui ſimul facere debent 340.

Igitur 1ʒ.erit 340 — 1 Aʒ.& 1 Aʒ,erit 340 — 1ʒ. Duo vero numeri inter ſe multiplicati faciunt numerum 1℞A,æqualem $\frac{6}{7}$ʒ.hoc eſt, $\frac{6}{7}$.maioris quadrati,qui eſt 1ʒ. Si igitur æquatio eſt inter 1℞A,& $\frac{6}{7}$ʒ.erit quoque æquatio inter horum numerorum quadrata, nimirum inter 1ʒ Aʒ.& $\frac{36}{49}$ʒʒ. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 49ʒ Aʒ, & 36ʒʒ. Et per depreſſionem ſigni ʒ, primæ radicis, erit æquatio inter 49 Aʒ,& 36ʒ. Ac per regulam Trium, ſi 36ʒ.æquiualent 49 Aʒ.æquiualebit 1ʒ.numero $\frac{49Aʒ}{36}$.vt hic vides,abiecto ſigno ʒ.in primo ac tertio numero.

36 49Aʒ 1ʒ $\frac{49Aʒ}{36}$.

Et quoniam 1 Aʒ.fuit æqualis numero 340 — 1ʒ. erit quoque æquatio inter 1 Aʒ.& 340 — $\frac{49Aʒ}{36}$. quandoquidem 1ʒ.inuentus fuit æqualis numero $\frac{49Aʒ}{36}$.Additis igitur $\frac{49Aʒ}{36}$.vtrobique, erit æquatio inter 1 Aʒ + $\frac{49Aʒ}{36}$.& 340.Cum ergo 1 Aʒ.faciat $\frac{36}{36}$ Aʒ.(quod $\frac{36}{36}$.& 1.æquales ſint numeri.)erit æquatio inter $\frac{85}{36}$.Aʒ.& 340.Diuiſis ergo 340.per $\frac{85}{36}$.fiet 1 Aʒ.144.cuius radix 12. erit vnus numerorum, nimirum ſumma pecuniæ minor,pro qua poſuimus 1A,cuius quadratum 1 Aʒ.Quia vero quadratum maioris ſummæ fuit 340 — 1Aʒ. Si pretium 1Aʒ. nimirum 144.dematur ex 340. reliquum fiet quadratum maioris ſummæ 196. cuius radix eſt 14.alter numerorum,nimirum maior ſumma,quam poſuimus 1℞ Itaque primus habet 14.aur.& ſecundus 12. Quadrati enim horum numerorum 196.144. faciunt 340. & ex 14.in 12. fit numerus 168. hoc eſt, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati 196.

LX. 60 *Tres ſocij habent pecunias. Primus dicit ſecundo, ſi mihi dares $\frac{1}{2}$ tuæ pecuniæ, haberem 100.aur. Secundus vero dicit tertio, ſi mihi dares $\frac{1}{3}$.tuæ pecuniæ, haberem 100.aur. Tertius denique dicit primo, ſi mihi dares $\frac{1}{4}$.tuæ pecuniæ haberem 100.aur. Quæritur, quantum quiſque eorum habeat.*

PONATVR primi pecunia 1℞.aur.ſecundi 1 A,aur.& tertij 1B,aur.Primus ergo cum $\frac{1}{2}$.ſecundi habebit 1℞ + $\frac{1}{2}$.A qui numerus æqualis eſt 100.aur.Dempta ergo 1℞.vtrinq;,erit æquatio inter $\frac{1}{2}$A.& 100.aur. — 1℞.ideoque & inter dupla,nimirum inter 1 A,& 200.aur. — 2℞.Atque ita pro ſecundo,loco 1A, pono 200.aur. — 2℞.qui ſecundus cum $\frac{1}{3}$.tertij,habebit 200.aur. — 2℞ + $\frac{1}{3}$ B,qui numerus etiam æqualis eſt 100.aur. Additis ergo 2℞.vtrobique,erit æqualitas inter 200.aur. + $\frac{1}{3}$B,& 100.aur. + 2℞.Et ablatis 100.vtrobique, inter 100.aur. + $\frac{1}{3}$B,& 2℞.Et rurſum ablatis 100. vtrinque, inter $\frac{1}{3}$B, & 2℞ — 100. ideoque & inter tripla, nimirum inter 1B,& 6℞ — 300.aur.Atque ita pro tertio,loco 1B, pono 6℞ — 300.aur.Hic tertius cum $\frac{1}{4}$.primi,id eſt,cum $\frac{1}{4}$℞. habebit $6\frac{1}{4}$℞ — 300. numerum etiam æqualem 100.aur. Additis igitur 300.vtrobique,erit æquatio inter $6\frac{1}{4}$℞.& 400.Diuiſis ergo 400.per $6\frac{1}{4}$.fiet 1℞ 64. atque tot aureos habet primus. Secundus autem,qui inuentus eſt habere 200 — 2℞.habet aur.72.Tertius denique,qui deprehenſus eſt habere aur.6℞ — 300.habet 84.aur.Ita enim tam primus 64.cum $\frac{1}{2}$. ſecundi 72.id eſt, cum 36. quam ſecundus 72. cum $\frac{1}{3}$.tertij 84.id eſt,cum 28. quam tertius 84.cum $\frac{1}{4}$. primi 64.id eſt, cum 16 habebit 100.aur.

LXI. 61 *Tres habent pecuniam. Primus dicit reliquis, ſi adhuc haberetis 100. aur. eſſet ſumma veſtrorum aur. dupla meæ ſummæ. Secundus dicit reliquis, ſi adhuc haberetis 100.aur. eſſet ſumma veſtrorum aur. meæ ſummæ tripla. Tertius reliquis dicit, ſi adhuc haberetis 100.aur. ſumma veſtrorum aur. eſſet ſummæ meæ quadrupla. Quæritur, quantum quiſque habeat.*

PONATVR primi pecunia 1℞,& aliorum duorum ſimul 1 A. Hi duo cum 100.aur. habebunt ſummam duplam pecuniæ primi.Ergo æquatio erit inter 2℞.& 1A + 100.Et ablatis 100.vtrobique,inter 2℞ — 100.& 1 A.ac proinde ſecundus,ac tertius,qui ponuntur habere 1A,habebunt 2℞ — 100. Et ſi addatur ſumma primi,quæ eſt 1℞.erit ſumma omnium trium 3℞ — 100.

Ponatur deinde ſumma ſecundi 1B.habebuntque propterea primus ac tertius 3℞ — 100 — 1B,quandoquidem omnes tres habent 3℞ — 100. Et quia ſumma primi ac tertij,vna cum 100.aur. tripla eſt ſummæ ſecundi;erit æquatio inter 3℞ — 1B. (Nam ſi addantur 100.ad 3℞ — 100 — 1B, fit ſumma 3℞ — 1B) & 3B. Addita igitur 1B, vtrinque,erit æqualitas inter 3℞ & 4B. atque idcirco & inter ſubquadrupla, hoc eſt, inter $\frac{3}{4}$℞.& 1B.ac proinde ſecundus,qui habet 1B habebit $\frac{3}{4}$℞.

Denique pro ſumma tertij ponatur 1C. habebuntque propterea reliqui duo 3℞ — 100 — 1C, quandoquidem omnes tres habent 3℞ — 100. aur. Et quoniam ſumma primi ac ſecundi, vna cum 100.aur.quadrupla eſt ſummæ tertij, erit æquatio inter 3℞ — 1C. (Nam ſi addantur 100.ad 3℞ — 100 — 1C.fit ſumma 3℞ — 1C) & 4 C.Additaque 1C,vtrinque,erit æquatio inter 3℞.& 5 C.ideoque & inter ſubquintupla,hoc eſt,inter $\frac{3}{5}$℞.& 1C.ac proinde tertius habebit $\frac{3}{5}$℞.

Itaque cum primus habeat 1℞.ſecundus $\frac{3}{4}$℞.& tertius $\frac{3}{5}$℞,habebunt omnes tres ſimul $1\frac{27}{20}$℞.ſiue $\frac{47}{20}$.℞.Habebant aũt omnes tres ſimul etiam 3℞ — 100.Eſt igitur æquatio inter $\frac{47}{20}$℞.ſiue $2\frac{7}{20}$℞.& 3℞ — 100. Additiſq;,100.vtrinq; inter $2\frac{7}{20}$℞ + 100.& 3℞.Ablatiſq; $2\frac{7}{20}$℞. vtrobique,inter 100.& $\frac{13}{20}$℞.Diuiſis igitur 100.per $\frac{13}{20}$.fiet 1℞ $153\frac{11}{13}$.aur.pecunia primi.Secundus autem habens $\frac{3}{4}$℞.habebit $115\frac{5}{13}$. Et tertius habens $\frac{3}{5}$.℞.habebit $92\frac{4}{13}$.Nam ſecundus ac tertius vna cum 100.habebunt $307\frac{9}{13}$.qui numerus duplus eſt numeri $153\frac{11}{13}$.quem habet primus.Item primus ac tertius vna cum 100.habebunt $346\frac{2}{13}$. qui numerus triplus eſt numeri $115\frac{5}{13}$.quem habet ſecundus. Secundus denique ac primus, vna cum 100. habebunt $369\frac{3}{13}$. aur. qui numerus quadruplus eſt numeri $92\frac{4}{13}$.quem habet tertius.

LXII. 62 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi adhuc haberem 100. aur. fieret mea ſumma æqualis duabus ſummis veſtris. Secundus reliquis dicit, ſi haberem adhuc 100.aur. ſumma mea eſſet veſtræ ſummæ dupla. Tertius denique ait ad reliquos, ſi adhuc haberem 100.aur. ſumma mea fieret ſummæ veſtræ tripla. Quæritur, quantum quiſque habeat.*

PONATVR primi ſumma 1℞. Ergo cũ 100.habebit 1℞ + 100 ac tanta erit ſumma ſecundi & tertij, omneſque

omneſque tres habebunt 2℞ + 100. Ponatur ſumma ſecundi 1 A. Ergo cum 100. habebit 1 A + 100. qui numerus duplus eſt ſummæ primi ac tertij, quæ eſt 2℞ + 100 — 1 A, (quia cum omnes tres habeant 2℞ + 100. ſi tollatur 1 A, ſumma videlicet ſecundi, remanebit ſumma primi ac tertij 2℞ + 100 — 1 A.) Ac proinde æquatio erit inter 1 A + 100. & 4℞ + 200 — 2 A. Additiſque 2 A, vtrobique inter 3 A + 100. & 4℞ + 200. Et ablatis 100. vtrinque, inter 3 A, & 4℞ + 100. Si ergo omnia diuidantur per 3. erit æquatio inter 1 A, & $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Ac proinde cum ſecundus poſitus ſit habere 1 A, erit eius ſumma $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Ponatur deniq; ſumma tertij 1 B. Ergo cum 100. habebit 1 B + 100. qui numerus triplus eſt ſummæ primi ac ſecundi, quæ eſt $\frac{7}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. conflata ex 1 ℞ ſumma primi. & $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. ſumma ſecundi. Igitur æquatio erit inter 1 B + 100. & $\frac{21}{3}$℞ + $\frac{300}{3}$. hoc eſt, inter 1 B + 100. & 7℞ + 100. Ablatiſque 100. vtrobique, inter 1 B, & 7℞. Ac proinde tertij ſumma, quæ poſita fuit 1 B, erit 7℞.

Itaque cum primus habeat 1℞. ſecundus $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & tertius 7℞. habebunt omnes tres 9$\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Habebant autem omnes tres etiam 2℞ + 100. Eſt igitur æquatio inter 9$\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & 2℞ + 100. Ablatiſque 2℞ vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & 100. Ablatiſque rurſum $\frac{100}{3}$. hoc eſt, 33$\frac{1}{3}$. vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$℞. & 66$\frac{2}{3}$. Diuiſis igitur 66$\frac{2}{3}$. per 7$\frac{1}{3}$. fiet 1℞ 9$\frac{1}{11}$. ſumma primi. Secundus autẽ habens 1$\frac{1}{3}$℞ + 33$\frac{1}{3}$. habebit 45$\frac{5}{11}$. Tertius deniq; habens 7℞. habebit 63$\frac{7}{11}$. Ita namque primus cum 100. faciet 109$\frac{1}{11}$. ſummam æqualem ſummę ſecundi ac tertij Secundus vero cum 100. faciet ſummam 145$\frac{5}{11}$. duplam ſummæ primi ac tertij. Tertius denique cum 100. faciet 163$\frac{7}{11}$. ſummam triplam ſummæ primi ac ſecundi.

63 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi de veſtra ſumma remoueretis 100. aur. haberẽ ſummam æqualem reliquæ veſtræ ſummæ. Secundus reliquis dicit, ſi de veſtra ſumma remoueretis 100 aur. eſſet mea ſumma reliquæ veſtræ dupla. Tertius deniq; dicit reliquis, ſi de veſtra ſumma remoueretis 100. aur. mea ſumma eſſet reliquæ veſtræ ſummæ tripla. Quæritur vnius cuiuſq; ſumma.* LXIII.

PONATVR primi pecunia 1℞. Ergo reliqui duo ſimul habebunt 1℞ + 100. vt amotis 100. habeant reliquam ſummam æqualem ſummæ primi. Omneſq; tres ſimul habebunt 2℞ + 100.

Ponatur pecunia ſecundi 1 A. quæ dupla eſt pecuniæ primi ac tertij, ſi remoueant 100. aur. Habent autem primus ac tertius 2℞ + 100 — 1 A (cum enim omnes tres habeant 2℞ + 100. ſi dematur 1 A, ſumma ſecundi, reliqua fiet ſumma primi ac tertij 2℞ + 100 — 1 A.) & amotis 100 habebunt 2℞ — 1 A. cuius numeri dupla eſt 1 A, ſumma ſecundi. Ergo æquatio erit inter 4℞ — 2 A. & 1 A. Et additis 2 A, vtrinque, inter 4℞, & 3 A. Et omnibus diuiſis per 3. inter $\frac{4}{3}$℞. & 1 A. Ac proinde ſumma ſecundi, quem poſuimus habere 1 A, erit $\frac{4}{3}$℞.

Ponatur denique ſumma tertij 1 B, quæ tripla eſt ſummæ primi ac ſecundi, ſi remoueant 100. aur. Habent autem primus & ſecundus $\frac{7}{3}$℞, & amotis 100 habebunt $\frac{7}{3}$℞ — 100. cuius numeri triplum $\frac{21}{3}$℞ — 300. æquale erit ſummæ tertij 1 B. Ergo tertius habet 7℞ — 300.

Itaque cum primus habeat 1℞, ſecundus $\frac{4}{3}$℞. & tertius 7℞ — 300. habebunt omnes tres ſimul 9$\frac{1}{3}$℞ — 300. Habebant autem omnes tres quoque ſimul 2℞ + 100 Æquatio ergo eſt inter 9$\frac{1}{3}$℞ — 300. & 2℞ + 100. Additiſque 300. vtrinque inter 9$\frac{1}{3}$℞, & 2℞ + 400. Ablatiſque 2℞. vtrobique, inter 7$\frac{1}{3}$℞, & 400. Diuiſis ergo 400. per 7$\frac{1}{3}$. fiet 1℞. 54$\frac{6}{11}$. pecunia primi. Secundus vero habens $\frac{4}{3}$℞ habebit 72$\frac{8}{11}$. Et tertius habens 7℞ — 300. habebit 81$\frac{9}{11}$. quod probatur. Nam ſi ex 154$\frac{6}{11}$. ſumma ſecundi ac tertij reijciantur 100. remanebit ſumma 54$\frac{6}{11}$. æqualis ſummæ primi. Et ſi ex 136.$\frac{4}{11}$. ſumma primi, ac tertij, abijciantur 100. reliqua erit ſumma 36$\frac{4}{11}$. ſubdupla ſummæ ſecundi 72$\frac{8}{11}$. Si denique ex 127$\frac{3}{11}$. ſumma primi ac ſecundi remoueantur 100 remanebit ſumma 27$\frac{3}{11}$. ſubtripla ſummæ tertij 81$\frac{9}{11}$.

64 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi de mea ſumma remouerem 100. aur. ſumma veſtra eſſet reliquæ meæ ſummæ quadrupla. Secundus dicit reliquis, ſi de mea ſumma abijcerem 100. aur. veſtra ſumma eſſet reliquæ meæ ſummæ tripla. Denique tertius reliquis dicit, ſi de mea ſumma auferem 100. aur. eſſet veſtra ſumma reliquæ meæ ſummæ dupla. Quæritur vniuſcuiuſque ſumma.* LXIIII.

PONATVR pecunia primi 1℞ + 100. Ergo ſecundus ac tertius habebunt 4℞. vt hæc ſumma quadrupla ſit ſummæ primi, ſi prius abiecerit 100. aur. omneſque tres habebunt 5℞ + 100.

Ponatur deinde pecunia ſecundi 1 A + 100. vt abiectis 100. reliqua ſumma 1 A, ſit ſubtripla ſummæ primi ac tertij: quæ eſt 5℞ + 100 — 1 A + 100. ita vt æquatio ſit inter 3 A. & 5℞ + 100 — 1 A + 100. Et addita 1 A + 100. vtrinq;, inter 4 A + 100. & 5℞ + 100. Ablatiſq; 100. vtrobiq;, inter 4 A, & 5℞ Diuiſiſq; his duob. numeris per 4. erit æquatio inter 1 A, & $\frac{5}{4}$℞. Cum ergo ſecũdus poſitus ſit habere 1 A + 100. habebit $\frac{5}{4}$℞ + 100.

Ponatur denique ſumma tertij 1 B + 100. vt abiectis 100. reliqua ſumma ſit ſubdupla ſummæ primi ac ſecundi: quę eſt 2$\frac{1}{4}$℞ + 200. ita vt æquatio ſit inter 2 B, & 2$\frac{1}{4}$℞ + 200. Diuiſis ergo omnibus per 2. erit 1 B, æqualis $\frac{9}{8}$℞ + 100. Cum ergo tertius poſitus ſit habere 1 B + 100. habebit $\frac{9}{8}$℞ + 200.

Itaque cum primus habeat 1℞ + 100. Secundus $\frac{5}{4}$℞ + 100. & tertins $\frac{9}{8}$℞ + 200. habebunt omnes tres ſimul 3$\frac{3}{8}$℞ + 400. Habebant autem omnes tres etiam ſimul 5℞ + 100. Æquatio igitur eſt inter 3$\frac{3}{8}$℞ + 400. & 5℞ + 100. Ablatiſque 100. vtrobique, inter 3$\frac{3}{8}$.℞ + 300. & 5℞. Et rurſum ablatis 3$\frac{3}{8}$.℞ vtrinque, inter 300 & 1$\frac{5}{8}$℞. Diuiſis igitur 300. per 1$\frac{5}{8}$. fiet 1℞. 184$\frac{8}{13}$. Primus ergo qui poſitus eſt habere 1℞ + 100. habebit 284$\frac{8}{13}$. aur. Secundus vero habens $\frac{5}{4}$℞ + 100. habebit 330$\frac{10}{13}$ aur. Tertius denique habens $\frac{9}{8}$℞ + 200. habebit 407$\frac{9}{13}$. aur. quod probatur. Nam ſi primus remoueat 100. de ſua ſumma, erit reliquus numerus 184$\frac{8}{13}$. ſubquadruplus ſummæ ſecundi ac tertij, quæ eſt 738$\frac{6}{13}$. Et ſi ſecundus de ſumma abijciat 100. erit reliquus numerus 230$\frac{10}{13}$. ſubtriplus ſummæ primi ac tertij, quæ eſt 692$\frac{4}{13}$. Denique ſi tertius de ſua ſumma remoueat 100. erit reliquus numerus 307$\frac{9}{13}$. ſubtuplus ſummæ primi ac ſecundi, quæ eſt 615$\frac{5}{13}$.

LXV. 65 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi vobis darem 100. aur. faceretis ſummam meæ reliquæ ſummæ quintuplam. Secundus dicit reliquis, ſi vobis darem 100. aur. fieret veſtra ſumma reliquæ meæ ſummæ ſextupla. Tertius denique reliquis dicit, ſi vobis darem 100. aur. faceretis ſummam reliquæ meæ ſummæ ſeptuplam. Quæritur vniuſcuiuſque ſumma.*

PONATVR pecunia primi 1℞ + 100. Ergo reliqui duo habebunt 5℞ — 100. vt ſi primus eis det 100. habeant 5℞. numerum videlicet quintuplum reliqui numeri primi. Omneſque tres ſimul habebunt 6℞.

Ponatur ſecundi pecunia 1 A + 100. vt poſtquam alijs duobus dederit 100. reliqua 1 A, ſit ſubſeſcupla ſummæ aliorum cum illis 100. aur. quos à ſecundo acceperunt. Habent autem primus ac tertius 6℞ — 1 A + 100. ac propterea cum 100. aur. ſecundi habebunt 6℞ + 100 — 1 A + 100. qui numerus ſeſcuplus eſt 1 A, hoc eſt æqualis 6 A. Additis ergo 1 A + 100. vtrobique erit æquatio inter 6℞ + 100 & 7 A + 100. Ablatiſque 100. vtrobique, inter 6℞. & 7 A. Diuiſiſq; duobus hiſce numeris per 7. erunt $\frac{6}{7}$℞. æquales 1 A. Ergo ſecundus, quem poſuimus habere 1 A + 100. habebit $\frac{6}{7}$℞ + 100.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B + 100. vt poſtquam alijs duobus dederit 100. aur. reliqua 1 B, ſit ſubſeptupla ſummæ primi, ac ſecundi vna cum 100. aur. quos à tertio acceperunt. Habent autem primus ac ſecundus $\frac{13}{7}$℞. + 200. ideoque cum 100. aur. tertij habebunt $\frac{13}{7}$℞. + 300. qui numerus ſeptuplus eſt 1 B, hoc eſt, æqualis. 7 B. Diuiſiſque $\frac{13}{7}$℞. + 300. & 7 B, per 7. erit æquatio inter $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{300}{7}$. & 1 B. Ergo tertius, quem poſuimus habere 1 B + 100. habebit $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{1000}{7}$.

Itaque cum primus habeat 1℞ + 100. Secundus $\frac{6}{7}$℞ + 100. & tertius $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{1000}{7}$. habebunt omnes tres ſimul $2\frac{6}{49}$℞ + $\frac{2400}{7}$. Habebant autem & omnes tres ſimul 6℞. Eſt igitur æqualitas inter $2\frac{6}{49}$℞ + $\frac{2400}{7}$ & 6℞. Ablatiſque $2\frac{6}{49}$℞. vtrinque inter $\frac{2400}{7}$. & $3\frac{43}{49}$℞. Diuiſis igitur $\frac{2400}{7}$. per $3\frac{43}{49}$. fiet 1℞. $88\frac{8}{19}$. Primus ergo, cuius dedimus 1℞ + 100. habebit $188\frac{8}{19}$. Secundus autem, qui inuentus eſt habere $\frac{6}{7}$℞ + 100. habebit $175\frac{15}{19}$. Tertius deniq; habens $\frac{13}{49}$℞ + $\frac{1000}{7}$. habebit $166\frac{6}{19}$. quod probatur. Nam ſi primus det 100. aur. alijs duobus habebunt alij duo $442\frac{2}{19}$. qui numerus quintuplus eſt reliquæ ſummæ primi $88\frac{8}{19}$. Et ſi ſecundus alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $454\frac{14}{19}$. qui numerus ſextuplus eſt ſummæ reliquæ ſecundi $75\frac{15}{19}$. Denique ſi tertius alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $464\frac{4}{19}$. qui numerus ſeptuplus eſt reliquæ ſummæ tertij $66\frac{6}{19}$.

LXVI. 66 *Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, ſi vos daretis mihi 100. aur. fieret mea ſumma veſtræ ſummæ reliquæ æqualis. Secundus reliquis dicit, ſi daretis mihi 100. aur. fieret mea ſumma veſtræ ſummæ reliquæ dupla. Tertius denique dicit reliquis, ſi mihi daretis 100. aur. fieret mea ſumma reliquæ veſtræ ſummæ tripla. Quæritur vniuſcuiuſque ſumma.*

PONATVR pecunia primi 1℞. qui ſi acceperit 100 aur. ab alijs duobus habebit 1℞ + 100. ac tantundem habebunt tunc alij duo, atque idcirco antequam dederunt 100. aur. habuerunt 1℞ + 200. Omneſq; tres habebunt 2℞ + 200.

Ponatur pecunia ſecundi 1 A. qui ſi acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 A + 100. qui numerus duplus eſt ſummæ reliquæ primi, ac tertij. quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, eſt 2℞ + 200 — 1 A. & poſtquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt 2℞ + 100 — 1 A. Huius ergo duplum 4℞ + 200 — 2 A, æquale erit 1 A + 100. Et additis 2 A, vtrobique, æquatio erit inter 4℞ + 200. & 3 A. + 100. Et ablatis 100. vtrinque, inter 4℞ + 100. & 3 A. Diuiſiſque duobus hiſce numeris per 3. erit æquatio inter $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & 1 A. Secundus ergo habet $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. quoniam poſuimus eum habere 1 A.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B, qui ſi acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 B + 100. qui numerus triplus eſt ſummæ reliquæ primi ac ſecundi, quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, eſt $\frac{7}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. & poſtquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt $\frac{7}{3}$℞ — $\frac{200}{3}$. Huius ergo triplum 7℞ — 200. æquale eſt 1 B + 100. Et additis 200. vtrinque, æqualitas erit inter 7℞. & 1 B + 300. Ablatiſque 300. vtrobique, inter 7℞ — 300. & 1 B. Tertius igitur, quem poſuimus habere 1 B. habebit 7℞ — 300.

Itaque cum primus habeat 1℞. Secundus $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$ & tertius 7℞ — 300. habebunt omnes tres ſimul $9\frac{1}{3}$℞ — $\frac{800}{3}$ Habebant autem & omnes ſimul 2℞ + 200. Eſt ergo æqualitas inter $9\frac{1}{3}$℞ — $\frac{800}{3}$. & 2℞ + 200. Ablatiſque 2℞. vtrobique, inter $7\frac{1}{3}$℞ — $\frac{800}{3}$. & 200. Additiſque $\frac{800}{3}$. vtrinque, inter $7\frac{1}{3}$℞, & $\frac{1400}{3}$. Diuiſis igitur $\frac{1400}{3}$. per $7\frac{1}{3}$. fiet 1℞. $63\frac{7}{11}$. pecunia primi. Secundus vero, qui inuentus eſt habere $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. habebit $118\frac{2}{11}$. Tertius denique, quem inuenimus habere 7℞ — 300. habebit $145\frac{5}{11}$. quod probatur. Nam primus cum 100. habebit ſummam $163\frac{7}{11}$. æqualem ſummæ reliquorum, ſi prius dederint 100. aur. Secundus vero cum 100. faciet ſummam $218\frac{2}{11}$. duplam reliquorum ſummæ, poſtquam 100. aur. dederint. Tertius denique cum 100. faciet ſummam $245\frac{5}{11}$. triplam ſummæ reliquorum, poſtquam dederint 100. aur.

LXVII. 67 *Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis, Si mihi daretis $\frac{1}{2}$ veſtræ ſummæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit reliquis, ſi mihi daretis $\frac{1}{3}$. veſtræ ſummæ, haberem 100. aur Tertius denique reliquis dicit, ſi mihi daretis $\frac{1}{4}$. veſtræ ſummæ, haberem 100. aur. Quæritur pecunia vniuſcuiuſque.*

PONATVR pecunia primi 100 — 1℞. Ergo reliqui duo habebunt 2℞. Ita enim ſi dent $\frac{1}{2}$. nimirum 1℞, primo, habebit primus 100. aur. Omneſque tres ſimul habebunt 100 + 1℞.

Ponatur ſecundi pecunia 1 A, habebuntque primus ac tertius 100 + 1℞ 1 — A, qui ſi ſecundo dent $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$℞ — $\frac{1}{3}$A. habebit ſecundus 1 A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$℞ — $\frac{1}{3}$A, hoc eſt, $\frac{2}{3}$A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$℞. qui

numerus

numerus æqualis eſt 100.aur.Si ergo auferantur $\frac{100}{3}$.vtrobique, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$A + $\frac{1}{3}$℞.& $\frac{200}{3}$. Ablatiſq; $\frac{1}{3}$℞ vtrinque,inter $\frac{2}{3}$A,& $\frac{200}{3}$ — $\frac{1}{3}$℞.Diuiſiſque duobus hiſce numeris per $\frac{2}{3}$.erit æqualitas inter 1A,& 100 — $\frac{1}{2}$℞.Secundus ergo habebit 100 — $\frac{1}{2}$℞.

Ponatur pecunia tertij 1B.Et quia primus ac ſecundus habent 200 — $\frac{3}{2}$℞.ſi tertio dent $\frac{1}{4}$.nimirum 50. — $\frac{3}{8}$℞.habebit tertius 1B + 50 — $\frac{3}{8}$℞.qui numerus æqualis eſt 100.aur.Ablatiſque 50.vtrinque,erit æqualitas inter 1B — $\frac{3}{8}$℞.& 50.Additiſque $\frac{3}{8}$℞ vtrobique,inter 1B,& 50 + $\frac{3}{8}$℞.Tertius igitur habebit 50 + $\frac{3}{8}$℞.

Itaq; cũ primus habeat 100 – 1℞.Secũdus 100 – $\frac{1}{2}$℞.& tertius 50 + $\frac{3}{8}$℞.habebũt omnes tres ſimul 250 – $\frac{9}{8}$℞.Habebant aũt omnes tres ſimul ẽt 100 + 1℞.Eſt igitur æquatio inter 250 – $\frac{9}{8}$℞.& 100 + 1℞.Additiſque $\frac{9}{8}$℞.vtrobiq;,inter 250.& 100 + 2$\frac{1}{8}$℞.Ablatiſq;100.vtrinq;,inter 150.& 2$\frac{1}{8}$℞.Diuiſis igitur 150.per 2$\frac{1}{8}$.fiet 1℞.70$\frac{10}{17}$.Primus igitur habens 100 – 1℞,habebit 29$\frac{7}{17}$.Secundus autem habens 100 – $\frac{1}{2}$℞ habebit 64 $\frac{12}{17}$.Tertius denique habens 50 + $\frac{3}{8}$℞.habebit 76$\frac{8}{17}$. Nam tam primus cum $\frac{1}{2}$.ſummæ reliquorum duorum, quam ſecundus cum $\frac{1}{3}$.ſummæ aliorum duorum,& quam tertius cum $\frac{1}{4}$.ſummæ aliorum duorũ habet 100.aur.

68 *Tres habent pecuniam.Primus reliquis dicit,ſi vobis darem $\frac{1}{2}$.meæ ſummæ,haberetis 100.aur. Secundus vero reliquis dicit,ſi vobis darem $\frac{1}{3}$.meæ ſummæ,haberetis 100.aur. Tertius denique reliquis dicit,ſi vobis darem $\frac{1}{4}$.meæ pecuniæ,haberetis 100.aur.* LXVIII.

VEL

Secundus,ac tertius dicunt primo,ſi nobis dares $\frac{1}{2}$.tuæ pecuniæ,haberemus 100.aur. At primus,ac tertius dicunt ſecundo,ſi nobis dares $\frac{1}{3}$.tuæ pecuniæ,haberemus 100.aur. Deniq; primus,ac ſecundus dicunt tertio,ſi nobis dares $\frac{1}{4}$.tuæ pecuniæ,haberemus 100.aur. Quæritur vniuſcuiuſque ſumma.

PONATVR pecunia primi 1℞ Ergo reliqui duo habebunt 100 — $\frac{1}{2}$℞.vt accipientes $\frac{1}{2}$.primi,nimirum $\frac{1}{2}$℞.habeant 100. Omneſque tres habebunt $\frac{1}{2}$℞ + 100.

Ponatur pecunia ſecundi 1A,eritque ſumma primi ac tertij $\frac{1}{2}$℞ + 100 – 1A. Et ſi acceperint $\frac{1}{3}$.ſecundi, nimirum $\frac{1}{3}$A, habebunt $\frac{1}{2}$℞ + 100 — 1A + $\frac{1}{3}$A, qui numerus æqualis eſt 100. Additis ergo 1A, vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$℞ + 100 + $\frac{1}{3}$A.& 100 + 1A.Ablatiſque 100.vtrinque, inter $\frac{1}{2}$℞ + $\frac{1}{3}$A.& 1A. Et rurſum ablata $\frac{1}{3}$A,vtrobique, inter $\frac{1}{2}$℞,& $\frac{2}{3}$A.Diuiſoque vtroque numero per $\frac{2}{3}$.inter $\frac{3}{4}$℞. & 1A. Habet ergo ſecundus $\frac{3}{4}$℞.

Ponatur pecunia tertij 1B.Et quoniam primus & ſecundus habent $\frac{7}{4}$℞.Si acceperint $\frac{1}{4}$. tertij, habebunt $\frac{7}{4}$℞ + $\frac{1}{4}$B.ſummam æqualem 100.aur. Ablatiſque $\frac{7}{4}$℞ vtrobique,erit æquatio inter $\frac{1}{4}$B & 100 — $\frac{7}{4}$℞.Diuiſo ergo vtroque numero per $\frac{1}{4}$.erit 1B,æqualis 400 — 7℞.Tertius ergo habet 400 — 7℞.

Itaque cum primus habeat 1℞.ſecundus $\frac{3}{4}$℞,& tertius 400 — 7℞ habebunt omnes tres 400 — $\frac{21}{4}$℞.Habebant autem & omnes ſimul $\frac{1}{2}$℞ + 100. Si igitur vtrinque addantur $\frac{21}{4}$℞. erit æqualitas inter 400.& $\frac{23}{4}$℞ + 100. Ablatiſque 100.vtrobique,inter $\frac{23}{4}$℞.& 300. Diuiſis igitur 300.per $\frac{23}{4}$.fiet 1℞.52$\frac{4}{23}$. pecunia primi.Secundi pecunia,qui inuentus eſt habere $\frac{3}{4}$℞.erit 39$\frac{3}{23}$.aur. Tertius denique habens 400 — 7℞. habebit 34$\frac{18}{23}$.aur.quod probatur. quia tam ſecundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam primus ac tertius cum $\frac{1}{3}$.ſecundi,& quam primus & ſecundus cum $\frac{1}{4}$. tertij habent 100.aur.

69 *Tres mercatores Societatem ineunt per 12.menſes.Primus imponit 100.aur. Secundus 200. aur. & tertius 300.aur.Poſt menſes autem duos imponit primus aliquot libras piperis,cuius 3.libræ valent 1.aur.Et poſt menſes quatuor ſecundus imponit maſſam argẽti,cuius 1.marca valet 7.aur. Tranſactis 12.menſibus,recipit primus ex lucro 50.aur.ſecundus 110.aur.& tertius 90.aur.ita vt totum lucrum fuerit 250.aur. Quæritur,quot libras piperis primus impoſuerit, & quot marcas argenti ſecundus.* LXIX.

PONE primum impoſuiſſe 1℞.librarum piperis:Et ſecundum 1A,marcarum argenti. Cum ergo tres libræ piperis valeant 1.aur.valebit 1℞ lib.aur.$\frac{1}{3}$℞. Et cum 1.marca argenti valeat 7.aur. valebit 1A marcarum aur.7A, vt hic vides.

Lib.	aur.	Lib.	aur.
3	1	1℞?	$\frac{1}{3}$℞
Marca	aur.	Marc.	aur.
1	7	1A?	7A

Et quia pecunia cuiuſque multiplicanda eſt in tempus, ſi 100.aur.primi ducantur in 12.menſ. fiet numerus 1200. Et ex 200. aur. ſecundi in 12. menſ. fiet numerus 2400. & ex 300. aur.tertij in 12.menſ.fiet numerus 3600.Rurſus ex $\frac{1}{3}$℞.primi in 10.menſ.quibus in Societate ſtetit,(nam poſt duos menſes impoſuit $\frac{1}{3}$℞.aur.hoc eſt, 1.lib.piperis)fit numerus $\frac{10}{3}$℞.aur.Et ex 7.A,in 8.menſ.quibus in commertio ſteterunt,(nam poſt 4.menſ. impoſuit 1A,marc.quæ valet 7A)fit numerus 56A marc.Igitur numerus primi eſt 1200 + $\frac{10}{3}$℞.Secundi 2400 + 56A marc.& tertij 3600.qui tres numeri faciunt 7200 + $\frac{10}{3}$℞ + 56A. Vnde ſic ſtabit exemplum ad regulam. Trium ter repetitam.

7200 + $\frac{10}{3}$℞ + 56A	250	1200 + $\frac{10}{3}$℞?	50
		2400 + 56A?	110
		3600?	90

hoc eſt, ſi 7200 + $\frac{10}{3}$℞ + 56A, lucrantur 250. aur. quid lucrabuntur aur. 1200 + $\frac{10}{3}$℞. & quid aur. 2400 +

[a] 19. ſepti. 2400 + 56 A. & quid aur. 3600? Erunt autem lucra aur. 50. 110. & 90. vt in quæſtione poſitum eſt. [a] Ergo tantum fiet ex primo numero in quartos, quantum ex ſecundo in tertios. Fit autem ex primo in quartum 90. numerus 648000 + 300 ℞ + 5040 A. qui æqualis erit numero 900000. qui fit ex ſecundo 250. in tertium 3600. Ablatis igitur 648000. vtrobique, erit æquatio inter 300 ℞ + 5040 A. & 252000. Et ablatis 300 ℞ vtrinque, inter 5040 A, & 252000 − 300 ℞. Diuiſiſq; duobus hiſce numeris per 5040. fiet 1 A, 50 − $\frac{5}{84}$ ℞. Ac proinde 56 A facient 2800 − $3\frac{1}{3}$ ℞. quibus additis ad 7200 + $\frac{10}{3}$ ℞. ſiue + $3\frac{1}{3}$ ℞. fiet numerus 10000. qui primum locum obtinebit in regula trium, pro numero 7200 + $\frac{10}{3}$ ℞ + 56 A. vt alios etiam numeros Coſſicos reſoluere poſſis, vt hic cernis.

10000	250	1200 + $\frac{10}{3}$ ℞?	50
		2400 + 56 A?	110
		3600?	90

Nam ex 10000. in 110. fit numerus 1100000. æqualis numero 600000 + 14000 A, facto ex 250. in 2400 + 56 A. Ablatis ergo 600000. vtrinque, erit æqualitas inter 500000. & 14000 A. Diuiſiſque duobus hiſce numeris per 14000. fiet 1 A, $35\frac{5}{7}$ marc. argenti. Denique ex 10000. in 50. fit numerus 500000. æqualis numero 300000 + $\frac{2500}{3}$ ℞. facto ex 250. in 1200 + $\frac{10}{3}$ ℞. Ablatis ergo 300000. vtrobique, erit æqualitas inter 200000. & $\frac{2500}{3}$ ℞. Diuiſiſque 200000. per $\frac{2500}{3}$ ℞ fiet 1 ℞. 240. libræ piperis. quod probatur ſic. $35\frac{5}{7}$. mar. argenti valebunt aur. 250. & 240. lib. piperis aur. 80. vt hic vides.

Marca	aur.	Marc.	aur.
1	7	$35\frac{5}{7}$?	250
Lib.	aur.	Lib.	aur.
3	1	240?	80

Et quia aurei 250. ſteterunt in commercio 8. menſes: ductis 250 in 8. fit numerus 2000. qui addendus eſt ad 2400. loco 56. A. vt numerus tertius in medio fit 4400. Item quia aur. 80 ſteterunt in commercio 10. menſes: ductis 80. in 10. fit numerus 800. qui ad 1200. addendus eſt loco $\frac{10}{3}$ ℞. vt numerus tertius in ſupremo loco ſit 2000. Vnde ſic denuo ſtabit exemplum.

10000	250	2000?	50
		4400?	110
		3600?	90

Vbi vides, tres numeros tertios facere 10000. primum numerum regulæ Trium: eoſdemque lucrifacere 50. 110. & 90. &c.

LXX. 70 *Tres mercatores ineunt Societatem. Primus imponit 35, aur. amplius, quam ſecundus. At ſecundus, ac tertius ſimul imponunt 84. aur. Lucrum commune eſt 66. aur. ex quibus tertius pro parte ſui lucri recipit aur. 21. Quæſtio eſt, quantum quiſque impoſuerit, & quantum tam primus, quam ſecundus de lucro receperit.*

PONE, primum impoſuiſſe 1 ℞ + 35. aur. Secundum 1 ℞. aur. vt primus vltra huius ſummam impoſuerit præterea 35. aur. Et tertium aur. 84 — 1 ℞. vt ſumma ſecundi ac tertij faciat 84. aur. Deinde ponatur lucrum primi 1 A; & ſecundi 1 B. Et quoniam lucrum tertij eſt 21. aur. ſic ſtabit exemplum.

119 + 1 ℞.	66	1 ℞ + 35?	1 A
		1 ℞?	1 B
		84 − 1 ℞?	21

[b] 19. ſepti. [b] Et quoniam tantum fit ex primo numero in quartum, quantum ex ſeccundo in tertium: Fit autem numerus 2499 + 21 ℞. ex primo 119 + 1 ℞ in quartum infimum: Et ex ſecundo 66. in tertium infimum 84 − 1 ℞. fit numerus 5544 − 66 ℞. qui illi æqualis eſt. Additis igitur 66 ℞ vtrinque, fiet æquatio inter 2499 + 87 ℞. & 5544. Et ablatis 2499. vtrobique, inter 87 ℞, & 3045. Diuiſis ergo 3045. per 87. fiet 1 ℞. 35. ac proinde primus impoſuit 70. aur. nimirum 1 ℞ + 35. Et ſecundus 35. nimirum 1 ℞. Et tertius 49. nimirum 84 − 1 ℞. Et primus numerus regulæ erit 154. Ergo iam ita ſtabit exemplum.

154	66	70?	1 A
		35?	1 B
		49?	21

Ex 154. in 1 A, fit numerus 154 A, æqualis numero 4620. facto ex 66. in 70. Diuiſo ergo vtroque numero per 154. fiet 1 A, 30. Item ex 154, in 1 B, fit numerus 154 B, æqualis numero 2310. facto ex 66. in 35. Diuiſo ergo vtroque numero per 154. fiet 1 B, 15. Recepit ergo primus de lucro 30. aur. & ſecundus 15. aur. quod ita probatur.

154	66	70?	30
		35?	15
		49?	21

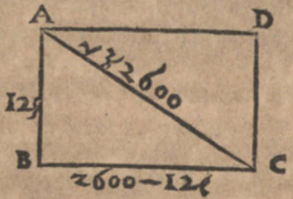
ÆNIGMATA VARIA AD FIGVRAS *Geometricas pertinentia.*

CAPVT XXXII.

IN extremo hoc cap. reducentur ad vſum omnia fere illa, quæ de numeris irrationalibus præcepta ſunt: quippe cum ænigmata proponenda ſint varia de figuris Geometricis, in quibus plerumq; latera, diametri, atque areæ per numeros ſurdos explicari ſolent. Horum ænigmatum primum ſit hoc.

1 *Eſt rectangulum quoddam altera parte longius A B C D, cuius area continet palmos 120. diameter vero palm. √ℨ 2600. Quæruntur latera.* I.

[a] QVONIAM quadrata laterum A B, B C, æqualia ſunt quadrato diametri A C. quod eſt 2600. ſi quadratum lateris AB, ponatur 1ℨ, erit quadratum lateris BC, 2600 — 1ℨ. Ergo latera ipſa erunt √ℨ 1ℨ, & √ℨ (2600 — 1ℨ) quæ inter ſe multiplicata producent aream B D, nimirum palm. 120. vt cap. 1. lib. 3. Geom. pract. diximus, atque idcirco quadrata laterum 1ℨ, & 2600 — 1ℨ. inter ſe multiplicata producent quadratum areæ, nimirum 14400. ex coroll. Lemmatis ænig. 26. cap. 30. Cum ergo ex 1ℨ, in 2600 — 1ℨ fiat 2600 ℨ — 1ℨℨ. erit æquatio inter 14400. & 2600 ℨ — 1ℨℨ. Additoque 1ℨℨ. vtrinque, inter 1ℨℨ + 14400. & 2600 ℨ. Ablatiſque 14400. vtrobique, inter 1ℨℨ. & 2600 ℨ — 14400. Iam ſic. Semiſſis numeri radicum eſt 1300. à cuius quadrato 1690000. ſubtractis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ℨ 1675600. ſi addatur prædicta ſemiſſis 1300. fiet 1ℨ. 1300 + √ℨ 1675600. Et ſi eadem radix ex prędicta ſemiſſe detrahatur, reliqua fiet minor radix 1300 — √ℨ 1675600 (quia hæc æquatio duplicem habet radicem, propter ſignum — quo numerus abſolutus afficitur.) Ergo minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — √ℨ 1675600. maioris autem lateris BC, quadratũ erit 1300 + √ℨ 1675600. *47. pri.* [a]



quod etiam relinquitur, ſi quadratum 1300 — √ℨ 1675600. lateris AB, detrahatur ex 2600. quadrato diametri AC, vt in hac formula apparet. Vides ergo duo quadrata 1300 — √ℨ 1675600. & 1300 + √ℨ 1675600. ſimul facere 2600. quadratum diametri.

2600	+	√ℨ 0
1300	—	√ℨ 1675600
1300	+	√ℨ 1675600

Et ſi eorum latera √ℨ (1300 — √ℨ 1675600.) & √ℨ (1300 + √ℨ 1675600) inter ſe multiplicentur, produci aream rectãguli √ℨ 14400. hoc eſt, 120. palm. quę multiplicatio fiet, ſi quadratũ poſterioris particulæ 1675600 dematur ex 1690000 quadrato prioris particulæ, & reliquo numero ſignum √ℨ. præfigatur. vt ex ijs conſtat, quæ cap. 23. & 24. ſcripſimus, atque in hac formula apparet.

√ℨ (1300 — √ℨ 1675600)
√ℨ (1300 + √ℨ 1675600)
√ℨ 14400

ALITER. Poſito quadrato minoris lateris A B, 1ℨ. & idcirco quadrato maioris lateris 2600 — 1ℨ. erunt ipſa latera √ℨ 1ℨ, & √ℨ (2600 — 1ℨ) quæ inter ſe multiplicata facient aream 120. palm. Faciunt autem √ℨ (2600 ℨ — 1ℨℨ) vt hic vides. quæ multiplicatio fiet, ſi ipſa quadrata 2600 — 1ℨ. & 1ℨ. inter ſe multiplicentur, & producto numero ſignum √ℨ. præfigatur. Eſt igitur æquatio inter 120. & √ℨ (2600 ℨ — 1ℨℨ) atque ideo & inter eorum quadrata 14400. & 2600 ℨ — 1ℨℨ. vt ſupra, &c.

√ℨ (2600 — 1 ℨ)
1 ℨ
√ℨ (2600 ℨ — 1 ℨℨ)

ALITER. Ponatur minus latus AB, 1𝔯. ideoque eius quadratum 1ℨ. Erit igitur quadratum maioris lateris BC, 2600 — 1ℨ. & ipſum latus BC, √ℨ (2600 — 1ℨ.) Ducatur AB, 1𝔯. in BC, √ℨ (2600 — 1ℨ.) quod fiet, vt cap. 26. dictum eſt, ſi 1𝔯. reducatur ad quadratum 1ℨ, præponaturque ſignum √ℨ. Nam ſi √ℨ 1ℨ. ducatur in √ℨ (2600 — 1ℨ) quod fiet, ſi eorum quadrata 1ℨ. & 2600 — 1ℨ. inter ſe multiplicentur, vt cap. 26. dictum eſt, producetur numerus √ℨ (2600ℨ — 1ℨℨ) pro area rectanguli 120. Ergo æquatio erit inter √ℨ (2600ℨ — 1ℨℨ) & 120. ac proinde & inter eorum quadrata 2600ℨ — 1ℨℨ. & 14400. Et addito 1ℨℨ. vtrobique, inter 2600ℨ. & 1ℨℨ + 14400. Ablatiſque 14400. vtrinque, inter 2600ℨ — 14400. & 1ℨℨ. Iam ſic radicem Zenſizenſicã eruemus. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 1300. à cuius quadrato 1690000. demptis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ℨ 1675600. ſi addatur prædicta ſemiſſis 1300. fiet 1ℨ. 1300 + √ℨ 1675600. Et ſi eadem radix ex prædicta ſemiſſe dematur, relinquetur minus quadratum 1300 — √ℨ 1675600. Ergo maioris lateris BC, quadratum erit 1300 + √ℨ 1675600. & minoris lateris AB, quadratũ erit 1300 — √ℨ 1675600. & radix maior erit √ℨ (1300 + √ℨ 1675600) & minor, √ℨ (1300 — √ℨ 1675600) vt ſupra, &c.

√ℨ (2600 — 1ℨ)
1ℨ
√ℨ (2600ℨ — 1ℨℨ)

a 47.primi ALITER. [a] Quoniam quadrata laterum AB, BC, faciunt 2600. & ex vno latere in aliud fit area 120. inueniendi erunt per ænigma 26. cap. 30. duo numeri, qui inter ſe multiplicati faciant 120. & eorum quadrati faciant 2600. quod ita fiet. Ponatur minor numerus quadratus 1ʒ. & maior 2600—1ʒ. Et quoniam per Lemma b 20. ſepti. ænigmatis 26. cap. 30. numerus 120. quem latera quadratorum 1ʒ. & 2600——1ʒ. producunt, medio loco proportionalis eſt inter ipſa quadrata; [b] erit numerus 2600ʒ——1ʒʒ. factus ex 1ʒ in 2600——1ʒ. æqualis quadrato numeri 120. hoc eſt, numero 14400. Eſt ergo æquatio inter 2600ʒ——1ʒʒ. & 14400. Additoque 1ʒʒ. vtrobique, inter 2600ʒ. & 1ʒʒ + 14400. Et ablatis 14400. vtrinq;, inter 2600ʒ—14400. & 1ʒʒ. vt ſupra, &c.

II. 2 *Campus altera parte longior habet latera in proportione ſeptupla: & eorum quadrata ſimul ſumpta ad eorum ſummam proportionem habent centuplam. Quæruntur latera, area, & diameter.*

PONATVR minus latus 1ꝶ. & maius 7ꝶ. quorum ſumma 8ꝶ. & quadrata 1ʒ. 49ʒ. ſummam faciunt 50ʒ. centuplam ſummæ 8ꝶ. Igitur æquatio eſt inter 50ʒ. & 800ꝶ. Diuiſis ergo 800. per 50. fiet 1ꝶ. 16 minus latus. Maius erit 112. in proportione ſeptupla. Ergo area erit 1792. producta ex vno latere in aliud. Diameter vero erit √ʒ 12800. Hoc eſt, quadrata laterum 256. & 12544. facient ſummam 12800. centuplam ſummę laterum 16. & 112. quæ eſt 128. at quadratum diametri erit 12800. ſumma duorum quadratorum laterum, ac proinde diameter √ʒ 12800.

III. 3 *Eſt rectangulum 4500. palmorũ, & longitudo tripla eſt latitudinis. Quærũtur latera, & diameter.*

PONATVR latitudo 1ꝶ. & longitudo 3ꝶ. Hæc latera inter ſe multiplicata producunt aream 3ʒ. æquale 4500. Diuiſis ergo 4500 per 3. fiet 1ʒ. 1500. & 1ꝶ. √ʒ 1500. latitudo rectanguli: & eius triplum √ʒ 13500 erit eiuſdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area √ʒ 20250000. hoc eſt, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000. æquale duobus quadratis laterum, & ipſa diameter erit √ʒ 15000.

IIII. 4 *Eſt parallelepipedum, hoc eſt, columna quadrilatera palmorum 3375. Altitudo ad longitudinẽ baſis, & hæc longitudo ad latitudinem baſis proportionem habet ſeſquialteram. Quæruntur menſuræ.*

PONATVR altitudo 9ꝶ longitudo 6ꝶ & latitudo 4ꝶ. in continua proportione ſeſquialtera. Latitudo in longitudinem facit baſem 24ʒ. & hæc in altitudinem facit aream parallelepipedi 216 ℭ. æqualem 3375. Diuiſis igitur 3375. per 216. fiet 1ℭ 15 $\frac{135}{216}$. & 1ꝶ. cubica 2$\frac{1}{2}$. Ergo 9ꝶ. facient 22$\frac{1}{2}$. altitudinem: Et 6ꝶ facient 15. longitudinem baſis: Et 4ꝶ facient 10. latitudinem baſis. quæ menſuræ inuicem multiplicatæ faciunt 3375.

V. 5 *Eſt parallelepipedum baſem habens quadratam, cuius latus ſubdecuplum eſt altitudinis parallepipedi, cuius area continet 6780. palmos. Quæritur baſis, & altitudo.*

PONATVR latus baſis 1ꝶ ideoque altitudo parallelepipedi 10ꝶ. Ex 1ꝶ. in ſe fit 1ʒ. nimirum baſis quadrata, quæ ducta in altitudinem, id eſt, in 10ꝶ. facit 10ℭ. aream ſcilicet parallelepipedi æqualem 6780. Diuiſis igitur 6780. per 10. fiet 1ℭ. 678. & 1ꝶ. √ℭ 678. latus baſis quod in ſe ductum facit √ℭ 459684. aream baſis. Altitudo vero ad latus decuplam habens proportionem erit √ℭ 678000. quæ ducta in aream baſis, id eſt, in √ℭ 459684. facit √ℭ 311665752000. aream totius parallelepipedi, nimirum 6780.

VI. 6 *Eſt ſuperficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, & aream 576. Quæruntur latera.*

PONATVR minus 1ꝶ. & maius 4ꝶ. Hæc inter ſe multiplicata producunt 4ʒ. aream rectanguli æqualem 576. Diuiſis ergo 576 per 4. fiet 1ʒ. 144. & 1ꝶ 12. minus latus. Maius ergo erit 48.

VII. 7 *Eſt columna quadrangula rectangula, cuius baſis latera proportionem habent ſeſquitertiam, & altitudo ad latus maius baſis proportionem habet duplam ſuperbipartientem tertias: ſoliditas denique columnæ continet palm. 93312. Quæruntur dimenſiones ſingulæ.*

PONATVR latus minus baſis 3ꝶ. & maius 4ꝶ. altitudo vero 10$\frac{2}{3}$ꝶ. vt ad maius latus 4ꝶ. habeat proportionem duplam ſuperbipartientem tertias, & maius latus ad minus ſeſquitertiam. Hi tres numeri inter ſe multiplicati producunt 128 ℭ. ſoliditatem videlicet columnæ æqualem 93312. Diuiſis igitur 93312. per 128. fiet 1ℭ. 729. & 1ꝶ. 9. Ergo latus minus baſis, quod poſuimus 3ꝶ. erit 27. & maius 4ꝶ. erit 36 altitudo vero 10$\frac{2}{3}$ꝶ. erit 96. Atque tres hæ dimenſiones inter ſe multiplicatæ faciunt aream 93312.

VIII. 8 *Sunt duæ turres inæquales ſupra duas baſes quadratas erectæ. Latera baſium proportionem habent ſeſquitertiam, qualem etiam habent & altitudines & ſoliditates: ipſæque altitudines permutatim ſunt laterum baſium duplæ. Soliditates denique ambarum turrium ſimul complectuntur palm. 21000. Quæruntur dimenſiones ſingulæ.*

PONATVR latus minoris baſis 3ꝶ. & maioris 4ꝶ. vt hoc ad illud proportionem habeat ſeſquitertiam ſine fractione. Eritque minor baſis 9ʒ. & maior 16ʒ. Et quia altitudines laterum baſium ſunt permutatim duplæ. hoc eſt, altitudo turris maioris baſis dupla eſt lateris baſis minoris, & altitudo turris minoris c 15. quin. baſis dupla eſt lateris maioris baſis; erit illa 6ꝶ. & hæc 8ꝶ. habebuntque proportionem ſeſquitertiam, [c] eandem nimirum, quam latera baſium habent, eritque turris minoris baſis altior, quam turris maioris baſis.

Quoniam

Quoniam vero, vt in ſequenti Lemmate demonſtrabimus, duo numeri multiplicantes per crucem duos numeros, qui habeant duplicatam proportionem priorum numerorum, producunt duos numeros in eadem cum illis proportione : [a] habentque baſes duplicatam proportionem laterum baſium, ideoque & altitudinem : fit vt maior altitudo 8℞. ducta in minorem baſem 9ʒ. producat 72ce, turrim minoris baſis, & minor altitudo 6℞, ducta in maiorem baſem 16ʒ, producat 96ce. turrim maioris baſis; quę per prędictum Lemma ſequens habebunt eandem proportionem ſeſquitertiam, quam ipſæ altitudines, vel latera baſium habent: eritque propterea turris maioris baſis, & minoris altitudinis maior, ac turris minoris baſis, & maioris altitudinis minor. Atque ambæ turres ſimul conficiunt 168. ce. ſummam æqualem 21000. Diuiſis ergo 21000. per 168. fiet 1. ce. 125. & 1℞. 5. Ideoque latus maioris turris. quod poſitum eſt 4℞ erit 20. palm. Et latus minoris turris poſitum 3℞, erit 15. palm. Et reliquæ dimenſiones erunt, vt in hac formula poſitæ ſunt. Vbi vides, & latera baſium & altitudines, ſoliditateſque turrium habere proportionem ſeſquitertiam, & baſes ipſas proportionem ſuperſeptupartientem nonas, duplicatam ſcilicet proportionis ſeſquitertiæ. Soliditates deniq; ambarum turriũ conficere palm. 21000. vt ænigma proponit. [a] 20. ſexti.

8 ℞ X 16 ʒ   96 ce
6 ℞ X 9 ʒ   72 ce

Latus baſis turris minoris.	15
Latus baſis turris maioris.	20
Baſis minoris turris	225
Baſis maioris turris.	400
Altitudo minoris turris.	40
Altitudo maioris turris.	30
Soliditas minoris turris.	9000
Soliditas maioris turris.	12000

LEMMA.

SI duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per crucem multiplicentur, habebunt producti eandem, quam ipſi numeri, proportionem.

SINT *duo numeri quicunque 8. & 6. proportionem ſeſquitertiam habentes : & alij duo 16. & 9. habentes proportionem duplicatam proportionis ſeſquitertiæ, nimirum ſuperſeptupartientem nonas, vt hic apparet 16. 12. 9. Fiatque 72. ex 8. in 9. & 96 ex 6. in 16. Dico eſſe 96. ad 72. vt 8. ad 6. Cum enim 16. & 9. habeant proportionem duplicatam proportionis 8. ad 6. cadet inter illos medius proportionalis 12. in proportione 8. ad 6. ac proinde cum ſit, vt primus 8. ad ſecundum 6. ita tertius 16. ad quartum 12. [b] fiet idem numerus ex primo 8. in quartum 12. qui ex ſecundo 6. in tertium 16. nimirum 96. Item cum ſit, vt primus 8. ad ſecundum 6. ita tertius 12. ad quartum 9. [c] fiet idem numerus 72. ex primo 8. in quartum 9. qui ex ſecundo 6. in tertium 12. Quo circa cum 96. fiat ex 12. in 8. & 72. ex 12. in 6. [d] erit eadem proportio 96. ad 72. quæ 8. ad 6.*

8 X 16   96
       12
6 X 9   72

[b] 19. ſepti.
[c] 19. ſepti.
[d] 17. ſepti.

HINC *fit, minorem altitudinem ducendam eſſe in maiorem baſem, & maiorem altitudinem in minorem baſem, vt ſoliditates procreatæ eandem habeant proportionem, quam altitudines; ac propterea maiorem turrem habere minorem altitudinem : minorem vero turrem altitudinem maiorem. Propter hanc cauſam dictum eſt in ænigmate, altitudines eſſe permutatim duplas laterum baſium.*

9 *Eſt triangulum rectangulum, cuius baſis (voco baſem, latus recto angulo oppoſitum) continet palm. 52. Latera autem proportionem habent duplam ſuperbipartientem quintas. Quæruntur duo latera.* IX.

PONATVR minus 5℞, & maius 12℞, vt ſine fractione proportionem habeant duplam ſuperbipartientem quintas : Quadrata laterum ſunt 25ʒ, & 144ʒ, quæ ſimul faciunt ſummam 169ʒ, [e] æqualem quadrato baſis, numero ſcilicet 2704. Diuiſis igitur 2704. per 169. fiet 1ʒ, 16. & 1℞. 4. Minus ergo latus 5℞, erit 20. palm. & maius 12℞, erit 48. palm. quod probatur. Nam duo quadrata laterum 400. & 2304. faciunt 2704. quadratum baſis. [e] 47. primi

10 *Eſt altera parte longius, cuius area 500. palm. & duo latera ſimul faciunt 100. palm. Quæruntur latera.* X.

PONATVR vnum 1℞, & alterum 100 — 1℞. Hæc multiplicata inter ſe faciunt 100℞ — 1ʒ. aream rectanguli æqualem 500. Addito ergo 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 100℞, & 1ʒ + 500. Ablatiſque 500. vtrobique, inter 100℞ — 500. & 1ʒ. Ita autem radix Zenſica eruetur. Semiſſis numeri radicum eſt 50. à cuius quadrato 2500. demptis 500. remanet numerus 2000. ad cuius radicem √ʒ 2000 ſi addatur prædicta ſemiſſis 50. fiet maior radix 50 + √ʒ 2000. Et ſi eadem radix √ʒ 2000. ex prędicta ſemiſſe dematur, reliqua fiet minor radix, 50 — √ʒ 2000. Eſt igitur maius latus 50 + √ʒ 2000. minus autem 50 — √ʒ 2000. quod etiam habebitur, ſi maius detrahatur ex 100. ſumma laterum. vt hic vides. quod probatur, quia duo latera 50 + √ʒ 2000. & 50 — √ʒ 2000. faciunt 100. & inter ſe multiplicata producunt aream 500. quæ multiplicatio fiet, vt cap. 23. traditum eſt, ſi 2000. quadratum poſterioris particulæ ſubducatur ex 2500 quadrato particulæ prioris, vt appoſita formula indicat.

100 + √ʒ 0
50 + √ʒ 2000
——————
50 — √ʒ 2000.

50 + √ʒ 2000
50 — √ʒ 2000
——————
500

XI. 11 *Eſt rectangulum, cuius diameter √ȝ 180. & maius latus ad minus proportionem habet triplam. Quæruntur latera, & area.*

PONATVR minus latus 1℞, & maius 3℞, quorum quadrata 1ȝ, & 9ȝ, faciunt ſummam 10ȝ, [a] æqualem quadrato diametri, hoc eſt, numero 180. Diuiſis ergo 180. per 10. fiet 1ȝ 18. & 1℞, √ȝ18. latus minus. Maius ergo erit √ȝ 162. illius triplum. Area autem erit √ȝ 2916. id eſt, 54.

[a] 47. primi

XII. 12 *Eſt triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt √ȝ 18 + 3. Alterum autem latus, & baſis ſimul faciunt √ȝ 162 + 9. Quæruntur ſingula latera.*

PONATVR alterum latus incognitum 1℞, eritque propterea baſis √ȝ162 + 9 — 1℞. Quadrata laterum ſunt 1ȝ & 27 + √ȝ 648. [b] quæ ſimul æqualia ſunt quadrato baſis, nimirum numero 243 — 18℞ + 1ȝ + √ȝ52488 — √ȝ 648ȝ vt duæ propoſitæ formulæ

[b] 47. primi

√ȝ 18 + 3
√ȝ 18 + 3
+ √ȝ 162 + 9
+ 18 + √ȝ 162
27 + √ȝ 648

√ȝ 162 + 9 — 1℞
√ȝ 162 + 9 — 1℞
— √ȝ 162ȝ — 9℞ + 1ȝ
+ √ȝ 13122 + 81 — 9℞
+ 162 + √ȝ 13122 — √ȝ 162ȝ
+ 243 — 18℞ + 1ȝ + √ȝ 52488 — √ȝ 648ȝ

multiplicationis quadratæ indicant. Si ergo vtrinque auferatur √ȝ648. erit æquatio inter 1ȝ + 27. & 243 — 18
℞ + 1ȝ + √ȝ41472 — √ȝ648ȝ. Nam ſi auferatur √ȝ 648. à √ȝ 52488 (quæ commenſurabiles ſunt, habentes
proportionem noncuplam, propterea quod, ſi √ȝ52488. diuidatur per √ȝ 648. Quotiens fit √ȝ81. id eſt, 9.)
reliqua fiet √ȝ 41472. Ablatoque 1ȝ. vtrinque, inter 27. & 243 — 18℞ + √ȝ41472 — √ȝ648ȝ. Ablatiſque rur-
ſum 27. vtrobique, inter 0. & 216 — 18℞ + √ȝ41472 — √ȝ648ȝ. Et additis vtrobique 18℞. & √ȝ 648ȝ. in-
ter 18℞ + √ȝ 648 hoc eſt, inter √ȝ648ȝ + 18℞. & 216 + √ȝ41472 Diuiſo ergo hoc numero per illum, (ab-
iectis ſignis Coſſicis ℞, & ȝ, ex diuiſore. quia totum hoc aggregatum √ȝ 648ȝ + 18℞, eſt numerus radicum,
quod in creatione numeri quadrati baſis, numerus √ȝ648ȝ. factus ſit ex 1℞, in √ȝ 162. bis; ac propterea nu-
merus √ȝ648ȝ. cenſeri debeat pro numero radicum. Conſule ea, quæ prope finem c. 26. ſcripſimus. Abijciun-
tur autem ſigna Coſſica ℞, & ȝ, ex diuiſore. quemadmodum ſi æquatio ſit inter 20. & 5℞, vt diuidantur 20.
per 5. abijcitur ſignum ℞, propterea quod 5℞, eſt numerus radicum; ſicuti √ȝ648ȝ + 18℞) prouenict æſti-
matio 1℞, nimirum alterius lateris trianguli, quod poſitum fuit 1℞.

VT autem hæc diuiſio fiat, multiplicandus eſt tam diuiſor √ȝ 648 + 18. quam numerus diuidendus per √ȝ648 — 18. vt cap. 23. docuimus. Ita enim fiet nouus diuiſor 324. & nouus diuidendus √ȝ3359232 + 1296. quæ multiplicationes hic cernuntur.

√ȝ 648 + 18
√ȝ 648 — 18
324

216 + √ȝ 41472
√ȝ 648 — 18
— 3888 — √ȝ 13436928
+ √ȝ 30233088 + √ȝ 26873856
√ȝ 3359232 + 1296

IN priori multiplicatione aufertur quadratum 324. poſterioris particulæ 18. ex 648. quadrato prioris
particulæ, vt cap. 23. docuimus. In poſteriori vero detraximus √ȝ 13436928. ex √ȝ 30233088. (quia commen-
ſurabiles ſunt, habetque poſterior numerus ad priorem proportionem ſeſquialteram) factuſq; eſt reſiduus nu-
merus √ȝ 3359232. Item ex √ȝ 26873856. id eſt, ex 5184. dempſimus 3888. factuſque eſt totus productus √ȝ
3359232 + 1296.

Iam vero ſi diuidatur √ȝ 3359232. per 324. hoc eſt, per √ȝ 104976. fiet Quotiens √ȝ 32. Et diuiſis 1296.
per 324. fit Quotiens 4. Pretium ergo 1℞. eſt √ȝ32 + 4. atque tantum eſt alterum latus trianguli quæſitum,
quod poſuimus eſſe 1℞. Baſis vero angulo recto oppoſita, quam ſtatuimus √ȝ 162 + 9 — 1℞. erit √ȝ 50 + 5
qui numerus relinquitur, ſi radix inuenta √ȝ32 + 4. detrahatur ex √ȝ162 + 9. nimirum ex ſumma lateris quæ-
ſiti, ac baſis. quod etiam patet, quia quadrata laterum ſimul ſumpta faciunt 75 + √ȝ5000. quadratum baſis in-
uentæ √ȝ 50 + 5. Sunt enim duo illa quadrata 27 + √ȝ648. & 48 + √ȝ2048.

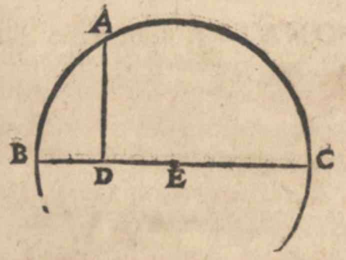
ALIVD exemplum facilius. Sit vnum latus 4. & ſumma alterius lateris cum baſe ſit 8. Ponatur alterum
latus incognitum 1℞. ac prinde baſis 8 — 1℞. Quadrata duorum laterum 16. & 1ȝ. [c] ſunt ſimul ſumpta æqua-
lia quadrato baſis, numero videlicet 64 — 16℞ + 1ȝ. Ablato ergo 1ȝ. vtrinque, erit æquatio inter 16. & 64 — 16
℞. Additiſque 16℞. vtrobique, inter 16 + 16℞. & 64. Ablatiſque 16. vtrinque, inter 16℞. & 48. Diuiſis ergo
48. per 16 fiet 1℞. 3. pro altero latere. Ac proinde baſis 8 — 1℞. erit 5. quod probatur, cum quadrata laterum
16. & 9. æqualia ſint quadrato 25. baſis. Area vero trianguli erit 6. ſemiſſis nimirum numeri 12. producti ex vno
latere in aliud.

[c] 47. primi

13 Eſt

13 *Eſt circulus, cuius diameter 120. & ex quodam puncto circumferentiæ demiſſa perpendicularis ad diametrum eſt √ʒ(2925 — √ʒ 405000.) Quæruntur partes diametri.*

PONATVR minor pars BD, 1.℞. ideoque maior CD, 120 — 1℞. Et quia, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 6. Eucl. AD. eſt media proportionalis inter BD, CD; ᵃ erit rectangulum ſub BD, CD, æquale quadrato ex AD. Fit autem ex BD, 1℞, in CD 120 — 1℞. numerus 120℞ — 1ʒ. Hic ergo æqualis eſt quadrato rectæ AD nimirũ numero 2925 — √ʒ 405000. Addito ergo 1ʒ. vtrobiq;, erit æquatio inter 120℞, & 1ʒ + 2925 — √ʒ 405000. Ablatiſq; 2925 — √ʒ 405000. vtrinq;, inter 1ʒ, & 120℞ — 2925 — √ʒ 405000. Ex hoc ergo numero ſic radicem quadratã eruemus. Semiſſis numeri radicum eſt 60. è cuius quadrato 3600. demptis 2925 — √ʒ 405000. remanet numerus 675 + √ʒ 405000. vt in hac formula vides. ad cuius radicem quadratam, quæ eſt √ʒ (675 + √ʒ 405000) ſi addatur prædicta ſemiſſis 60. fit maior radix 60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000) atque tanta eſt portio CD. Et ſi eadem √ʒ (675 + √ʒ 405000) detrahatur ex eadem ſemiſſe 60. remanebit minor radix 60 — √ʒ (675 + √ʒ 405000) pro minore portione BD. quæ etiam habebitur, ſi ex tota diametro 120. detrahes portionem CD, nimirum 60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000) vt hic vides. ᵃ 17. ſexti.



3600 + √ʒ 0
2925 — √ʒ 405000
675 + √ʒ 405000

120 + √ʒ 0
60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000)
60 — √ʒ (675 + √ʒ 405000)

IAM verò vt æſtimationem vtriuſque portionis 60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000) & 60 — √ʒ (675 + √ʒ 405000) inuenias, eruenda eſt radix ex hoc Binomio 675 + √ʒ 405000. vt ad finem cap. 28. docuimus, hoc videlicet modo. Diuidatur maior particula 675. in duas partes per Lemma cap. 28. quæ inter ſe multiplicatæ producant quartam partem quadrati minoris particulæ √ʒ 405000. quod ita fiet. Semiſſis numeri diuidendi 675. eſt $\frac{675}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{455625}{4}$. detracta quarta parte quadrati minoris particulæ, quæ eſt $\frac{405000}{4}$. remanet numerus $\frac{50625}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{225}{2}$. addita ſemiſſi prędictę $\frac{675}{2}$. facit $\frac{900}{2}$. hoc eſt, 450. maiorem partem: Et eadem radix $\frac{225}{2}$. dempta ex eadem ſemiſſe $\frac{675}{2}$. relinquit $\frac{450}{2}$. hoc eſt, 225. minorem partem. Atque hæ duæ partes 450. 225. inter ſe multiplicatæ producunt 101250. quartam partem quadrati 405000. minoris particulæ √ʒ 405000. Radices autem partium 225. & 450. copulatæ per ſignum +, hoc modo. √ʒ 225 + √ʒ 450. hoc eſt, 15 + √ʒ 450. dabunt radicem Binomij 675 + √ʒ 405000. ad quam radicem ſi addatur numerus 60. ſemiſſis nimirum numeri radicum, fiet maior radix 75 + √ʒ 450. pro maiore portione CD. Et ſi ex eadem ſemiſſe 60. dematur eadẽ radix, remanebit minor portio BD, 45 — √ʒ 450. vt prior hæc formula monſtrat. quę etiam habebitur, ſi maior portio 75 + √ʒ 450. ſubtrahatur ex tota diametro 120. vt ſecunda hæc formula indicat. Vides ergo, quam laborioſa fuerit extractio radicis ex hoc numero Coſſico, 120℞ — 2925 — √ʒ 405000. quæ difficultas orta eſt ex numero irrationali compoſito (— 2925 — √ʒ 405000.) Quare proponemus aliud exemplum facilius in materia Sinuum.

60 + √ʒ 0
15 + √ʒ 450
45 — √ʒ 450

120 + √ʒ 0
75 + √ʒ 450
45 — √ʒ 450

SIT igitur in eadem figura diameter BC, 2000. vt ſinus totus ſit 1000. Et AD, ſit ſinus grad. 20. nimirum 342. Quæruntur ſinus verſi arcuum AB, AC, & ſinus complementi DE. Pro BD, ponatur 1℞, eritque propterea CD, 2000 — 1℞. Et quoniam AD. eſt media proportionalis inter BD, CD, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 6. Eucl. ᵇ erit numerus 2000℞ — 1ʒ factus ex BD, in CD, æqualis quadrato ex AD, nimirum numero 116964. Additoque 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 2000℞ & 1ʒ + 116964. Ablatiſque 116964. vtrobique, inter 1ʒ & 2000℞ — 116964. ᵇ 17. ſexti.

IAM ſic. Semiſſis numeri radicum eſt 1000. è cuius quadrato 1000000. demptis 116964. remanet numerus 883036. ad cuius radicem quadratam √ʒ 883036. ſi prædicta ſemiſſis 1000. addatur fiet maior radix 1000 + √ʒ 883036. pro maiori portione CD. Et ſi eadem radix ex eadem ſemiſſe 1000. dematur; reliqua fiet minor radix 1000 — √ʒ 883036. pro minori parte BD. quæ etiam habebitur, ſi maior portio ex tota diametro 2000. ſubtrahatur, vt in hac formula vides. Itaque ſi omnia hæc in numeris abſolutis deſiderentur, cum numeri 883036. maior radix ſit 940. & minor 939. erit CD, 1940. maior quam vera, & 1939. minor quam vera. Item BD, erit 60. minor quam vera, & 61. maior, quam vera. Quod ſi auferatur ſemidiameter CE, 1000. ex 1940. relinquetur ſinus complementi 940. maior, quam verus, & 939. minor, quam verus, &c.

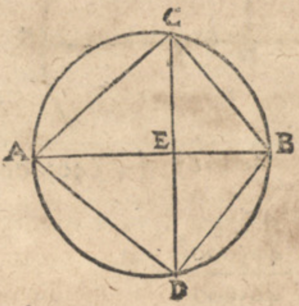
2000 + √ʒ 0
1000 + √ʒ 883036
1000 — √ʒ 883036

INVENTIS porro ſegmentis BD, CD, ſi ducantur rectæ AB, AC, inuenientur ipſæ chordæ, ex propoſ. 47. lib. 1. Eucl. cum triangula fiant rectangula ABD, ACD &c. In priori exemplo reperietur chorda AB, √ʒ (5400 — √ʒ 6480000, & chorda AC, √ʒ (9000 + √ʒ 6480000) &c.

XIIII. 14 *Eſt circulus, cuius diameter diuiditur per lineam perpendicularem ad diametrum extrema ac media ratione, & vna è duabus chordis minoribus eſt 150 — √ʒ 4500. Quæſtio eſt, quanta ſit diameter, & quantæ eius portiones, & reliquæ lineæ.*

PONATVR EB, minor pars diametri AB, 1x. Et quia AB, ſecta eſt in E, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AE, erit AE, media proportionalis inter AB, & EB: [a] Eſt autem & BC, media proportionalis inter eaſdem AB, EB. Igitur AE, BC, æquales ſunt. Ponitur autem BC. 150 — √ʒ 4500. Igitur & AE, eſt 150 — √ʒ 4500. [b] Cum ergo CE, ſit media proportionalis inter AE, EB; [c] erit numerus 150x — √ʒ 4500ʒ. factus ex AE, in EB, æqualis quadrato ex CE; ideoque recta CE, erit √ʒ (150x — √ʒ 4500ʒ.) Eſt autem eadem CE, √ʒ (27000 — √ʒ 405000000 — 1ʒ) propterea quod 1ʒ, quadratum rectæ EB, demptum ex 27000 — √ʒ 405000000 quadrato rectæ BC, [d] reliquum facit 27000 — √ʒ 405000000 — 1ʒ. quadratum rectæ CE. Igitur æqualia ſunt duo quadrata 150x — √ʒ 4500ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 1ʒ. quippe cum vtrumque quadrato rectæ CE, oſtenſum ſit æquale. Addito ergo 1ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 1ʒ + 150x — √ʒ 4500ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000. Et ablatis 150x — √ʒ 4500ʒ. vtrobique, inter 1ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 150x — √ʒ 4500ʒ. Ex hoc numero Coſſico ita eliciemus pretium 1x. Totus numerus eſt inſtar numeri Coſſici diminuti, cuius portio 27000 — √ʒ 405000000. pro numero abſoluto habetur, & altera portio — 150x — √ʒ 4500ʒ. pro numero radicum. Nam √ʒ 4500ʒ. eſt etiam numerus radicum, vt in ænigmate 12. diximus, & ad finem cap. 26. docuimus. Itaque dimidium numeri radicum erit — 75 — √ʒ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ʒ 25312500. ſi addantur 27000 — √ʒ 405000000. fit numerus 33750 — √ʒ 632812500. à cuius radice quadrata auferenda eſt ſemiſſis numeri radicum, quæ fuit — 75 — √ʒ 1125. vt habeatur valor 1x.

[a] coroll. 8. ſexti.
[b] coroll. 8. ſexti.
[c] 17. ſexti
[d] 47. prim.



ITA autem ex Reſiduo hoc 33750 — √ʒ 632812500. radicem quadratam eruemus. Secetur maius nomen 33750. in duas partes, quæ inter ſe multiplicatæ producant quartam partem quadrati nominis minoris, quæ quarta pars eſt 158203125. quod ita fiet, iuxta doctrinam Lemmatis cap. 28. Ex 284765625. quadrato ſemiſſis maioris nominis 33750. detrahatur dicta quarta pars 158203125. Et reliqui numeri 126562500. radix quadrata 11250. addatur, & detrahatur ex 16875. ſemiſſe numeri 33750. Nam numeri producti 28125. 2625. erunt partes quæſitæ, quæ inter ſe multiplicatæ faciunt 158203125. Atque hæ partes copulatæ per ſignum — dabunt radicem propoſiti Reſidui, præpoſito tamen ſigno √ʒ. vtrique parti, hoc modo √ʒ 28125 — √ʒ 5625. vt ad finem cap. 28. tradidimus: hoc eſt, √ʒ 28125 — 75. Ab hac radice detrahendum eſt dimidium numeri radicum 75 — √ʒ 1125. propter ſignum — quo numerus radicum afficiebatur. Fietque numerus reliquus √ʒ 40500 — 150. pro pretio 1x, hoc eſt, pro linea EB. Cum ergo AE, ipſi CB, æqualis, ſit 150 — √ʒ 4500. erit tota diameter √ʒ 18000. quia √ʒ 40500; & √ʒ 4500. commenſurabiles ſunt, habentes proportionem triplam, & minore ex maiore ſubducta, relinquitur √ʒ 18000. At CE, erit (√ʒ 162000000 — 36000) numerus videlicet factus ex AE, in EB. Denique AC, erit √ʒ (√ʒ 405000000 — 9000) cum eius quadratum æquale ſit duobus quadratis rectarum AE, CE. Et quia AC, æqualis eſt AD, & CE, ipſi ED, cognitæ erunt omnes lineæ huius figuræ. Atque ita vides duo quadrata rectarum AC, BC, nimirum √ʒ 405000000 — 9000. & 27000 — √ʒ 405000000. facere 18000. quadratum diametri AB, vt vult propoſ. 47. lib. 1. Eucl. [e] cum angulus ACB, in ſemicirculo ſit rectus.

[e] 31. tertij.

ALITER. Quoniam maius ſegmentum AE, æquale ipſi CB, eſt 150 — √ʒ 4500. ſi ponatur EB, 1x. erit tota diameter AB, 150 — √ʒ 4500 + 1x. Atque ita quadrato maioris ſegmenti AE, 27000 — √ʒ 405000000. æqualis erit numerus 150x — √ʒ 4500ʒ + 1ʒ. factus ex EB, id eſt, ex 1x. in totam AB, id eſt, in 150 — √ʒ 4500 + 1x. Et tranſpoſitis particulis huius æquationis, vt ſupra reperietur iterum æquatio inter 1ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 150x + √ʒ 4500ʒ, &c.

ALITER. Ponatur tota diameter AB, 1x, eritque minus ſegmentum EB, 1x — 150 — √ʒ 4500. Atque [f] ita numerus 1ʒ — 150x — √ʒ 4500ʒ. factus ex 1x, id eſt, ex AB, in 1x — 150 — √ʒ 4500. id eſt, in EB, æqualis erit quadrato 27000 — √ʒ 405000000. rectæ AE. Et additis vtrobique 150x — √ʒ 4500ʒ. æquatio erit inter 1ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 + 150x — √ʒ 4500ʒ. Ex hoc ergo numero Coſſico ita radicem extrahemus. Totus numerus intelligatur compoſitus ex duabus particulis, quarũ prior 27000 — √ʒ 405000000. eſt inſtar numeri abſoluti, & poſterior + 150x — √ʒ 4500ʒ. inſtar numeri radicum. Dimidium numeri radicum eſt 75 — √ʒ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ʒ 25312500. ſi addantur 27000 — √ʒ 405000000. fit numerus 33750 — √ʒ 632812500. ad cuius radicem quadratam √ʒ 28125 — 75. (quæ inuenietur, vt ſupra) ſi addatur ſemiſſis numeri radicum 75 — √ʒ 1125. fiet 1x. √ʒ 18000. pro diametro AB, quantam videlicet ſupra inuenimus, &c.

[f] 17. ſexti.

XV. 15 *Eſt quadratum, cuius latus eſt 7. Quæritur diameter.*

QVADRATVM lateris eſt 49. [g] cuius duplum eſt quadratum diametri. Igitur quadratum diametri erit 98. & ipſa diameter √ʒ 98.

[g] ſchol. 47. primi.

16 *Eſt quadratum, cuius diameter eſt √ʒ 98. Quæritur latus.* XVI.

[a] QVONIAM quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris: eſtque quadratum diametri 98. erit quadratum lateris 49. & latus ipſum √ʒ 49. hoc eſt, 7. [a] *ſchol. 47. primi.*

17 *Quadratum, cuius diameter & latus faciunt ſummam 6. Quæruntur diameter ac latus.* XVII.

PONATVR latus 1℞. ac proinde diameter 6 —— 1℞. [b] Et quia quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris: Eſtque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri 36 —— 12℞ + 1ʒ. erit æquatio inter 2ʒ, & 36 —— 12℞ + 1ʒ. Ablatoque 1ʒ. vtrinque, inter 1ʒ. & 36. —— 12℞. [b] *ſchol. 47. primi.*

Iam ſic. Semiſſis numeri radicum eſt 6. ad cuius quadratum 36. ſi addantur 36. fit numerus 72. à cuius radice √ʒ 72. ſi prædicta ſemiſſis 6. dematur, reliqua fiet æſtimatio 1℞. √ʒ 72 —— 6. atque tantum erit latus. quod demptum ex 6. reliquam faciet diametrum 12 —— √ʒ 72. vt in hac formula vides.

√ʒ	0 +	6
√ʒ	72 —	6
12	— √ʒ	72

quod probatur. quia quadratum diametri 216 —— √ʒ 41472. duplum eſt quadrati lateris 108 —— √ʒ 10368. Et diameter ac latus faciunt ſummam 6.

18 *Eſt quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit 10. Quæruntur latus ac diameter.* XVIII.

PONATVR latus 1℞. ideoque diameter $\frac{10}{1℞}$. Nam ex 1℞ in $\frac{10}{1℞}$ fiunt 10. qui numerus $\frac{10}{1℞}$ eſt Quotiens, ſi 10. per 1℞. diuidantur. Ita enim Quotiens ductus in diuiſorem 1℞. producit numerum diuiſum 10. Et [c] quia quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris: eſtque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri $\frac{100}{1ʒ}$. erit æqualitas inter 2ʒ. & $\frac{100}{1ʒ}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2ʒʒ. & 100. Diuiſis ergo 100. per 2. fiet 1ʒʒ. 50. & 1℞ √ʒʒ 50. pro latere. Quia vero diameter poſita fuit $\frac{10}{1℞}$. hoc eſt, 10 diuiſa per 1℞. ſi diuidantur 10. per √ʒʒ 50. nimirum per pretium 1℞. fiet Quotiens √ʒʒ 200. pro diametro. quod probatur. Nam ex latere √ʒʒ 50. in diametrum √ʒʒ 200. fit numerus √ʒʒ 10000. id eſt, 10. Et √ʒʒ 40000 quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris √ʒʒ 2500. [c] *ſchol. 47. primi.*

19 *Eſt quadratum, cuius diameter ſuperat latus numero 3. Quæruntur latus, ac diameter.* XIX.

PONATVR latus 1℞. ideoque diameter 1℞ + 3. [d] Et quia quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris: eſtque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri 1ʒ + 6℞ + 9. erit æquatio inter 2ʒ. & 1ʒ + 6℞ + 9. Ablatoque 1ʒ. vtrinque, inter 1ʒ, & 6℞ + 9. Semiſſis numeri radicum eſt 3. ad cuius quadratum 9. additis 9. fit numerus 18. ad cuius radicem √ʒ 18. ſi addatur prædicta ſemiſſis 3. fiet 1℞. √ʒ 18 + 3. pro latere. Diameter autem erit √ʒ 18 + 6. quod probatur. quia quadratum diametri 54 + √ʒ 2592. duplum eſt quadrati lateris 27 + √ʒ 648. Et diameter latus ſuperat numero 3. [d] *ſchol. 47. primi.*

20 *Eſt quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum & latus facit 15. Quæruntur diameter ac latus.* XX.

PONATVR latus 1℞. ac propterea differentia inter diametrum ac latus $\frac{15}{1℞}$. quæ habetut ex diuiſione 15. per 1℞. vt nimirum Quotiens ductus in diuiſorem 1℞. producat numerum diuiſum 15. Quia ergo diameter excedit latus hac differentia, erit diameter 1℞ + $\frac{15}{1℞}$. [e] Quoniam autem quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris: eſtque quadratum lateris 1ʒ. & quadratum diametri $\frac{1ʒʒ + 30ʒ + 225}{1ʒ}$. erit æquatio inter 2ʒ & $\frac{1ʒʒ + 30ʒ + 225}{1ʒ}$ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2ʒʒ. & 1ʒʒ + 30ʒ + 225. Ablato ergo 1ʒʒ vtrinque, erit æquatio inter 1ʒʒ. & 30ʒ + 225. Ex hoc numero radicem Zenſizenſicam ſic eruemus. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 15. ad cuius quadratum 225. additis 225. fit numerus 450. ad cuius radicem quadratam √ʒ 450. ſi addatur prædicta ſemiſſis 15. fiet 1ʒ. √ʒ 450 + 15. & 1℞. √ʒ (√ʒ 450 + 15) vt ad finem cap. 12. traditum eſt, atque tantum eſt latus: cuius quadrati √ʒ 450 + 15. duplum dabit quadratum diametri √ʒ 1800 + 30. ac proinde diameter erit √ʒ (√ʒ 1800 + 30) quod probatur. Nam ſi latus ex diametro ſubtrahatur, remanebit differentia √ʒ (√ʒ 1800 + 30) —— √ʒ (√ʒ 450 + 15) quæ ducta in latus √ʒ (ʒʒ 450 + 15) producit numerum 15. Conſule caput 24. vbi hæc multiplicatio expreſſe habetur. [e] *ſchol. 47. primi.*

21 *Eſt rectangulum cuius area eſt 30. & proportio laterum ſeſquialtera. Quæruntur latera, & diameter.* XXI.

PONATVR minus latus 2℞. ideoque maius 3℞. ſeſquialterum ad illud. Ex multiplicatione laterum inter ſe, fit numerus 6ʒ. area rectanguli, æqualis areæ datæ 30. Diuiſis igitur 30. per 6. fiet 1ʒ 5. & 1℞. √ʒ 5. Et quia minus latus poſuimus eſſe 2℞ erit minus latus √ʒ 20 numerus videlicet duplus radicis, numeri ſcilicet √ʒ 5. Cum ergo maius latus poſitum ſit 3℞. erit maius latus √ʒ 45. numerus ſcilicet triplus vnius radicis, quæ fuit √ʒ 5. [f] Quia vero quadrata laterum 20. & 45. ſimul æqualia ſunt quadrato diametri, erit quadratum diametri 65. & ipſa diameter √ʒ 65. quod probatur. quia ex latere √ʒ 20. in latus √ʒ 45. fit numerus √ʒ 900. hoc eſt 30, quantam videlicet poſuimus aream rectanguli. [f] *ſchol. 47. primi.*

XXII. 22 *Eſt rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quæruntur latera, ac diameter.*

PONATVR minus latus 1℞. ideoque maius 1℞ + 2. Hæc latera inter ſe multiplicata faciunt aream 1ʒ + 2℞. æqualem areæ datæ 80. Ablatis igitur 2℞. vtrobique, erit æqualitas inter 1ʒ. & 80 —— 2℞. Semiſſis numeri radicum eſt 1. ad cuius quadratum 1. additis 80. fit numerus 81. à cuius radice 9. ſi prædicta ſemiſſis 1. dematur, reliqua fiet æſtimatio 1℞. 8. pro minore latere: Maius ergo erit 10. excedens illud binario. Ex latere 8. in latus 10. fit area propoſita 80. Duo vero quadrata laterum 64. & 100. æqualia ſunt quadrato diametri, ac propterea quadratum diametri erit 164. ipſaque diameter √ʒ 164.

XXIII. 23 *Eſt rectangulum, cuius area 80. & ſumma duorum laterum 20. Quæruntur latera, & diameter.*

PONATVR vnum latus 1℞. ideoque alterum 20 —— 1℞. Hæc inter ſe multiplicata faciunt aream 20℞ —— 1ʒ. æqualem areæ datæ 80. Addito ergo 1ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒ + 80. & 20℞. Ablatiſque 80. vtrinque, inter 1ʒ. & 20℞ —— 80. Semiſſis numeri radicum eſt 10. à cuius quadrato 100. demptis 80. remanet numerus 20. ad cuius radicem √ʒ 20. addita prædicta ſemiſſe 10. fiet 1℞. √ʒ 20 + 10. maior pro vno latere. Atque eadem radix √ʒ 20. dempta ex prædicta ſemiſſe 10. reliquam faciet minorem radicem 10 —— √ʒ 20 quæ etiam habebitur, ſi latus inuentum √ʒ 20 + 10. detrahatur ex 20. ſumma laterum, vt hic vides. Latera inuenta 10 + √ʒ 20. & 10 —— √ʒ 20. inter ſe multiplicata producunt aream 80. propoſitam. quæ multiplicatio facile fiet, ſi (per doctrinam cap. 23. 20. quadratum particulæ poſterioris detrahatur ex 100. quadrato particulæ maioris, vt in ſecunda hac formula vides. Iam quadrata laterum 120 + √ʒ 8000. & 120 — √ʒ 8000. [a] æqualia ſunt quadrato diametri: ideoque quadratum diametri erit 240. & ipſa diameter √ʒ 240.

√ʒ 0 + 20	
√ʒ 20 + 10	
— √ʒ 20 + 10	

a 47. primi

10 + √ʒ 20	
10 — √ʒ 20	
80	

XIIII. 24 *Eſt rectangulum, cuius diameter 30. & ſumma laterum 42. Quæruntur latera, & area.*

PONATVR vnum latus 1℞. ac proinde alterum 42 —— 1℞. Horum quadrata 1ʒ. & 1764 —— 84 ℞ + 1ʒ. [b] æqualia ſunt quadrato diametri: atque idcirco æquatio erit inter 2ʒ + 1764 — 84℞. & 900. Et additis 84℞. vtrobique, inter 84℞ + 900. & 2ʒ + 1764. Ablatiſque 900. vtrinque, inter 84℞. & 2ʒ + 864. Et rurſum ablatis 864. vtrinque, inter 2ʒ. & 84℞ —— 864. Diuiſiſque omnibus per 2. inter 1ʒ. & 42℞ —— 432. Semiſſis numeri radicum eſt 21. à cuius quadrato 441. demptis 432. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta ſemiſſe 21. fiet radix maior 24. pro latere maiore: Eademque radix 3. dempta ex prædicta ſemiſſe 21. relinquit minorem radicem 18. pro minore latere. quod etiam habebitur, ſi latus maius inuentum 24. ſubtrahatur ex 42. ſumma laterum. Iam ex 24. in 18. fit area 432. Vbi etiam vides quadrata laterum 576. & 324. efficere 900. quadratum diametri propoſitæ 30.

b 47. primi

XXV. 25 *Eſt rectangulum, cuius area cum diametro facit 15. & differentia laterum eſt √ʒ 5. Quæruntur latera, diameter, & area.*

PONATVR minus latus 1℞ —— √ʒ 1$\frac{1}{4}$. (qui numerus √ʒ 1$\frac{1}{4}$. eſt ſemiſſis datæ differentiæ √ʒ 5.) & maius 1℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$. Ita enim hoc excedet illud differentia √ʒ 5. cum minus à maiore ſubductum relinquat √ʒ 5. vt in hac formula vides. Nam √ʒ 1$\frac{1}{4}$. & √ʒ 1$\frac{1}{4}$. debent addi, propter diuerſa ſigna + & ——. quæ additio fit, ſi √ʒ 1$\frac{1}{4}$. duplicetur, & duplato numero √ʒ $\frac{20}{4}$. hoc eſt, √ʒ 5. ſuperioris numeri ſignum + intelligatur præpoſitum, vt cap. 4. diximus. Ex latere 1℞ —— √ʒ 1$\frac{1}{4}$. in latus 1℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$. fit area 1ʒ —— 1$\frac{1}{4}$. Et quia area cum diametro facit 15. Si ex hac ſumma detrahatur dicta area 1ʒ —— 1$\frac{1}{4}$. remanebit diameter 16$\frac{1}{4}$ —— 1ʒ. cuius quadratum erit 1ʒʒ + 264$\frac{1}{16}$ —— 32$\frac{1}{2}$ʒ. quod ſerua.

1 ℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$	
1 ℞ — √ʒ 1$\frac{1}{4}$	
√ʒ 5	

Quia vero quadratum lateris minoris 1℞ —— √ʒ 1$\frac{1}{4}$. eſt 1ʒ —— √ʒ 5ʒ + 1$\frac{1}{4}$. Et quadratum lateris maioris 1℞ + √ʒ 1$\frac{1}{4}$. eſt 1ʒ + √ʒ 5ʒ + 1$\frac{1}{4}$. quæ duo quadrata conficiunt 2ʒ + 2$\frac{1}{2}$. [c] qui numerus æqualis erit quadrato diametri ſupra ſeruato, numero videlicet, 1ʒʒ + 264$\frac{1}{16}$ — 32$\frac{1}{2}$ʒ. Additis ergo 32$\frac{1}{2}$ʒ. vtrinq; erit æqualitas inter 34$\frac{1}{2}$ʒ + 2$\frac{1}{2}$. & 1ʒʒ + 264$\frac{1}{16}$. Et ablatis 2$\frac{1}{2}$. vtrobique, inter 34$\frac{1}{2}$ʒ. & 1ʒʒ + 261$\frac{9}{16}$. Et rurſum ablatis 261$\frac{9}{16}$. vtrinque, inter 34$\frac{1}{2}$ʒ —— 261$\frac{9}{16}$. & 1ʒʒ. Iam ſic. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 17$\frac{1}{4}$. à cuius quadrato 297 $\frac{9}{16}$. demptis 261$\frac{9}{16}$. remanet numerus 36. cuius radix 6. dempta ex prædicta ſemiſſe 17$\frac{1}{4}$. relinquit minorem

c 47. primi

Zenſum

Zenſum 11$\frac{1}{4}$. & minorem radicem √ʒ 11$\frac{1}{4}$. Ergo minus latus poſitum 1℞ — √ʒ $\frac{5}{4}$. erit √ʒ 11$\frac{1}{4}$ — √ʒ $\frac{5}{4}$. Maius vero, quod poſuimus 1℞ + √ʒ $\frac{5}{4}$ erit √ʒ 11$\frac{1}{4}$ + √ʒ $\frac{5}{4}$. quæ duo latera ſe mutuo excedunt numero √ʒ 5. vt in hac formula ſubtractionis videre licet, id eſt, √ʒ 5. Atque eadem duo latera inter ſe multiplicata faciunt 10. pro area, vt hic vides. Nam + √ʒ $\frac{225}{16}$. & — √ʒ $\frac{225}{16}$. ſe mutuo tollunt, & $\frac{45}{4}$ — $\frac{5}{4}$. faciunt $\frac{40}{4}$. hoc eſt, 10.

√ʒ 11$\frac{1}{4}$ + √ʒ $\frac{5}{4}$
√ʒ 11$\frac{1}{4}$ — √ʒ $\frac{5}{4}$
0 + √ʒ $\frac{20}{4}$

DEINDE quadrata laterum ſunt $\frac{50}{4}$ — √ʒ $\frac{900}{4}$. & $\frac{50}{4}$ + √ʒ $\frac{900}{4}$. quæ ſummam faciunt 25. [a] æqualem quadrato diametri (quia — √ʒ $\frac{900}{4}$. & + √ʒ $\frac{900}{4}$. ſe mutuo tollunt, & ex $\frac{50}{4}$. & $\frac{50}{4}$. fiunt $\frac{100}{4}$. id eſt, 25.) Quare √ʒ 25. nimirum 5. erit diameter, quæ cum area inuenta 10. facit ſummam 15. propoſitam.

√ʒ $\frac{45}{4}$ — √ʒ $\frac{5}{4}$
√ʒ $\frac{45}{4}$ + √ʒ $\frac{5}{4}$
+ √ʒ $\frac{225}{16}$ — $\frac{5}{4}$
$\frac{45}{4}$ — √ʒ $\frac{225}{16}$
$\frac{40}{4}$ id eſt, 10

[a] 47. pri.

QVAMVIS autem numerus Coſſicus 34$\frac{1}{2}$ʒ — 261$\frac{9}{16}$. habeat duplicem radicem, vt cap. 12. oſtendimus: tamen cum maiore radice, quæ eſt √ʒ 23$\frac{1}{4}$. (quæq; reperitur, ſi radix 6. ſupra inuenta addatur ad prædictam ſemiſſem 17$\frac{1}{4}$. Numerus enim conflatus 23$\frac{1}{4}$. erit maior Zenſus, & √ʒ 23$\frac{1}{4}$. maior radix) hic nihil efficies. quia latera eſſent √ʒ 23$\frac{1}{4}$ — √ʒ $\frac{5}{4}$. & √ʒ 23$\frac{1}{4}$ + √ʒ $\frac{5}{4}$. quæ inter ſe multiplicata facient maiorem aream, quam 10. inuenieturque maior diameter, quam 5. Quare ſumma ex area, & diametro conflata maior erit ſumma propoſita 15. Vides ergo hic mirum quid, non poſſe videlicet ſemper aſſumi vtramque radicem æquationis. quod quidem raro contingit. Itaque ſi examen inſtitutum per alteram radicum non reſpondet ænigmati, aſſumenda eſt altera radix. Vt in propoſito ænigmate, quia examen per radicem maiorem non ſuccedit, propterea minor radix aſſumpta eſt.

ALIVD exemplum ſimile. Sit differentia laterum 2. & area cum diametro faciat 58. Quæruntur rurſum latera, diameter, & area.

PONATVR minus latus 1℞ — 1. (Eſt autem 1. ſemiſſis differentiæ laterum) & maius 1℞ + 1. Ita enim hoc excedet illud binario, cum minus à maiore ſublatum relinquat 2. vt hic vides. Quadrata laterum ſunt 1ʒ — 2℞ + 1. & 1ʒ + 2℞ + 1. quæ faciunt ſummam 2ʒ + 2. [b] æqualem quadrato diametri. Ex 1℞ — 1. in 1℞ + 1. fit area 1ʒ — 1. quæ cum diametro debet facere 58. Si ergo ex 58. dicta area detrahatur, reliqua fiet diameter 59 — 1ʒ. cuius quadratum eſt 1ʒʒ + 3481 — 118ʒ. Et quia paulo ante idem quadratum inuentum eſt 2ʒ + 2. erunt duo hæc quadrata inter ſe æqualia. Additis ergo 118ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒʒ + 3481. & 120ʒ + 2. Ablatiſque 2 vtrinque, inter 1ʒʒ + 3479. & 120ʒ, & rurſum ablatis 3479 vtrobique, inter 1ʒʒ, & 120ʒ — 3479. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 60. à cuius quadrato 3600. detractis 3479. remanet numerus 121. cuius radix 11. detracta à prædicta ſemiſſe 60. relinquit 49. minorem Zenſum: ac proinde minor radix erit 7. Cum ergo minus latus poſitum ſit 1℞ — 1. & maius 1℞ + 1. erit illud 6. & hoc 8. quorum differentia eſt 2. Ex 6 in 8 fit area 48. quæ cum diametro facere debet 58. Detractis igitur 48 ex 58 reliqua fiet diameter 10. quæ etiam reperietur, ſi laterum quadrata 36 & 64 in vnam ſummam 100 colligantur, [c] quę æqualis erit quadrato diametri, ideoque diameter erit √ʒ 100, id eſt, 10.

1℞ + 1
1℞ — 1
0 + 2

[b] 47. pri.

[c] 47. pri.

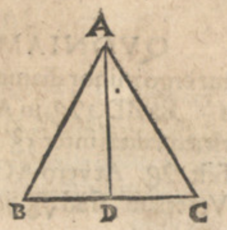
HIC etiam cum maiore radice, quę eſt √ʒ 71. (quia ſuperior radix 11. addita ad prędictam ſemiſſem 60 facit 71. maiorem Zenſum, maior propterea radix erit √ʒ 71) nihil efficies. nam latera erunt √ʒ 71 — 1. & √ʒ 71 + 1, maiora quam 6 & 8. ideoque maiorem aream continebunt, quam 48. atque eorum quadrata maius quadratum diametri conſtituent, quam 100. ac proinde diameter maior erit quam 10. atque idcirco area cum diametro maiorem ſummam conficiet, quam 58. Vbi etiam vides, non poſſe ſemper aſſumi vtramque radicem ad problematis ſolutionem, vt paulo ante diximus.

26 *Eſt rectangulum, cuius vnum latus eſt 6. & quod fit ex altero latere in diametrum eſt 80. Quæruntur alterum latus, ac diameter, vna cum area.* XXVI.

PONATVR alterum latus 1℞. Quadrata laterum 6. & 1℞, ſunt 36 & 1ʒ, [d] quorum ſumma 1ʒ + 36. æqualis erit quadrato diametri. Et quia ex latere incognito in diametrum fit numerus 80. ſi 80 diuidantur per 1℞ latus ignotum, fiet Quotiens $\frac{80}{1℞}$. ac tanta erit diameter: quippe cum ex Quotiente hoc $\frac{80}{1℞}$ in 1℞, diuiſorem producatur numerus diuiſus 80. ideoque quadratum diametri erit $\frac{6400}{1ʒ}$ æquale priori quadrato eiuſdem diametri inuento 1ʒ + 36. Hęc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1ʒʒ + 36ʒ, & 6400. Ablatis ergo 36ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1ʒʒ, & 6400 — 36ʒ. Semiſſis numeri Zenſorum eſt 18, ad cuius quadratum 324. additis 6400. fit numerus 6724. à cuius radice 82. ſi prędicta ſemiſſis 18. tollatur, relinquetur pretium 1ʒ. 64. Ergo 1℞ erit 8 latus quæſitum. Nam ex latere 6. in latus 8. fit area 48. Et quadrata laterum 36. & 64. faciunt quadratum diametri 100. ideoque diameter erit 10. Vbi vides, ex latere 8. inuento in diametrum 10 fieri 80.

[d] 47. pri.

27 *Eſt triangulum æquilaterum ABC, cuius area 60. Quæruntur latus BC, ac perpendicularis AD.*

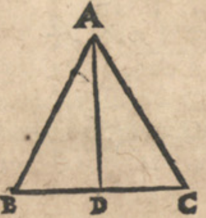


[e] QVONIAM AD, ſecat BC, bifariam, ponatur BD, 1℞, & quodlibet laterum 2℞, eritque quadratum BD, 1ʒ, & quadratum lateris AB, 4ʒ. [f] Cum ergo duo quadrata BD, AD, æqualia ſunt quadrato AB, erit quadratum AD, 3ʒ, & ipſa AD, √ʒ 3ʒ. Ex BD, 1℞, in AD √ʒ 3ʒ. fit area trianguli ABC, vt cap. 2.

[e] ſchol. 26. primi.

[f] 47. pri.

lib.4. Geom. Pract. demonſtrauimus, nimirum √ȝ 3 ȝȝ, vt hic apparet: quia 1℞. quadranda eſt, & quadrato 1ȝ. pręponendum ſignum √ȝ. atque ita √ȝ 3. ȝ. multiplicanda in √ȝ 1 ȝ. vt ad finem cap. 26. ſcripſimus. Et quia area poſita eſt 60. erit æquatio inter 60. & √ȝ 3. ȝȝ. ideoq; & inter eorũ quadrata 3600. & 3 ȝȝ. Diuiſis ergo 3600. per 3. fiet 1 ȝȝ. 1200. & √ȝȝ 1200 erit pretiũ 1℞, hoc eſt, lineę B D, ac proinde totum latus B C, erit √ȝȝ 19200. nimirum duplum √ȝȝ 1200. Vt enim dupletur √ȝȝ 1200. ducenda eſt per Zenſizenſum binarij, nimirum per 16. Quoniam autem area 60. producitur ex BD, √ȝȝ 1200. in A D, ſi 60. hoc eſt, radix √ȝȝ 12960000. diuidatnr per √ȝȝ 1200. fiet Quotiens √ȝȝ 10800. pro perpendiculari AD. quod probatur. Nam ex √ȝȝ 1200. in √ȝȝ 10800. fit √ȝȝ 12960000. hoc eſt, 60. area propoſita.



√ȝ 3 ȝ
1 ℞
———
√ȝ 3 ȝȝ

ALIVD exemplum. Sit area trianguli √ȝ 243. Poſitis iiſdem, inuenietur æqualitas inter √ȝ 243. & √ȝ 3 ȝȝ. ac proinde & inter eorum quadrata 243. & 3 ȝȝ. Diuiſis ergo 243. per 3. fiet 1 ȝȝ. 81. cuius √ȝȝ, eſt 3. quantitas lineæ BD, ac proinde totum latus BC, erit 6. Quod ſi diuidatur area √ȝ 243. per B D, quę eſt 3. hoc eſt, per √ȝ 9. fiet Quotiens √ȝ 27. pro perpendiculari AD. quod probatur. quia ex B D, 3. id eſt, ex √ȝ 9. in AD, √ȝ 27. fit √ȝ 243. area propoſita.

XXVIII. 28 *Eſt triangulum æquilaterum A B C, cuius perpendicularis A D, eſt 6. Quæruntur latus B C, & area.*

PONATVR BD, 1℞, inuenieturque A D, √ȝ 3 ȝ. vt in pręcedenti ænigmate. Et quia eadem A D, poſita eſt 6. erit æquatio inter 6. & √ȝ 3 ȝ. Si ergo diuidantur 6. per √ȝ 3. numerum maioris charaćteris ȝ. fiet 1℞. √ȝ 12. pro recta BD: quia vt ad finem cap. 26. diximus numerus √ȝ 3 ȝ, eſt numerus radicum, & non Zenſorum.

Vel ſic. Quoniam æquatio eſt inter 6. & √ȝ 3 ȝ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 36. & 3ȝ. Diuiſis ergo 36 per 3. fiet 1ȝ. 12. & 1℞. √ȝ 12. pro linea BD. Atque idcirco totum latus B C, erit √ȝ 48. duplum videlicet √ȝ 12. Area autem erit √ȝ 432. numerus ſcilicet productus ex B D, √ȝ 12. in A D, 6. id eſt, in √ȝ 36.

ALIVD exemplum. Sit perpendicularis A D, 3.

Poſitis iiſdem, reperietur æquatio inter 3. & √ȝ 3ȝ. Diuiſis igitur 3. per √ȝ 3. qui eſt numerus radicum, vt dictum eſt, fiet 1℞, √ȝ 3. pro recta BD, totumque latus BC, erit √ȝ 12.

Vel ſic, quia æquatio eſt inter 3. & √ȝ 3 ȝ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 9. & 3ȝ. Diuiſis ergo 9. per 3. fiet 1ȝ 3. & 1℞, √ȝ 3. pro recta BD, totumque latus BC, erit √ȝ 12. Area autem erit √ȝ 27. numerus videlicet productus ex BD, √ȝ 3. in AD, 3. id eſt, in √ȝ 9. quod verum eſſe, liquido conſtat, cum quadratum lateris, nimirum 12. ad quadratum perpendicularis, id eſt, ad 9. proportionem habeat ſeſquitertiam, vt vult Eucl. propoſ. 12. lib. 13.

XXIX. 29 *Eſt Rhombus A B C D, cuius area 60. & proportio diametrorum A C, B D, ſeſquiquarta. Quæruntur latus, & diametri.*

[a] *ſchol. 34. primi.* [b] *ſchol. 26 primi.*

PONATVR maior diameter AC, 5℞, ideoque minor BD, 4℞. [a] Quia igitur diametri in Rhombo ſe mutuo diuidunt bifariam, atque angulos etiam bifariam: [b] erit A E, diuidens in Iſoſcele A B D, angulum A, bifariam, ad B D, perpendicularis. Igitur cum area trianguli A B D, producatur ex A E, in B E, vt cap. 2. lib. 4. Geom. Pract. oſtendimus; & area trianguli C B D, ex CE, hoc eſt, ex A E, in D E; producetur tota area Rhombi ex AE, in BD. Eodemque modo eadem area producetur ex BE, in AC. Fit autem ex BE, 2℞. in AC, 5℞, numerus 10ȝ. Igitur æquatio erit inter 60. & 10 ȝ, quod vterque numerus ſit area Rhombi. Diuiſis ergo 60. per 10. fiet 1ȝ, 6 & 1℞, √ȝ 6. Igitur AC, poſita 5℞, erit √ȝ 150. Et BD, poſita 4℞, erit √ȝ 96. quod probatur, quia ex BE, √ȝ 24. (ſemiſſe diametri B D, √ȝ 96) in A C, √ȝ 150. fit area Rhombi √ȝ 3600. id eſt, 60. Atque ita cognita eſt vtraque diameter.



[c] *1. ſecun.*

Deinde quia AE, E B, ſunt √ȝ 37½. & √ȝ 24. & earum quadrata 37½. & 24. quæ ſimul faciunt 61½. ſummam [d] æqualem quadrato lateris A B; erit latus AB, √ȝ 61½.

[d] *47. pri.*

XXX. 30 *Eſt Rhombus A B C D, cuius area 60. & diuiſa maiore diametro A C, per minorem B D, Quotiens eſt 1¼. Quæruntur diametri, & latus.*

QVONIAM ex BE, in AC, fit area Rhombi; fiet ex BD, in AC, duplum areæ, nimirum 120. Ponatur ergo minor diameter B D, 1℞, ideoque maior diameter A C, 1¼ ℞. vt diuiſa per BD, faciat Quotientem 1¼. Ex BD, 1℞, in AC, 1¼℞, fit numerus $\frac{5ȝ}{4}$. qui æqualis erit 120. Per multiplicationem ergo in crucem, erit æqualitas inter 5ȝ. & 480. Diuiſis igitur 480. per 5 fiet 1ȝ, 96. & 1℞, √ȝ 96. pro diametro B D, quę poſita fuit 1℞. At vero AC, poſita 1¼℞. erit √ȝ 150. quia √ȝ 96. multiplicata per ¼. id eſt, per √ȝ $\frac{25}{16}$. facit √ȝ 150. Vel etiam, ſi ad √ȝ 96. adiiciatur ¼. nimirum √ȝ 6. fit ſumma √ȝ 150. Atque ita inuentæ ſunt diametri B D,

Ac √ȝ

√ȝ96. & √ȝ150. quod probatur. quia ex √ȝ24. ſemiſſe diametri BD, in √ȝ150. diametrum AC, fit area Rhombi √ȝ3600. hoc eſt, 60. Deinde quia AE, EB, ſunt √ȝ37 $\frac{1}{2}$. & √ȝ24. [a] facient earum quadrata 37 $\frac{1}{2}$. & 24. ſummam 61 $\frac{1}{2}$. æqualem quadrato lateris AB: proptereaque latus AB, erit √ȝ61 $\frac{1}{2}$. [a] *47. primi*

APPENDIX.

HÆC ſunt, ſtudioſe Lector, quæ de regula Algebræ, eiuſque explicatione ſcribenda mihi viſa ſunt: qui plura requirit, ab alijs huius regulæ ſcriptoribus petat. Non grauabor tamen appendicis loco ſubiungere quatuor ænigmata Ptolemæi ex libro primo Epigrammatum græcorum deſumpta, & quintum aliud Euclidis, aſcriptis ipſis Epigrammatibus græcis, cum eorum interpretatione, non quidem de verbo ad verbum, ſed vt res clarior fieret, expreſſo illorum ſenſu dumtaxat. Ænigmata Ptolemæi ſunt hæc.

---

1. DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM illa auri talenta appendat. I.

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέθω σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων,
Ημισυ μὲν χρυσοῖο χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις, καὶ δεκάτην μοῖραν ἔθηκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα. καὶ τέχνη, δῶρον Ἀριστοδίκου.

PALLAS ego ſum, malleo hunc in modum fabrefacta: ſed aurum munus eſt iuuenum, qui in ſtudio verſantur Poetices. Dimidiam quidem auri partem contulit Chariſius: Octauam vero Theſpis: Decimam dehinc Solon: Et vigeſimam Themiſon: Reliqua autem nouem talenta, & mercedem item, quæ artifici debebatur, contulit Ariſtodicus.

Quæritur de toto pondere ſtatuæ, & quot quiſque talenta contulerit.

PONATVR pondus ſtatuæ 1℞ talentorum auri. Ergo Chariſius contulit $\frac{1}{2}$℞. tal. Theſpis $\frac{1}{8}$℞. Solon $\frac{1}{10}$℞. Themiſon $\frac{1}{20}$℞ & Ariſtodicus 9. talenta, quæ omnes partes conficiunt $\frac{31}{40}$℞ + 9. ſummam æqualem 1℞. Ablatis igitur $\frac{31}{40}$℞ vtrinque, æqualitas erit inter 9. & $\frac{9}{40}$℞. Diuiſis igitur 9 per $\frac{9}{40}$. fiet 1℞. 40 Atque tot talentorum fuit ſtatua. Chariſius ergo contulit 20. talenta, nimirum ſemiſſem totius ponderis. Theſpis 5. talenta, octauam ſcilicet partem. Solon 4. talenta, nimirum partem decimam. Themiſon denique 2. talenta, partem videlicet vigeſimam, quæ omnes partes cum 9. talentis, quæ contulit Ariſtodicus, conficiunt 40. talenta.

---

2. DE AVGEÆ ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint. II.

Δεύτερον.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκίδαο.
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος, ὃς δ᾽ ἀπάμειπτο,
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶνδε,
Μοίρη δ᾽ ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ᾽ ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ᾽ ὅρον,
Ἀμφὶ δ᾽ ἄρ᾽ Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα,
Λοιπὰς δ᾽ αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

AVGEAM interrogauit generoſus Hercules de multitudine armentorum, cui ille reſpondit. Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum paſcitur: octaua autem circa Saturni collem: cæterum duodecima procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: At vigeſima eorum pars circa Elidem paſcitur: trigeſimam vero in Arcadia ego reliqui: Reliqua autem quinquaginta numero armenta videas ipſe.

Quæſtio eſt de numero boum, & quotnam in ſingulis locis fuerint.

PONATVR numerus boum 1℞. Ergo iuxta fluuium Alpheum fuerunt $\frac{1}{2}$℞ boum: Et circa collem Saturni $\frac{1}{8}$℞. At iuxta Taraxippi extrema $\frac{1}{12}$℞. Circa vero Elidem montẽ $\frac{1}{20}$℞. Et in Arcadia $\frac{1}{30}$℞: & apud Augeam 50. boues. quæ omnes partes conficiunt $\frac{19}{24}$℞ + 50. ſummã æqualem 1℞. Ablatis igitur $\frac{19}{24}$℞ vtrobiq;, æqualitas erit inter 50. & $\frac{5}{24}$℞. Diuiſis ergo 50 per $\frac{5}{24}$. fiet 1℞. 240. pro numero omnium boum, quorum

quorum ſemiſſis 120. fuit circa fluuium Alpheum: & 30. boues, nimirum $\frac{1}{8}$. circa collem Saturni: Et $\frac{1}{12}$. nimirum 20. iuxta Taraxippi extrema: At iuxta Elidem montem 12. nimirum $\frac{1}{20}$. in Arcadia denique boues 8. pars videlicet $\frac{1}{30}$. Atque omnes hi boues cum 50. qui prope Augeam fuerunt, faciunt 240.

III.
3. LEONIS ÆNEI CANALES.

Τρίτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιὰ
Καὶ στόμα σὺν δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρατῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, ϗ πισύρεσσι θέναρ.
Αρκιον ἐξ ὥραις πλῆσαι στόμα. ἐν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα; ϗ γλῆναι, ϗ θέναρ, εἰπὲ πόσον:

ÆNEVS ego ſum Leo: canales vero mihi ſunt oculi duo: & os cum palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem, dexter quidem oculus duobus diebus: ſiniſter vero tribus: Et palma quatuor diebus: Porro ſex horis os implere eum poteſt. Hæc igitur ſimul omnia & os, & oculi, & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant?

PONATVR pro tempore 1℞. horarum. atque dicatur.

Hor.	Crater.	Hor.	Crater.
48			$\frac{1}{48}$ ℞
72	1	1℞?	$\frac{1}{72}$ ℞
96			$\frac{1}{96}$ ℞
6			$\frac{1}{6}$ ℞

Si 48. horis impletur 1. Crater, in 1℞ horarum implebitur $\frac{1}{48}$ ℞ Crateris: & ſic de reliquis, vt in regula Trium quater adhibita vides. Atque omnes hæ partes faciunt $\frac{61}{288}$ ℞. vnius Crateris, æquales 1. Crateri. Si igitur 1. diuidatur per $\frac{61}{288}$ fiet 1℞. $\frac{288}{61}$. hoc eſt, Horæ $4\frac{44}{61}$. quibus Crater implebitur. quod probatur. vt hic vides.

Hor.	Crater.	Hor.	Crater.
48			$\frac{6}{61}$
72	1	$4\frac{44}{61}$?	$\frac{4}{61}$
96			$\frac{3}{61}$
6			$\frac{48}{61}$

Nam ſi oculus dexter 48. horis implet 1. Craterem, horis $4\frac{44}{61}$. implebunt $\frac{6}{61}$. Crateris vnius, &c. atque omnes iſtæ partes Crateris conficiunt vnum craterem.

IV.
4. DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS, ac matris ipſorum Antiopes.

Τέταρτον.

Αμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χ' ὠ ξυνώαιμος, ἣν δέ μου λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦδ' Αμφίονος
Ἐξ πάντ' ἀνδρῶν, μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

AMBO quidem nos viginti minas appendimus, Zethus pariter, & meus conſanguineus. At ſi de meis minis tertiam partem: minarum vero Amphionis quartam ſumpſeris, ſex in ſumma inuentis, matris pondus reperies. Quæſtio eſt, quot minas tum Zethus, tum Amphion eius conſanguineus appenderit.

PONE pro Zetho 1℞ minarum: ideoque pro Amphione minas 20 − 1℞. facieſque tertiam partem Zethi $\frac{1}{3}$ ℞, & quartam partem Amphionis 5 − $\frac{1}{4}$ ℞, quæ ſummam faciunt 5 + $\frac{1}{12}$ ℞, æqualem 6. Ablatis igitur 5. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{12}$ ℞. & 1. Diuiſa ergo 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1℞. 12. atque tot minarum fuit ſtatua Zethi. Amphionis vero 8. & Antiopes 6. quæ minæ omnes faciunt 26.

V.
5. EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Εὐκλείδου Γεωμετρικόν.

Ἡμίονος ϗ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον,
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη:

Μῆτερ

Μῆτερ τί κλαίουσ᾽ ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη:
Εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης: διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπίϊστορ.

IBANT Mulus, & Aſina vinum portantes: Aſina autem ex dolore ponderis ſui ingemiſcebat. Qua re viſa, Mulus grauiter ingemiſcentem Aſinam ſic interrogauit. Mater cur ita lamentaris, cur puellæ inſtar lacrimas fundis? Menſuram mihi vnam ſi dederis, duplo, quam tu, plus ſuſtulero: ſin vero tu à me vnam acceperis, idem plane, quod ego, pondus feres. Menſuram itaque peritiſſime Geometer dicas volo.

Alia verſio.

Mulæ, Aſinæque duos imponit ſeruulus vtres
Impletos vino, ſegnemque vt vidit Aſellam
Pondere defeſſam veſtigia figere tarda
Mula rogat: Quid chara parens cunctare, gemisque?
Vnam ex vtre tuo menſuram ſi mihi reddas.
Duplum oneris tunc ipſa feram: Sed ſi tibi tradam
Vnam menſuram, fient æqualia vtrique
Pondera. Menſuras dic docte Geometer iſtas.

Alia Verſio.

Mulus portabat vinum comitatus Aſella,
Hæc oneris queritur pondera vaſta ſui.
Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,
Cur adeo lachrymis lumina mæſta fluunt?
Mollities teneras, mater, decet illa puellas,
Quas premit inſuetus, debilitatque labor.
Vnam menſuram, ſi noſtros fundis in vtres,
Ipſe tui vini pondera dupla feram:
Sin vnam contra noſtro de faſce leuabis
Partem, tunc æquum pondus vterque feret.
Dic mihi menſuras, ô docte Geometer iſtas,
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

PONE pro menſuris muli 1℞. ac proinde pro menſuris aſinæ $\frac{1}{2}$℞ $+ 1\frac{1}{2}$. Ita enim ſi mulo dederit vnam menſuram, habebit mulus 1℞ $+ 1$. quod pondus duplum erit reliquo ponderi aſinæ, nimirum $\frac{1}{2}$℞ $+ \frac{1}{2}$. At ſi mulus aſinæ det 1. menſuram, erit reliquum pondus muli 1℞ $- 1$. æquale ponderi aſinæ, quod tunc erit $\frac{1}{2}$℞ $+ 2\frac{1}{2}$. Addatur 1. vtrobique, fietque æquatio inter 1℞. & $\frac{1}{2}$℞ $+ 3\frac{1}{2}$. Ablataque $\frac{1}{2}$℞. vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{1}{2}$℞. & $3\frac{1}{2}$. Diuiſis igitur $3\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. fiet 1℞ $\frac{14}{2}$. hoc eſt, 7. pro menſuris muli. Aſina ergo habens $\frac{1}{2}$℞ $+ 1\frac{1}{2}$. portabit menſuras $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. nimirum 5. quod probatur. Nam ſi mulo det aſina 1. menſuram, habebit mulus 8. menſuras, quæ duplæ ſunt quatuor menſurarum, quæ aſinæ ſuperſunt. At ſi mulus det aſinæ menſuram 1. portabit vterque 6. menſuras.

INDEX

CAPITVM QVÆ IN ALGEBRA CONTINENTVR.

PROOEMIVM, *De Algebræ præſtantia.* 3
CAP. I. *De Inuentore Algebræ, ac nomine.* 4
II. *De Numeris Coſſicis, ſiue Denominatis.* 5
III. *De Numeratione Coſſicorum numerorum.* 9
IV. *De Additione, & Subtractione numerorum Coſſicorum.* 9
V. *De Multiplicatione, & Diuiſione numerorum Coſſicorum.* 13
VI. *De numeris fictis, ſiue minoribus, quam nihil.* 16
VII. *De Fractionibus numerorum Coſſicorum.* 17
VIII. *De Regula Algebræ.* 20
IX. *De Aequationum varietate.* 21
X. *De reductione Aequationum.* 22
XI. *De diuiſione, quam præcipit Regula Algebræ.* 24
XII. *De extractione radicum, cuius mentionem facit Regula Algebræ.* 24
XIII. *De multitudine Regularum Algebræ, quam alij auctores introducunt.* 33
XIV. *Quæſtio propoſita, vtrum poſſibilis ſit, necne, an vero inepta ac nugatoria, quo pacto ex ipſa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoſcatur.* 34
XV. *De ſecundis radicibus.* 36
XVI. *De numeris irrationalibus, ſiue ſurdis.* 38
XVII. *De reductione radicum ſimplicium ad eandem denominationem.* 39
XVIII. *De multiplicatione, ac diuiſione radicum ſimplicium.* 41
XIX. *De Additione radicum ſimplicium.* 44
XX. *De Subtractione radicum ſimplicium.* 47
XXI. *Inter duos numeros quotlibet medios proportionales conſtituere.* 48
XXII. *De Additione, ac ſubtractione numerorum irrationalium compoſitorum.* 49
XXIII. *De Multiplicatione, ac diuiſione numerorum irrationalium compoſitorum, & diminutorum.*
XXIV. *De Radicibus numerorum irrationalium compoſitorum, vel diminutorum, quas alij Vniuerſales dicunt: Et de earundem Algorithmo.* 58
XXV. *De minutijs numerorum irrationalium, ac de earundem Algorithmo.* 65
XXVI. *De numeris irrationalibus, ſiue Denominatis, vna cum eorum Algorithmo.* 66
XXVII. *De Binomiis, atque Apotomis, Reſiduiſue.* 65
XXVIII. *De extractione radicum ex Binomijs, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. diſputat.* 72
XXIX. *Aenigmata varia numerorum abſtractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos numeros occurrit: quæ quidem ſimplex æquatio dicitur.* 79
XXX. *Aenigmata varia numerorum abſtractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis eſt, occurrit: quæ quidem compoſita æquatio dicitur.* 129
XXXI. *Aenigmata varia numerorum ad res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad ſecundas radices pertinentibus.* 145
XXXII. *Aenigmata varia ad figuras Geometricas pertinentia.* à pag. 169. vſque ad finem.

FINIS.